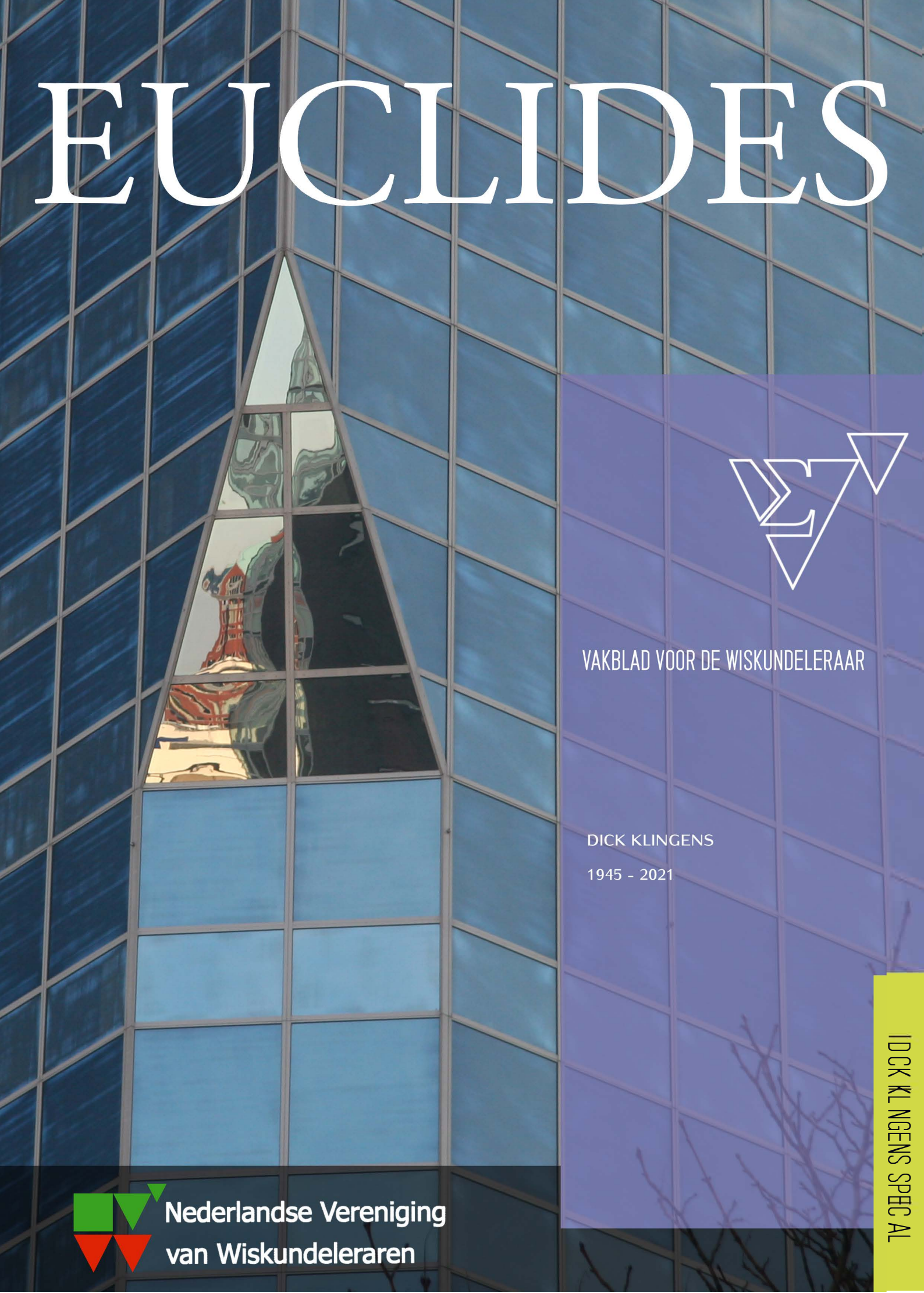
# EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

DICK KLINGENS

1945 - 2021

IDCK KL NGENS SPHC AL

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

# INHOUDSOPGAVE

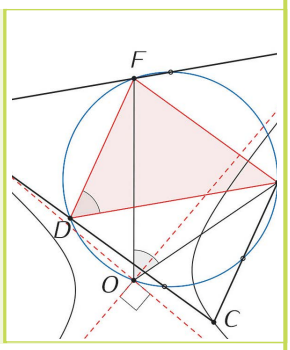
DICK KLINGENS SPECIAL



## IN DIT NUMMER


NOG MAAR EENS DE TRISECTIE
Euclides 92-3 december 2016 4

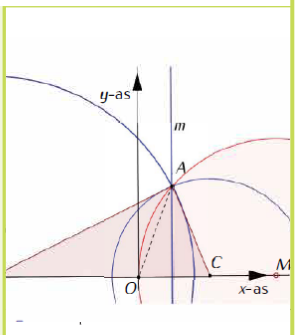
EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE
Euclides 93-2 november 2017 7



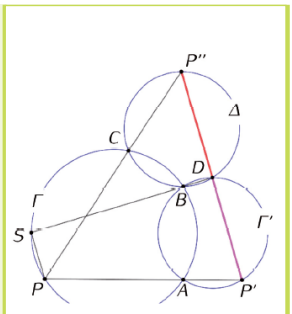

EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN
Euclides 93-6 mei 2018 11

SCHERP, RECHT, STOMP ...
Euclides 94-1 september 2019 15

MET EN/OF ZONDER COORDINATEN...
Euclides 94-5 maart 2019 17




TWEE MEETKUNDIGE MINIATUREN
Euclides 94-6 mei 2019 21




(HET GEVOLG VAN) KRASSEN MET FORMULES
Euclides 95-3 december 2019 25

DE STELLING VAN STEWART
Euclides 95-5 mei 2020 27

OVER EEN EIGENSCHAP VAN EEN ELLIPS
Euclides 96-3 december 2020 32

DE BISSECTRICESTELLING EN WAT ER ZO BIJ KOMT KIJKEN
Euclides 96-7 juni 2021 35

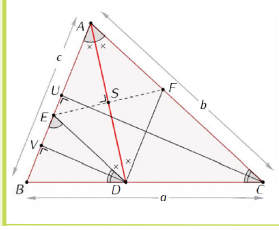




Foto:
Gebouw Rijkswaterstaat 'de Maas', Rotterdam.

Voor Dick,
die zowel van Rotterdam
als van driehoeken hield.
Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

ZO MAAR EEN EXAMENVRAAGSTUK VAN VROEGER 39
Euclides 97-2 oktober 2021

MEETKUNDE - EENVOUDIG, OF TOCH NIET 42
Euclides 97-7 juni 2022

RAKING, ÓÓK EEN KLASSIEK PROBLEEM 45
Dick Klingens Special

IMO EN GVA 56
Dick Klingens Special

HERINNERINGEN AAN DICK KLINGENS 71
Euclides 97-1 september 2021

## Kort Vooraf

Tom Goris

Mijn eerste officiële 'daad' voor *Euclides* was het jaarlijkse redactiediner en daar kwam ik naast Dick te zitten. Het was zijn afscheidsdiner, dat een aantal keer was uitgesteld. Ik kende Dick uiteraard van naam en faam, maar hemzelf eigenlijk niet. Hij vertelde ontwapenend en innemend over zijn genezingsproces, en dat hij eindelijk weer 'wiskunde kon bedrijven'. En wat dat voor hem betekende (alles), maar dat eigenlijk ook weer wist te relativeren (niets).

Dick beloofde me dat hij weer voor een al dan niet regelmatige toestroom van artikelen zou gaan zorgen. Ik moest ze maar bewaren en zien in welke *Euclides* ze terecht konden komen. Als voormalig eindredacteur wist hij natuurlijk als geen ander hoe fijn het is om dit soort tijdloze 'wisselgeld-artikelen' op de plank te hebben liggen. Die beloofde toestroom is gebundeld in deze *Euclides*-special. Van Dicks zoon Pim begrepen we dat een van de laatste dingen die Dick deed het corrigeren van de drukproef van de 'bissectricestelling' was. Met een haviksoog voor detail. En heb je als docent wel eens ouders op de ouderavond gehad die zelf in het onderwijs zitten? Zo is het ongeveer als je Dick de drukproeven laat corrigeren... Maar met hetzelfde doel voor ogen: een mooie *Euclides* maken.

Er lagen nog vier bijdragen van Dick op de plank toen hij overleed. Met toestemming van de familie publiceerden we deze postuum, in nummer 2 en nummer 7. Van de twee allerlaatste artikelen zijn de oorspronkelijke versies, zoals Dick ze naar de redactie stuurde, opgenomen in deze special.

Dick is er niet meer. De afgelopen jaren was dit het onderschrift van zijn mails, daar heb ik niets aan toe te voegen:

```
URL: http://www.pandd.nl
Earth: N51.920 / E4.610
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
Alles blijft
Alles gaat voorbij
Alles blijft voorbijgaan
~~~~
Jules Deelder
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

# NOG MAAR EENS DE TRISECTIE

Dick Klingens

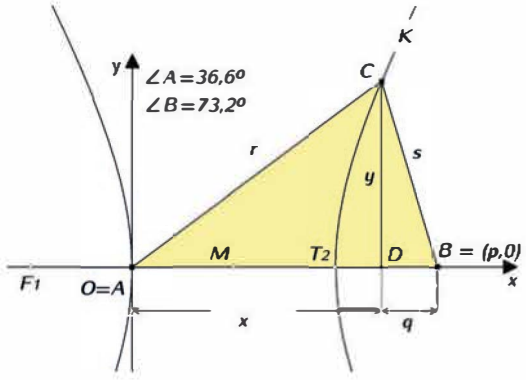
Dat de trisectie van een hoek niet te construeren is, dat weet iedereen wel. In *Geogebra* zit dan ook geen knop 'verdeel de hoek in drie gelijke delen'. Maar de constructie kan wél met de knoppen van *Geogebra*. Zonder de hoek op te meten, wel te verstaan. Dick Klingens laat zien hoe dat gaat en waarom de methode klopt.

## Meetkundige plaats

We beginnen met een niet zo eenvoudig probleem uit de (analytische) meetkunde. Nadat we het hebben opgelost, zullen we hetgeen we hebben gevonden, gebruiken bij een 'oud probleem' (ach, de kop van dit artikel verraadt het al).

***Opgave***. In een gegeven driehoek $ABC$ is hoek $B$ twee keer zo groot als hoek $A$. Bepaal (de vergelijking van) de meetkundige plaats $K$ van de punten $C$ (bij veranderlijke hoek $A$).

Het is direct duidelijk dat hoek $A$ kleiner moet zijn dan 60º. Hoek $B$ is in dat geval immers kleiner dan 120º, en samen zijn ze nu kleiner dan 180º (en dat moet in een driehoek).
Voor de oplossing van het probleem plaatsen we de driehoek in een orthonormaal assenstelsel $xOy$ (zie figuur 1), waarvan de $x$-as de drager is van het lijnstuk $AB$ en waarvan het punt $O$ samenvalt met het punt $A$. We stellen de coördinaten van het punt $B$ gelijk aan $(p, 0)$ en die van het punt $C$ gelijk aan $(x, y)$.
En dan proberen we een relatie te vinden tussen die $x$ en $y$ (uiteraard is die afhankelijk van $p$), waarbij we kiezen voor een goniometrische aanpak.




figuur 1

We stellen de grootte van hoek $A$ gelijk aan $\theta$.
Verder is ook, met $D$ als projectie van $C$ op de $x$-as, zie figuur 1:

$OD = x$, $CD = y$, $DB = q$, $AC = r$ en $BC = s$ (en daarmee geldt $p = x + q$)

In driehoek $ADC$ gelden nu onder meer de volgende relaties:

$$x = r \cdot \cos\theta,\ y = r \cdot \sin\theta$$

zodat in driehoek $BDC$ geldt:

$$\angle B = 2\theta \Rightarrow \frac{y}{s} = \sin(2\theta) \Rightarrow s = \frac{y}{\sin(2\theta)} = \frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}$$

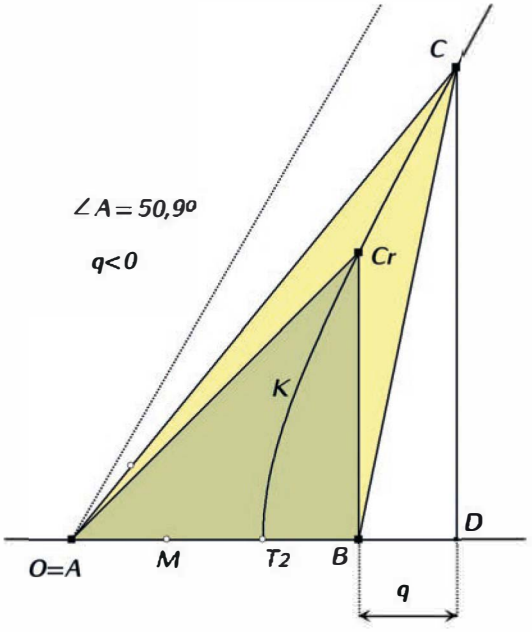
Volgens de stelling van Pythagoras geldt in die driehoek ook de relatie $q^2 = s^2 - y^2$.
En daaruit vinden we door substitutie en verdere uitwerking:

$$q^2 = \left(\frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}\right)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2\sin^2\theta \cdot \left(\frac{1}{\sin^2(2\theta)} - 1\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta \cdot \frac{1-\sin^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)} = r^2\sin^2\theta \cdot \frac{\cos^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)}$$

Hieruit volgt: $q = r\sin\theta \cdot \dfrac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$

Merk op dat $q$ negatief is (gerekend moet worden) als $45^\circ < \theta < 60^\circ$; zie figuur 2.




figuur 2

Uit $p = x + q$ volgt dan na vermenigvuldiging met $2x = 2r \cdot \cos\theta$:

$$2px = 2x^2 + (2r\cos\theta)\cdot r\sin\theta\cdot\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$
$$= 2x^2 + r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin(2\theta)}$$
$$= 2x^2 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$
$$= 2x^2 + x^2 - y^2$$

zodat het verband tussen de coördinaten $(x, y)$ van het punt $C$ is: $3x^2 - 2px - y^2 = 0$. En dit is een vergelijking van een hyperbool; zie weer figuur 1.
Omdat $\theta$ een scherpe hoek is, is $x$ positief. De meetkundige plaats $K$ van het punt $C$ is dus alleen de *rechtertak* van de hyperbool. En van die tak is het snijpunt $T_2$ met de $x$-as uitgezonderd, omdat driehoek $ABC$ dan ontaard is (punt $C$ op de $x$-as en hoek $A$ en hoek $B$ beide gelijk aan 0°).
Eenvoudig is in te zien dat de hyperbool door $A = (0, 0)$ en door $T_2 = (\frac{2}{3}p, 0)$ gaat; beide punten zijn toppen van de hyperbool. De standaardvorm van $K$ (met 'halve' assen $a=\frac{1}{3}p$ en $b=\frac{1}{\sqrt{3}}p$) is:

$$\frac{(x-\frac{1}{3}p)^2}{(\frac{1}{3}p)^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}}p)^2}=1 \quad (x>0)$$

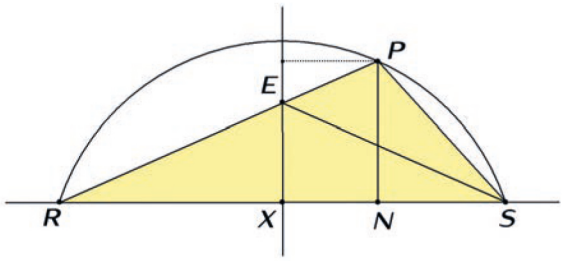
Daaruit zien we dat $M = (\frac{1}{3}p, 0)$ het middelpunt van de hyperbool is. Is $c$ de halve brandpuntsafstand, dan is: $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{3}p^2 = \frac{4}{9}p^2$, waaruit volgt dat $c = \frac{2}{3}p$.
Wegens (zie opnieuw figuur 1) $MB = OB - OM = p - \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}p = c$, is het punt $B$ een brandpunt van de hyperbool.
Voor de waarde van de zogenoemde excentriciteit $\varepsilon$ van deze hyperbool vinden we:[1]

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}p}{\frac{1}{3}p} = 2$$

De *excentriciteit* van een kegelsnede is de verhouding van de afstand van een punt van de kegelsnede tot een brandpunt en de afstand van dat punt tot de bij dat brandpunt behorende richtlijn.

## Bewijs van Pappos

We kunnen de in de vorige paragraaf gevonden hyperbool gebruiken om een hoek in drie gelijke delen te verdelen. Dit laatste staat in de wiskunde bekend onder de naam *trisectie*. De trisectie waarbij gebruik wordt gemaakt van een hyperbool, is voor het eerst beschreven door Pappos van Alexandrië (ca. 290 – ca. 350, Egypte). We laten hieronder een van de twee door Pappos gegeven bewijzen (en niet diens constructie) min of meer volgen.[2] En dan blijkt ook dat we het in de vorige paragraaf vermelde probleem (het vinden van de meetkundige plaats) heel wat eenvoudiger kunnen oplossen.
We nemen aan dat de cirkelboog $RS$ door het punt $P$ zo verdeeld is dat $\text{bg}(SP) = \frac{1}{3}\ \text{bg}(SPR)$, zie figuur 3.



figuur 3

Dan is:
$\angle RSP = 2 \cdot \angle SRP$ (omtrekshoeken op dezelfde cirkel).
De lijn $SE$ is de bissectrice van hoek $RSP$, waarbij $E$ op $RP$ ligt. De lijnen $EX$ en $PN$ staan beide loodrecht op $RS$.
Dan is $RX = SX$ (driehoek $ERS$ is gelijkbenig), waarbij $X$ een vast punt is (het midden van $RS$).
Ook is $RS : PS = RE : PE$ (bissectricestelling) en $RE : PE = RX : NX$ (evenwijdigheid).
Zodat $RS : PS = RX : NX$. Maar $RS = 2 \cdot RX$, zodat $2 : PS = 1 : NX$. Met andere woorden: $PS = 2 \cdot NX$.
De lengte van het lijnstuk $NX$ is gelijk aan de afstand van het punt $P$ tot de loodlijn in $X$ op de lijn $RS$.
Hieruit blijkt dat het punt $P$ ligt op een hyperbool met brandpunt $S$ en met $XE$ als richtlijn. En de excentriciteit van de hyperbool is gelijk aan 2.

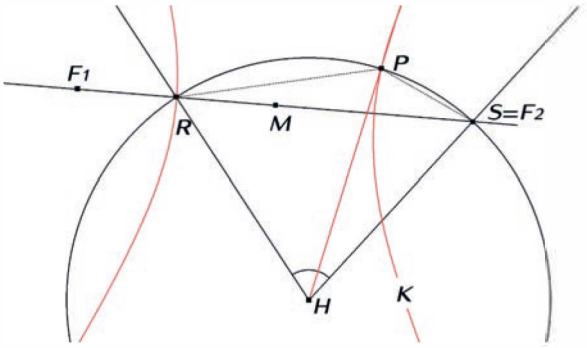
## Constructie?

Het probleem van de trisectie van een hoek is – zoals opgemerkt – een 'oud probleem'. Het is één van de drie klassieke meetkundeproblemen, naast dat van de kwadratuur van de cirkel en van de verdubbeling van de (inhoud van de) kubus.
De hulpmiddelen voor het construeren van vlakke figuren in de oud-Griekse wiskunde waren de passer en het 'latje' (een blanco liniaal zonder onderverdeling). Bewezen is (in 1837 door Pierre Laurent Wantzel) dat trisectie met deze hulpmiddelen alléén niet mogelijk is. Laten we echter ook de mogelijkheid tot het 'tekenen van een hyperbool' als extra hulpmiddel toe, dan kunnen we de trisectie wél uitvoeren. Moderne dynamische meetkundeprogramma's, zoals bijvoorbeeld *GeoGebra,*[3] hebben deze mogelijkheid. In *GeoGebra* zit een standaardfunctie voor de 'constructie' van een hyperbool waarvan een punt en de twee brandpunten gegeven zijn, zie figuur 4.



figuur 4 Constructie van een hyperbool in *GeoGebra*

De constructiestappen voor een constructie binnen *GeoGebra* zijn, uitgaande van een gegeven hoek $H$, zie figuur 5:




figuur 5

- teken een cirkel met middelpunt $H$ en willekeurige straal;
- bepaal de snijpunten $R$ en $S$ ervan met de benen van de hoek;
- (optioneel) teken de lijn $RS$;
- bepaal het punt $M$ (het middelpunt van de hyperbool), dat het beeld van $S$ is bij een vermenigvuldiging (homothetie) met centrum $R$ en factor $\frac{1}{3}$;
- bepaal het punt $F_1$ als puntspiegelbeeld van $M$ in het punt $R$;
- teken de hyperbool $K$ met als brandpunten $F_1$ en $S = F_2$ en met punt $R$ als punt *op* de hyperbool;
- bepaal $P$ als snijpunt van de hyperbool met de cirkel(boog) $RS$;
- de lijn $HP$ is dan een *trisectie* van de hoek $H$.

Opmerkingen

- De in de constructie gebruikte hyperbool heeft noodzakelijk 2 als excentriciteit. De lezer vergelijke figuur 5 met figuur 3.
- De tweede trisectrice van een hoek kan gevonden worden als spiegelbeeld van de eerste in de bissectrice van de hoek.

Het bewijs van de juistheid van bovenstaande constructie is eenvoudig. Een en ander volgt direct uit de eigenschappen van middelpuntshoeken van een cirkel. Immers, we hebben hierboven gezien dat het punt $P$ (als punt van de hyperbool) de cirkelboog $RPS$ verdeelt in stukken $RP$ en $PS$ die zich verhouden als 2 : 1.
De middelpuntshoeken $RHP$ en $PHS$ staan opvolgend op de deelbogen $RP$ en $PS$ van die boog.
Inderdaad is dan $\angle RHP = 2 \cdot \angle PHS$.

## Noten

[1] Zie voor de afleiding van de formule voor de excentriciteit van een hyperbool: Klingens, D. (1999). *Kegelsneden en hun vergelijkingen*. Op: www.pandd.demon.nl/kever.htm#42

[2] Heath, T.L. (1981). *A History of Greek Mathematics. Deel 1*. New York: Dover Publications, p. 243. Hierin wordt verwezen naar boek IV van Pappos' *Synagoge*.

[3] Zie de website: *www.geogebra.org*

# EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE

Dick Klingens

Een combinatie van wiskunde B en D kan leiden tot iets wat je mooie meetkunde zou kunnen noemen. Aldus Dick Klingens, die ons graag meevoert in de schoonheid van bijzondere eigenschappen van kegelsneden met een middelpunt.

In het nieuwe eindexamenprogramma van wiskunde B en wiskunde D voor het vwo wordt bij meetkunde de nadruk gelegd op het gebruik van coördinaten (dit is in wat mindere mate het geval op het havo):

- De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere *geschikte figuren onderzoeken met* behulp van algebraïsche voorstellingen, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen. (B, domein E2)
- De kandidaat kan *analytische en synthetische methoden* en redeneringen toepassen op meetkundige probleemsituaties en daarmee eigenschappen bewijzen.[1] (D, domein D1)

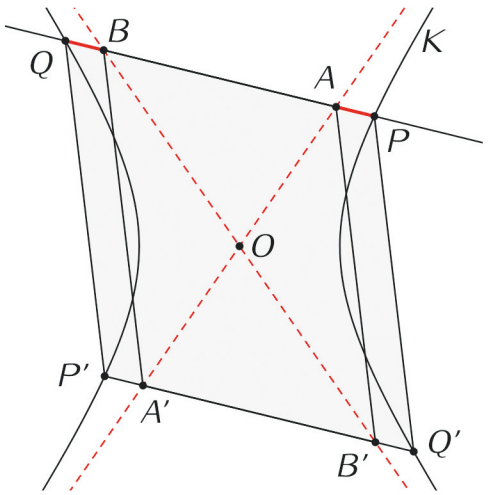
Een combinatie B & D, dat wil zeggen 'geschikte figuren onderzoeken met analytische en synthetische methoden', biedt de mogelijkheid in dit artikel wat breder en dieper in te gaan op bijzondere meetkundige eigenschappen. Dit leidt dan tot wat ik 'mooie meetkunde' zou willen noemen. Een mooi voorbeeld daarvan volgt hieronder.[2]

## Hyperbool

We gaan in dit voorbeeld uit van een hyperbool. Weliswaar zijn kegelsneden alleen in het vwo-programma van wiskunde D genoemd, maar binnen de analyse komen toch ook hyperbolen voor.
Van de kegelsneden die een middelpunt hebben – cirkel, ellips, hyperbool – is eenvoudig via de middelpuntsvergelijking daarvan in een $xOy$-assenstelsel, vast te stellen dat ze *puntsymmetrisch* zijn ten opzichte van het punt $O$.

Vergelijking: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ voor de cirkel, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de ellips en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de hyperbool). Puntsymmetrie: Als het punt $P = (x_0, y_0)$ op de kegelsnede ligt, dan ligt het *tegenpunt* $P'$ van $P$ met $P' = (-x_0, -y_0)$ eveneens op die kegelsnede. Dit geeft al direct een 'mooie' eigenschap van een hyperbool en diens asymptoten; deze laatste lijnen vormen op zich een puntsymmetrische figuur.

**Stelling 1:** Is $PQ$ een koorde[3] van een hyperbool $K$ en snijdt de lijn $PQ$ de asymptoten van $K$ in de punten $A$ en $B$, dan is $PA = QB$; zie figuur 1.




figuur 1

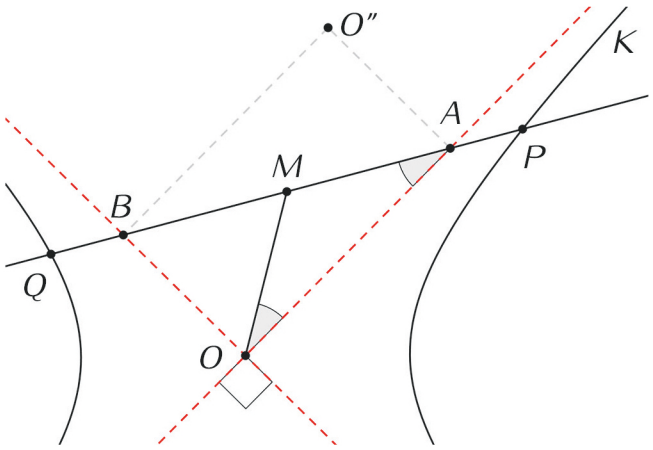
Bewijs: Zijn $P'$, $Q'$, $A'$ en $B'$ de tegenpunten van $P$, $Q$, $A$ en $B$, dan is op grond van de puntsymmetrie ten opzichte van het punt $O$ de vierhoek $PQP'Q'$ een parallellogram, waarbij $A'$ en $B'$ op de zijde $P'Q'$ liggen. Ook vierhoek $ABA'B'$ is een parallellogram. En daaruit volgt het gestelde direct.

**Gevolg:** De lijnstukken $PQ$ en $AB$ hebben hetzelfde midden.

## Orthogonale hyperbool

We bekijken (het gevolg van) dat gevolg voor een *orthogonale* hyperbool $K$[4] met middelpunt $O$.

