

## Appendix bij Meetkunde – eenvoudig of toch niet

DICK KLINGENS

december 2019

In der Mathematik ist die Kunst Fragen zu stellen wertvoller als das Lösen der Problemen.  
-- Georg Cantor (1845–1918)

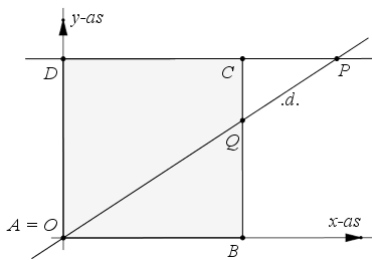
### A1. De vierdegraads vergelijking, analytisch bekeken

**Opgave.** In een  $xOy$ -assenstelsel is een eenheidsvierkant  $ABCD$  gegeven, waarvan  $A \equiv O = (0, 0)$  en  $B = (1, 0)$ ; zie figuur a1.

Op de lijn  $CD$  ligt een punt  $P$ . De lijn  $AP$  snijdt  $BC$  in het punt  $Q$  zó, dat de lengte van  $PQ$  gelijk is aan een gegeven getal  $d$ .

- Geef een vergelijking in  $x$  waaraan de  $x$ -coördinaat van het punt  $P$  voldoet.

figuur a1



**Oplossing.** Zij  $P = (p, 1)$ . Dan zijn, met  $p \neq 0$  (zie opmerking 1), de vergelijkingen van de rechte lijnen die  $Q$  als snijpunt hebben:

- $AP :: y = \frac{1}{p}x$
- $BC :: x = 1$

En daaruit volgt dat  $Q = (1, \frac{1}{p})$ , zodat:

- $PQ^2 = (p-1)^2 + (1-\frac{1}{p})^2 = d^2$

Uitgewerkt:

- $p^2 + 1 - 2p + 2 + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} - d^2 = 0 \Rightarrow p^4 - 2p^3 + (2-d^2)p^2 - 2p + 1 = 0$

De  $x$ -coördinaat van het punt  $P$  is dus een wortel van de vierdegraads vergelijking:

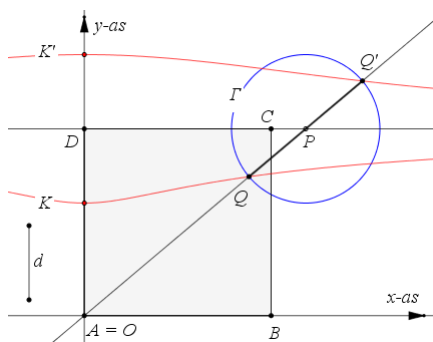
(1.1)...  $x^4 - 2x^3 + (2-d^2)x^2 - 2x + 1 = 0$   $\diamond$

**Opmerkingen.**

- Als  $p = 0$  is, valt de lijn  $AP$  samen met de  $y$ -as. Dan is er dus geen snijpunt met  $BC$ .
- Als  $Q = (1, p)$  is, dan is  $P = (\frac{1}{p}, 1)$ . Hieruit blijkt dat ook de  $y$ -coördinaat van het punt  $Q$  aan vergelijking (1) voldoet.
- Zie paragraaf A3 met betrekking tot de symmetrie bij de coëfficiënten in (1.1).  $\diamond$

### A2. De conchoïde, een schulplijn

figuur a2



In een  $xOy$ -assenstelsel is weer een eenheidsvierkant  $ABCD$  gegeven; ook nu is  $A \equiv O$  en  $B = (1, 0)$ .

Op de lijn  $CD$  ligt het *variabele* punt  $P$ .

De lijn  $AP$  (de neusisliniaal) snijdt de cirkel  $\Gamma = (P, d)$  waarbij  $d$  constant is, in de punten  $Q, Q'$ .

De meetkundige plaatsen  $K, K'$  van de punten  $Q, Q'$  vormen samen de *conchoïde*<sup>[1]</sup>  $\Omega = K \cup K'$ , als  $P$  de lijn  $CD$  doorloopt.