In figuur 2 snijdt de koorde $PQ$ van K de asymptoten ook nu in de punten $A$ en $B$. Driehoek $OAB$ is dan rechthoekig in $O$, omdat de asymptoten de dragers zijn van de zijden $OA$ en $OB$. Voor het midden $M$ van het lijnstuk $AB$ geldt dan: $OM = MA = MB$, immers, $OM$ is deel van de diagonaal $OO''$ in de rechthoek $OAO''B$. Daarmee is driehoek $OAM$ gelijkbenig, zodat daarin $\angle O = \angle A$.
We formuleren dit als:

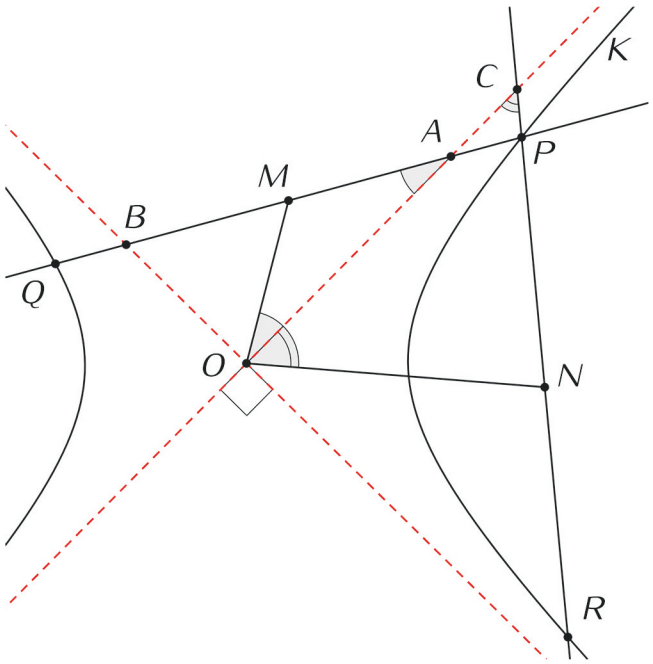



figuur 2

**Stelling 2**: Is $PQ$ een koorde van een orthogonale hyperbool $K$ (met middelpunt $O$) en is $M$ het midden van $PQ$, dan is de hoek tussen het lijnstuk $OM$ en een asymptoot van $K$ gelijk aan de hoek tussen de drager van $PQ$ en die asymptoot.

*Opmerking*: De hoek tussen twee lijnen is *per definitie* een niet-stompe hoek. Hetzelfde geldt voor de hoek tussen een lijnstuk en een lijn.

En met stelling 2 kijken we in figuur 3a naar *twee* koorden $PQ$ en $PR$ van $K$.



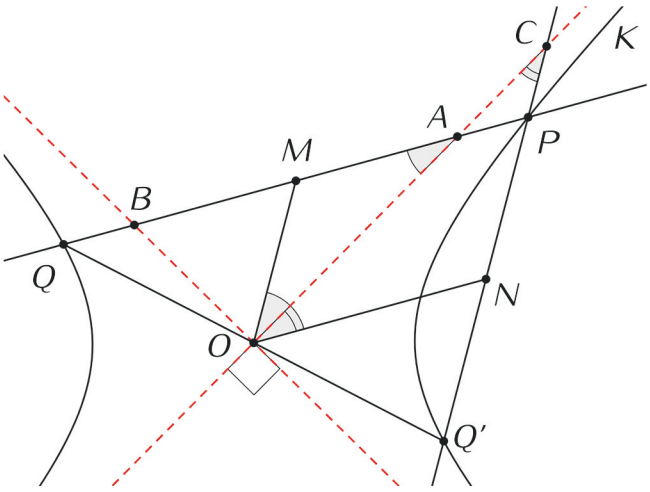

figuur 3a

Het punt $N$ is het midden van koorde $PR$, die verder de asymptoot $OA$ snijdt in het punt $C$.
Op grond van stelling 2 kunnen we nu concluderen dat de hoek tussen $ON$ en $OA$ gelijk is aan de hoek tussen $PR$ en $OA$.

Hoek $NPM$ is een buitenhoek van driehoek $PCA$, zodat bij die driehoek geldt:
buitenhoek $P = \angle C + \angle A = \angle AON + \angle OAM = \angle AON + \angle AOM = \angle NOM$
Zodat in vierhoek $ONPM$ geldt: $\angle O = \angle P$. Anders gezegd, en dit is toch ook mooi (en niet zo erg bekend):

**Stelling 3:** De hoek tussen de dragers van twee koorden van een orthogonale hyperbool die eenzelfde beginpunt hebben, is gelijk aan de hoek tussen de lijnstukken die het middelpunt van die hyperbool verbinden met de middens van die koorden.

*Opmerking*: Als in figuur 3a het punt $R$ samenvalt met het tegenpunt $Q'$ van $Q$, dan is vierhoek $ONPM$ een parallellogram en is de asymptoot $OA$ de bissectrice van hoek $O$, zie figuur 3b.

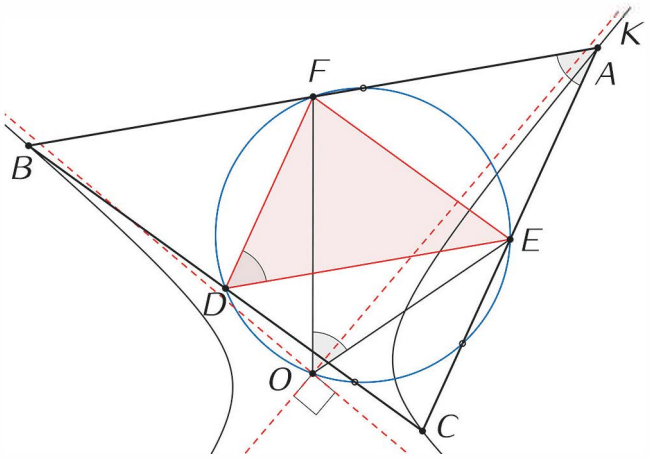



figuur 3b

## Orthogonale hyperbool met ingeschreven driehoek

We bekijken vervolgens een driehoek waarvan de hoekpunten *op* een orthogonale hyperbool $K$ liggen. We spreken dan van een *ingeschreven* driehoek van de hyperbool (of ook wel: de hyperbool is om de driehoek omschreven, een *omgeschreven* hyperbool).

Van de in $K$ ingeschreven driehoek $ABC$ is $DEF$ de driehoek die bepaald is door de middens van de zijden, zie figuur 4.




figuur 4

De omcirkel[5] van driehoek $DEF$ is de zogeheten *negenpuntscirkel* of *cirkel van Feuerbach*[6] van driehoek $ABC$. De negen in de naam van de cirkel bedoelde punten die op die cirkel liggen, zijn:

- de middens van de zijden van de driehoek;
- de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek (geen namen in figuur 4);
- de middens van de 'bovenste' stukken van de hoogtelijnen (niet getekend in figuur 4).[2]

En de in stelling 4 te noemen mooie eigenschap – een *tiende* punt op de negenpuntscirkel – is nu eenvoudig te bewijzen.

**Stelling 4:** Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het middelpunt van die hyperbool op de negenpuntscirkel van die driehoek.

Bewijs: Zie weer figuur 4. Hierin is $K$ dus een omgeschreven orthogonale hyperbool van driehoek $ABC$. Het middelpunt van $K$ is het punt $O$.

We passen stelling 3 toe op de koorden $AB$ en $AC$ van $K$. De lijnstukken $OF$ en $OE$ verbinden het middelpunt van de hyperbool met de middens van die koorden, zodat: $\angle FOE = \angle CAB = \angle EAF$.
Maar vierhoek $DEAF$ is een parallellogram, zodat $\angle EDF = \angle EAF$. Gevolg: $\angle FOE = \angle EDF$.
Volgens de stelling van de omtrekshoek ligt dan ook het punt $O$ op de negenpuntscirkel.

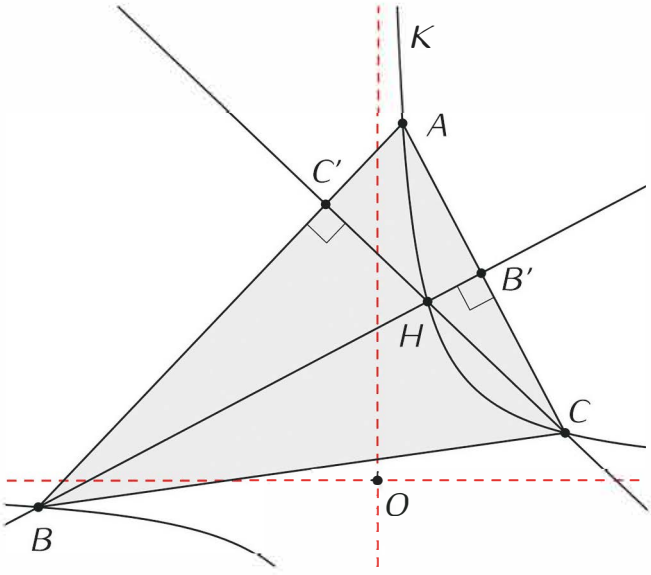
## Hoogtepunt

Een eveneens mooie eigenschap van het hoogtepunt van een driehoek die is ingeschreven in een orthogonale hyperbool, staat in de volgende stelling.

**Stelling 5**: Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het hoogtepunt van die driehoek op die hyperbool.

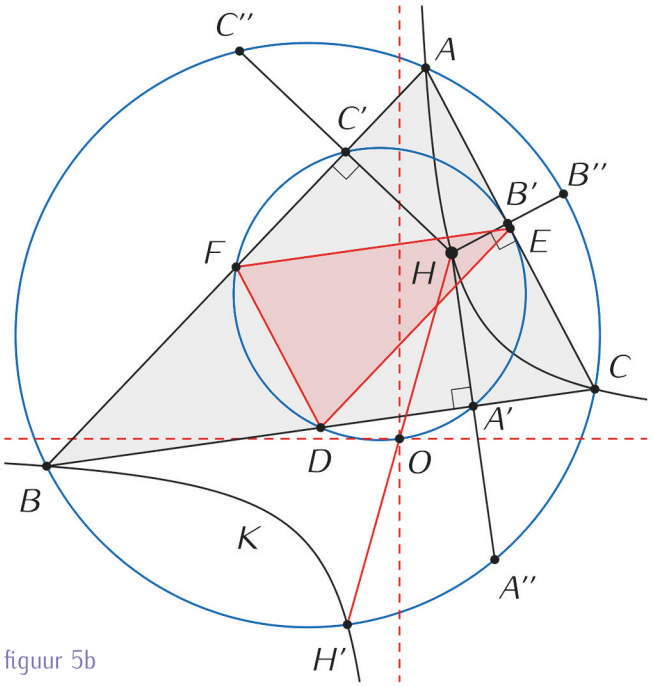
Bij het bewijs van stelling 5 gebruiken we coördinaten.[7] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs geweld aan te doen, kiezen we de asymptoten van de orthogonale hyperbool $K$ langs de coördinaatsassen van een rechthoekig assenstelsel[2] $xOy$. En, op grond van gelijkvormigheid, kunnen we voor de vergelijking van $K$ uitgaan van: $xy = 1$ of $y = \frac{1}{x}$.

Bewijs van stelling 5: Zie figuur 5a waarin $A = (a, 1/a)$, $B = (b, 1/b)$, $C = (1, 1/c)$ drie verschillende punten zijn van $K$ (met $a, b, c \neq 0$ en onder meer $b \neq c$).
Voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de lijnen $AB$ en $AC$ hebben we dan:[8]
rico($AB$) = $-1/ab$
rico($AC$) = $-1/ac$
Vergelijkingen van de hoogtelijnen van driehoek $ABC$ uit $B$ en $C$ zijn dan:
$BB'$ : $y - 1/b = ac(x - b)$ of $by - 1 = abc(x - b)$
$CC'$ : $y - 1/c = ab(x - c)$ of $cy - 1 = abc(x - c)$



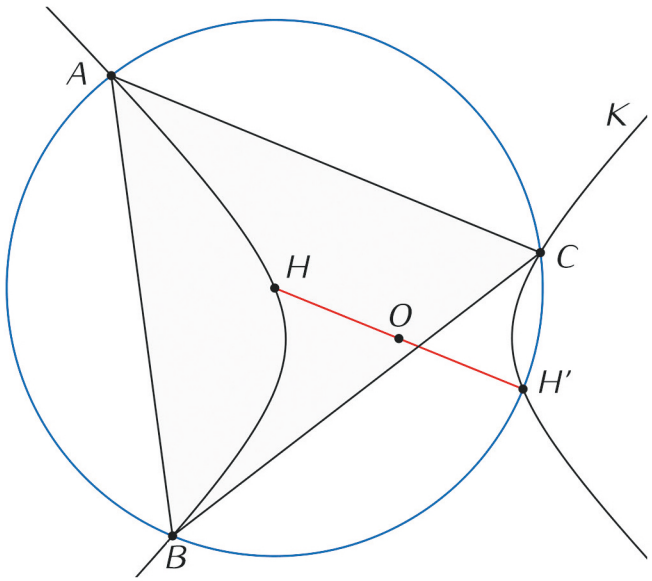

figuur 5a

Uit deze vergelijkingen volgt dan, na enige berekening, voor de coördinaten $(x_H, y_H)$ van het snijpunt $H$ van die lijnen (het hoogtepunt): $x_H = -1/abc$ en $y_H = -abc$.
De coördinaten van het punt $H$ voldoen daarmee aan de vergelijking van de hyperbool. Met andere woorden: het hoogtepunt $H$ van de driehoek $ABC$ ligt op $K$.




figuur 5b

**Gevolg**: Zie figuur 5b. Volgens de, voorafgaand aan stelling 4, genoemde negenpuntseigenschappen beeldt de vermenigvuldiging $V_H$ (centrum $H$, factor ½) de omcirkel van driehoek $ABC$ – via de punten $A''$, $B''$, $C''$ op die omcirkel – af op de negenpuntscirkel, en dat is de omcirkel van driehoek $A'B'C'$ (≡ driehoek $DEF$).[2]
Het vierde snijpunt $H'$ van de omcirkel en de hyperbool heeft daarmee dus het punt $O$ als $V_H$-beeld (zie ook stelling 4).




figuur 6

## Ook mooi

We gaan nu uit van een orthogonale hyperbool (middelpunt $O$), zie figuur 6. Daarop kiezen we een punt $H$. Vervolgens bepalen we de snijpunten $A$, $B$, $C$ van de cirkel met middelpunt $H$ die door het tegenpunt $H'$ van $H$ gaat. *Die driehoek is gelijkzijdig*! Waarom? Het punt $H$ is het hoogtepunt van driehoek $ABC$, maar het is ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die driehoek. Waar dat uit blijkt? Uit 'al het moois' dat in de voorgaande paragrafen staat.

## Noten

[1] Examenprogramma wiskunde B vanaf 2018
Examenprogramma wiskunde D vanaf 2018
Zie voor beide: *http://www.examenblad.nl*

[2] Bij dit artikel hoort een appendix waarin enkele (basis)begrippen die in dit artikel worden gebruikt, nader zijn toegelicht. Zie daarvoor: *http://vakbladeuclides.nl/932klingens*

[3] Onder een *koorde* van een kegelsnede wordt verstaan het verbindingslijnstuk tussen twee punten van die kegelsnede.

[4] Een hyperbool heet *orthogonaal* (ook wel *gelijkzijdig*) als de asymptoten van die hyperbool loodrecht op elkaar staan.

[5] De *omcirkel* van een driehoek is de omgeschreven cirkel van die driehoek.

[6] Naar Karl Wilhelm von Feuerbach (1800 - 1834, Duitsland). Hij bewees als eerste een aantal eigenschappen van de naar hem genoemde cirkel, onder meer dat die cirkel raakt aan de ingeschreven en aan de aangeschreven cirkels van de driehoek.

[7] In de appendix (zie noot 2) staat een synthetisch bewijs.

[8] Met de rekenkundige uitdrukking $1/xy$ bedoelen we in hetgeen volgt $1/(xy)$.

*vakbladeuclides.nl/932klingens*
Op de site is een uitgebreide appendix bij dit artikel te vinden.

# EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN

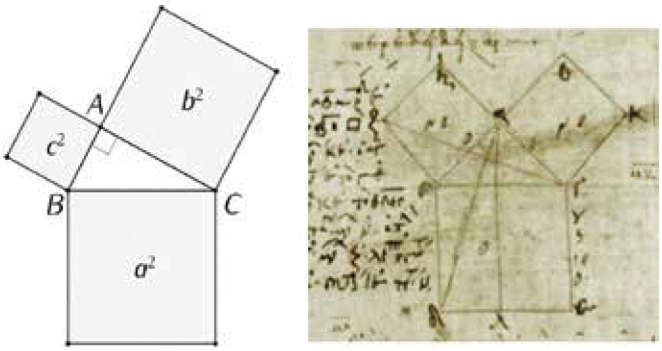
Dick Klingens

Vierkanten plaatsen op twee zijden van een driehoek. Daarmee kun je de stelling van Pythagoras aanschouwelijk maken, maar het levert nog veel meer boeiende stellingen op. Dick Klingens neemt ons mee naar Frankrijk en Rusland voor een aantal mooie voorbeelden.

## Het houdt bij ons op bij...

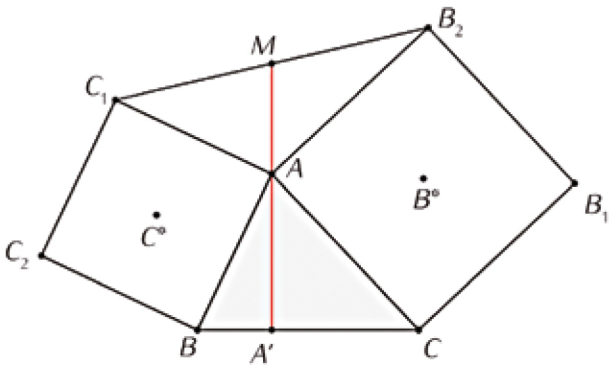
Natuurlijk, met vierkanten geplaatst op de zijden van een rechthoekige driehoek kun je de stelling van Pythagoras formuleren als:[1, 2]

*De som van de oppervlaktes van de vierkanten op de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde van die driehoek.*




figuur 1a (links) en 1b (rechts)

In het meetkundeonderwijs in het vo (zeker in de onderbouw) houdt het gebruik van vierkanten bij driehoeken daarmee wel zo'n beetje op. Maar dat hoeft in dit tijdschrift natuurlijk niet.




figuur 2

Neem een willekeurige driehoek $ABC$ en beschrijf daarop uitwendig vierkanten op twee van de zijden. In figuur 2 zijn dat het vierkant $CB_1B_2A$ met middelpunt $B^*$ en het vierkant $BAC_1C_2$ met middelpunt $C^*$. Het punt $M$ is het midden van het lijnstuk $B_2C_1$. Toon aan dat $MA$ (in $A'$) loodrecht staat op $BC$.

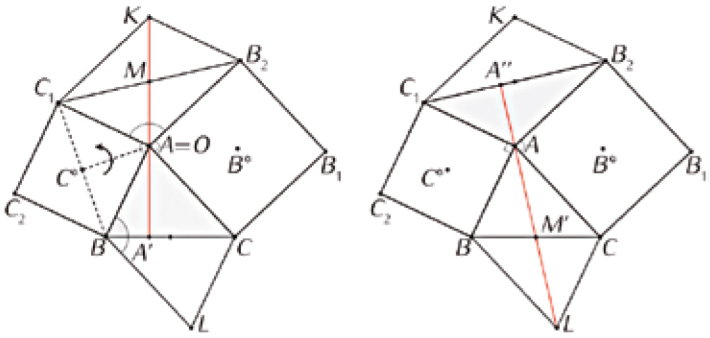
Je kunt hier natuurlijk direct verder lezen – dat bewijs komt er zeker aan. Maar je kunt ook even wachten, en dan eerst zelf bedenken hoe dat bewijs er uit zou kunnen zien...

Wellicht is tijdens dat wachten ook de gedachte opgekomen om het een met het ander om te draaien: ga uit van de hoogtelijn $AA'$ en bewijs dat deze door het midden $M$ van $B_2C_1$ gaat.

## Het ingevoegd parallellogram

Hoe ook gedraaid, met 'hoeken jagen' lukte het mij niet snel genoeg. En over draaien gesproken. Ik hou het hier op een rotatie $R$, en wel die met centrum $C^*$ over een hoek van 90°, waarbij ik gebruik maak van de volgende (zeker wel) bekende eigenschap.

**Stelling1.** Is $l'$ het beeld van een rechte lijn $l$ bij een rotatie over een hoek van 90°, dan staan $l$ en $l'$ loodrecht op elkaar.




figuur 3a (links) en 3b (rechts)

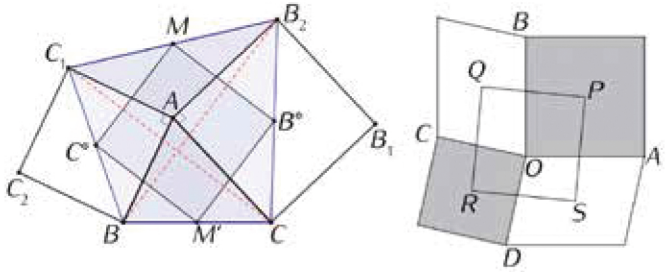
Dan is in ieder geval, zie figuur 3a, $R(A) = C_1$, $R(B) = A$, zodat $R$(lijnstuk $AB$) = lijnstuk $C_1A$.
Maar komen we hiermee dan verder? Zoveel andere lijnstukken zijn er niet waarvan direct duidelijk is dat ze onder $R$ origineel en beeld zijn.
Voor het bewijs teken ik er twee driehoeken zó bij, dat $BLCA$ en $AB_2KC_1$ parallellogrammen zijn. Ik noem $AB_2KC_1$ het ingevoegde parallellogram (ingevoegd tussen beide vierkanten). Daarvan is trouwens $AK$ een diagonaal.

We kunnen de beoogde eigenschap dan als volgt formuleren.

**Stelling 2.** Als op twee zijden van een driehoek vierkanten zijn geplaatst, dan staat de lijn die door het gemeenschappelijke hoekpunt gaat en door het middelpunt van het ingevoegde parallellogram, loodrecht op de overstaande zijde van dat hoekpunt.

Opmerking. Als we in figuur 3b naar driehoek $AB_2C_1$ kijken, dan zijn op de zijden $AB_2$ en $AC_1$ daarvan vierkanten geplaatst. $ABLC$ is hier het ingevoegde parallellogram. En volgens stelling 2 staat de lijn $AM'$ ($M'$ is het midden van $BC$) in $A''$ loodrecht op $B_2C_1$.

Bewijs van stelling 2. Nu is, en we zijn weer terug in figuur 3a: $\angle ABL = \angle C_1AB_2$, omdat beide de hoek $A$ als supplement hebben. En omdat $AB_2 = AC = BL$ is, is direct duidelijk dat $R(BL) = AB_2$. En dan is $R(BLCA) = AB_2KC_1$, zodat ook $R(BC) = AK$.
Met andere woorden, conform stelling 1: de drager van $AK$ – en dat is de lijn $AM$ – staat loodrecht op $BC$. En daarmee is stelling 2 bewezen.




figuur 4a (links) en 4b (rechts)

Gevolg. $BC = AK$ en $AL = C_1B_2$. Maar er is meer!
Zie daartoe figuur 4a. De punten $M'$, $B^*$, $M$, $C^*$ zijn de middens van de zijden van vierhoek $BCB_2C_1$.
Daarmee is $M'B^*MC^*$ een parallellogram (van Varignon [3]). Als we roteren met $A$ als centrum en weer over een hoek van 90°, dan is: $R(C_1) = B$, $R(C) = B_2$, zodat $R(C_1C) = BB_2$. En dan staat $C_1C$ loodrecht op $BB_2$, en ook is $C_1C = BB_2$.
Omdat dit de diagonalen zijn van de vierhoek $BCB_2C_1$, is het Varignon-parallellogram een vierkant (zo is er toch nog een derde vierkant).

Opmerking. In de appendix [1] staan nog twee andere bewijzen van stelling 2.

## Maar in Frankrijk

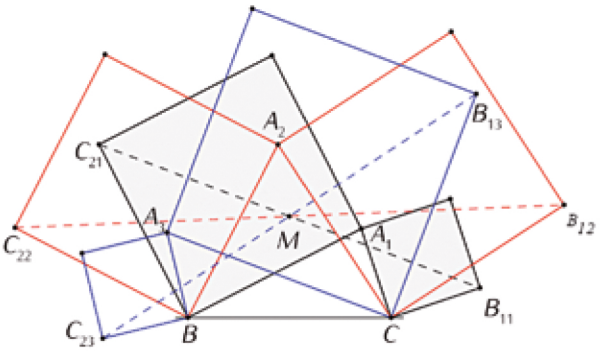
Ik trof de volgende opgave (uit het jaar 2003) aan, [4] zie figuur 4b:

***Exercice 4***
*Beschouw twee vierkanten (in grijs) met een gemeenschappelijke hoekpunt en de constructie van twee parallellogrammen (in wit). Laat zien dat de middelpunten van vierkanten en parallellogrammen de hoekpunten van een vierkant zijn. Neem daartoe een assenstelsel met oorsprong O en ken daarbij complexe getallen toe aan de punten A, B, C en D.*

Ik laat het aan jezelf over dit probleempje *zonder* complexe getallen op te lossen.
In de appendix [1] staat de originele tekst van de *exercice* en er is, naast een oplossing *met* complexe getallen, ook een analytische oplossing in opgenomen.

## Toch ook bij ons

We bekijken opnieuw vierkanten op twee zijden van een driehoek, maar nu enigszins dynamisch; zie figuur 5 waarin drie momentopnames weergegeven zijn.

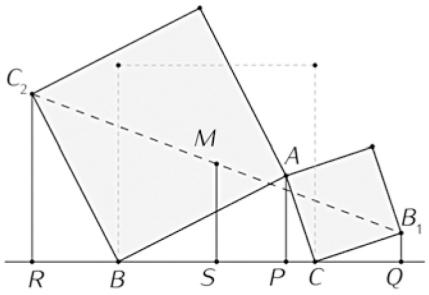



figuur 5

We zien in figuur 5 driehoeken $A_kBC$ met $k = 1, 2, 3$. De lijnstukken $B_{1k}C_{2k}$ hebben blijkbaar alle hetzelfde midden, het punt $M$. De plaats van $M$ hangt niet af van de plaats van het punt $A$. Deze eigenschap wordt in de (buitenlandse) literatuur meestal de stelling van Bottema [5] genoemd.

**Stelling 3** (stelling van Bottema). Worden op de zijden $AB$ en $AC$ van driehoek $ABC$ vierkanten beschreven en zijn $B_1$ en $C_2$ de hoekpunten daarvan tegenover $A$, dan is het midden $M$ van het lijnstuk $B_1C_2$ onafhankelijk van de ligging van het punt $A$.

Bewijs. Zie figuur 6. De punten $P$, $Q$, $R$, $S$ zijn de projecties van $A$, $B_1$, $C_2$ en $M$ op de lijn $BC$. Eenvoudig is in te zien dat de driehoeken $ABP$ en $BC_2R$ congruent zijn ($ZHH$). Hetzelfde geldt voor de driehoeken $APC$ en $CQB_1$. Uit die congruenties volgt dan: $C_2R = BP$ en $B_1Q = CP$. In het rechthoekig trapezium $QB_1C_2R$ is het lijnstuk $MS$ de middenparallel, zodat: $MS = \frac{1}{2}(C_2R + B_1Q)$.
En dan is ook $MS = \frac{1}{2}(BP + CP) = \frac{1}{2}BC$
Waaruit blijkt dat de ligging van $M$ alleen afhangt van de ligging van de punten $B$ en $C$ ($M$ is het middelpunt van het vierkant op het lijnstuk $BC$).



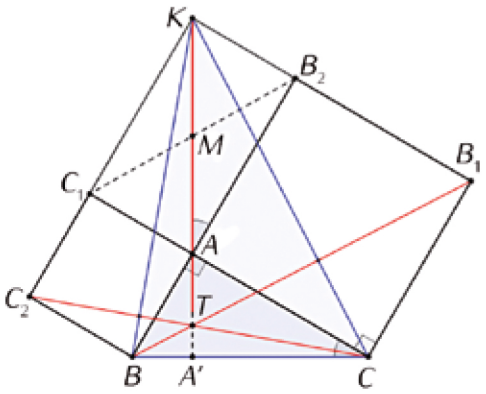

figuur 6

## Intermezzo?

Voordat naar een rechthoekige driehoek wordt overgestapt, kun je in de appendix [1] (paragraaf 3) nog naar twee zelf op te lossen opgaven kijken.

## In een rechthoekige driehoek

En nu toch maar naar een rechthoekige driehoek...




figuur 7

Ook hierbij zijn op de zijden van de in $A$ rechthoekige driehoek $ABC$ vierkanten geplaatst. Het ingevoegde parallellogram, nu een rechthoek, is eveneens weergegeven; en dit alles met de gebruikelijke naamgeving van de punten. We zullen bewijzen:

**Stelling 4**. In de configuratie van figuur 7 geldt:
a. de lijnen $KA$, $BB_1$ en $CC_2$ zijn concurrent;
b. deze lijnen zijn de hoogtelijnen van driehoek $KBC$.

Opmerking. Deze eigenschappen gelden overigens óók in een niet-rechthoekige driehoek. Als je jezelf de gelegenheid wilt bieden even na te denken over het bewijs van deze eigenschappen, dan is nú het moment...
Bewijs. Bij het punt $A$ zijn de hoeken $KAB_2$ en $CAA'$ elkaars complement. In driehoek $A'CA$ is dat het geval met de hoeken $CAA'$ en $ACA'$. Daardoor is: $\angle KAB_2 = \angle ACA'$. Zodat wegens $AK = CB$ (zie het gevolg van stelling 2) blijkt dat de driehoeken $ACK$ en $CB_1B$ congruent zijn ($ZHZ$). Van deze driehoeken staan twee paar overeenkomstige zijden loodrecht op elkaar.[7] En dan is dat ook met het derde paar, te weten $KC$ en $BB_1$, het geval. $BB_1$ is dus hoogtelijn van driehoek $KBC$. En analoog is $CC_2$ dat ook. En van $KA'$ wisten we al eerder dat het een hoogtelijn is. En dat de hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn...

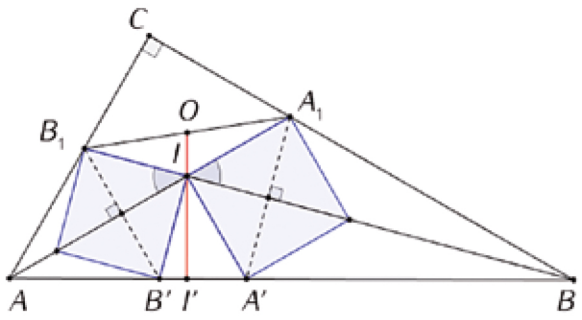
Opmerking. In de appendix [1] (paragraaf 4a) staat een ander bewijs van onderdeel a van stelling 4.

## En ook in Rusland

De aanleiding voor het schrijven van dit artikel is gelegen in het feit dat ik, alweer een tijdje geleden, tegen het volgende probleem aanliep.[8] Van het een kwam zo het ander:

*D. Shvetsov (8 punten): Bisectors $AA_1$ and $BB_1$ of a right triangle $ABC$ ($\angle C = 90^o$) meet at a point $I$. Let $O$ be the circumcenter of the triangle $CA_1B_1$. Prove that $OI \perp AB$.*

Geformuleerd als stelling – en ik noem die maar naar de opsteller van het vraagstuk, zie figuur 8:




figuur 8

**Stelling 5** (stelling van Shvetsov). Zijn in een in $C$ rechthoekige driehoek $ABC$ de punten $A_1$ en $B_1$ de voetpunten van de elkaar in $I$ snijdende bissectrices van de hoeken $A$ en $B$ en is $O$ het midden van $A_1B_1$, dan staat $OI$ loodrecht op $AB$.
Bewijs. Een oplossing kan worden gevonden door toepassing van hetgeen hierboven staat. Maar, zijn in figuur 8

de vierhoeken op hun diagonalen $A_1A'$ en $B_1B'$ inderdaad vierkanten?
Uit 'hoeken jagen' rond het punt $I$ blijkt in ieder geval dat $\angle BIA_1 = \angle AIB_1 = 45^\circ$.
En omdat $AA_1$ en $BB_1$ bissectrices zijn, liggen de spiegelbeelden van $A_1$ en $B_1$ in die bissectrices op $AB$. Dan zijn de driehoeken $IA'A_1$ en $IB'B_1$ gelijkbenig en rechthoekig. Waarmee bovenstaande vraag beantwoord is. Ja, en dan zijn de 8 te behalen punten voor Shvetsovs vraagstuk binnen. We hebben immers vaak genoeg gezien dat $OI$ (dit keer in $I'$) loodrecht staat op $AB$.

Opmerking. In de appendix [1] staat een tweede bewijs van stelling 5. Daarin wordt gebruik gemaakt van enkele elementaire (nou ja...) eigenschappen van de ingeschreven cirkel van een driehoek.


*vakbladeuclides.nl/936klingens*

## Noten

[1] Bij dit artikel is ook een appendix beschikbaar. Zie: *http://vakbladeuclides.nl/936klingens*

[2] En dan is het uit de figuren 1a en 1b ook duidelijk dat $a^2 + b^2$ niet altijd gelijk is aan $c^2$...
In figuur 1b staat Nasr al-Din al-Tusi's (1201-1274) manuscript van Euclides' *Elementen* met de stelling van Pythagoras (Boek I, propositie 47).
Bron Bibliotheek Vaticaan: *http://www.ibiblio.org*
Zie de appendix[1] (paragraaf 6) voor een 'oud' bewijs van de stelling van Pythagoras.

[3] Zie ook: Klingens, D. (2001). *De stelling van Varignon, en meer.* Op de website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/vierh/varignon.htm*

[4] EPF (École d'ingénieur-e-s, Sceaux, Frankrijk): *Concours terminale 1999-2008.*

[5] Naar Oene Bottema (1901-1992), hoogleraar zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool Delft (tegenwoordig TU Delft) van 1941 tot 1971. Een 'echte' dynamische illustratie is te vinden via de volgende link naar de website van Alexander Bogomolny:
*http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/VisualBottema.shtml*
Op die website staat ook het hier gegeven bewijs van de stelling.
Bottema illustreert 'zijn stelling' [6] (ongeveer) als volgt. Iemand heeft een schat begraven op een plek die op gecompliceerde wijze kan worden bepaald. Hij gaat uit van drie gemerkte bomen $A$, $B$ en $C$ en denkt zich $CA$ in negatieve richting om $C$ gedraaid tot $CB_1$ en $BA$ in positieve richting om $B$ tot $BC_2$. Hij kiest het midden $M$ van $B_1C_2$ als bewuste plaats. Als hij later terugkomt is boom $A$ verdwenen. De eerste poging tot opgraving heeft echter reeds succes.

[6] Bottema, O. (1959). *Verscheidenheid XXXVIII.* In: *Verscheidenheden.* Groningen: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren / Wolters Noordhoff (1978), p. 51.

[7] Van deze eigenschap staat in de appendix [1] (paragraaf 4b) een summier bewijs.

[8] Bron: *VI Geometrical Olympiad in honour of I.F. Sharygin*, 2010.
Via: *http://geometry.ru/olimp/2010.php*

# SCHERP, RECHT, STOMP...

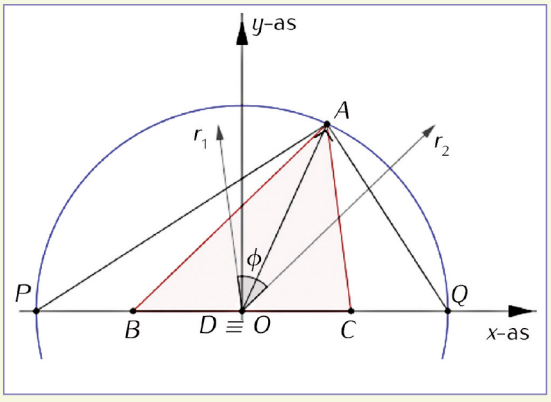
Dick Klingens

De voorloper van *Euclides* uit 1924 inspireerde Dick Klingens tot het componeren van een WDA. Dick kwam een stelling over zwaartelijnen tegen en bewijst die zoals we dat nu kunnen doen.

Op bladzijde 101 van wat nu te boek staat als de derde *Euclides*[1] ooit, lees ik – bij toeval, want ik was op zoek naar iets anders – in het artikel 'Loodrechte stand van lijn en vlak' van de hand van ir. D.J. Kruijtbosch de volgende zinsnede:

behandeld, luidend: „Naarmate in △ ABC de zwaartelijn uit A grooter, gelijk of kleiner is dan de helft van BC, is de hoek A scherp, recht of stomp''. Om deze stellingen te bewijzen zijn

Het is een uitspraak die ik zeker onderschrijf (hoewel, ik zou het woordje 'naarmate' niet gebruiken). Binnen het huidige meetkundeonderwijs, in onder- en bovenbouw van het voortgezet onderwijs, zal de vraag een bewijs te geven van die uitspraak, niet meer gesteld worden, denk ik.
In het kader van Wiskundige Denk Activiteiten (WDA's) geef ik hier toch de volgende opdracht:
*Geef een synthetisch bewijs van bovenstaande uitspraak.*
Maar eerst laat ik een analytisch bewijs volgen, want dat ligt, in ieder geval in de bovenbouw, meer voor de hand.
Ik kies een $xOy$-assenstelsel waarvan de $x$-as langs de zijde $BC$ van de driehoek valt, waarbij $O \equiv D$ ($D$ is het midden van de zijde $BC$). Dan kies ik, zie figuur 1, $A = (p, q)$ in het eerste kwadrant – dat doet de algemene geldigheid van hetgeen volgt geen geweld aan – en $B = (-b, 0)$, met $b > 0$, zodat $C = (b, 0)$.




figuur 1

(1a) Ik veronderstel allereerst dat $OA > \frac{1}{2}BC = OC$. Met $OA = \sqrt{(p^2 + q^2)} = r$ ligt het voor de hand ook de cirkel met middelpunt $O$ en straal $r$ in de beschouwing te betrekken.
Omdat $b = OC < OA = r$ is, snijdt deze cirkel de $x$-as in de punten $P = (-r, 0)$ en $Q = (r, 0)$, waarbij $\angle PAQ = 90^\circ$ (*Thales-cirkel*) en waarbij de punten $B$ en $C$ op het lijnstuk $PQ$ liggen (*beide* binnen de cirkel). Dus: hoek $BAC$ is een scherpe hoek.
(2a) Als $OA = OC$ is, dan vallen de punten $P$, $Q$ samen met de punten $B$, $C$, zodat in dit geval hoek $BAC = \angle PAQ = 90^\circ$; zie onderdeel (1a).
(3a) En als $OA < OC$ is, dan rest dat hoek $BAC$ stomp is (*quartum non datur*).
Maar, ga ik bij het bewijs in (1a) eigenlijk niet te veel af op wat ik *zie* in figuur 1? Moet ik niet *met een berekening* aantonen dat hoek $BAC$ een scherpe hoek is? Welnu.

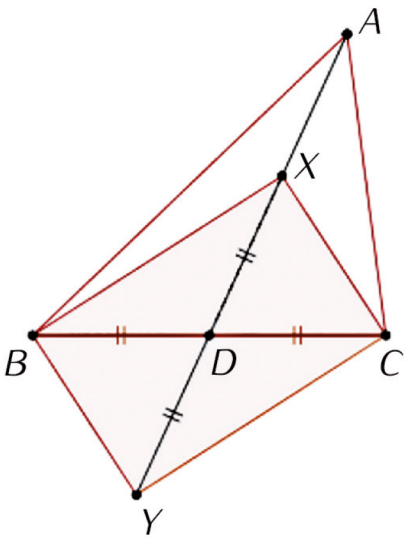
Voor de richtingsvectoren $r_1$ en $r_2$ van $AC$ en $AB$ vind ik:

$$r_1 = r_{AC} = \begin{pmatrix} p-b \\ q \end{pmatrix}, \quad r_2 = r_{AB} = \begin{pmatrix} p+b \\ q \end{pmatrix}.$$

Met $\varphi = \angle(r_1, r_2)$ is dan:

$$\cos\phi = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{p^2 - b^2 + q^2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{r^2 - b^2}{|r_1| \cdot |r_2|}.$$

Omdat in onderdeel (1a) $r > b$ is, is $\cos\varphi > 0$.
En daarmee is $\varphi$ een scherpe hoek, en hoek $A$ dus ook.
Ik vind dat ik bij een synthetisch bewijs *geen* gebruik mag maken van een cirkel (maar waarom eigenlijk?).
Zie daarom nu figuur 2.




figuur 2

(1s) Als $AD > BD$ is, is er een punt $X$ op het lijnstuk $DA$ met $DX = DB = DC$. En dan is in driehoek $BXC$ de zwaartelijn uit $X$ *gelijk* aan de helft van $BC$.
Met het punt $Y$ op het verlengde van $XD$ zó dat $XD = DY$ is, is vierhoek $XBYC$ een rechthoek; immers, de diagonalen $XY$ en $BC$ hebben beide het punt $D$ als midden en hebben dezelfde lengte. Maar dan is $\angle BXC = 90^o$.
De som van de hoeken in de (niet-convexe) vierhoek $ABXC$ is gelijk aan $360^o$. Dan is in die vierhoek: $\angle A + \angle B + \angle C = 360^o - 270^o = 90^o$. Hoek $A$, ook die van driehoek $ABC$, is dan zeker een scherpe hoek.

(2s) Als $AD = BD$ is, dan valt het in onderdeel (1s) geïntroduceerde punt $X$ samen met het punt $A$. In dit geval is $\angle BXC = 90^o = \angle BAC$.

(3s) En is $AD < BD$, dan kan het niet anders dan dat hoek $A$ stomp is.

Aan de opdracht voldaan hebbend, stel ik toch nog wat vragen in het kader van deze WDA.
Is er bij (1s) echt geen gebruik gemaakt van een cirkel?
Is er in het bovenstaande gebruik gemaakt van het feit dat in de figuren 1 en 2 hoek $A$ als een scherpe hoek is weergegeven?
Zo ja, waar is dat het geval? En verloopt het bewijs anders als hoek $A$ als stomp zou zijn weergegeven?

## Noot

[1] Kruytbosch, D.J. (1924). Loodrechte stand van lijn en vlak. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan Onderwijsbelangen. 1*(1), pp. 101-108. Groningen: P. Noordhoff.

Zie het digitale archief van *Euclides: https://archief.vakbladeuclides.nl/jaargang_001.html.*

# MET EN/OF ZONDER COÖRDINATEN_

Dick Klingens

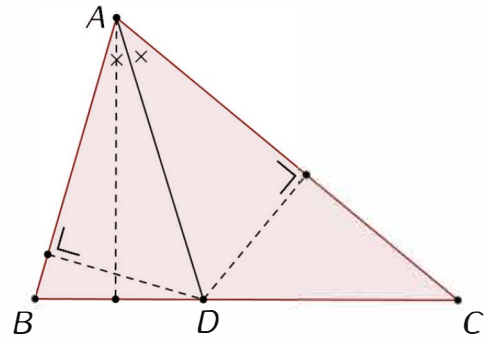
Dick Klingens duikt in het verleden, maar blijft ook in het heden, niet alleen bij het beantwoorden van een vraag van een WisFaq-bezoeker.

## Zo maar een vraag?

In februari 2017 kwam op *WisFaq*[1] de volgende vraag binnen:
*Hoe bewijs ik dat de bissectrice van een hoek van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden? Deze vraag staat al op WisFaq maar ik vind het antwoord niet zonder gelijkvormigheid toe te passen. Alvast bedankt, Dries.*

Het antwoord dat ik gaf, als *WisFaq*-beantwoorder, staat hieronder.

*Dag Dries,*
*Uitgaande van een driehoek ABC waarvan de bissectrice van hoek A de zijde BC snijdt in D, kun je in ieder geval bewijzen dat de oppervlaktes van de driehoeken ABD en ACD zich verhouden als BD : CD (hoe?).*
*Het punt D heeft gelijke afstanden tot AB en AC (waarom?).*
*En dan kun je nog een keer de verhouding van de oppervlaktes van de reeds bekeken driehoeken uitdrukken in twee (andere) zijden van die driehoek.*
*En dan rest jou het netjes formuleren van het bovenstaande en het volledig maken van het bewijs.*



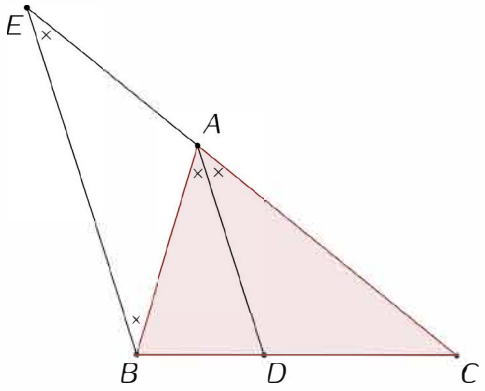

figuur 1

Uiteraard moest er voor de vragensteller ook nog wat te doen blijven, vandaar de twee vragen binnen het antwoord.

Het bewijs dat de oppervlaktes (aangeven met $\phi$) van de deeldriehoeken zich verhouden als $BD : CD$ is natuurlijk standaard en elementair, zie figuur 1:
$\phi(ABD) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BD$
$\phi(ACD) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$
waarin $h$ de lengte is van de hoogtelijn uit $A$ op de zijde $BC$.
Uiteraard is afst$(D, AB)$ = afst$(D, BC) = d$, omdat $D$ een punt is van een bissectrice, en zo'n punt heeft gelijke afstanden tot de benen van de betreffende hoek (het is de meetkundige plaats van alle punten met die eigenschap).
En zo is ook:
$\phi(ABD) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AB$
$\phi(ACD) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AC$
En dan is direct duidelijk dat $BD : CD = AB : AC$.

## Even terug in de tijd

Waarom de vragensteller zo graag een bewijs wilde zonder gelijkvormigheid, is mij niet duidelijk, maar het zou om didactische redenen kunnen zijn (student aan een lerarenopleiding?). Toen ik wat later mijn antwoord nog eens terug las, vroeg ik me af welk bewijs ik zelf voor het eerst zag... Het zal in 1958 geweest zijn, in de tweede klas van de middelbare school.




figuur 2

Ik vond het bewijs terug in een boek van Van der Neut en Holwerda[2], en dat bewijsidee gebruik ik, zie figuur 2.
Op het verlengde van $CA$ ligt het punt $E$ zó dat

$BE \parallel AD$. Daarmee is dan:
$\angle ABE = \angle BAD = \angle DAC = \angle AEB$. Waaruit blijkt dat driehoek $AEB$ gelijkbenig is, met $AB = AE$.
Uit de evenredigheid op de lijnen $CB$ en $CE$ blijkt dan – en dat is het gevolg van de 1e stelling van Thales[3]:
$CD : DB = CA : AE$ of $BD : CD = AB : AC$.
En dit is wat we wilden aantonen.

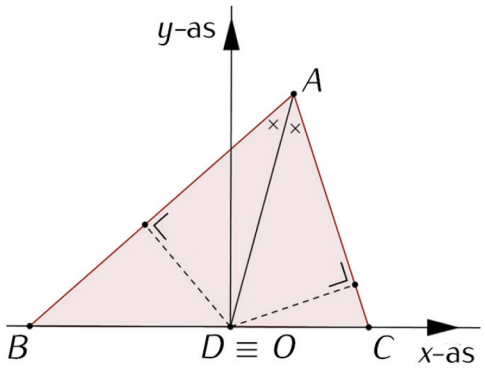
In het bovenstaande bewijs zit natuurlijk gelijkvormigheid van driehoeken verborgen: $CAD \sim CEB$ (hh) waaruit volgt dat $CA : CE = CD : CB$. En volgens een niet zo vaak meer gebruikte eigenschap van evenredigheden is nu ook: $CA : (CE - CA) = CD : (CB - CD)$. En daaruit volgt dan direct de bissectricestelling, die in [2] geformuleerd is als:

**Stelling I**. *Een bisectrix van een driehoek verdeelt de overstaande zijde inwendig in stukken, die zich verhouden als de aanliggende zijden.*[4,5]

Overigens, de omgekeerde bissectricestelling geldt ook:
*De lijn door een hoekpunt van een driehoek en het punt, dat de overstaande zijde inwendig verdeelt in stukken, die evenredig zijn met de aanliggende zijden, is een bisectrix van die driehoek.*

## En weer terug in het heden

In het huidige meetkundecurriculum vinden we stelling I en haar omkering niet meer terug. Maar we kunnen er wel met een modern oog naar kijken. Hier is dat een analytisch oog: coördinaten. Eerst maar het bewijs van de stelling zelf.
We kiezen een rechthoekig assenstelsel $xOy$, met $O \equiv D$ (het voetpunt van de bissectrice van hoek $A$) en waarbij verder de drager van het lijnstuk $BC$ samenvalt met de $x$-as, zie figuur 3.




figuur 3

Stellen we $A = (p, q)$, $B = (-b, 0)$ en $C = (c, 0)$, dan hebben we de vergelijkingen:[6]
$BA$: $y = \frac{q}{p+b}(x + b)$
$CA$: $y = \frac{q}{p-c}(x - c)$
Omdat $O$ op de bissectrice van hoek $A$ ligt, is afst$(O, BA)$ = afst$(O, CA)$; we zagen dat al eerder.

Met de normaalvergelijkingen[7] van de lijnen:

$$BA: \frac{qx-(p+b)y+bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}} = 0,\ CA: \frac{qx-(p-c)y-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}} = 0$$

blijkt dan:

$$\text{afst}(O, BA) = \left|\frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}}\right| = \frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}},$$

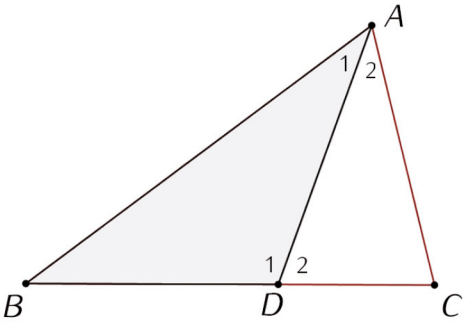
$$\text{afst}(O, CA) = \left|\frac{-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}\right| = \frac{cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}$$

Uit de gelijkheid van deze uitdrukkingen en de formule voor de afstand van twee punten volgt dan:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(p+b)^2+q^2}}{\sqrt{(p-c)^2+q^2}} = \frac{AB}{AC}$$

Waaruit blijkt dat $AB : AC = b : c = OB : OC$. En dat is de bedoelde verhouding op de zijde $BC$ van driehoek $ABC$.

Zullen we het bewijs van de omgekeerde stelling ook met coördinaten leveren? Ik doe het hier niet, maar een bewijs met coördinaten staat in de appendix bij dit artikel. Het is het zojuist geleverde bewijs, maar dan, met enkele aanpassingen, vanaf het eind teruggeschreven. Ik denk dat ik het omgekeerde bewijs in 1958 zélf gegeven heb met een redenering uit het ongerijmde. Ook dát bewijs staat in de appendix. Nee, ik geef een eenvoudig bewijs met behulp van de sinusregel. En dit is eigenlijk wel leuk: in 1958 kon dat niet op deze manier, want de sinusregel kreeg je pas (c.q. al) in de derde klas.



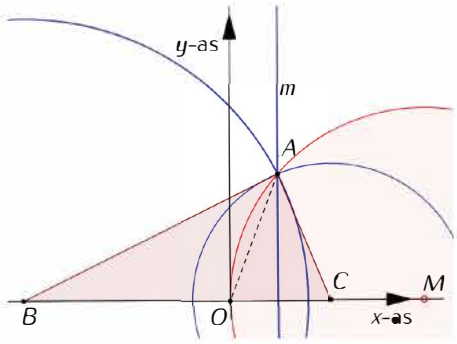

figuur 4

Zie nu figuur 4. In driehoek $ABD$ geldt volgens de sinusregel: $\frac{AB}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin A_1}$, zodat: $AB = \frac{BD \cdot \sin D_1}{\sin A_1}$.
In driehoek $ACD$ is volgens die regel: $\frac{AC}{\sin D_2} = \frac{CD}{\sin A_2}$,
en dus: $AC = \frac{CD \cdot \sin D_2}{\sin A_2}$.
In de omgekeerde stelling is gegeven dat $AB : AC = BD : CD$. Daar komt bij dat $\sin D_1 = \sin D_2$ ($D_1$ en $D_2$ zijn samen 180°), met als gevolg dat $\sin A_1 = \sin A_2$. En daaruit volgt, in dit geval direct, dat $\angle A_1 = \angle A_2$. Met andere woorden: $AD$ is een bissectrice van de driehoek.

## De Apollonius-cirkel

De evenredigheid $AB : AC = b : c$ kunnen we ook schrijven als $AB = k \cdot b$, $AC = k \cdot c$, met $k \neq 0$.
Het punt $A$ is daardoor ook één van de snijpunten van de cirkels:
$(x + b)^2 + y^2 = (kb)^2$
$(x - c)^2 + y^2 = (kc)^2$
We kunnen ons nu afvragen wat de meetkundige plaats is van het snijpunt $A$ van de beide cirkels als $k$ varieert, bij vaste punten $O$, $B$ en $C$. Bekijken we dit met of zonder coördinaten? Ik kies voor *met*.
De coördinaten van het punt $A$ voldoen nu ook aan het stelsel vergelijkingen:

$$S : \begin{cases} (x+b)^2 + y^2 = k^2 b^2 \\ x = \frac{1}{2}(k^2 - 1)(b - c) \end{cases}$$




figuur 5

De laatste vergelijking van $S$ is de vergelijking van de zogeheten machtlijn van beide hierboven genoemde cirkels; in figuur 5 is dat de lijn $m$. En dan voldoen de coördinaten van $A$ óók aan een combinatie van de vergelijkingen van $S$ waarin $k$, en dus ook $k^2$, niet voorkomt. Die vergelijking is dan de vergelijking van de meetkundige plaats.
We elimineren daarom $k^2$ uit beide vergelijkingen:
$k^2 = \frac{2x}{b-c} + 1$, zodat:

$$(x + b)^2 + y^2 = \left(\frac{2x}{b-c} + 1\right) \cdot b^2$$

Na enig rekenwerk aan deze vergelijking vinden we:

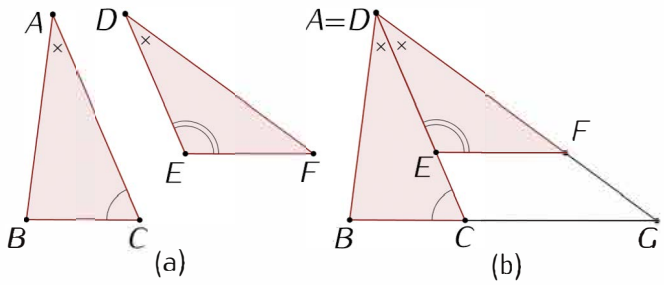
$$\left(x - \frac{b}{b-c}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2 c^2}{(b-c)^2}$$

En dit is de vergelijking van een cirkel, die gaat door het punt $O$ en waarvan het middelpunt $M$ op de $x$-as ligt.
*Opmerking.* Is $E$ het tweede snijpunt van deze cirkel met de $x$-as, dan staat $EA$ loodrecht op $OA$ (2e stelling van Thales). Uiteraard kan dit ook analytisch bewezen worden.

Als we de verhouding $BO : CO$ gelijk aan $r$ stellen ($BO : CO = r : 1$), dan noemen we de gevonden meetkundige plaats de $r$-Apollonius-cirkel op $BC$.[8]
In de appendix staat, naast een korte synthetische behandeling, een eenvoudige constructie van deze cirkel. Verder vindt de lezer daar een korte beschrijving van de (drie) Apollonius-cirkels van een driehoek.