Stel  $P = (\lambda, 1)$ . Dan zijn de vergelijkingen van de objecten die  $Q, Q'$  bepalen:

$$S \dots \begin{cases} OP :: y = \frac{1}{\lambda}x \\ \Gamma :: (x-\lambda)^2 + (y-1)^2 = d^2 \end{cases}$$

De coördinaten van de punten  $Q, Q'$  voldoen aan beide vergelijkingen van het stelsel  $S$ , dus ook aan een combinatie van die vergelijkingen, waarin  $\lambda$  niet voorkomt. Eliminatie van  $\lambda$  geeft:

- $\lambda = \frac{x}{y}$ , zodat  $(x - \frac{x}{y})^2 + (y-1)^2 = d^2$  of:  $\frac{x^2}{y^2}(y-1)^2 + (y-1)^2 = d^2$ .

Dan is een vergelijking van de kromme:

$$(2.1)... \boxed{(x^2 + y^2)(y-1)^2 = d^2 y^2}$$

Opmerkingen.

1. Het punt A in figuur a2, het draaipunt van de liniaal, is de *pool* van de conchoïde. De lijn CD is hier de *asymptoot* van de krommen K en K'.
2. Uit vergelijking (2.1) volgt voor  $x = 0, y \neq 0$  dat  $(y-1)^2 = d^2$  is. De snijpunten van  $\mathcal{Q}$  met de y-as zijn dus de punten  $(0, 1-d)$  en  $(0, 1+d)$ . Dit komt overeen met de stand van de neusisliniaal als deze samenvalt met de lijn AD.
3. Zie verder ook paragraaf A5, De parametervorm van de conchoïde.  $\diamond$

### A3. Een “palindromische” vergelijking

De vergelijking van de vierde graad:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

heeft van links naar rechts als coëfficiënten  $a, b, c, b, a$ ; dit is een “palindromische” volgorde (ook van rechts naar links te lezen). Daarbij is uiteraard  $a \neq 0$ , zodat  $x = 0$  geen oplossing kan zijn. Deling door  $x^2$  is dus zonder meer toegestaan:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow a(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) - 2a + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a(x + \frac{1}{x})^2 + b(x + \frac{1}{x}) + (c - 2a) = 0}$$

Substitutie met  $x + \frac{1}{x} = y$  doet deze vergelijking overgaan in een tweedegraads vergelijking:

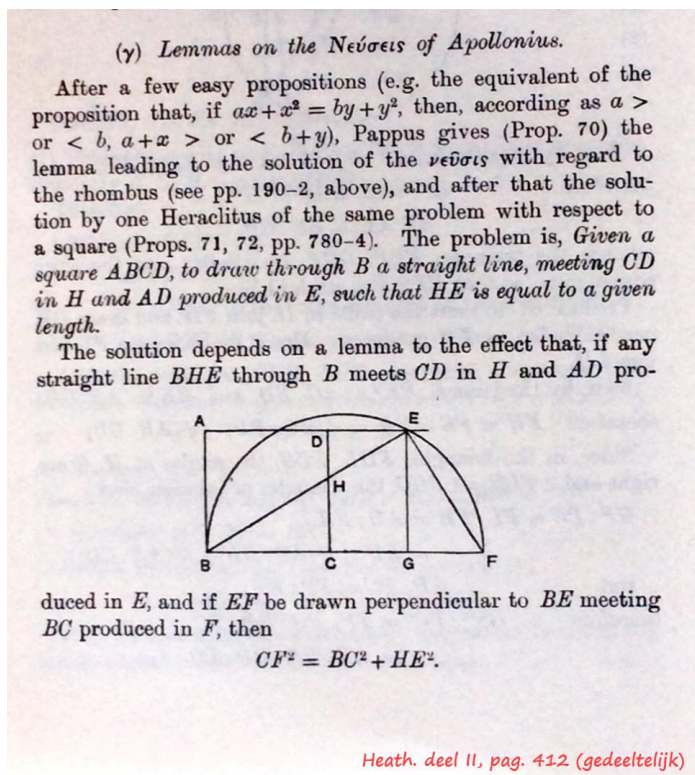
$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0$$

Gegeneraliseerd, met  $k \neq 0$ , gaat de vergelijking  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + k \cdot bx + k^2 \cdot a = 0$  met  $x + \frac{k}{x} = y$  over in:

$$\boxed{ay^2 + by + (c - 2ak) = 0}$$

### A4. Pappos van Alexandrië (290–350)

figuur a3



De Griekse wiskundige Pappos heeft veel van het werk van zijn voorgangers becommentarieerd, op allerlei punten aangevuld en uitgebreid. Hij toonde onder meer aan dat de neusis-constructie kan worden teruggebracht tot een doorsnijding van twee kegelsneden.

Hij heeft zich ook bezig gehouden met de “conchoïde”, die naar hij schreef in deel IV van zijn hoofdwerk, *Synagoge* (verzameling), door Nikomedes ( $\pm 280 - \pm 210$  v. Chr.) was gevonden.

De in het artikel beschreven constructie (zie de figuur hiernaast) wordt door Pappos ook in dat boek behandeld, namelijk in propositie 70 in deel VII.<sup>[2]</sup>

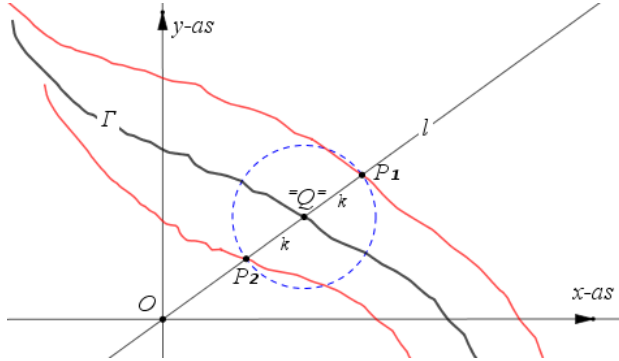
Opmerking. In figuur a3 staan twee Griekse woorden: Νεύσεις (*neύseis*) is het meervoud van νέυσις (*neύsis*). De betekenis van “neusis” in een wiskundige context is dan “inpassing”.  $\diamond$

### A5. De parametervorm van de conchoïde

**Parametervorm.** In het euclidische vlak is in een  $xOy$ -assenstelsel een willekeurige kromme  $\Gamma$  gegeven via de parametervergelijking(en) voor  $t \in \mathbb{R}$  (zie figuur a4):

$$\Gamma :: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

figuur a4



De lijn  $l$  gaat door  $O$  en door een op  $\Gamma$  gelegen punt  $Q$ .

Dat punt doorloopt via de variabele  $t$  de kromme. Op  $l$  liggen ook de punten  $P_1, P_2$  waarvoor  $|P_1Q| = |P_2Q| = k$ ;  $k$  is een positieve constante.

Dan is:

$$l :: y = mx \text{ waarbij } m = \frac{g(t)}{f(t)}$$

Voor de coördinaten van elk punt  $P_j$  ( $j = 1, 2$ ) schrijf ik nu  $P = (x, y)$ , zodat voor de punten op  $l$  geldt:

$$y - g(t) = m(x - f(t))$$

Verder volgt uit voor  $|PQ| = k$ :

$$(x - f(t))^2 + (y - g(t))^2 = k^2$$

Deze relatie leidt met de daaraan voorafgaande tot:

$$(x - f(t))^2 + m^2(x - f(t))^2 = k^2 \Rightarrow (1 + m^2)(x - f(t))^2 = k^2 \Rightarrow (x - f(t))^2 = \frac{k^2}{1 + m^2}$$

Dus geldt voor de  $x$ -coördinaat van  $P$ :  $x = f(t) \pm \frac{k}{\sqrt{1 + m^2}}$ .

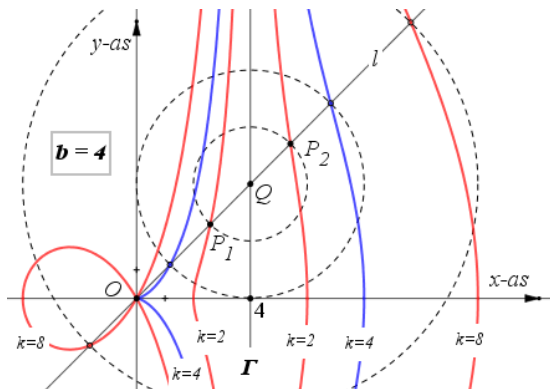
Met  $m = \frac{g(t)}{f(t)}$  is dat:  $x = f(t) \pm \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{g(t)}{f(t)}\right)^2}}$ .