## Terug naar stelling I

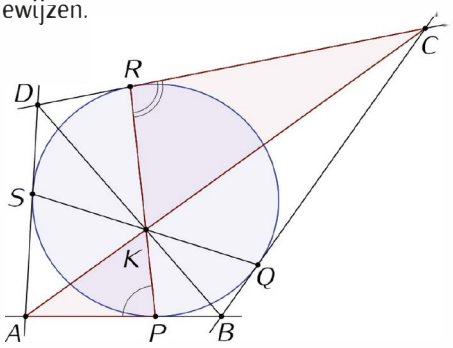
Een niet zo'n bekend, maar eenvoudig gevolg van de bissectricestelling zien we geïllustreerd in figuur 6a.




figuur 6

Van de driehoeken $ABC$ en $DEF$ is $\angle A = \angle D$ en zijn de hoeken $C$ en $E$ elkaars supplement. In deze driehoeken geldt nu:
**Stelling II.** $AB : DF = BC : EF$.
Ten behoeve van het bewijs hiervan plaatsen we de driehoeken tegen elkaar, zoals is weergegeven in figuur 6b. En we vullen aan met de vierhoek $CGFE$ ('natuurlijk' is daarbij $EF \parallel CG$). Nu is, volgens de bissectricestelling in driehoek $ABG$:
$AB : AG = BC : GC$. In driehoek $DCG$ ($\equiv ACG$) geldt, mede op grond van de 1e stelling van Thales:
$DG : DF = CG : EF$.
Vermenigvuldiging van beide evenredigheden geeft nu:
$\frac{AB}{AG} \cdot \frac{DG}{DF} = \frac{BC}{GC} \cdot \frac{CG}{EF}$. En hier staat niets anders dan hetgeen we wilden aantonen, omdat immers $AG \equiv DG$ is.

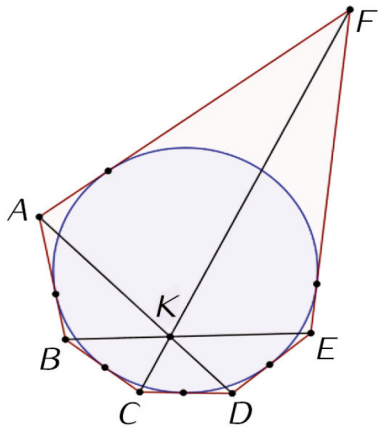
Ik heb deze eigenschap ooit eens (en dat was heel wat jaren ná 1958) gebruikt om de volgende stelling te bewijzen.




figuur 7

**Stelling III.** *Van een raaklijnenvierhoek gaan de diagonalen en de verbindingslijnen van 'overstaande' raakpunten door hetzelfde punt*[9].
In figuur 7 staat de raaklijnenvierhoek $ABCD$.

De punten $P$, $Q$, $R$, $S$ zijn de raakpunten van de incirkel van die vierhoek met de zijden. We willen nu aantonen dat de lijnen $AC$, $BD$, $PR$, $QS$ concurrent zijn in het punt $K$.
We nemen eerst $K = PR \,\&\, AC$[10]. In de driehoeken $APK$ en $CRK$ zijn de hoeken bij $K$ aan elkaar gelijk, terwijl de hoeken bij $P$ en $R$ elkaars supplement zijn. Immers:
$\angle P = \frac{1}{2}$ bg($PSR$) en $\angle R = \frac{1}{2}$ bg($RQP$).
Conform stelling II is dan $AP : CR = KA : KC$.
Met $K' = AC \,\&\, KS$ vinden we analoog
$AS : CQ = K'A : K'C$.
Omdat $AP = AS$ en $CQ = CR$ (raaklijnstukken aan de incirkel) vinden we op het lijnstuk $AC$ de evenredigheid
$KA : KC = K'A : K'C$.
En daaruit volgt dat $K \equiv K'$.
Met eenzelfde redenering blijkt dan dat $K$ ook op het lijnstuk $BD$ ligt. En daarmee zijn de in stelling III bedoelde lijnen concurrent.




figuur 8

Meestal wordt stelling III bewezen met een bijzondere vorm van de (uit de projectieve meetkunde bekende) stelling van Brianchon[11], zie figuur 8.
**Stelling IV**. *Als een zeshoek om een cirkel beschreven is, dan zijn de lijnen die overstaande hoekpunten verbinden, concurrent.*

De bijzondere vorm wordt hierbij bereikt door twee (handig gekozen) hoekpunten van de zeshoek ook op de cirkel te plaatsen; die hoekpunten vallen dan samen met de beide 'naastgelegen' raakpunten.[12]
Of het bewijs van stelling IV ook met gebruik van coördinaten kan, heb ik niet onderzocht.

Een appendix bij dit artikel is te vinden op de *Euclides*-site.

*vakbladeuclides.nl/945klingens*

## Noten

[1] WisFaq is een internet-vraagbaak voor leerlingen in het voortgezet onderwijs in Nederland en in het secundair onderwijs in België. Zie voor de betreffende WisFaq-pagina: *http://www.wisfaq.nl/showrecord3.asp?id=83943*
[2] Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956) *Meetkunde, Tweede Deel*. Groningen: J.B. Wolters.
[3] Naar verluidt zijn er twee stellingen die door Thales van Milete (±624-545 v.Chr., Griekenland) zijn gevonden. De eerste betreft de projectie door evenwijdige lijnen, de tweede zegt dat de grootste zijde in een rechthoekige driehoek een middellijn is van de omcirkel van die driehoek. De bedoelde eerste stelling luidt in [2]: *De stukken die drie evenwijdige lijnen van twee snijlijnen afsnijden, vormen een evenredigheid.*
[4] Het woord 'bisectrix' is Latijn. Dat dit woord de vrouwelijke uitgang 'trix' heeft, is gelegen in het feit dat het een lijn is, en dat woord is in het Latijn vrouwelijk: linea. Het hier, en meestal door ons, gebruikte 'bissectrice' is direct ontleend aan het Frans. Waarom gebruiken we in het Nederlands niet gewoon 'deellijn'?
[5] Het woord 'inwendig' betekent in deze context 'op het lijnstuk zelf liggend'.
[6] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs aan te tasten kunnen we stellen dat $a, b, c > 0$ en $p, q > 0$.
[7] In de appendix staat een afleiding van de normaal-vergelijking van een lijn.
[8] Genoemd naar Apollonius van Perga (±262-190 v.Chr., Griekenland).
[9] In de appendix staat een paragraaf als toegift met betrekking tot raaklijnenvierhoeken.
[10] De notatie $X = l \,\&\, m$ betekent: de meetkundige objecten $l$ en $m$ hebben het punt $X$ als snijpunt.
[11] Naar Charles Julien Brianchon (1785-1864, Frankrijk).
[12] Zie eventueel verder: Dick Klingens (2004): *De stellingen van Pascal en Brianchon voor cirkels*. Website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/pascal.htm*

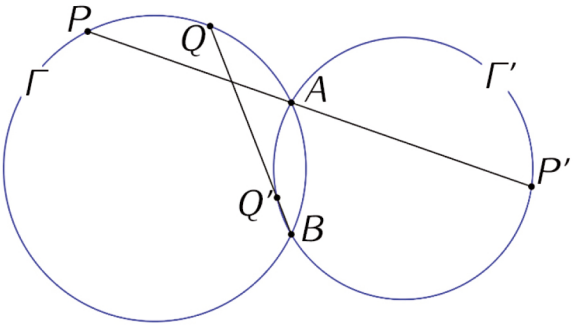
# TWEE MEETKUNDIGE MINIATUREN

Dick Klingens

Dubbelkoorden en halve-dubbelkoordencirkels kunnen gebruikt worden om de bewijzen te leveren van de meetkundige 'miniaturen' aan het einde van het artikel.

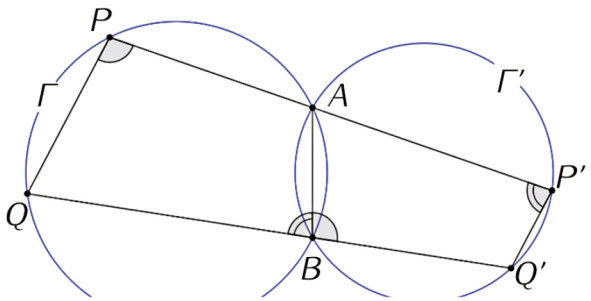
## Inleiding

Iedereen heeft het wel eens: je hebt iets gelezen of gezien en je vindt dat ook anderen daarvan kennis zouden moeten nemen. Bij mij is dat soms het geval met meetkundige 'miniaturen'. Vandaar dit artikel, waarin ik aan het eind twee van die miniatuurtjes laat zien.[1]
Maar eerst wat 'hulpmiddelen' om de (nieuwe?) kennis wat makkelijker tot je te kunnen nemen...



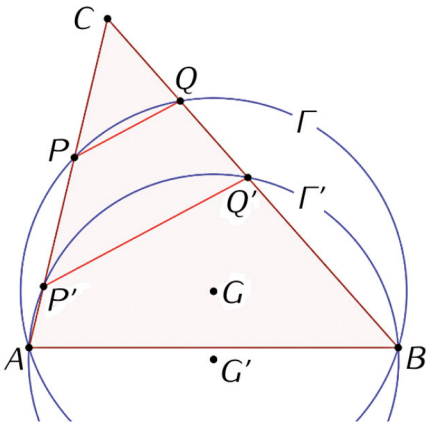

figuur 1

In figuur 1 staan twee elkaar in de punten $A$ en $B$ snijdende cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$. Een lijnstuk als $PP'$ noem ik hier *dubbelkoorde* (notatie: $PAP'$ ), omdat het ene eindpunt van het lijnstuk op $\Gamma$ en het andere op $\Gamma'$ ligt, én omdat $A$ (c.q. $B$) *op* het lijnstuk ligt. Ook $QBQ'$ is een dubbelkoorde: $Q$ op $\Gamma$, $Q'$ op $\Gamma'$ en $B$ op een verlengde van het lijnstuk $QQ'$. En wat de notatie betreft: bij een dubbelkoorde staat de naam van een 'cirkelsnijpunt' dus *altijd* tussen de namen van de eindpunten van het lijnstuk.
Een eerste eigenschap is geïllustreerd in figuur 2: als $PAP'$ en $QBQ'$ twee dubbelkoorden van $\Gamma$ en $\Gamma'$ zijn, dan is $PQ$ evenwijdig met $P'Q'$.




figuur 2

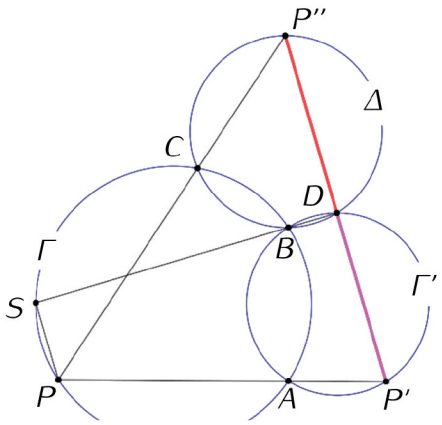
Het bewijs is redelijk elementair. Het ligt voor de hand het lijnstuk $AB$ te tekenen en dan te kijken naar de koordenvierhoeken $PQBA$ en $P'Q'BA$.
Nu is: $\angle APQ = \angle ABQ'$ en $\angle AP'Q' = \angle ABQ$ (*binnenhoek* en *overstaande buitenhoek*)
waaruit blijkt dat:
$\angle APQ + \angle AP'Q' = 180^\circ$
Deze hoeken zijn 'binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn $PP'$ van de lijnen $PQ$ en $P'Q'$. En dus is:
$PQ \parallel P'Q'$.
De eigenschap wordt ook wel eens de 'stelling van Reim' genoemd.[2]




figuur 3

Een toepassing van de stelling van Reim staat in figuur 3: twee cirkels die beide door de hoekpunten $A$ en $B$ van een driehoek $ABC$ gaan, snijden de zijden $CA$ en $CB$ met evenwijdige koorden $PQ$ en $P'Q'$.[3]

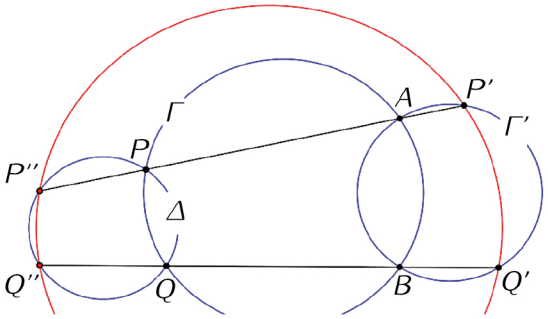
Als je aan twee snijdende cirkels nog een derde cirkel toevoegt die door één van de snijpunten van de eerste twee gaat én beide snijdt, dan ontstaat een configuratie als in figuur 4 (p. 36).




figuur 4

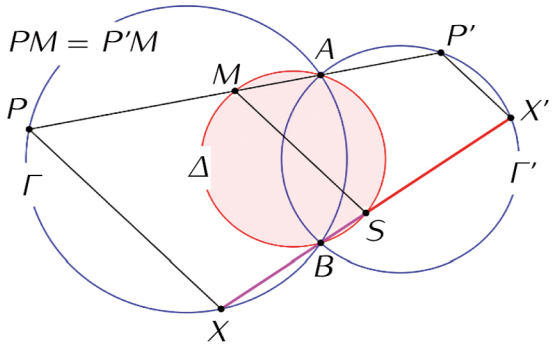
Cirkel $\Delta$, die gaat door het snijpunt $B$ van de cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$, is de toegevoegde cirkel. De andere snijpunten van $\Delta$ met die cirkels zijn $C$ en $D$. Het punt $P$ ligt *willekeurig* op $\Gamma$ en $PAP'$ is een dubbelkoorde (van $\Gamma$ en $\Gamma'$), evenals $PCP''$ (van $\Gamma$ en $\Delta$). De bewering "dan is P'DP" een dubbelkoorde van $\Gamma'$ en $\Delta$" vraagt natuurlijk om een bewijs!
En dat bewijs volgt nu.
Ik teken de dubbelkoorde $DBS$ van $\Gamma'$ en $\Gamma$. Volgens de stelling van Reim is nu $DP' \,//\, PS$ (let wel, $DP'$ is een lijnstuk). De lijnstukken $PCP''$ en $SBD$ zijn dubbelkoorden van $\Gamma$ en $\Delta$. En hier is volgens die zelfde stelling $PS \,//\, DP''$ (ook $DP''$ is een lijnstuk). We hebben dus twee lijnstukken die evenwijdig zijn aan hetzelfde lijnstuk, dus hebben we ook *twee lijnen* (namelijk de drager van $DP'$ en de drager van $DP''$) die evenwijdig zijn met *dezelfde lijn* (namelijk met de drager van $PS$).
Het komt niet zo vaak voor dat in een bewijs een beroep op het 5e postulaat van Euclides nodig is: door een punt (hier is dat $D$) buiten een lijn (hier is dat de drager van $PS$) gaat precies één lijn die evenwijdig is met die lijn.[4] Dus is $\angle P'DP'' = 180^\circ$, waarmee bewezen is dat $P'DP''$ inderdaad een dubbelkoorde is.[5]

Natuurlijk kan zo'n derde cirkel ook op een andere manier worden toegevoegd. In figuur 5 gaat de cirkel $\Delta$ door de eindpunten ($P$ en $Q$) van twee dubbelkoorden ($PAP'$ en $QBQ'$) die op *dezelfde* cirkel $\Gamma$ liggen. De punten $P''$ en $Q''$ zijn daarbij dan weer eindpunten op $\Delta$ van $P''PA$ en $Q''QB$. En dan is er zoals blijkt direct een vierde cirkel.



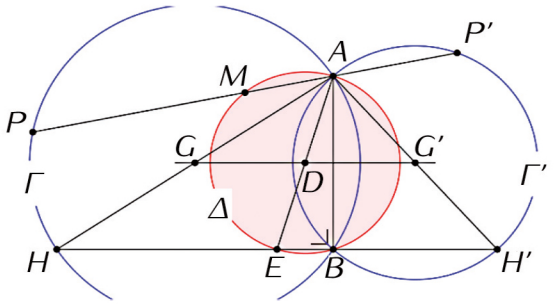

figuur 5

Een bewijs van het concyclisch zijn van de punten $P'$, $Q'$, $P''$, $Q''$ staat in paragraaf 3 van de appendix bij dit artikel.[1] Hetzelfde bewijs staat trouwens ook in de referentie die vermeld is in[2].
Zo'n derde cirkel kan natuurlijk ook door de snijpunten $A$, $B$ van $\Gamma$ en $\Gamma'$ gaan. Ik doe dat als volgt; zie figuur 6. Ik kies een dubbelkoorde $PAP'$ en bepaal het midden $M$ van het lijnstuk $PP'$. De toegevoegde cirkel $\Delta$ is dan de cirkel door $A$, $B$ en $M$.



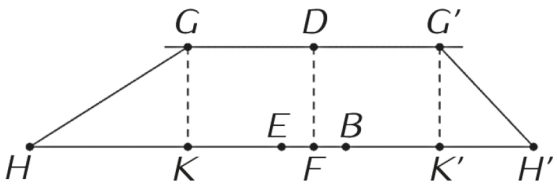

figuur 6

Tja, en als ik dan een andere, willekeurige dubbelkoorde bekijk, bijvoorbeeld $XBX'$ waarbij[6] $S = XX' \,\&\, \Delta$, dan rijst onmiddellijk de vraag of $S$ wellicht het midden is van het lijnstuk $XX'$. Het antwoord is 'ja', en het bewijs daarbij is zeker niet ingewikkeld.
Volgens de stelling van Reim, toegepast op de dubbelkoorden $PAP'$ en $XBX'$ (van $\Gamma$ en $\Gamma'$), is $PX \,//\, P'X'$, zodat vierhoek $PXX'P'$ een trapezium is. Volgens die zelfde stelling, nu toegepast op de dubbelkoorden $PAM$ en $XBS$ (van $\Gamma$ en $\Delta$), is $PX \,//\, MS$, en daarmee is $MS$ de middenparallel in dat trapezium. Dus: $S$ is het midden van $XX'$. Met andere woorden: van alle dubbelkoorden $XBX'$ ligt het midden op de cirkel $\Delta$.




figuur 7

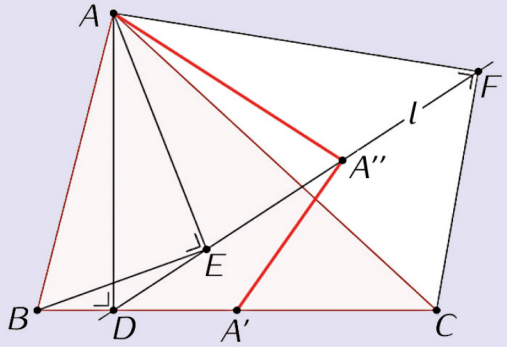
Om de ligging van het middelpunt $D$ van de cirkel $\Delta$ te vinden kijk ik naar een bijzondere dubbelkoorde in figuur 7. Allereerst: is $G$ het middelpunt van $\Gamma$ en $G'$ dat van $\Gamma'$, dan zijn $D$, $G$, $G'$ collineair; ze liggen immers alle drie op de middelloodlijn van het lijnstuk $AB$.
Zijn nu $H$, $H'$ en $E$ de tegenpunten van $A$ op $\Gamma$, van $A$ op $\Gamma'$ en van $A$ op $\Delta$, dan liggen die punten ook op de dubbelkoorde $HBH'$, omdat de driehoeken $AHB$, $AH'B$ en $AEB$ alle rechthoekig zijn in $B$ (*cirkelstelling van Thales*). Daarbij komt: $GG'$ is een middenparallel in driehoek $AHH'$. De punten $G$, $D$, $G'$ liggen óók op de middelloodlijnen van de lijnstukken $HB$, $EB$ en $BH'$.




figuur 8

Zie nu figuur 8. Daarin zijn $K$, $F$, $K'$ de loodrechte projecties van $G$, $D$, $G'$ op $HH'$. Omdat $E$ het midden is van $HH'$, is $KF = K'F$ (neem even de tijd om te controleren!). En dan is in de rechthoek $KK'G'G$ het punt $D$ het midden van $GG'$. Daarmee is aangetoond dat het middelpunt $D$ van $\Delta$ samenvalt met het midden van de centraal $GG'$ van de cirkels $\Gamma$ en $\Gamma'$.
Ik noem de cirkel die gaat door de middens van de dubbelkoorden van twee 'cirkels van Reim' – en dat zijn steeds snijdende cirkels – de *hdk-cirkel* ('halve-dubbelkoordencirkel' [7]) van die cirkels.
Genoeg over de hulpmiddelen. Tijd voor de beloofde miniaturen.

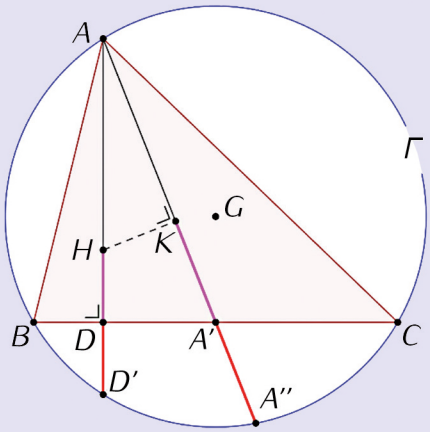
## Miniatuur 1




figuur 9

Zie figuur 9. Gegeven is een driehoek $ABC$ waarvan $AD$ een hoogtelijn is. De lijn $l$ gaat door $D$ en is verder willekeurig. $E$ ligt zó op $l$ dat $AE \perp BE$, en $F$ ligt zó op $l$ dat $AF \perp CF$. $A'$ is het midden van $BC$, $A''$ is het midden van $EF$.
Toon aan dat $AA'' \perp A'A''$.

## Miniatuur 2




figuur 10

Zie figuur 10. Van driehoek $ABC$ met omcirkel $\Gamma$ (middelpunt $G$) is $AA'$ een zwaartelijn, waarbij verder $A'' = A' \& \Gamma$. Het punt $K$ is de loodrechte projectie van het hoogtepunt $H$ op die zwaartelijn.
Toon aan dat $A'$ het midden is van het lijnstuk $KA''$.

Bij de oplossing van dergelijke problemen moet je natuurlijk de juiste hulpmiddelen kiezen, deels aan de hand van herkenbare zaken in de figuur. Welnu, in miniatuur 1 zitten in ieder geval drie rechthoekige driehoeken en er wordt gesproken over middens van lijnstukken.
In miniatuur 2 zijn er ook drie rechthoekige driehoeken te herkennen. En een bekende eigenschap in de figuur is dat $D$ het midden is van het lijnstuk $HD'$. Verder moet er bij een tweede lijnstuk iets bewezen worden over het midden ervan.
Het gebruik van de *hdk-cirkel* ligt dus bij beide miniaturen voor de hand.
De oplossing van beide problemen is te vinden in paragraaf 4 van de appendix.[1] In paragraaf 5 van die appendix staat trouwens ook een *analytisch* bewijs van het feit dat de *hdk-cirkel* de meetkundige plaats is van de middens van de dubbelkoorden van twee snijdende cirkels.

De appendix is te downloaden van:

*vakbladeuclides.nl/946klingens*

## Noten

[1] De appendix bij dit artikel is te downloaden van de *Euclides*-site: https://nvvw.nl/euclides/

[2] Naar Anton Reim (1832-1922, Duits Bohemen/Sudetenland). Zie ook: Klingens, D. (2015). *Cirkels van Reim*. Ongepubliceerd artikel; elektronisch beschikbaar via: *http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/CirkelsVanReim_vs2.pdf*
In [1] staat ook het bewijs van de omgekeerde stelling van Reim (paragraaf 1).

[3] F.G.-M. (1920). *Exercices de Géométrie*. Parijs: Rééditions Jacques Gabay (1991), p. 283, théorème 124.

[4] Dit is het zogeheten *parallellenpostulaat*. Hier is dat postulaat tekstueel vervangen door het zogenoemde *axioma van Playfair*, dat met het door Euclides geformuleerde (5e) postulaat equivalent is.

[5] Wat hier bewezen is, is eigenlijk de 'stelling van Miquel', door Auguste Miquel (1816-1851, Frankrijk) gepubliceerd in 1844. Deze stelling luidt, refererend aan figuur 4: Gaan drie elkaar snijdende cirkels $\Gamma$, $\Gamma'$, $\Delta$ door hetzelfde punt $B$, zijn $A$, $C$, $D$ de andere snijpunten, is $P$ een *willekeurig* punt van $\Gamma$, en is (zie ook [6]) $P' = PA \,\&\, \Gamma'$, $P'' = PC \,\&\, \Delta$, dan zijn $D$, $P'$, $P''$ collineair.
In paragraaf 2 van [1] staat een bewijs van de *omgekeerde* stelling van Miquel, alleen gebaseerd op koordenvierhoeken.

[6] In hetgeen volgt betekent $P = X \,\&\, Y$: het punt $P$ is het (c.q. een nog niet benoemd) snijpunt van de meetkundige objecten $X$ en $Y$.

[7] Een naam voor de bedoelde cirkel zou 'midden-cirkel' kunnen zijn. Echter, die naam is in de Nederlandse wiskundeliteratuur reeds aan een andere bijzondere cirkel toegekend (en dus niet alleen aan een deel van de belijning van een sportveld). Zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Middencirkel_%28meetkunde%29*

Dick Klingens

# (Het gevolg) van krassen met formules

Goniometrische identiteiten: er zijn nogal wat leerlingen die daar niet blij van worden. Maar je kunt er wel mooi mee goochelen. ‘Krassen’ noemt Dick Klingens dat. Het levert verrassende resultaten op!

## Inleiding

Allereerst een toelichting op het woordje ‘krassen’ in de titel. Ik vond in een oud goniometrieboek een blaadje met enkele handgeschreven goniometrische identiteiten, deels met bewijzen ervan, waarin heel wat doorhalingen zaten. Naar ik vermoed wilde ik die identiteiten gebruiken in repetities – toen goniometrie nog (samen met analytische meetkunde) een apart (in de betekenis zelfstandig) vak was. De doorhalingen, het kraswerk, laat ik in hetgeen volgt weg. *Krassen* in het oud-Grieks is *grafein* (γράφειν), maar dit laatste werkwoord heeft ook de betekenis *schrijven*.
En ook: de (grootte van de) hoeken van de driehoek $ABC$, waarin zich het allemaal zal afspelen, geef ik aan met de letters $A$, $B$ en $C$. Dat zal naar ik verwacht geen verwarring geven, ook niet als ik daarbij de meeste overbodige spaties weglaat (zonder die kun je het ook wel lezen). Toen ik dit artikel met pen op papier had gezet, stonden die spaties er in de meeste gevallen ook niet.

## I

In elke driehoek $ABC$ is:
$\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B) =$
$\sin A\cos B + \cos A\sin B$
Gekwadrateerd geeft dat – en waarom ik dat doe, blijkt hierna:

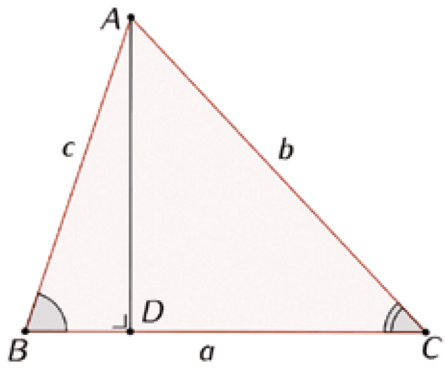
$$\begin{aligned}\sin^2 C &= \sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\\ &= \sin^2 A(1 - \sin^2 B) + \sin^2 B(1 - \sin^2 A) + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\\ &= \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\end{aligned}$$

Dan blijkt:

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C &= 2\sin A\sin B(\sin A\sin B - \cos A\cos B)\\ &= -2\sin A\sin B\cos(A + B) = -2\sin A\sin B\cos(180^\circ - C)\\ &= 2\sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

Ik zeg: een niet onaardig, en *bijna* symmetrisch, homogeen resultaat.[1]
Maar natuurlijk is de sinusregel ook bekend:
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$, zodat $\sin A = ka$, $\sin B = kb$, $\sin C = kc$.[2]
Na substitutie en ordening volgt uit het bovenstaande het aardige resultaat:
$k^2(a^2 + b^2 - c^2) = 2k^2ab \cdot \cos C$ zodat: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C$
En al dit ‘gekras’ leidt dus tot de cosinusregel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.
Als afleiding weer eens een wat andere afleiding. Of ook, de cosinusregel bewezen met de sinusregel.

Een toegiftje hierbij. In diezelfde driehoek is:
$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$
Dan is, omdat ook deze identiteit homogeen [1] is in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$: $a = b\cos C + c\cos B$.
Die uitdrukking komt natuurlijk bekend voor!
Zeker als je naar figuur 1 kijkt.




*figuur 1*

II

Niet vreemd in een driehoek is natuurlijk:
$\sin(A + B + C) = 0$.
En dan is:

$$\begin{aligned}\sin((A + B) + C) &= \sin(A + B)\cos C + \cos(A + B)\sin C\\ &= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C + (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\sin C\\ &= 0\end{aligned}$$

Dit resultaat is niet verrassend. Maar wat mij wel verraste – na een iets andere ordening – is de symmetrie in: $\sin A\sin B\sin C = \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C$.

III

Ik gebruik bij het hierna volgende gekras een van de zogeheten *prosthaphaeresis-formules* (ook wel formules van Simpson genoemd)[3], [4], namelijk: $\frac{1}{2}\sin X + \frac{1}{2}\sin Y = \sin\frac{1}{2}(X + Y)\cos\frac{1}{2}(X - Y)$.
Ik ga uit van $F = T(A, B, C) + T(B, C, A) + T(C, A, B)$, waarin $T(X, Y, Z) = \sin^3 X\cos(Y - Z)$.

Dan is:

$$\begin{aligned}T(A, B, C) &= \sin^3 A\cos(B - C) = \sin^2 A\sin A\cos(B - C) = \sin^2 A\sin(B + C)\cos(B - C)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin^2 A(\sin(2B) + \sin(2C))\\ &= \sin 2A(\sin B\cos B + \sin C\cos C)\end{aligned}$$

En *mutatis mutandis*:
$T(B, C, A) = \sin 2B(\sin C\cos C + \sin A\cos A)$ en
$T(C, A, B) = \sin 2C(\sin A\cos A + \sin B\cos B)$
Een uitdrukking van $F$ in termen van 'sin' (en eerst ook nog 'cos') is gemakkelijk gevonden:

$$\begin{aligned}F &= \sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A) + \sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \sin C\sin A(\sin C\cos A + \sin A\cos C)\\ &= \sin A\sin B\sin(A + B) + \sin B\sin C\sin(B + C) + \sin C\sin A\sin(C + A)\\ &= 3\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

IV

Naar aanleiding van mijn gekras in paragraaf I kwadrateer ik ook:
$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$
Dus:

$$\begin{aligned}\cos^2 C &= \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\\ &= \cos^2 A\cos^2 B + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\\ &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + 2\cos^2 A\cos^2 B - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\end{aligned}$$

Zodat:

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 + 2\cos A\cos B(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\\ &= 1 + 2\cos A\cos B\cos(A + B)\\ &= 1 - 2\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

Leuk toch?

V

En dan is het zeker ook fijn om te weten dat:
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$
Reken maar na!

## Noten

[1] Een relatie als $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$ heet 'homogeen in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$' omdat de relatie onafhankelijk is van $k$ als tegelijk $\sin A$ door $k \cdot \sin A$, $\sin B$ door $k \cdot \sin B$ én $\sin C$ door $k \cdot \sin C$ worden vervangen.

[2] Als $R$ de lengte is van de straal van de omgeschreven cirkel van de beschouwde driehoek, dan is $1/k = 2R$.

[3] Zie bijvoorbeeld: Klingens, K. (2013). Gonio – Prosthaphaeresis. *Euclides, 89*(3), pp. 23-24.

[4] WikipediA NL: *Lijst_van_goniometrische_gelijkheden*.
Via: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_goniometrische_gelijkheden

Dick Klingens

# De Stelling van Stewart

Vergeten stellingen, daar zou je de stelling van Stewart onder kunnen rekenen. Aan de hand van drie opdrachten (uitdaging: probeer ze eerst zelf...) laat Dick Klingens de charme van de stelling van Stewart zien.

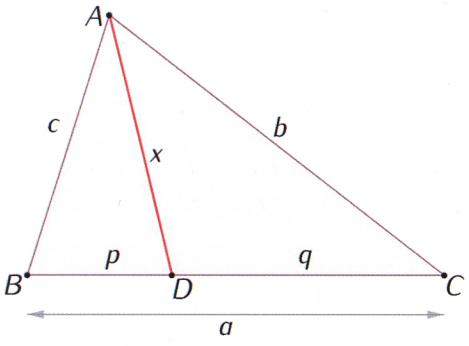
## Drie opdrachten

**PROPOSITION II.**

*In the right line* AB *take any point* C *between the points* A, B; *and from the points* A, B, C *let there be drawn right lines to any point* D; *the square of* AD *together with the space to which the square of* BD *has the same ratio that* BC *has to* CA, *will be equal to the rectangle* BAC *together with the space to which the square of* CD *has the same ratio that* BC *has to* BA.

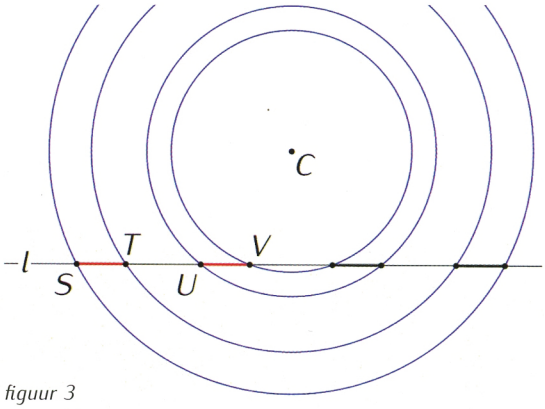
*figuur 1*

**Opdracht 1** Geef in een formule weer wat in de tekst van figuur 1 staat.[1]




*figuur 2*

**Opdracht 2** Zie figuur 2, waarin de namen van de punten afwijkend zijn van die welke beschreven zijn in figuur 1. Op de zijde $BC$ van driehoek $ABC$ ligt het (willekeurige) punt $D$. Druk het kwadraat van de lengte $x$ van het lijnstuk $AD$ uit in de lengtes $a$, $b$, $c$ van de zijden van de driehoek en de lengtes $p$, $q$ van opvolgend $BD$, $CD$.

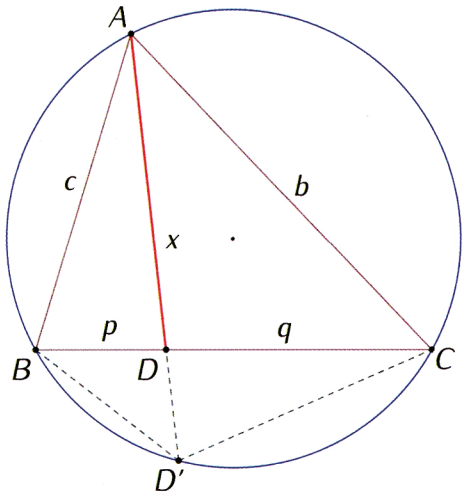



*figuur 3*

**Opdracht 3** Gegeven zijn vier concentrische cirkels met middelpunt $C$. Construeer een rechte lijn $l$ die de cirkels opvolgend zo in de punten $S$, $T$, $U$, $V$ snijdt dat $ST = UV$, zie figuur 3.

De tekst in figuur 1 staat op bladzijde 2 en 3 van het boek *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* dat in 1746 verscheen van de hand van de Schotse wiskundige Matthew Stewart (1717-1785).
Het antwoord op opdracht 2 is tevens het bewijs van de propositie in figuur 1: *de stelling van Stewart*. En opdracht 3 heeft natuurlijk met (een gevolg van) die stelling te maken (zie de paragraaf '"Stewart" in een vierhoek').
Of en hoe de opdrachten door elke individuele lezer zullen zijn uitgevoerd, is natuurlijk niet te voorspellen, maar zeker is dat er tenminste twee redelijk elementaire

bewijzen van de stelling bestaan: een bewijs gebaseerd op de stelling van Pythagoras (herhaald toegepast) en een bewijs dat gebruik maakt van de cosinusregel in bijvoorbeeld de driehoeken $ABD$ en $ABC$ in figuur 2; zie hiervoor paragraaf 2 in de appendix.
Ik vermoed dat er weinig lezers zijn die voor het bewijs gedacht hebben aan de stelling van Ptolemaeus: *Is een vierhoek ingeschreven in een cirkel, dan is de som van de producten van de paren overliggende zijden gelijk aan het product van de diagonalen.*[2]



*figuur 4*

In figuur 4 is $ABD'C$ een koordenvierhoek. $D$ is hier het snijpunt van de diagonalen $AD'$ en $BC$. Volgens de stelling van Ptolemaeus is dan in die vierhoek:
$AC \cdot BD' + AB \cdot CD' = BC \cdot AD'$ (1)

Op grond van de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken $BD'D$ en $ACD$ is:
$BD' : AC = BD : AD$ en $D'D : CD = BD : AD$
zodat: $BD' = bp / x$ en $DD' = pq / x$.
En uit de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken $CD'D$ en $ABD$ blijkt:
$CD' : AB = CD : AD$ zodat: $CD' = cq / x$.
Relatie (1) gaat nu door substitutie van $BD'$, $DD'$, $CD'$ over in:

$$b\cdot\frac{bp}{x}+c\cdot\frac{cq}{x}=a\left(x+\frac{pq}{x}\right) \qquad (2)$$

Worden het linker- en rechterlid van (2) vermenigvuldigd met $x$, dan is: $b^2p + c^2q = x^2a + apq$.
Na rangschikking geeft dit de (min of meer) gebruikelijke *formule van Stewart* [3]:
$x^2a = b^2p + c^2q - apq$ (3)

## Twee zijden tot de $n$-de macht

De ligging van het punt $D$ op het lijnstuk $BC$ kan ook afhankelijk zijn van de lengtes van de zijden $AB$ en $AC$ van de driehoek. Als bijvoorbeeld $BD : CD = c^n : b^n$ is, met gehele $n \geq 0$, dan is:

$$BD=p=\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot a \text{ en } CD=q=\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot a \qquad (4)$$

Formule (3) geeft dan door toepassing van (4):

$$x^2=\frac{1}{a}\left(\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot ab^2+\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot ac^2\right)-pq=$$
$$\frac{b^2c^n+b^nc^2}{b^n+c^n}-pq=\frac{b^nc^n}{b^n+c^n}(b^{2-n}+c^{2-n})-pq \qquad (5)$$

Met formule (5) kan dan voor $n = 0, 1, 2$ de lengte van $x^2 = AD^2$ worden berekend.

### $n = 0$

In dit geval is $BD : CD = c^0 : d^0 = 1 : 1$. Dan is het punt $D$ het midden van de zijde $BC$ en is $AD$ de $A$-zwaartelijn (de zwaartelijn door het hoekpunt $A$) met lengte $z_a$ van de driehoek, zodat:
$z_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$ (dit is de zwaartelijnformule) (6)

Opmerking. Uit (6) volgt een mooie relatie tussen de lengtes van de zwaartelijnen en de zijden:

$$z_a^2+z_b^2+z_c^2=$$
$$(\tfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\tfrac{1}{4}a^2)+(\tfrac{1}{2}(c^2+a^2)-\tfrac{1}{4}b^2)+(\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{4}c^2)=$$
$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

### $n = 1$

Nu is $BD : CD = c : b$. Het lijnstuk $AD$ is dan de $A$-bissectrice met lengte $d_a$ van de driehoek. Zodat:
$d_a^2=bc-pq$ (dit is de bissectriceformule). (7)

Opmerking. Omdat $p$ en $q$ met de relaties (4) ook uit te drukken zijn in $a$, $b$ en $c$, is relatie (7) als volgt te schrijven:

$$d_a^2=bc-\frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ba}{b+c}=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

### $n = 2$

Niet zo bekend is dat als $BD : CD = c^2 : b^2$ is, het punt $D$ het snijpunt is van de $A$-symmediaan van de driehoek (met lengte $m_a$) met de zijde $BC$. Een symmediaan van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice die door hetzelfde hoekpunt gaat als die zwaartelijn.

Met relatie (5) is in dit geval:

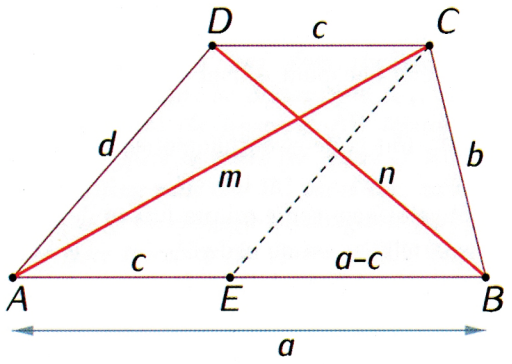
$$m_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}(1+1) - \frac{ac^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{ab^2}{b^2+c^2} =$$

$$\frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}(2b^2+2c^2-a^2) \qquad (8)$$

Met $n = 3, 4, \ldots$ zijn er natuurlijk ook lijnstukken $AD$ waarvan met relatie (5) de lengte kan worden berekend. Maar daarvan zijn volgens mij geen toepassingen bekend. Zie verder ook de paragrafen 3 en 4 in de appendix.

## 'Stewart' in een vierhoek

Ik behandel nu een toepassing van de formule van Stewart in een trapezium. In figuur 5 is $ABCD$ een trapezium ($AB \,//\, CD$)[4] waarbij voor de lengtes van de zijden geldt: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$
De lengtes van de diagonalen $AC$, $BD$ zijn $m$, $n$.
Verder is $CE \,//\, AD$, waardoor $CE = d$.




*figuur 5*

In driehoek $ABC$ is dan volgens de stelling van Stewart:
$CE^2 \cdot AB = CA^2 \cdot BE + CB^2 \cdot AE - AB \cdot BE \cdot CE \Rightarrow$
$d^2a = m^2(a-c) + b^2c - ac(a-c)$

Zodat: $m^2 = ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a-c}$.

Analoog is (in driehoek $ABD$): $n^2 = ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}$
Dit resulteert in:
$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac \qquad (9)$

En verder is ook:

$$m^2 - n^2 = \frac{ad^2 - cb^2 - ab^2 + cd^2}{a-c} = \frac{a(d^2-b^2)+c(d^2-b^2)}{a-c}$$

Dit leidt tot:

$$\frac{m^2-n^2}{d^2-b^2} = \frac{a+c}{a-c} \qquad (10)$$

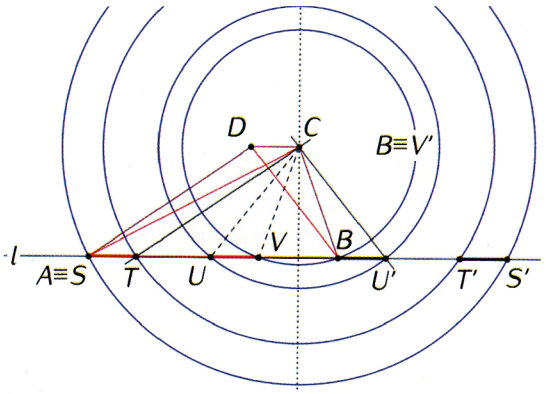
De relaties (9) en (10) maken het mogelijk bij gegeven lengtes van de niet-evenwijdige zijden ($b$, $d$) en die van de diagonalen ($m$, $n$) de lengtes van de evenwijdige zijden ($a$, $c$) van het trapezium te berekenen c.q. die zijden van het trapezium *met passer en liniaal* te construeren (dit laatste is echter niet eenvoudig).
Zijn $a$ en $c$ eenmaal bekend, dan is de constructie van het trapezium redelijk elementair. Een beschrijving van zo'n constructie, waarbij geen gebruik meer hoeft te worden gemaakt van $b$ en $d$, is opgenomen in paragraaf 5.1 van de appendix.

## Opmerkingen

1 Is vierhoek $ABCD$ een parallellogram, dan is $a = c$ (en uiteraard is ook $b = d$). Relatie (9) kan dan geschreven worden als: $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
2 Relatie (9) kan ook worden bewezen door de stelling van Pythagoras herhaald toe te passen. Zie voor een bewijs daarvan paragraaf 5.2 van de appendix.

## Over opdracht 3

In de tekst direct na opdracht 3 staat een hint naar de stelling van Stewart en naar de vorige paragraaf. Heeft die opdracht dan iets te maken met een trapezium? Ik denk dat een korte toelichting bij een plaatje hier meer zegt dan veel woorden.
Als gegeven is dat $ST$ gelijk is aan $UV$, dan zijn er vanwege de symmetrie nog twee lijnstukken die daaraan gelijk zijn. In figuur 6 zijn dat de lijnstukken $BU'$ (met $B \equiv V'$) en $T'S'$ (die lijnstukken staan in ook figuur 3).




*figuur 6*

De lijnstukken $CS$, $CT$, $CU$, $CV$ zijn dus de stralen van de cirkels. En deze stralen kunnen gebruikt worden voor de constructie van het trapezium $ABCD$ (met $A \equiv S$), waarvan dus, via die concentrische cirkels, gegeven zijn:

— de niet-evenwijdige zijden: $AD = CT$ en $BC = CV$;

— de diagonalen: $AC = CS$ en $BD = CU' = CU$.

En in de vorige paragraaf is aangetoond dat een dergelijk trapezium (met passer en liniaal) construeerbaar is.

## Vroeger

In een eerdere aflevering van *Euclides* schreef U.H. van Wijk (in Weltevreden, Batavia) ook over de stelling van Stewart.[5] Hij leidde daarbij een 'nieuwe gedaante' van de formule af, en wel in het bijzonder de toepassing daarvan in een vierhoek en in een viervlak, namelijk (ook geldig in de figuren 2 en 4):

$x^2a^2 = b^2p^2 + c^2q^2 + 2bcpq\cdot\cos(A)$

Vergelijk deze formule met formule (3). Een citaat uit dat artikel: 'Men zal misschien tegen dezen vorm van de stelling van STEWART aanvoeren, dat hij niet voor behandeling in een tweede klasse van een middelbare school in aanmerking kan komen, omdat er kennis van goniometrische verhoudingen (ook in 't 2de kwadrant!) voor geëischt wordt.'

In de appendix bij dit artikel wordt nader ingegaan op enkele items en staat een extra opgave.

*vakbladeuclides.nl/956klingens*

## Noten

[1] Een (bijna letterlijke) vertaling: Neem op de rechte lijn $AB$ een willekeurig punt $C$ tussen $A$ en $B$; en laten er door $A$, $B$, $C$ rechte lijnen zijn getrokken naar een willekeurig punt $D$. Dan is het vierkant op $AD$ samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op $BD$ dezelfde verhouding heeft als $BC$ heeft tot $CA$ gelijk aan de rechthoek $BAC$ samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op $CD$ dezelfde verhouding heeft als $BC$ heeft tot $BA$.

[2] Voor een bewijs zie bijvoorbeeld: Dick Klingens (1999): *De stelling van Ptolemaeus en de sinusregel*. Op (de website van de auteur): *http://www.pandd.demon.nl/sinregel.htm*

[3] Ikzelf heb de formule(s) van Stewart moeten leren aan het einde van de tweede klas van het voortgezet onderwijs (dat was in 1959), uit het boek: Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956). *Meetkunde met de beginselen der goniometrie. Deel 2* (9e druk). Groningen: J.B. Wolters, p. 77.
En daarbij stond ook een afleiding van de formule als het punt $D$ op het verlengde van $AB$ ligt. Erna stond: 'Een dergelijke betrekking kan men afleiden, als $D$ een punt is op het verlengde van $BA$. Ga dit na.' Want, inderdaad, er zijn eigenlijk drie *verschillende* formules van Stewart.

[4] Voor mij is een trapezium een vierhoek met *ten minste* twee evenwijdige zijden. Zo'n vierhoek zou dus ook een parallellogram kunnen zijn.

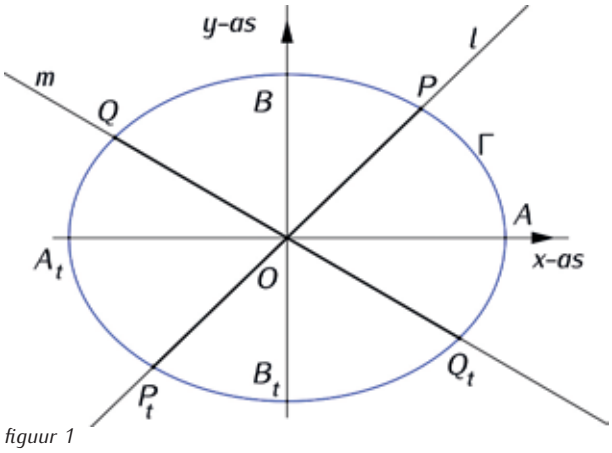
[5] Wijk, U.H. van (1929). De Stelling van Stewart. *Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken, 6*(2), pp. 65-68. Zie: *https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/006_1929-30_02.pdf*

Dick Klingens

# Over een eigenschap van een ellips

Dick Klingens beschrijft constructies met passer en liniaal met behulp van de *toegevoegde middellijnen* van een ellips.

## Inleiding




*figuur 1*

In figuur 1 zijn in een rechthoekig $xOy$-assenstelsel weergegeven:

- een ellips $\Gamma$ met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;
- de lijnen $l$, $m$ die beide door het middelpunt $O$ van de ellips gaan;
- de toppen van de ellips: $A$, $A_t$, $B$, $B_t$ met $OA = a$, $OB = b$;
- de snijpunten[1] van $\Gamma$ met $l$, $m$: $\Gamma \,\&\, l = \{P, P_t\}$, $\Gamma \,\&\, m = \{Q, Q_t\}$.

De lijnstukken $PP_t$ en $QQ_t$ worden *middellijnen* van de ellips genoemd – analoog aan hetzelfde begrip bij de cirkel: het zijn koorden door het middelpunt. Ik val nu maar direct in huis met een definitie:

**Definitie.** Twee middellijnen $PP_t$, $QQ_t$ van een ellips heten *toegevoegde middellijnen* als voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de dragers $l$, $m$ van die middellijnen geldt: $\text{rico}(l) \cdot \text{rico}(m) = -b^2/a^2$.

In hetgeen volgt zal onder meer een constructie met passer en liniaal (met p&l) worden besproken waarmee, bij gegeven lijnstukken $OP$ en $OQ$, de halve grote as $OA$ en de halve kleine as $OB$ van de ellips kunnen worden gevonden.
Ik merk nog op dat met de lijnstukken $OP$ en $OQ$ – die ook wel *toegevoegde stralen* worden genoemd – tevens de middellijnen $PP_t$ en $QQ_t$ vastliggen.

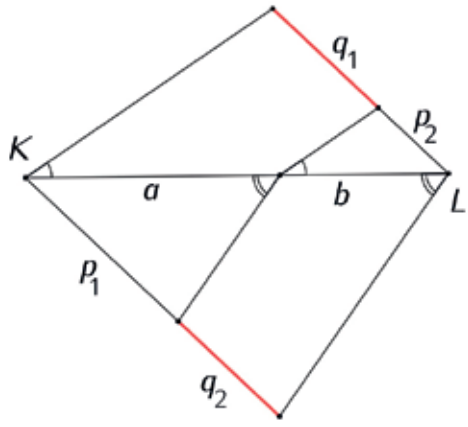
## Gegeven: de ellips en een punt erop

Als de ellips $\Gamma$ gegeven is in een coördinatenstelsel en als het punt $P$ op $\Gamma$ ligt, dan kunnen de coördinaten van het punt $Q$ uitgedrukt worden in die van $P$ als $OP$ en $OQ$ toegevoegde stralen van $\Gamma$ zijn. Er geldt namelijk:

**Stelling 1.** Is in een $xOy$-assenstelsel een ellips $\Gamma$ gegeven met de vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ligt het punt $P = (p_1, p_2)$ op $\Gamma$ en is $Q$ het op $\Gamma$ liggende eindpunt van de toegevoegde straal $OQ$ van $OP$, dan is voor de coördinaten $(-q_1, q_2)$ van het punt $Q$ (zie figuur 1):[2]
$q_1 = a/b \cdot p_2$, $q_2 = b/a \cdot p_1$

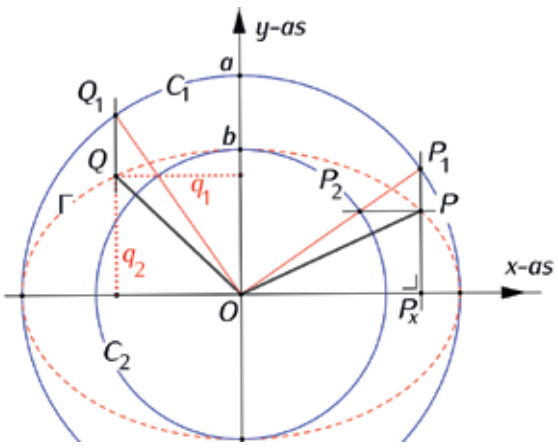
Het bewijs van stelling 1 staat in paragraaf 1 in de appendix bij dit artikel.[3]

De p&l-constructie van de coördinaten van het punt $Q$ volgt nu eenvoudig uit twee evenredigheden die gebaseerd zijn op de in stelling 1 genoemde relaties:
$b : a = p_2 : q_1$, $a : b = p_1 : q_2$
In figuur 2 is de (gebruikelijke) constructie van lijnstukken met lengtes $q_1$, $q_2$ uitgevoerd, uitgaande van een lijnstuk $KL$ met lengte $a + b$, en lijnstukken met lengtes $p_1$, $p_2$.




*figuur 2*

Zoals bekend is het met p&l construeren van een kegelsnede *alleen puntsgewijs* mogelijk. Voor de constructie van een punt van de ellips (in casu het punt $P$) kies ik een *loodrechte lijnvermenigvuldiging*[4] van de cirkel $C_1$ (middelpunt $O$) met straal $a$ ten opzichte van de $x$-as met factor $b/a$. Zie daartoe figuur 3, waarin de lengte van de straal van de cirkel $C_2$ (middelpunt $O$) gelijk is aan $b$ (hier met $b < a$).
Ik zal laten zien dat bij die lijnvermenigvuldiging (het woord 'loodrechte' laat ik in hetgeen volgt maar weg) een cirkel inderdaad wordt afgebeeld op een ellips.




*figuur 3*

In de appendix (paragraaf 4)[3] toon ik aan, dat deze afbeelding (met een factor kleiner dan 1) overeenkomt met een *orthogonale projectie* van een cirkel in de 3-dimensionale euclidische ruimte op een vlak.

De vergelijking van $C_1$ is $x^2 + y^2 = a^2$; daarop ligt het punt $P_1$. Met[5] $x(P_1) = x_1$, $y(P_1) = y_1$ geldt dan:
$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ (1)

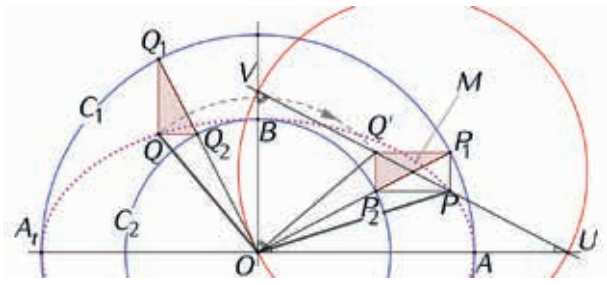
Het punt $P$ is het beeld van $P_1$ bij de bedoelde lijnvermenigvuldiging. Met $x(P) = x$, $y(P) = y$ is nu:

$$\begin{cases} x(P) = x(P_1) \Rightarrow x_1 = x \\ y(P) = b/a \cdot y(P_1) \Rightarrow y_1 = a/b \cdot y \end{cases} \qquad (2)$$

Immers, in driehoek
$OP_xP_1$ is $P_1P_x : PP_x = P_1O : P_2O$ of $y_1 : y = a : b$.
Uit (1) en (2) volgt dan door substitutie de vergelijking van de *meetkundige plaats* van het punt $P$ als $P_1$ de cirkel $C_1$ doorloopt:
$x^2 + (a/b)^2 \cdot y^2 = a^2$ of $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
En dit is inderdaad de vergelijking van Γ.
**Gevolg** (van stelling 1). Het punt $Q$ in figuur 3 is uiteraard ook het beeld van een punt van $C_1$ bij de onderhavige lijnvermenigvuldiging, namelijk van $Q_1$. Voor het product van de rico's van $OP$, $OQ$ geldt (per definitie):
$\text{rico}(OP) \cdot \text{rico}(OQ) = -b^2/a^2$.
Nu is $\text{rico}(OP_1) = a/b \cdot \text{rico}(OP)$, $\text{rico}(OQ_1) = a/b \cdot \text{rico}(OQ)$, zodat:
$\text{rico}(OP_1) \cdot \text{rico}(OQ_1) = a^2/b^2 \cdot -b^2/a^2 = -1$
De lijnstukken $OP_1$ en $OP_2$ (stralen van $C_1$) staan dus in $O$ loodrecht op elkaar. En, het omgekeerde is eveneens juist.