Zodat:  $x = f(t) \pm \frac{k \cdot f(t)}{\sqrt{f^2(t) + g^2(t)}}$  en  $y = g(t) \pm \frac{k \cdot g(t)}{\sqrt{f^2(t) + g^2(t)}}$ .

Beide uitdrukkingen vormen samen de parametervorm<sup>[3]</sup> van de meetkundige plaats van de punten  $P_j$ . Deze verzameling punten is een zogenoemde  $(\Gamma, k)$ -conchoïde.

**Conchoïde.** Is  $\Gamma$  een rechte lijn, dan geeft eenzelfde proces als hierboven een “gewone” conchoïde. Het is gebruikelijk de rechte lijn (asymptoot) evenwijdig te kiezen aan de  $y$ -as, zoals in figuur a5a, waarin voor  $k = 2, 4, 8$  de (dubbele) krommen zijn weergegeven.

figuur a5a



Met de vergelijking  $x = b$  voor de rechte lijn  $\Gamma$  (dat was hierboven de kromme) is  $Q = (b, t)$ .

Daarmee is de parametervorm van de conchoïde:

$$K :: x = b \pm \frac{k \cdot b}{\sqrt{b^2 + t^2}}, \quad y = t \pm \frac{k \cdot t}{\sqrt{b^2 + t^2}}$$

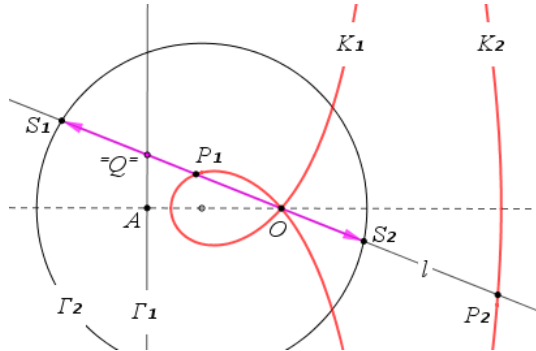
**Opmerkingen.**

1. Met  $b = \text{afstand}(O, \Gamma)$  geldt:

- als  $k < b$ , dan heeft  $K$  een buigpunt;
- als  $k = b$ , dan heeft  $K$  een keerpunt in  $O$ ;
- als  $k > b$  dan heeft  $K$  een “lus” in  $O$ .

2. Een conchoïde kan ook ontstaan als een *bijzondere cissoïde*. De laatste kromme (het is eigenlijk een hele familie) wordt onder meer bepaald door twee vaste krommen  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ , waarbij de volgorde van gebruik (min of meer) vastligt: van  $\Gamma_1$  naar  $\Gamma_2$ .<sup>[4]</sup>

figuur a5b



In het geval van een conchoïde is  $\Gamma_1$  een *rechte lijn* en  $\Gamma_2$  een *cirkel*. De pool van de conchoïde is een (vast) punt  $O$  van de middellijn van  $\Gamma_2$  die loodrecht staat op  $\Gamma_1$ ; zie figuur a5b.

De liniaal  $OQ$  ( $Q$  is variabel op  $\Gamma_1$ ) snijdt  $\Gamma_2$  in de punten  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ). De punten  $P_j$  waarvoor  $|OP_j| = |QS_j|$ , zijn dan de “schrijvers” van de meetkundige plaatsen  $K_j$ .  $\diamond$

## A6. Verdubbeling van de kubus volgens Nikomedes

### A6.1. Inleiding

Het probleem van het ‘verdubbelen van de kubus’ staat in de wiskunde ook wel bekend als het ‘Delisch probleem’.

Het probleem luidt: construeer de ribbe van een kubus die een twee keer zo grote inhoud heeft als die van een gegeven kubus.