## Gegeven: twee toegevoegde stralen van een ellips

Ik merk allereerst op dat het werken met coördinaten ten behoeve van een p&l-constructie, zoals in de vorige paragraaf, niet mogelijk is als alleen twee toegevoegde stralen van een ellips in ligging en grootte gegeven zijn. In de nu volgende theoretische voorbehandeling (de analyse) van de constructie zal ik echter wél gebruik maken van de halve assen.




*figuur 4*

In figuur 4 is de straal van cirkel $C_1$ gelijk aan $a$ en die van $C_2$ gelijk aan $b$. Voorts zijn er twee onderling loodrechte lijnen door $O$ getekend: $OA$, $OB$; dit zijn de (symmetrie)assen van de ellips. >

De punten $P$, $Q$ van de ellips zijn de beelden van de punten $P_1$, $Q_1$ (op cirkel $C_1$) bij de lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de lijn $OA$ (de drager van een middellijn van $C_1$).

De lijnstukken $OP_1$ en $OP_2$ zijn zo gekozen dat ze loodrecht op elkaar staan. Op grond van het gevolg van stelling 1 zullen $OP$ en $OQ$ dan toegevoegde stralen van de ellips zijn.
De in $Q$ rechthoekige driehoek $QQ_1Q_2$ ($Q_2$ op cirkel $C_2$) wordt geroteerd in wijzerrichting (over -90°) met $O$ als centrum. Het beeld van die driehoek is driehoek $Q'P_1P_2$ ($P_2$ op cirkel $C_2$).
Verder is $PQ'$ & $OA = U$ en $PQ'$ & $OB = V$. Dan is vierhoek $PP_1Q'P_2$ een rechthoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn met de assen van de ellips. Daardoor maakt de lijn $UV$ dezelfde hoeken met de assen van de ellips als de lijn $OP_1$ (beide zijn drager van een diagonaal van de rechthoek). Dan is, en zie de *gelijkbenige* trapezia $OP_2Q'V$ en $OUPP_2$:
$OP_1 = \boldsymbol{a} = OP_2 + P_2P_1 = \boldsymbol{b} + Q'P =$
$VQ' + Q'P = \boldsymbol{VP}$
$OP_2 = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{UP}$
Ik formuleer nu, deels op grond van wat hierboven is gevonden:

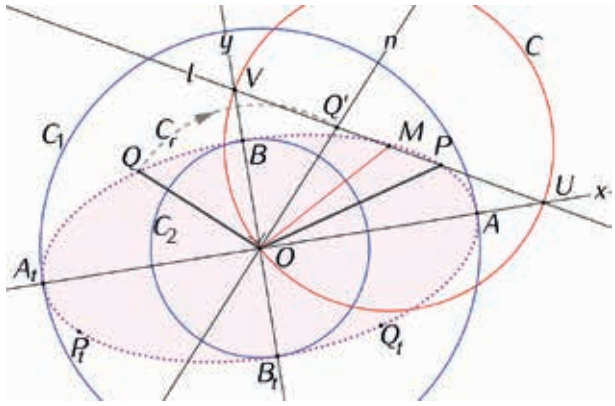
**Stelling 2.** Zijn $OP$ en $OQ$ toegevoegde stralen van een ellips (met halve assen $a$ en $b$), is $Q'$ het beeld van $Q$ bij een rotatie om $O$ over -90° en is $M$ het midden van $PQ'$, dan snijdt de lijn $PQ'$ de cirkel met middelpunt $M$ en straal $MO$ in de punten $U$ en $V$ (zie figuur 4), waarbij $VP = a$ en $UP = b$.

**Bewijs.** Voor de punten $U$, $V$ op de lijn $PQ'$ geldt dan $VP > UP$. Verder is $VQ' = OP_2 = UP$ (zie de genoemde trapezia), zodat het midden $M$ van het lijnstuk $PQ'$ ook het midden is van het lijnstuk $UV$. Met andere woorden: $M$ is het middelpunt van de omcirkel van de (in $O$ rechthoekige) driehoek $OUV$.

Tot zover de theoretische aanloop naar de hierna volgende p&l-constructie.

## De constructie van Rytz

Geheel conform stelling 2 kunnen de grote en de kleine as van een ellips met p&l worden geconstrueerd als *alleen* twee toegevoegde stralen $OP$ en $OQ$ gegeven zijn; zie figuur 5.




*figuur 5*

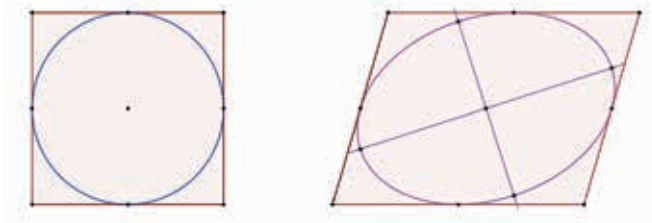
Constructiestappen bij de in ligging en grootte gegeven lijnstukken $OP$ en $OQ$. [6]

1. Loodlijn($O$, $OQ$) = $n$
2. Cirkel ($O$, $Q$) = $C_r$ // t.b.v. de rotatie.
3. $C_r$ & $n = Q'$
4. Midden($P$, $Q'$) = $M$
5. Lijn($P$, $Q'$) = $l$
6. Cirkel($M$, $O$) = $C$
7. $C$ & $l = \{U, V\}$
8. Passer($VP$, $O$) = $C_1$ ; Passer($UP$, $O$) = $C_2$
9. Lijn($O$, $U$) = $x$ ; Lijn($O$, $V$) = $y$ // dit zijn de assen van de ellips.
10. $C_1$ & $x = \{A, A_t\}$ ; $C_2$ & $y = \{B, B_t\}$ // dit zijn de toppen van de ellips.

De ellips is nu bepaald door vijf van de zes (acht) punten $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $P$, $Q$, ($P_t$, $Q_t$).
Deze constructie, die voor het eerst gepubliceerd is in 1845, is vernoemd naar de Zwitserse wiskundige David Rytz von Brugg (1801–1868).

## Het waarom?

Het antwoord op die vraag is natuurlijk niet alleen 'Vanwege de wiskunde!'. Het met p&l construeren van een ingeschreven cirkel in een vierkant kost minder dan een cent: construeer het midden van twee geschikte lijnstukken en je hebt het middelpunt en een raakpunt van die cirkel, zie figuur 6 (links). Het tekenen (want met p&l écht construeren gaat immers niet) van een ingeschreven ellips van een parallellogram, zie figuur 6 (rechts), waarin ook de assen van het parallellogram zijn weergegeven, kost toch wel iets meer!

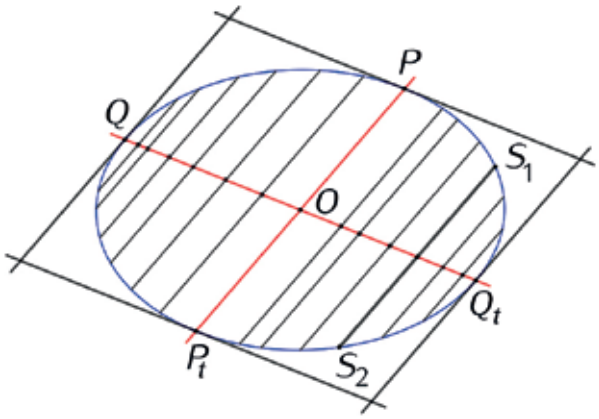


*figuur 6*

Maar, een eigenschap van twee toegevoegde middellijnen van een ellips kan bij dit laatste uitkomst bieden, namelijk:

**Stelling 3.** De meetkundige plaats van de middens van de koorden van een ellips die evenwijdig zijn met een middellijn van die ellips, is de aan die middellijn toegevoegde middellijn, zie figuur 7.

Een analytisch bewijs van deze stelling staat in de appendix (in paragraaf 2).[3]




*figuur 7*

In figuur 7 zijn ook de raaklijnen in de eindpunten van beide toegevoegde middellijnen $PP_t$ en $QQ_t$ weergegeven. Deze zijn uiteraard (?) evenwijdig met de betreffende middellijn.[7]

**Een slotopdracht.** Construeer met p&l de assen van een ingeschreven ellips in een gegeven parallellogram. Hierbij merk ik op, dat er natuurlijk méér ingeschreven ellipsen zijn dan die ene die kan worden 'gevonden' met de constructie van Rytz.[8]

Voor de appendix bij dit artikel:

*vakbladeuclides.nl/963klingens*

## Noten

[1] In hetgeen volgt betekent $u \,\&\, v = \{X, Y\}$: de punten $X$ en $Y$ zijn de snijpunten van de meetkundige objecten $u$ en $v$; $u \,\&\, v = X$ betekent: $X$ is een/het snijpunt van $u$ en $v$.

[2] De algemene geldigheid van de stelling wordt geen geweld aangedaan door te stellen dat $p_1, p_2 > 0$ en ook $q_1, q_2 > 0$.

[3] Voor de appendix bij dit artikel: *vakbladeuclides.nl/963klingens*

[4] Een lijnvermenigvuldiging behoort tot de klasse van affiene afbeeldingen van het euclidische vlak op zichzelf. Zie voor een beschouwing daarvan bijvoorbeeld: *http://www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm#41*

[5] Met $x(U)$ c.q. $y(U)$ wordt in hetgeen volgt bedoeld: de $x$-coördinaat van het punt $U$ c.q. de $y$-coördinaat van het punt $U$.

[6] De functies die in de constructiestappen worden gebruikt, komen in het algemeen overeen met functies die zijn opgenomen in computer-tekenprogramma's, zoals GeoGebra. Na // staat commentaar bij de constructiestap. Zie: *https://www.geogebra.org*.

[7] Zie opmerking 2 bij stelling 3 in paragraaf 2 van de appendix.

[8] In de appendix (paragraaf 5) staat een eenvoudiger methode om punten van een in een parallellogram ingeschreven ellips te construeren. Die methode is gebaseerd op een orthogonale projectie, waarvan een korte inleiding staat in paragraaf 4 van die appendix.

## Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*
website: *http://www.pandd.nl*

Dick Klingens

# De bissectricestelling en wat er zo bij komt kijken

Dick Klingens raakte geïnspireerd door het lezen van de hoofdstukken 6 (Verhoudingen van lijnstukken), 8 (Gelijkvormigheid) en 20 (Oppervlakte en omtrek van de cirkel) en Aanvullingen uit het boek Planimetrie voor M.O. en V.H.O. van C.J. Alders (1904 – 1969) uit 1958. Dit artikel is opgedragen aan Cor Alders.[1]

## Dick Klingens overleden

Vlak voor het verschijnen van deze *Euclides* bereikte ons het verdrietige bericht dat Dick Klingens onverwachts is overleden. Dick heeft nog de drukproef van dit artikel nauwgezet gecontroleerd. Met toestemming van zijn familie publiceren we dit artikel. De tijd was te kort om een In memoriam te schrijven en te plaatsen waarin we stilstaan bij alles wat Dick heeft betekend voor *Euclides* en het wiskundeonderwijs. Dat volgt in nummer 97-1.

## Inleiding

De zogeheten bissectricestelling behoort niet meer (expliciet) tot de basiskennis binnen het huidige meetkundeprogramma van het voortgezet onderwijs, nu daarin vooral aan de analytische aspecten van de vlakke meetkunde aandacht wordt gegeven. In hetgeen volgt ga ik juist daarom in op enkele synthetische aspecten van de stelling en op 'wat er zoal bij kan komen kijken'. En, ik zal dat doen zonder goniometrie.

## De stelling, ongebruikelijk bewezen

De bedoelde euclidische stelling luidt:

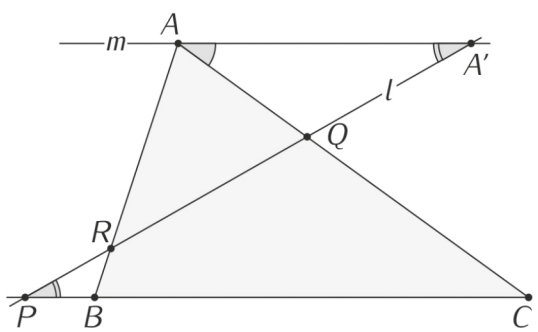
*Stelling 1 (bissectricestelling).* Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde van die hoek in stukken die zich verhouden als de opstaande (aangrenzende) zijden.

Van deze stelling zal ik, zoals de kop van deze paragraaf al aangeeft, een bewijs geven dat niet zo bekend is, en zeker ook omdat het daarbij te gebruiken 'hulpmiddel', een transversaal, al lange tijd niet meer in het curriculum voorkomt. Daarom volgt er eerst een definitie daarvan.

*Definitie.* Een (rechte) lijn die de drie zijden van een driehoek snijdt en niet door een hoekpunt daarvan gaat, is een transversaal van die driehoek.

De bekendste eigenschap van een transversaal is vervat in de stelling van Menelaos[2]:

*Stelling 2 (Menelaos).* Snijdt de transversaal $l$ de zijden $BC$, $CA$, $AB$ van driehoek $ABC$ in opvolgend de punten $P$, $Q$, $R$, dan geldt[3]:
$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = 1$



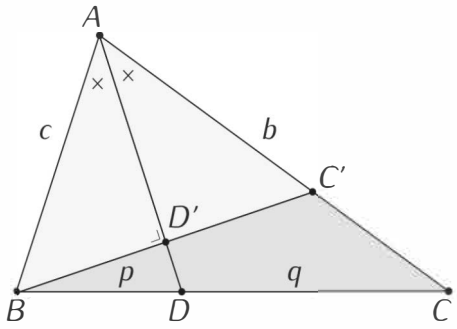

*figuur 1*

*Bewijs.* Zie figuur 1. Met $A'$ als snijpunt van de lijn $l$ met de lijn $m$ door $A$ die evenwijdig is met $BC$, zijn de driehoeken $QCP$ en $QAA'$ gelijkvormig ($hh$).
Dus: $QC : QA = CP : AA'$
De driehoeken $RAA'$ en $RBP$ zijn eveneens gelijkvormig ($hh$), zodat: $RA : RB = AA' : BP$
Met deze kennis kan ik schrijven:

$$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB} =$$

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CP}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BP} = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{-CP}{-BP} = 1$$

En hiermee kan dan het (ongebruikelijke) bewijs van stelling 1 redelijk eenvoudig worden geleverd.




*figuur 2*

## Eerste bewijs van stelling 1

In de configuratie van figuur 2 moet dus bewezen worden:
$BD : CD = BA : CA = c : b$
De loodlijn uit $B$ op $AD$ snijdt de lijnen $AD$, $AC$ in opvolgend $D'$, $C'$. Dan is driehoek $ABC'$ gelijkbenig (met top $A$), zodat ook $BD' = C'D'$.
Ik beschouw nu driehoek $BCC'$ met als transversaal de lijn $AD'D$. Volgens stelling 2 geldt dan in die driehoek:

$$\frac{DB}{DC}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{D'C'}{D'B}=1 \Rightarrow \frac{DB}{DC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow BD:CD=c:b$$

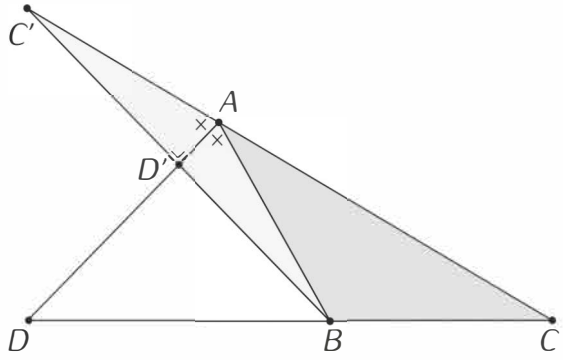
Opmerkingen
1) Er zijn natuurlijk ook andere verschijningsvormen van de bissectricestelling. Zo is met $BD = p$, $CD = q$ natuurlijk $p : q = c : b$. Met $BC = a$ is dan:

$$BD=p=\frac{ac}{b+c},\quad CD=q=\frac{ab}{b+c}$$

2) In figuur 3 is $AD$ de *buitenbissectrice* van hoek $A$. Ook hier geldt: $BD : CD = c : b$
Het hierboven staande bewijs (van stelling 1) kan onveranderd worden gebruikt om de juistheid van deze eigenschap te bewijzen. Bij een binnenbissectrice spreekt men van een *inwendige* verdeling van de overstaande zijde, bij een buitenbissectrice van een *uitwendige* verdeling van die zijde.

3) Met een bewijs uit het ongerijmde kan ook de *omgekeerde* stelling van stelling 1 worden bewezen.
Stelling 1 (omgekeerd). Als een lijn door een hoekpunt van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de opstaande zijden, dan is die lijn een bissectrice van de betreffende hoek.

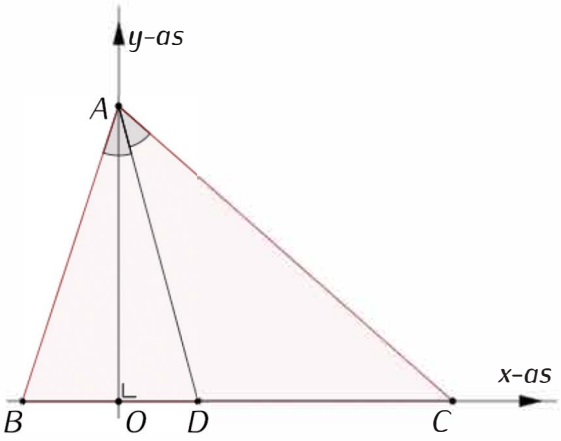
In paragraaf 1 van de appendix[4], staat het bedoelde bewijs.




*figuur 3*

## Tweede bewijs van stelling 1

Een *analytisch* bewijs van stelling 1 is overigens redelijk elementair. Ik kies daartoe een orthogonaal assenstelsel $xOy$ waarvan de $x$-as de drager is van de zijde $BC$ van driehoek $ABC$ en waarvan de $y$-as door het punt $A$ gaat; zie figuur 4.




*figuur 4*

Ik ga dan uit van $A = (0, r)$, $B = (-p, 0)$, C $= (q, 0)$ met $p$, $q$, $r > 0$ en $p < q$. Vergelijkingen van de opstaande zijden zijn dan:
$AB$: $y = \frac{r}{p}(x + p)$
$AC$: $y = -\frac{r}{q}(x - q)$
Volgens een 'bekende formule'[5] is dan de vergelijking van het bissectricepaar van hoek $A$:

$$\left|\frac{rx-py+pr}{\sqrt{r^2+p^2}}\right|=\left|\frac{rx+qy-qr}{\sqrt{r^2+q^2}}\right|$$

De $x$-coördinaat $x_D$ van het punt $D$ ($y_D = 0$) voldoet dan, met $c = AB = \sqrt{(r^2 + p^2)}$, $b = AC = \sqrt{(r^2 + q^2)}$
en na deling door $r$, aan de vergelijking:

$$\left|\frac{x+p}{c}\right|=\left|\frac{x-q}{b}\right| \Rightarrow b(x+p)=\pm c(x-q)$$

Omdat $x_D > 0$ is, moet in de laatste vergelijking het minteken gebruikt worden. Dan is:

$$bx + bp = -cx + cq \Rightarrow x_D = \frac{-bp+qc}{b+c}$$

en daarmee is, met $p + q = a$:

$$BD = p + \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}c = \frac{ac}{b+c}$$

$$\text{en } CD = q - \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}b = \frac{ab}{b+c}$$

waaruit opnieuw blijkt (zie opmerking 1 hierboven) dat $BD : CD = c : b$

N.B. De keuze van $p < q$ in het bewijs heeft natuurlijk geen invloed op de algemene geldigheid van de stelling. Als $p = q$ is, is de driehoek $A$-gelijkbenig. En daarin is stelling 1 triviaal.

## Andere bewijzen van de bissectricestelling

Voor een iets gecompliceerder bewijs van stelling 1 dat *alleen* op gelijkvormigheid van driehoeken is gebaseerd, verwijs ik naar paragraaf 2 van de appendix. Daarin staat ook het meest gebruikelijke bewijs.

Een bewijs van de bissectricestelling waarin gebruik gemaakt wordt van *omtrekshoeken* (op een cirkel), staat meestal *niet* in de leerboeken, omdat de daaraan ten grondslag liggende theorie later in het curriculum aan de orde kwam/komt. Ik heb (een deel van) die theorie opgenomen in de appendix (zie paragraaf 3). Hieronder gebruik ik dan omtrekshoeken voor het bewijs van stelling 1.

## Derde bewijs van stelling 1

In figuur 5 snijdt de $A$-bissectrice van driehoek $ABC$ de zijde $BC$ in het punt $D$ en de omcirkel van de driehoek ook in het punt $D'$.

Nu is:

$\angle BAD = \frac{1}{2}\text{bg}(BD') = \angle D'BC$ (*omtrekshoeken*)

$\angle D'AC = \frac{1}{2}\text{bg}(D'C) = \angle DCD'$ (*omtrekshoeken*)

De bogen $BD'$ en $CD'$ zijn daarmee dus aan elkaar gelijk. Voorts zijn de driehoeken $ABD'$ en $BDD'$ gelijkvormig (*hh*), zodat:

$AB : BD = BD' : DD'$ (1)

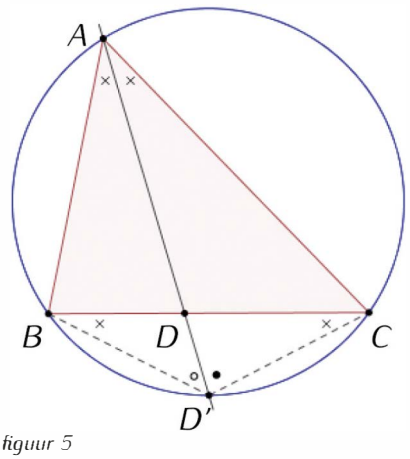
En de driehoeken $ACD'$ en $CDD'$ zijn dat eveneens, zodat:

$AC : CD = CD' : DD'$ (2)

En driehoek $BCD'$ is $D'$-gelijkbenig, zodat:

$BD' = CD'$ (bij gelijke bogen horen gelijke koorden)(3)

Uit (1), (2) en (3) volgt:




*figuur 5*

$AB : BD = AC : CD$ of ook $BD : CD = AB : AC$

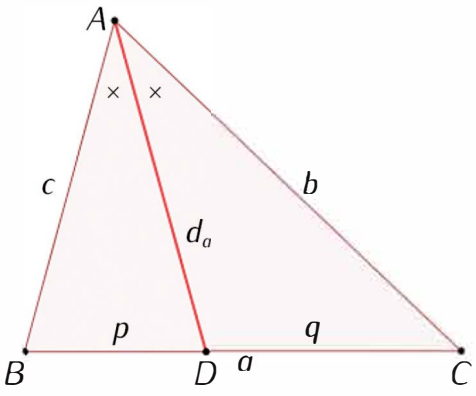
En dit is wat in stelling 1 is verwoord.

## De bissectriceformule

De uitdrukking waarmee de lengte van een bissectrice van een driehoek kan worden berekend indien de lengtes van de zijden van die driehoek gegeven zijn, staat bekend als de *bissectriceformule*. Die formule luidt voor de bissectrice $d_a = AD$ (met punt $D$ op $BC$) van hoek $A$ van driehoek $ABC$ (met $a$, $b$, $c$ als lengtes van de zijden):

$d_a^2 = bc - pq$ (4)

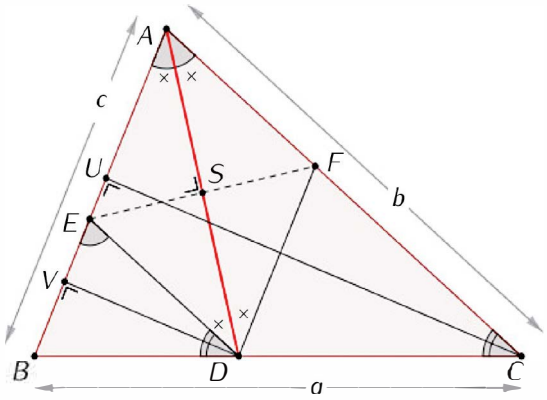
waarbij dan weer $BD = p$ is en $CD = q$, zie figuur 6.




*figuur 6*

De bissectriceformule wordt meestal afgeleid met de *stelling van Stewart* [6]. Ik zal hier echter een bewijs laten volgen waarin een ruit een bijzondere rol speelt. Twee andere bewijzen, de eerste met gebruik van gelijkvormigheid en de tweede met gebruik van de stelling van Pythagoras, staan in de appendix (paragraaf 4).

In figuur 7 is $DE \parallel CA$, $DF \parallel BA$, $CU \perp AB$, $DV \perp AB$, en is $S$ het snijpunt van $EF$ en de $A$-bissectrice $AD$ van driehoek $ABC$. Vierhoek $AEDF$ is dan een parallellogram, en omdat $AD$ ook bissectrice is van de hoek $A$ daarvan, is $AEDF$ een *ruit*. Van het feit dat $AE = DE$ is, zal ik een enkele keer gebruik maken. En in die ruit is (natuurlijk)




figuur 7

ook $AS = \frac{1}{2}AD$. Volgens de bissectricestelling is:
$BD : CD = AB : AC = c : b$
Ook hier gebruik ik $BD = \frac{ac}{b+c}$. Uit de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken *BDE* en *BCA* volgt:

$$BD : BC = DE : CA \Rightarrow DE = \frac{CA}{BC} \cdot BD = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{bc}{b+c} \ (= AE) \qquad (5)$$

De driehoeken *ADV* en *AES* zijn eveneens gelijkvormig (*hh*), zodat:
$AD : AE = AV : AS \Rightarrow AD : AE = AV : \frac{1}{2}AD \Rightarrow$
$AD^2 = 2AV \cdot AE \qquad (6)$
En het rechterlid van uitdrukking (6) verdient nu verdere uitwerking. Opnieuw gelijkvormigheid: driehoek *EVD* is gelijkvormig (*hh*) met driehoek *AUC*, waaruit volgt:

$$EV : AU = DE : CA \Rightarrow EV : AU = DE : b \Rightarrow$$

$$EV = AU \cdot \frac{DE}{b} \overset{\text{MET (5)}}{=} AU \cdot \frac{c}{b+c} \qquad (7)$$

In de driehoeken *BUC* en *AUC* is dan:
$a^2 = CU^2 + BU^2 = (b^2 - AU^2) + (c^2 - AU^2) =$

$b^2 + c^2 - 2c \cdot AU$ zodat: $AU = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
En nu blijkt met relatie (7):

$$EV = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)}$$

Uit $AV = AE + EV$ en opnieuw (5) volgt dan:

$$AV = \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)}$$

En met deze laatste uitdrukking gaat relatie (6) over in:

$$AD^2 = 2 \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)} \cdot \frac{bc}{b+c} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \qquad (8)$$

Of ook:

$$d_a^2 = bc - \frac{ac \cdot ab}{(b+c)(b+c)} = bc - pq$$

En ja, dit is uitdrukking (4).

Voor de appendix bij dit artikel zie:
*vakbladeuclides.nl/967bissectricestelling*

## Noten

[1] Zie ook: Vredenduin, P.G.J. (1969). In memoriam Cor Alders. *Euclides, jaargang*(44), nr. 5, p. 129.

[2] Naar Menelaos van Alexandrië (70 – 130, Egypte). Menelaos gebruikte de stelling in zijn boek *Sphaerica* bij de behandeling van driehoeken op een boloppervlak. Zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria* en *https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Menelaos* De op deze laatste pagina gegeven eigenschap wijkt iets af van de hierboven staande door een ander uitgangspunt, in dit artikel namelijk het begrip deelverhouding; zie [3].

[3] Met drie collineaire, verschillende punten *P*, *Q*, *X* is de zogeheten deelverhouding (*PQX*) van het lijnstuk *PQ per definitie* gelijk aan $\varepsilon \cdot XP/XQ$. Daarbij moet rekening gehouden worden met de oriëntatie van die (deel)lijnstukken. Ligt *X* op het lijnstuk *PQ*, dan is $\varepsilon = -1$; ligt *X* op een verlengde van *PQ* dan is $\varepsilon = 1$.

[4] Zie de website van *Euclides* voor de appendix bij dit artikel.

[5] Hier staat niets anders dan dat de afstand van een punt met coördinaten (*x*, *y*) tot de lijn *AB* gelijk is aan de afstand van datzelfde punt tot de lijn *AC*. Een bissectrice van een hoek wordt hier opgevat als de *meetkundige plaats* van de punten die *gelijke* afstand hebben tot de benen van die hoek

[6] Naar Matthew Stewart (1717-1785, Schotland). Zie *https://nl.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart* Voor de naar hem vernoemde stelling zie bijvoorbeeld: http://www.pandd.demon.nl/stewart.htmv

Dick Klingens

# Zo maar een examenvraagstuk van vroeger

Na alle recensies van de examens van dit jaar in *Euclides 97-1* is het interessant om te kijken naar een examen van 63 jaar geleden, weliswaar niet uit het voortgezet onderwijs, maar van de docentenopleiding.

## Examen Wiskunde L.O. 1958 Planimetrie (vraagstuk 3 van 3)

Van driehoek $ABC$ is hoek $A$ in ligging en grootte, de zijde $BC$ in grootte gegeven.
De loodlijnen in $B$ en $C$ respectievelijk op $AB$ en $AC$ getrokken snijden elkaar in $S$.

a. Bepaal de meetkundige plaats van het punt $S$.
b. Bepaal de meetkundige plaats van het hoogtepunt van driehoek $ABC$.

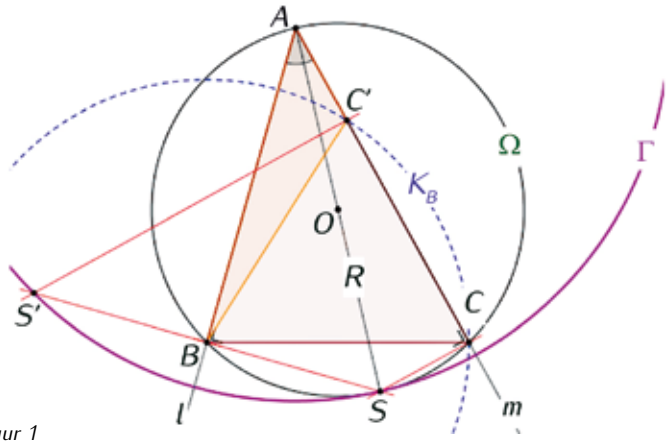
## Toelichting

— In ligging en grootte' betekent voor een meetkundig object dat het een vaste positie in het vlak heeft en een vaste (gegeven) grootte. Is een object alleen 'in grootte' gegeven, dan houdt dat in dat het object een vaste (gegeven) grootte heeft en ook zo in het vlak kan worden verplaatst, dat daarbij die grootte niet verandert.

— Onder 'bepalen' moet hier worden verstaan:
1 duidelijk aangeven welke meetkundige figuur door het punt $S$ c.q. het hoogtepunt wordt doorlopen (rechte lijn, cirkel, ... of delen daarvan), en ook:
2 in de toelichting/uitwerking laten blijken welke stappen zijn gezet om tot het bedoelde onder punt a en b te komen.

— Zie verder de noten [1, 2].

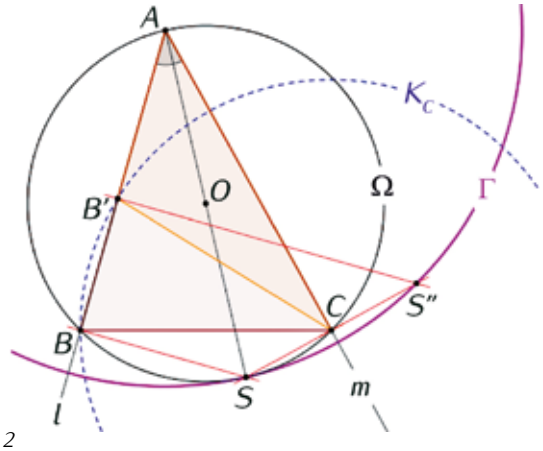
## Analyse bij vraag a




*figuur 1*

In figuur 1 staat een eerste schets. De benen van hoek $A$ zijn de halve lijnen $l$ en $m$. Ik ga er, om te beginnen, van uit dat voor de grootte $\alpha$ van hoek $A$ geldt: $0 < \alpha < 90^o$. Omdat $\alpha$ en de lengte van $BC$ $(= a)$ constant zijn, volgt uit $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ (uitgebreide sinusregel in driehoek $ABC$) dat ook de straal $R$ van de omcirkel $\Omega$ van de driehoek constant is.
Omdat vierhoek $ABSC$ een koordenvierhoek is (de hoeken $B$ en $C$ van die vierhoek zijn immers beide gelijk aan $90^o$), ligt het punt $S$ eveneens op $\Omega$.
Voorlopige conclusie: de meetkundige plaats (verder afgekort tot mpl) van het punt $S$ is $\Gamma$ = Cirkel($A$, $2R$), of die mpl is een deelverzameling van $\Gamma$.
Zie nog steeds figuur 1. Er is een punt $C'$ op $m$ waarvoor $BC' = a$. De punten $C$ en $C'$ zijn de snijpunten van $K_B$ = Cirkel($B$, $a$) met de lijn $m$. Het punt $C'$ geeft uiteraard ook een punt $S'$ (op $\Gamma$) dat element is van de gezochte mpl.

De punten $S$ en $S'$ liggen symmetrisch ten opzichte van de lijn $l$, omdat die lijn een middellijn is van $K_B$.
In figuur 2 is het punt $C$ als uitgangspunt genomen.
De punten $B$ en $B'$ zijn de snijpunten van de lijn $l$ met $K_C$ = Cirkel($C$, $a$). Het punt $B'$ geeft met de loodlijn in $B'$ op $l$ en opnieuw die in $C$ op $m$ het punt $S''$ (dat uiteraard ook op $\Gamma$ ligt.
En in dit geval liggen de punt $S$ en $S''$ symmetrisch ten opzichte van de lijn $m$.

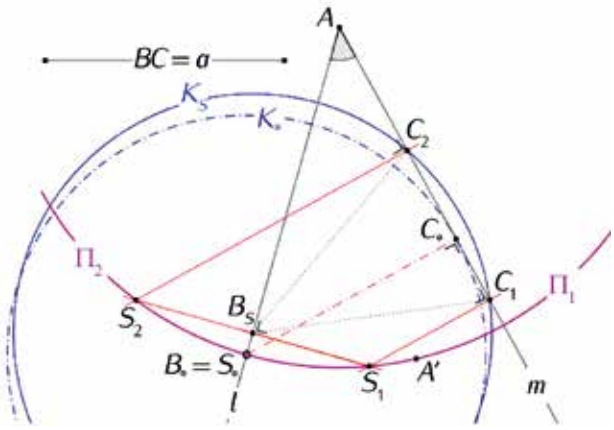


*figuur 2*

Het is duidelijk dat de punten $B$ en $C$, en daarmee de lijnen $l$ en $m$, voor een verder onderzoek kunnen worden verwisseld. In de volgende paragraaf ga ik uit van variabele punten $B$ op de lijn $l$.

## Het punt B beweegt

Ik kies nu een punt $B_s$ op de lijn $l$ als 'sturend punt' van de gezochte mpl, met daarbij $K_s$ = Cirkel($B_s$, $a$) waarmee ik de punten $C_i$ (met $i$ = 1, 2) op de lijn $m$ vastleg.
Vervolgens heb ik *GeoGebra* de mpl van de punten $S_i$ ($i$ = 1, 2) laten tekenen, zie figuur 3.[3]



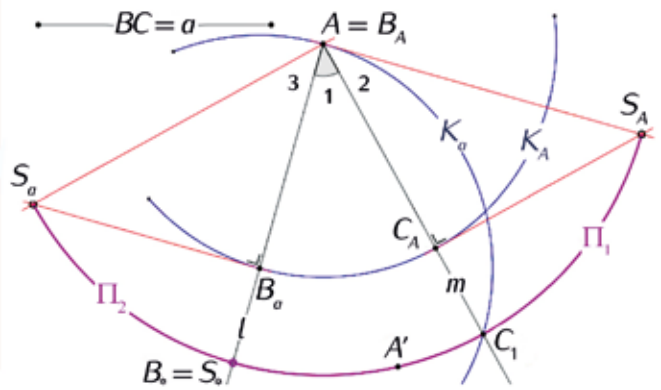
*figuur 3*

Deze mpl bestaat uit twee delen, $\Pi_1$ en $\Pi_2$. Dit zijn bogen op de hierboven genoemde cirkel $\Gamma$:
- het punt $S_1$ is het 'beschrijvende punt' van de boog $\Pi_1$;
- het punt $S_2$ is het 'beschrijvende punt' van de boog $\Pi_2$.

Als de afstand van het punt $B_s$ tot de lijn $m$ kleiner is dan $a$, dan bestaan de punten $C_1$, $C_2$ *niet*; immers, de cirkel $K_s$ snijdt dan de lijn $m$ niet. Als die afstand evenwel *gelijk* is aan $a$, dan vallen de punten $C_1$, $C_2$ samen (dit is het punt $C_*$ in de figuur). Er is dan uiteraard slechts één punt $S$. In figuur 3 valt dit punt (hier met de naam $S_*$ ) samen met het punt $B_*$, d.w.z. met het snijpunt van de halve lijn $l$ met de cirkel $\Gamma$ (zie ook de paragraaf 'Raking?').

## De eindpunten van de mpl

Zie nu figuur 4. Het linker eindpunt van de mpl, het punt $S_a$, wordt gevonden als het punt $C_2$ samenvalt met het punt $A$. In dit geval ligt $B_s$ zo op $l$ dat $AB_s = a$; deze positie wordt in de figuur aangeven door het punt $B_a$ (op $l$). Het rechter eindpunt van de mpl, het punt $S_A$, wordt gevonden als het sturende punt $B_s$ samenvalt met het punt $A$. De cirkel $K_A$, met middelpunt $A$ (≡ $B_A$) en straal $a$, snijdt dan de lijn $m$ in het punt $C_A$.



*figuur 4 NB: Het punt $C_1$, dat een snijpunt is van de lijn m met $K_a$ = (Ba, a), ligt niet op $\Pi_1$*

## Conclusie bij vraag a

Uit de overwegingen in de voorgaande paragrafen kan nu worden geconcludeerd:
- de in onderdeel a van het vraagstuk bedoelde mpl — ik geef die mpl de naam $\Pi$ – is een boog van de cirkel $\Gamma$ = ($A$, $2R$). De grootte van die boog is gelijk aan (180° – $\alpha$);
- $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$.

En verder. Die boog bestaat uit *drie* eenvoudig te onderscheiden delen, namelijk:

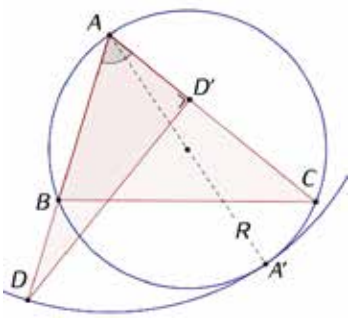
- de boog binnen hoek $A$ met een grootte gelijk aan $\alpha$ (immers hoek $A$ is een middelpuntshoek van $\Gamma$;
- twee bogen met elk een grootte van $(90^o - \alpha)$, die rechts en links aansluiten op de boog waarop hoek $A$ staat.

In figuur 4 zijn de bij de drie bogen behorende middelpuntshoeken benoemd als $A_1$, $A_2$, $A_3$.

## Raking?

In de paragraaf 'Het punt $B$ beweegt' is alleen vermeld dat $K_* = \text{Cirkel}(B_*, a)$, waarbij $B_*$ het snijpunt is van $l$ met $\Gamma$, raakt aan de lijn $m$ (in het punt $C_*$).
Deze bewering moet natuurlijk bewezen worden! Ik formuleer de te bewijzen eigenschap, (enigszins) onafhankelijk van het vraagstuk, in het volgende lemma.

Lemma 1. Van driehoek $ABC$ is $R$ de straal van de omcirkel. Is $D$ het snijpunt van de halve lijn $AB$ met de cirkel$(A, 2R)$ en is $D'$ de loodrechte projectie van $D$ op de zijde $AC$, dan is $BC = DD'$.




*figuur 5*

Bewijs. In driehoek $ABC$ is volgens de sinusregel:

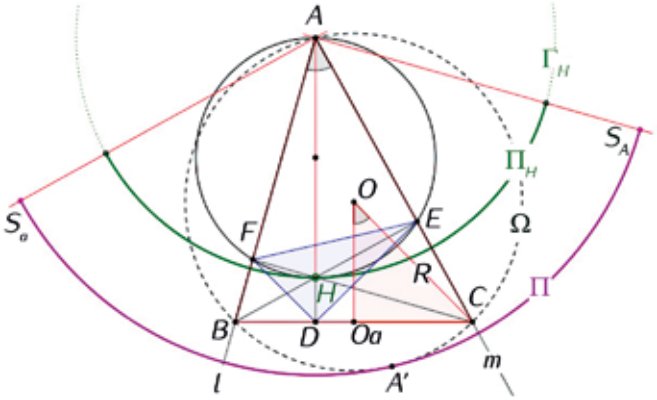
$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ zodat $BC = 2R\sin\alpha$.

In de $D'$-rechthoekige driehoek $D'AD$ is:

$\sin\alpha = \frac{DD'}{AD} = \frac{DD'}{2R}$ zodat $DD' = 2R\sin\alpha$. Hieruit volgt dan onmiddellijk het gestelde.

## Analyse bij vraag b: de mpl van H

Als een vraagstuk op de manier wordt voorgelegd zoals hier het geval is, dan ligt het voor de hand te veronderstellen dat er een verband is tussen de vragen a en b, te meer omdat er ook enige overkomst is tussen de ontstaanswijze van de beide mpl'en.




*figuur 6*

In figuur 6 wordt het hoogtepunt $H$ immers gevonden als snijpunt van de loodlijnen in de punten $E$ en $F$, op de lijnen $AC$ en $AB$, waarbij die punten dus de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek op de benen van hoek $A$ zijn. Daarom veronderstel ik, en bewijs ik vervolgens:

Lemma 2. Als in de onderhavige configuratie (punt $A$ is vast, hoek $A$ is constant, $BC$ is constant), dan is $EF$ constant.

Bewijs. In figuur 6 is het lijnstuk $EF$ een zijde van de zogeheten voetpuntsdriehoek[4] $DEF$ van driehoek $ABC$. De projectie $O_a$ van het middelpunt $O$ van de omcirkel $\Omega$ van driehoek $ABC$ op de zijde $BC$ is het midden van $BC$. Verder is in driehoek $OO_aC$:

- $OC = R$ (straal van $\Omega$) en $\angle O_aOC = \alpha$. Dan is in driehoek $OO_aC$: $\cos\alpha = \frac{OO_a}{R}$ zodat $OO_a = R\cos\alpha$. Volgens een bekende eigenschap[5] is ook: $AH = 2\cdot OO_a$. Zodat:
- $AH = 2R\cos\alpha$ (met andere woorden: $AH$ is constant). Toepassing van de sinusregel in driehoek $AEF$ (een deel van de koordenvierhoek $AFHE$) geeft nu:
- $\frac{EF}{\sin\alpha} = 2R_{\Delta AFE} = AH$, zodat:
- $EF = AH\cdot\sin\alpha = 2R\cos\alpha\cdot\sin\alpha = R\sin(2\alpha)$.

Maar $R$ en $\alpha$ zijn beide constant, en daarmee is ook $EF$ constant. Wat te bewijzen was.

Door de geldigheid van lemma 2 is de situatie voor de mpl $\Pi_H$ van het hoogtepunt van de driehoek(en) $ABC$ analoog aan die voor de mpl van het punt $S$ bij vraag a.

## Conclusie bij vraag b

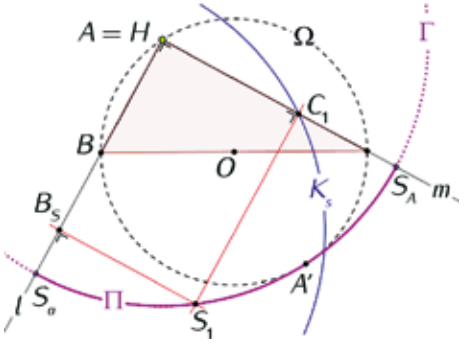
- de mpl $\Pi_H$ van het hoogtepunt $H$ van de driehoeken $ABC$ is het door de lijnen $AS_A$ en $AS_a$ begrensde boogdeel van de cirkel$(A, AH) = \Gamma_H$;
- conform de conclusie in de paragraaf 'Conclusie bij vraag a' is de grootte van deze boog gelijk aan $(180^o - \alpha)$.

En ook:

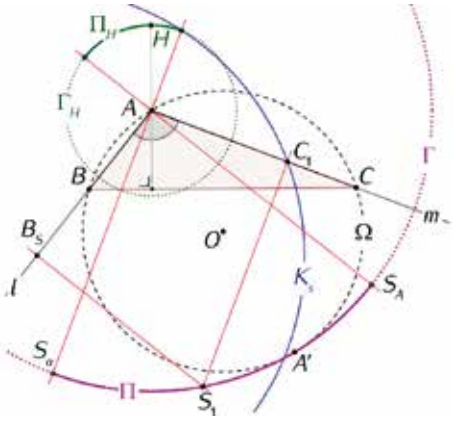
— de mpl $\Pi_H$ is de *productfiguur* van de mpl $\Pi$ bij een vermenigvuldiging met de factor (cosα) met het punt $A$ als centrum.

## Hoek A: recht en stomp

Na het voorgaande zal het niet moeilijk meer zijn in te zien hoe het zit met de bedoelde mpl'en als de hoek $A$ van de driehoeken recht of stomp is; zie de figuren 7a en 7b.




*figuur 7a Hoek A is recht. Dan is* $\Pi_H \equiv A \equiv H$.




*figuur 7b Hoek A is stomp (cosα < 0).*

## Conclusie

— ook als hoek $A$ recht is of stomp, is $\Pi$ een deel van $\Gamma$, begrensd door de lijnen $AS_a$ en $AS_A$;

— in beide gevallen is de grootte van de boog weer $(180^o - \alpha)$. En verder:

— als $\alpha = 90^o$ is, is de mpl $\Pi_H$ ontaard in een *enkel* punt, namelijk het punt $A$, omdat elke beschouwde driehoek $A$-rechthoekig is (dan is $A \equiv H$). Het punt $H$ komt daardoor bij het verplaatsen van het punt $B_s$ over de lijn $l$ niet van zijn plaats.

— Ik merk nog op dat in dit laatste geval de vermenigvuldigingsfactor van $\Pi$ naar $\Pi_H$ gelijk is aan 0 $(= \cos 90^o)$.

En na dit alles, te bedenken dat in 1958 de deelnemers aan het examen voor het maken van de toelichtende tekening(en) slechts beschikten over potlood (met scherpe punt), passer, liniaal en, niet te vergeten, een vlakgom...

## Noten

[1] De akte LO-wiskunde behoort volgens mij tot het Nederlandse 'onderwijserfgoed'. Het programma van die akte (LO staat voor lager onderwijs) bestond uit: algebra, planimetrie, gonio- en trigonometrie, stereometrie, didactiek en methodiek. De wiskundige inhoud daarvan is vergelijkbaar met het wiskundeprogramma van het programma voor vhmo (gymnasium, hbs) van voor 1968. Het was inhoudelijk echter een stuk zwaarder. Het examen Wiskunde-LO kende een schriftelijk en een mondeling deel. Zie ook: K.A. Blom (2000). *Van de Acten van Bekwaamheid*. In: *Honderd jaar wiskundeonderwijs* – Een jubileum boek. Leusden: NVvW; pp. 89–104. En eventueel ook: *https://nl.wikipedia.org/wiki/LO-akten*

[2] Bron: H.G.A. Verkaart (H. Herreilers, R. Kooistra, eds.): *Gids voor het Examen Wiskunde L.O.* Groningen: P. Noordhoff N.V., 8e druk, 1960; pp. 5-9, p. 43.

[3] In figuur 3 (en volgende) is het punt $A'$ het tegenpunt van het punt $A$ op de omcirkel van een van de (mogelijk niet weergegeven) driehoeken $ABC$.

[4] De voetpuntsdriehoek van een driehoek $D$ is de driehoek waarvan de hoekpunten de voetpunten zijn van de hoogtelijnen van $D$.

[5] Voor een bewijs van die eigenschap zie stelling 2 in:D. Klingens (2004): Twee (belangrijke) eigenschappen van het hoogtepunt van een driehoek en een gevolg daarvan. *https://www.pandd.nl/downloads/eigenshoogtepunt.pdf*

Dick Klingens

# Meetkunde - eenvoudig, of toch niet?

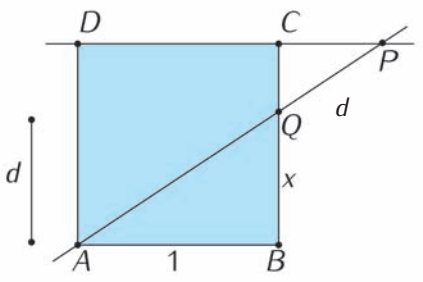
Een eenvoudig ogende opgave blijkt toch ingewikkelder te zijn.

## Jammer

De ruimte die de vlakke meetkunde in het leerplan wiskunde voor havo/vwo inneemt, is in de loop der jaren kleiner geworden, en daarmee neemt natuurlijk ook de vaardigheid in het oplossen van meetkundeproblemen af – ook die van wiskundeleraren. Wat dat op termijn betekent voor de (vul maar in) wiskunde, wetenschap, samenleving, ..., daarover heb ik wel mijn gedachten. Het enige wat ik er *hier* over kwijt wil, is dat het jammer is. Die gedachten kwamen bij mij op toen mij door een (jongere) oud-collega het volgende, eenvoudig ogende en hierna te bespreken constructieprobleem werd voorgelegd.

## Gevraagd

Zie figuur 1. Gegeven is een vierkant $ABCD$ en een lijnstuk (met lengte) $d$. Op de lijn $DC$ moet het punt $P$ en op $BC$ het punt $Q$ zó geconstrueerd worden – uiteraard met passer en liniaal (p&l) – dat $A$, $Q$ en $P$ collineair zijn én $PQ = d$.




*figuur 1*

## Oplossing?

Met het plaatje erbij lijkt de oplossing inderdaad voor de hand te liggen (eenvoudig ogend). De driehoeken $ABQ$ en $PCQ$ zijn gelijkvormig. Als je dan voor het gemak $AB = 1$ stelt en $BQ = x$, dan is $AQ = \sqrt{(1 + x^2)}$, zodat uit $BQ : CQ = AQ : PQ = AB : CP$ volgt dat:

(1) $x : (1 - x) = \sqrt{(1 + x^2)} : d$

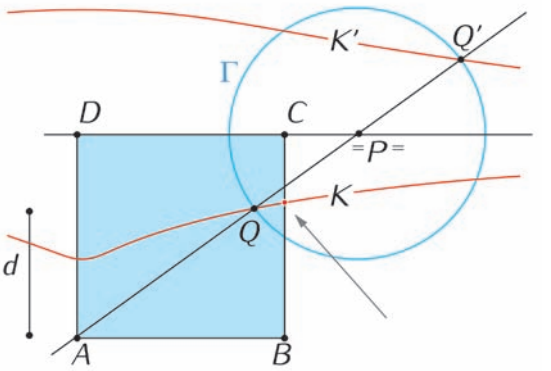
Maar dit leidt tot een vierdegraads vergelijking in $x$! ... En in $BQ : CQ = AB : CP$ zit naast $x$ ook $CP$ als onbekende. Evenwel, uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $ABQ$ en $PDA$ volgt:

$AB : PD = BQ : DA$ of $1 : PD = x : 1$, zodat:

(2) $PD = \frac{1}{x}$

En deze relatie speelt, zoals aan het einde zal blijken, een belangrijke rol.

Dan toch maar verder werken met relatie (1)? Nog even niet. Eerst nog een ander plaatje, zie figuur 2, waarin het punt $P$ 'wandelt' over de lijn $CD$ en de meetkundig plaatsen $K$, $K'$ worden getekend [1] van de snijpunten $Q$, $Q'$ van de lijn $AP$ met de cirkel $\Gamma$ met middelpunt $P$ en straal $d$.




*figuur 2*

Tja, het probleem zou 'GeoGebra-oplosbaar' zijn als het snijpunt van die meetkundige plaats met $BC$, het punt $Q$ in figuur 1, zou kunnen worden bepaald;[2] maar dat is dan *niet* met p&l! De constructie van de meetkundige plaats heeft overigens wel een bijzondere naam: *neusis* (ook wel neusis-constructie).[3, 4]

## Oplossen van de vergelijking

Dus zit er niets anders op dan verder te gaan met de vergelijking die volgt uit de eerdergenoemde gelijkvormigheid. Kwadrateren van relatie (1) gevolgd door ordenen geeft:[5]

(3a) $x^4 - 2x^3 + (2 - d^2)x^2 - 2x + 1 = 0$

Merk op dat de coëfficiënten in (3a) symmetrisch (*palindromisch*[6]) zijn: 1, -2, $(2 - d^2)$, -2, 1.

Dat biedt mogelijkheden voor de substitutie $x + \frac{1}{x} = y$, na deling door $x^2$:

(3b) $x^2 - 2x + (2 - d^2) - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

En vervolgens, iets anders gerangschikt:

$(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) - d^2 = 0$,

zodat: $y^2 - 2y - d^2 = 0$

Omdat $y > 0$ is, volgt hieruit:

(4a) $y = 1 + \sqrt{(1 + d^2)}$

Het aangename is dat het lijnstuk $y$ in ieder geval p&l-construeerbaar is.

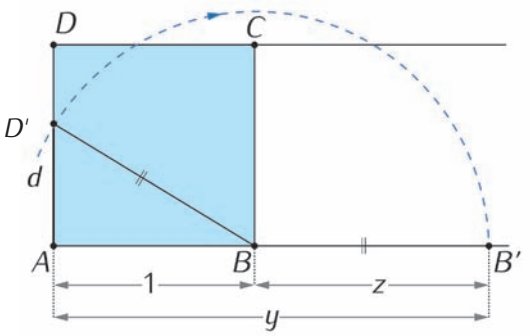
Stel in (4) namelijk $z = \sqrt{(1 + d^2)}$. Dan volgt daaruit dat $z^2 = 1 + d^2$ is. In een rechthoekige driehoek kan dan $z$, en dus ook $y = 1 + z$, worden gevonden.