Het probleem is een van de drie wiskundeproblemen uit de klassieke oudheid. De oude Grieken poogden de constructie uit te voeren met behulp van ‘hun’ constructiemiddelen: de passer en de liniaal. Maar het bleek daarmee niet te kunnen.

Vele eeuwen later werd bewezen dat de oplossing met p&l niet mogelijk is (1837, Pierre Wantzel).

Echter, er zijn wel andere middelen om de constructie uit te voeren. Zo heeft **Nikomedes** ( $\pm 280$ – $\pm 210$  v.Chr.) de **conchoïde**, een bijzondere kromme lijn, ontdekt. Naar verluidt – Pappos schreef er over, en ook Proklos in zijn commentaar op (de *Elementen* van) Euclides – heeft Nikomedes het Delisch probleem (en ook het probleem van de trisectie van de hoek) opgelost met behulp van “zijn” conchoïde.

### A6.2. Een oplossing van het Delisch probleem

Stel de gegeven kubus heeft de ribbe  $a$ . Dan met een lijnstuk (met lengte)  $x$  worden gezocht zodat:

$$x^3 = 2a^3 \text{ of } x = a\sqrt[3]{2}$$

Van het getal  $\sqrt[3]{2}$  kan bewezen worden dat het *niet-euclidisch* is: niet te construeren met p&l.

In hetgeen volgt wordt uitgegaan van twee gegeven lijnstukken  $a$  en  $b$  en worden de lijnstukken  $x$  en  $y$  (als middelevenredigen) zó geconstrueerd, dat:

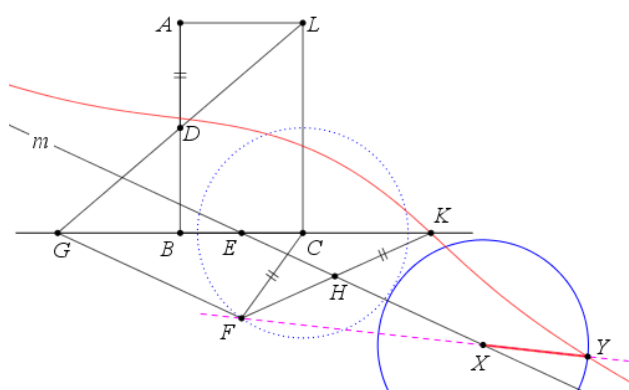
$$a : x = x : y = y : b$$

Immers dan is:  $x^2 = ay$  en  $xy = ab$ ; grafisch een parabool en een hyperbool.

Daaruit volgt dan eenvoudig dat  $x^3 = axy = a^2b$ . Als dan vervolgens  $b = 2a$  genomen wordt, is:  $x^3 = 2a^3$ .

Ik volg nu verder de Engelse tekst in een (door mij op enkele plaatsen aangepaste vertaling van de) vertaling van T. Heath.<sup>[5]</sup> Niet duidelijk is overigens of de tekst van Heath op zijn beurt weer de vertaling is van de tekst van Pappos of van die van Eutokios van Askalon ( $\pm 480$ – $\pm 540$ ).

figuur a6



- Zijn  $AB (= a)$ ,  $BC (= b)$  twee lijnstukken waarbij de middelevenredigen moeten worden gevonden.
- Completeer dan het parallellogram  $ABCL$ .  $D$ ,  $E$  zijn de middens van  $AB$  en  $BC$ .
- Teken  $LD$  en verleng het lijnstuk tot het punt  $G$  op  $BC$ .
- Teken  $EF$  loodrecht op  $BC$ , zo, dat  $CF = AD$ .

- Teken  $GF$  en teken een lijn  $m$  door  $C$  ermee evenwijdig.
- Teken dan door  $F$  een lijn die  $m$  in  $H$  en het verlengde van  $EC$  in  $K$  snijdt, zo, dat  $HK = CF = AD$ . Dit kan worden gedaan met een **conchoïde** waarvan  $F$  de ‘pool’ is en  $FK$  de ‘liniaal’ en met een ‘afstand’ die gelijk is aan  $AD$  (of aan  $CF$ ).

[De constructie van de conchoïde is uitgevoerd met een lijn door  $F$  en een op  $m$  gelegen punt  $X$ , waarbij dan  $XY = CF$ ; dk]

- Deze conchoïde snijdt het verlengde van  $EC$  in het punt  $K$ .
- Dan verbinden we  $K$  en  $F$  en bepalen het snijpunt  $H$  van  $m$  en  $KF$ , en uit de eigenschap van de conchoïde volgt dan dat  $HK = CF = AD$ .
- De lijn  $KM$  snijdt het verlengde van  $BA$  in  $M$ .

### (6.1) $CK$ en $MA$ zijn dan de gezochte middelevenredigen.

Er geldt, omdat  $E$  het midden is van  $BC$  en  $BC$  verlengd is naar  $K$ :

$$BK \cdot KC = (EK + BE)(EK - BE) = (EK + CE)(EK - CE) = EK^2 - CE^2$$

of

$$(6.2) \quad BK \cdot KC + CE^2 = EK^2$$

Tellen we in (2) aan beide kanten  $EF^2$  op, dan vinden we (volgens de stelling van Pythagoras):

$$(6.3) \quad BK \cdot KC + CF^2 = KF^2$$

Ook is  $MA : AB = ML : LK = BC : CK$  (evenwijdige lijnen).

Maar  $AB = 2AD$  en  $BC = \frac{1}{2}GC$ , zodat:

$$MA : 2AD = \frac{1}{2}GC : CK$$

$$MA : AD = GC : CK = FH : HK$$

en dus ook:

$$(MA + AD) : AD = (FH + HK) : HK$$

$$MD : AD = FK : HK$$

Blijkens de constructie is  $AD = HK$ , en dus is ook  $MD = FK$ , waaruit:

$$MD^2 = FK^2$$

Ook is:

$$(6.4) \quad MD^2 = BM \cdot MA + DA^2, \text{ immers } (MD + DB)(MD - DA) = BM \cdot MA, \text{ met } DB = DA.$$

En eerder vonden we in (2):

$$(6.5) \quad BK \cdot KC + CF^2 = KF^2$$

zodat uit (4) en (5) volgt:

$$BM \cdot MA + DA^2 = BK \cdot KC + CF^2$$

Maar  $DA = CF$ , zodat  $BM \cdot MA = BK \cdot KC$

of:

$$CK : MA = BM : BK = LC : CK$$

En ook geldt:

$$BM : BK = MA : AL$$

zodat:

$$LC : CK = CK : MA = MA : AL$$

of:

$$AB : CK = CK : MA = MA : BC$$

Waarmee het in (6.1) gestelde is aangetoond.

## A7. Noten

[0] Deze appendix hoort bij een artikel dat in december 2019 is aangeboden aan de redactie van het wiskundetijdschrift *Euclides*, het verenigingsorgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW).

[1] *Etymologie*. Conchoïde < Gr. κογχοειδής (koncho-eidēs), (een lijn) gelijkend op een schelp; κογχός (konchos), schelp. Een vroeger gebruikt woord voor deze lijn is *schulplijn*.

- [2] T. HEATH (1921): *A history of Greek mathematics*. New York (USA): Dover Publications, reprint 1981; volume II, pp. 412-416.
- [3] Zie bijvoorbeeld:  
L.D. LAWRENCE (1972): *A catalog of special plane curves*. New York: Dover Publications; pp. 49-51, 137-139.
- [4] Zie voor een overzicht van de familie cissoïdes:  
D. KLINGENS (2001): *Cissoïde van Diokles*. Op de website van de auteur:  
<http://www.pandd.demon.nl/cissoide.htm>
- [5] Zie [2]; volume I, pp. 260-262.

### Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuariel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroeps-onderwijs en schoolleider.

Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eerste eindexamen in 2018).

E-mailadres: [dklingens@gmail.com](mailto:dklingens@gmail.com) -- website: <http://www.pandd.nl>



Copyright © 2019 PandD Math&Text – Rotterdam (NL)



Dit werk valt onder een Creative Commons Naamsvermelding – NietCommercieel 4.0 Internationaal-licentie.

Zie · <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.nl> · voor de van toepassing zijnde licentie (CC BY-NC 4.0).