Zie daarvoor figuur 3, waarin:

(4b) $AD' = d$, $BD' = \sqrt{(1 + d^2)} = z = BB'$

En inderdaad, via de cirkel $(B, BD')$ is:

(5) $y = 1 + z = AB'$



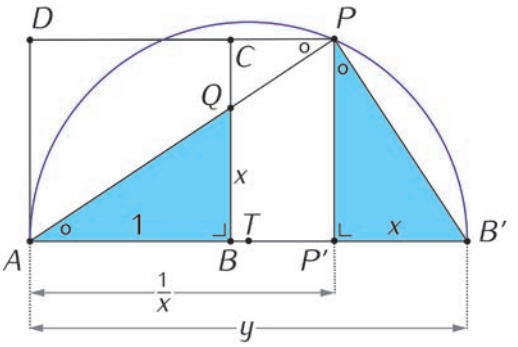

*figuur 3*

En dan moet met *die* $y$ het lijnstuk $x$ op basis van de relatie $x + \frac{1}{x} = y$ worden geconstrueerd. Maar, kan dat wel met p&l?

## Een driehoekje erbij

Nu kan ik en ga ik gebruik maken van relatie (2): $DP = \frac{1}{x}$

In mijn 'analysefiguur' – deze staat in figuur 4 – is $P'$ het voetpunt van de loodlijn uit $P$ op $AB$. Dan is ook $AP' = \frac{1}{x}$, met als gevolg dat $P'B' = x$, immers $x + \frac{1}{x} = y = AB'$.

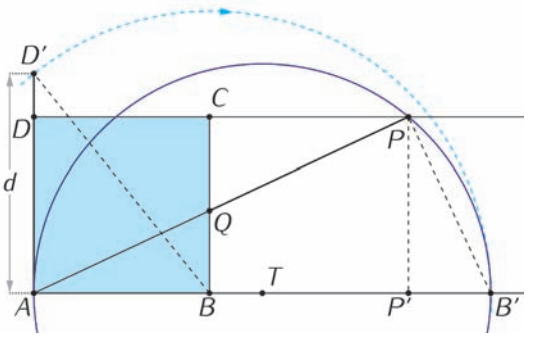



*figuur 4*

Met $AB = 1 = PP'$ en $BQ = x = P'B'$ zijn de driehoeken $ABQ$ en $PP'B'$ congruent ($ZHZ$). In die driehoeken is dan $A = P$, zodat $\angle APB' = 90^\circ$.

Daarmee ligt het punt $P$ dus op de Thales-cirkel met $AB'$ als middellijn (middelpunt $T$). En dan is het punt $P$ met p&l te construeren als snijpunt van die cirkel met de lijn $DC$. De constructie van het punt $Q$ is daarna triviaal.

De gehele p&l-constructie is nog eens opgenomen in figuur 5, waarin de lengte van het gegeven lijnstuk $d$ (= $AD'$) nu groter is dan 1 (dus groter dan $AD$).




*figuur 5*

Wat zo eenvoudig oogde – en eigenlijk nog – eiste toch echt wel wat!

## Naschrift

En toen ik het bovenstaande in klad op papier had gezet, keek ik ook maar eens in de literatuur naar de constructie met de neusis en naar de conchoïde.[1]
In [7], pag. 412 vond ik bij een stelling van Pappos van Alexandrië (290–350) een plaatje dat overeenkomt met figuur 4. En bij het lezen van de naam Nikomedes (de ontdekker van de kromme van figuur 2.) herinnerde ik me dat ik ooit (het bleek in 2005 te zijn) een stukje schreef over diens conchoïde – het had een paragraaf in een Zebra-boekje moeten worden. Ook hiervan is in de appendix het een en ander terug te vinden, namelijk in de paragrafen 4 (met het bedoelde plaatje), 5 en 6.
En mijn oud-collega? Die heb ik niet alleen op de geschiedenis van het probleem gewezen, maar natuurlijk ook een kopietje van mijn uitwerkingen gegeven.

Een appendix bij dit artikel vind je op de *Euclides*-site.
*vakbladeuclides.nl/977meetkunde_eenvoudig*

De artikelen die Dick voor *Euclides* schreef in één pdf:
*vakbladeuclides.nl/977dickklingens*

Met dank aan Martin Kindt voor het redigeren van dit artikel.

## Noten

[1] De naam van de tweedelige meetkundige plaats is conchoïde. Nikomedes (± 280 – ± 210 v. Chr.) gebruikte zo'n kromme om het probleem van de verdubbeling van de kubus (het zogeheten Delisch probleem) op te lossen, een probleem waarvan sinds 1837 (Pierre Wantzel) bekend is dat het niet p&l-construeerbaar is. Zie bijvoorbeeld op Wikipedia: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Verdubbeling_van_de_kubus Etymologie. Conchoïde < Gr.* kogcoeidhç (koncho-eidès), (een lijn) gelijkend op een schelp. Een vroeger gebruikt woord voor conchoïde is schulplijn.

[2] Het programma GeoGebra heeft (nog?) geen functie waarmee direct een snijpunt van een meetkundige plaats met een ander meetkundig object kan worden gevonden.

[3] De methode werd in de klassieke oudheid toegepast met een neusisliniaal bij constructies die niet met p&l uitvoerbaar waren. In figuur 2 fungeert de lijn AQ' als zodanig. Voor een verdere toelichting zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Neusis Etymologie.* Het woord 'neusis' komt van het Griekse werkwoord neueiv (neuein), dat 'neigen' betekent; wiskundig gebruikt als 'inschuiven'. Zie ook: Meskes, A. & Tytgat, P. (2015). *Met passer, liniaal en neusislat.* Zebra 41. Epsilon.

[4] Zie paragraaf 2 in de appendix voor een analytische afleiding van de vergelijking van een conchoïde.

[5] In de appendix staat in paragraaf 1 ook een stukje analytische meetkunde dat tot dezelfde vierdegraads vergelijking leidt.

[6] Een algemene behandeling van zo'n vergelijking staat in paragraaf 3 van de appendix.

[7] Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics.* New York (USA): Dover Publications, reprint 1981; vol. II, pp. 412-416.

# Raking, óók een klassiek probleem

Dick Klingens

## Het probleem

In het Duitse wiskundetijdschrift *Die Würzel* [1] stond in de laatste aflevering van de 54e jaargang (december 2019) een vraagstuk, onder nummer 2019-55, dat in mijn vertaling als volgt luidt: [2]

> Gegeven is een cartesisch coördinatenstelsel met een willekeurig punt *P* in het eerste kwadrant. Construeer de middelpunten van de door *P* gaande cirkels die aan de coördinaatassen raken.

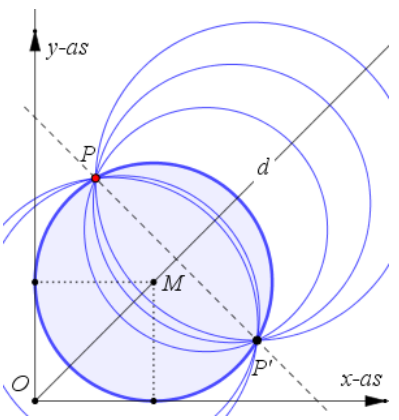
En vanzelfsprekend is een constructie gewenst die *met passer en liniaal* (p&l) kan worden uitgevoerd. Maar de noodzaak daartoe is er even vanzelfsprekend niet.

Bij eerste lezing van het vraagstuk dacht ik “laat maar, het is bekend”, en misschien ook wel “het is niet geschikt om er iets mee te doen voor *Euclides*”. Maar toen echter ik de oplossing van het probleem in het juni-nummer van 2020 zag, veranderde mijn mening. Waardoor?
In die oplossing, van de hand van Hans Schmidt (Magdeburg), wordt *geen* gebruik gemaakt van het gegeven dat de beide lijnen waaraan de cirkels moeten raken, loodrecht op elkaar staan. Dat coördinatenstelsel is dus nergens voor nodig, tenzij je…

## Oplossing 1, ongeveer als Hans Schmidt deed

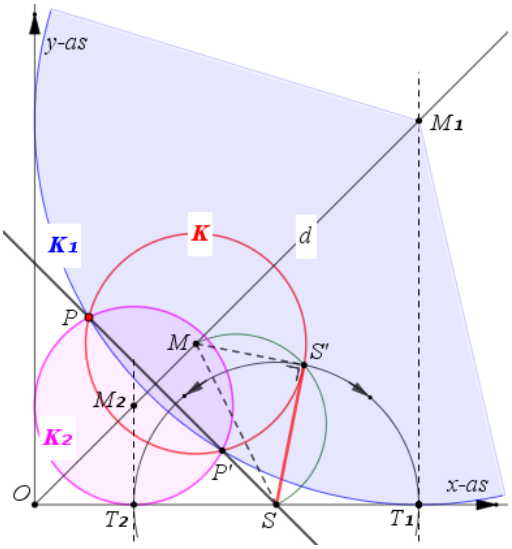
Ik geef mijn eigen oplossing van het probleem, maar de kern daarvan komt overeen met die van Schmidt. Daarbij, om de illustraties bij elke te geven oplossing met elkaar te kunnen vergelijken ga ik in ieder geval uit van een orthogonaal assenstelsel *xOy*.
Allereerst. De bissectrice van een hoek is de meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels die raken aan de benen van die hoek. In figuur 1 is dat de rechte lijn *d*.
Vervolgens. Een cirkel die door *P* gaat en waarvan het middelpunt op de lijn *d* ligt, gaat natuurlijk ook door het d-spiegelbeeld *P'* van *P*. Alle cirkels die deze eigenschap hebben, vormen een *cirkelbundel*. Nu moet dus een van de exemplaren van die bundel raken aan de *x*- en *y*-as.

figuur 1




In dit geval is de lijn *PP'* de *machtlijn* van de bundel en elk punt van die lijn heeft de eigenschap dat de raaklijnstukken uit dat punt aan *alle* exemplaren dezelfde lengte hebben (het kwadraat van die lengte is de *macht* van het punt bij de bundel).[3]
Is *S* het snijpunt van *PP'* met de *x*-as (zie figuur 2), dan is het zaak zo’n raaklijnstuk uit *S* aan een willekeurig bundelexemplaar te construeren om daarmee een op de *x*-as gelegen raakpunt te kunnen vastleggen.

figuur 2




In figuur 2 is *K* een willekeurige cirkel (middelpunt *M*) die door *P* en *P'* gaat. Het raaklijnstuk *SS'* aan *K* wordt gevonden met een *Thales-cirkel* – hier een halve – op het lijnstuk *MS*. Met de cirkel met middelpunt *S* en straal *SS'* zijn vervolgens de punten $T_1$, $T_2$ op de *x*-as geconstrueerd. De snijpunten met *d* van de loodlijnen in $T_1$, $T_2$ op de *x*-as zijn dan de middelpunten $M_1$, $M_2$ van de gezochte cirkels $K_1$, $K_2$.

Tot zover de oplossing van Hans Schmidt, die ook een bijzondere ligging van het punt *P* aan de orde stelde. Ik stel hierover alleen maar twee vragen.[4]

**Vraag 1a.** Hoe verloopt de constructie van de punten $T_1$ en $T_2$ als het punt *P op* de bissectrice *d* ligt?
**Vraag 1b.** Waarom zijn er, ook bij een willekeurige hoek tussen de lijnen *x* en *y*, ten hoogste twee oplossingen?

### Oplossing 2, de mijne en mét coördinaten

Ik geef nu toch ook maar een constructie met gebruik van een rechthoekig assenstelsel. Daarin is $P = (p, q)$, waarbij *p* en *q* in principe lengtes van *gegeven* lijnstukken zijn.
Is $M = (a, a)$ het middelpunt van een cirkel *K* die raakt aan de coördinaatassen, dan is een vergelijking van *K*:

· $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2a(x+y)+a^2=0$

Omdat *P* op *K* ligt, geldt, na enige ordening:

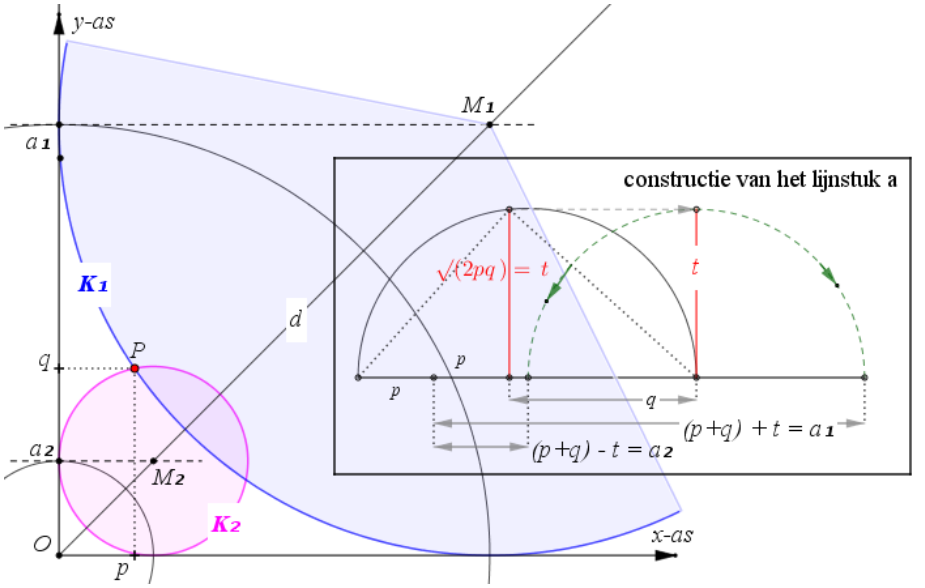
· $a^2-2(p+q)a+(p^2+q^2)=0$

In deze relatie is *a* de lengte van een te construeren lijnstuk dat de straal is van een gezochte cirkel. Na wat rekenwerk volgt:

· $a=(p+q)\pm\sqrt{2pq}$

En hieruit blijkt dat het lijnstuk *a* p&l-construeerbaar is. Deze constructie staat in het omkaderde deel van figuur 3.
Voor het lijnstuk met lengte $\sqrt{(2pq)} = t$ geldt $t^2 = 2pq$, zodat een lijnstuk met lengte *t* te construeren is als een hoogtelijn in een rechthoekige driehoek die beschreven is in een *Thales-cirkel* op een middellijn met een lengte van $(2p) + (q)$.[5]

figuur 3




De ligging van de punten $M_1$, $M_2$ op de lijn $d$ is dan met de cirkels met middelpunt $O$ en stralen $a_1 = (p + q) + t$ en $a_2 = (p + q) – t$ te vinden. $K_1$ en $K_2$ zijn weer de bijbehorende cirkels.
En ik laat ook hier een vraag volgen.

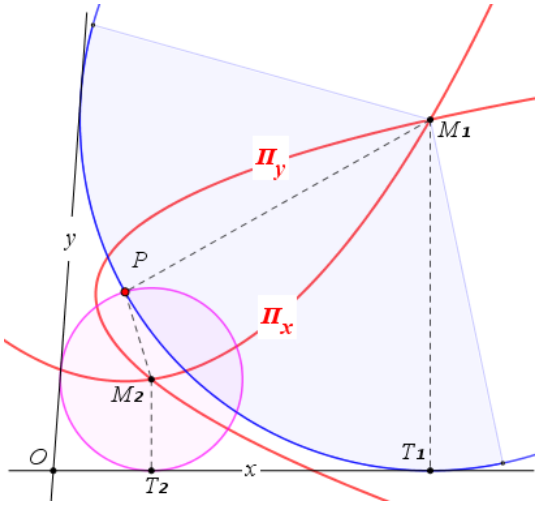
**Vraag 2.** Is er bij deze oplossing gebruik gemaakt van het feit dat $P$ in het eerste kwadrant ligt? Verklaar het antwoord.

## Oplossing 3, de eenvoudigste?

In figuur 4 staan twee parabolen, $\Pi_x$ en $\Pi_y$, die beide het punt $P$ als brandpunt hebben en opvolgend de lijnen $x$ en $y$ als richtlijn; de hoek tussen $x$ en $y$ is bijna 90°.
De snijpunten van de parabolen zijn $M_1$, $M_2$. En voor zo'n snijpunt geldt, conform de definitie van parabool, met $k$ = 1, 2:

- $M_kP$ = afstand($M_k$, $x$) = afstand($M_k$, $y$)

figuur 4




Voor het tekenen van de parabolen heb je dan wel een computerprogramma nodig, want dat wil niet met p&l.[6] Maar, uit de eerder gegeven oplossingen blijkt dat de *snijpunten* van die kegelsneden wél p&l-construeerbaar zijn.

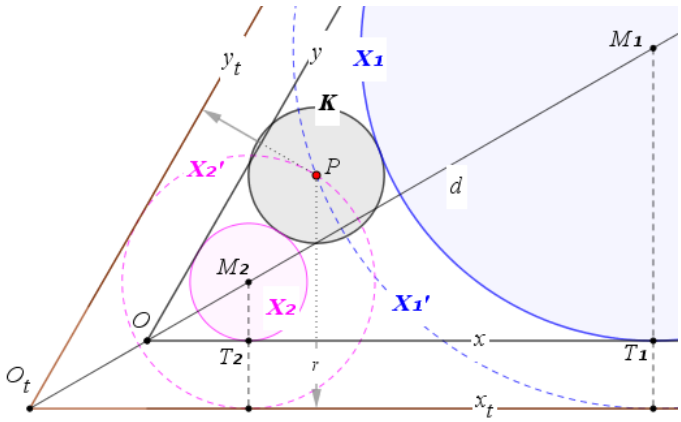
## Het vraagstuk in een klassiek jasje

Het *raakprobleem van Apollonius* uit de Oudgriekse wiskunde luidt, algemeen geformuleerd: [7]

> Gegeven zijn drie objecten, waarvan elk een punt ($u$), een lijn ($v$) of een cirkel ($w$) kan zijn.
> Construeer een cirkel die door elk der punten gaat – voor zover ze gegeven zijn – en die de gegeven lijnen of cirkels raakt.

De getallen $u$, $v$, $w$ zijn de *aantallen* van de te beschouwen objecten, waarbij dus $u + v + w = 3$. Het probleem met $(u,v,w) = (0,0,3)$ heeft 8 oplossingen.[8] In de vorige paragrafen is dus telkens $u = 1$, $v = 2$ en $w = 0$.
Het raakprobleem wordt iets interessanter, als in plaats van het punt $P$ een cirkel $K$ met middelpunt $P$ wordt genomen. Dan is $(u,v,w) = (0,2,1)$. Maar… dit deelprobleem kan eenvoudig worden teruggebracht tot probleem $(1,2,0)$.

figuur 5




Als namelijk een cirkel $X$ moet raken aan de lijnen $x$, $y$ en aan de gegeven cirkel $K$, dan bestaat er een *met $X$ concentrische* cirkel $X'$ die door het middelpunt $P$ van $K$ gaat en raakt aan twee lijnen $x_t$ en $y_t$ (met snijpunt $O_t$)
Dit zijn lijnen die over een afstand $r$ (de straal van $K$) evenwijdig aan $x$ en aan $y$ verschoven zijn (via een translatie dus). Die cirkel $X'$ is dus een oplossing van probleem $(1,2,0)$.
Bij de constructie van de cirkels $X_1$ en $X_2$ is in figuur 5 heb ik gebruik gemaakt van parabolen (zie Oplossing 3).
Overigens, de Vlaamse wetenschapper Adriaan van Roomen (1561–1615) [9] was de eerste die, in 1596, kegelsneden gebruikte bij de oplossing van Apollonius' probleem.[10]
En tot slot:

**Slotvraag.** Zijn hierboven *alle* oplossingen van $(u,v,w) = (0,2,1)$ gevonden? Verklaar het antwoord.

## Noten

[1] Het tijdschrift wordt uitgegeven door *Wurzel*, Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten. Op de website van de vereniging (*www.wurzel.org*) staat onder meer: Unserer Zeitschrift richtet sich an Schüler und Lehrer der gymnasialen Oberstufe, an Studenten, Professoren und alle mathematisch Interessierten.

[2] Oorspronkelijk: Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensysteem sowie ein beliebiger Punkt $P$ im ersten Quadranten. Man konstruiere die Mittelpunkte der Kreise, welche beide Koordinatenachsen berühren und $P$ beinhalten (Gerald Irsigler, Berlin).

[3] MARTIN KINDT (2019/20): *Machtige meetkunde*. In *Euclides*, jrg. 95/3, blz. 10-14 en jrg. 95/4, blz. 26-30; elektronisch bereikbaar (na inloggen) via: *https://vakbladeuclides.online/*

[4] Bij dit artikel hoort een Appendix. Daarin staan antwoorden op de vragen. Ook is er wat toelichtende theorie opgenomen en een 4e oplossing van het onderhavige probleem.
Zie bladzijde 50 en verder.

[5] Uit $t^2 = 2pq$ volgt $2p : t = t : q$. Daarom zegt men ook: "$t$ is de middelevenredige van $2p$ en $q$"; zie paragraaf 3 in de Appendix.

[6] Een puntsgewijze p&l-constructie op basis van de definitie van parabool is uiteraard wel mogelijk (punt-voor-punt-constructie).

[7] APOLLONIUS VAN PERGA (± 262–190 v.Chr.) in *De Tactionibus* (over aanrakingen), een verloren gegaan, uit twee delen bestaand boek. Voor een reconstructie van de inhoud ervan zie:
TH. HEATH (1921): *A History of Greek Mathematics*. New York: Dover Publications; vol. II, blz. 182 ev. (reprint 1981)

[8] Zie bijvoorbeeld:
Wikipedia-NL: *Raakprobleem van Apollonius*. Elektronisch bereikbaar via:
*https://nl.wikipedia.org/wiki/Raakprobleem_van_Apollonius*

[9] Wikipedia-NL: *Adriaan van Roomen*. Elektronisch bereikbaar via:
*https://nl.wikipedia.org/wiki/Adriaan_van_Roomen*

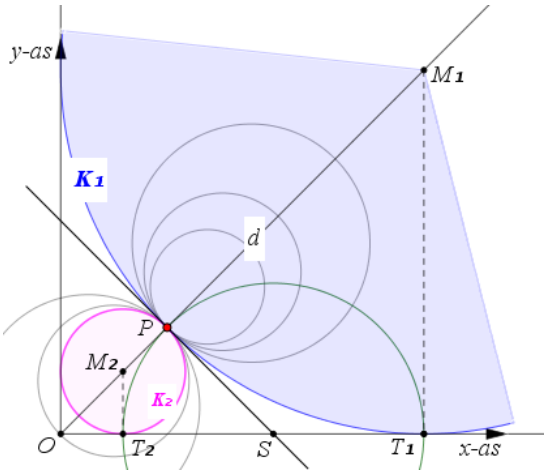
[10] A. MESKENS, P. TYTGAT (2017): *Exploring classical Greek construction problems*. Cham (Ch): Birkhäuser; hoofdstuk 2, blz. 14-19.

# Appendix bij « Raking, óók een klassiek probleem »

**DICK KLINGENS** (emailadres: *dklingens@gmail.com*)
juni 2020

## 1. Antwoorden bij de vragen

**Vraag 1a**



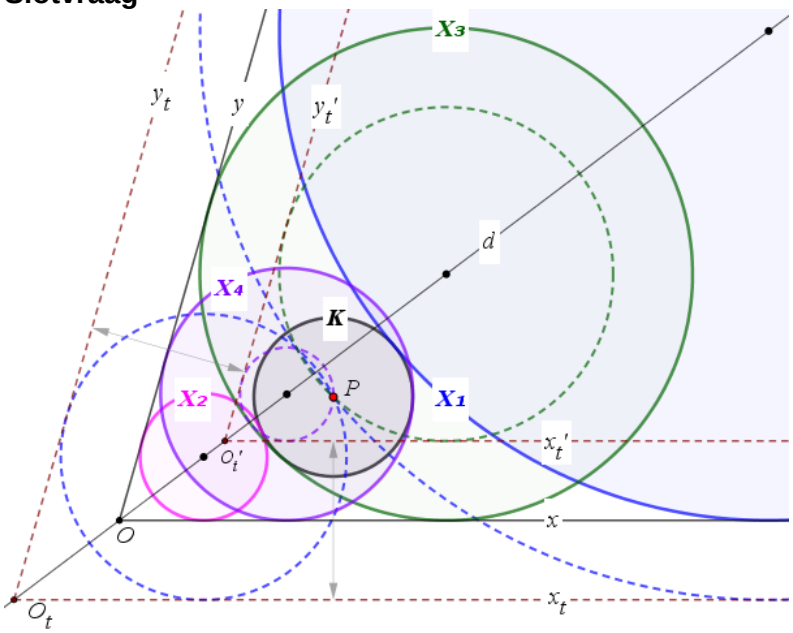

Van de cirkelbundel door het op $d$ gelegen punt $P$ met middelpunten op $d$ is de loodlijn in $P$ op $d$ de machtlijn.

Is $S$ het snijpunt van die machtlijn met de $x$-as, dan zijn alle raaklijnstukken uit $S$ aan de bundelexemplaren gelijk aan de lengte $t$ van $SP$.
De raakpunten van de te construeren cirkels liggen dus op een afstand $t$ aan weerszijden van $S$ op de $x$-as.
En de middelpunten $M_1$, $M_2$ volgen vanzelf. ◊

**Vraag 1b.** Stel dat er een derde cirkel is die de $x$-as in $U$ raakt. Dan is ook $SU = SP = t$. En dit betekent dat $U$ met $T_1$ of met $T_2$ moet samenvallen. ◊

**Vraag 2.** Antwoord: Ja.
Er is bij de afleiding van de waarde van $a = (p+q) \pm \sqrt{(2pq)}$ inderdaad gebruik gemaakt van het feit dat $P$ in het *eerste kwadrant* ligt. Ligt $P$ namelijk in het tweede of vierde kwadrant, dan is $p \cdot q < 0$. In dit geval bestaat $\sqrt{(2pq)}$ niet.
Ligt $P$ in het derde kwadrant, dan zijn de waarden van $p$ en $q$ negatief en dan is $a < 0$ zijn. In dat geval moet $\sqrt{(2pq)} < p+q$.

**Slotvraag**




Antwoord: Nee.

Omdat de in het artikel genoemde translatie in *twee* richtingen ten opzichte van het punt $O$ kan worden uitgevoerd (naar $O_t$ en naar $O_t'$), zijn er nog *twee* andere oplossingen.

Zie in de figuur hiernaast de cirkels $X_3$ en $X_4$, met raaklijnen $x_t'$ en $y_t'$.

Het deelprobleem $(0,2,1)$ heeft dus maximaal 4 oplossingen. ◊

## 2. Macht en machtlijn (bij Oplossing 1)

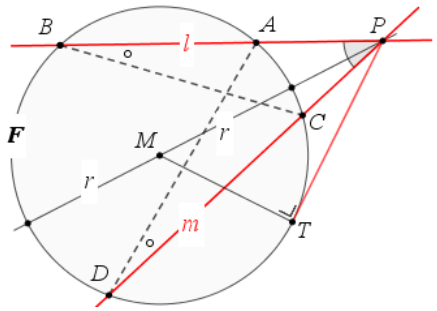
Ik verwees in noot 4 van mijn artikel naar hetgeen Martin Kindt in jaargang 95 (nrs. 3 en 4) van *Euclides* over macht en machtlijn had geschreven in *Machtige meetkunde I* en *II*.

Hieronder zet ik enkele zaken over macht en cirkel nog eens bij elkaar.

**Definitie.** Een rechte lijn die met een cirkel twee verschillende punten gemeenschappelijk heeft, heet **secant** van die cirkel.[1] ◊

**Definitie.** Is $l$ een secant van de cirkel $F$ met $\{A, B\} = l \,\&\, F$ [2] en is $P$ een punt van $l$ (zie figuur 3), dan heet het getal $(\varepsilon \cdot PA \cdot PB)$ de **macht van *P* bij *F***. Hierbij is $\varepsilon = +1$ als $P$ *buiten* $F$ ligt en $\varepsilon = -1$ als $P$ *binnen* $F$ ligt. Notatie, meestal zonder $\varepsilon$: $\mu(P, F) = \mu(P) = PA \cdot PB$. ◊

figuur 3




**Stelling 1 (secantstelling).** Zijn $l$, $m$ secanten van de cirkel $F$, met snijpunten $A$, $B$ resp. $C$, $D$ en is $P = l \,\&\, m$, dan is:

· $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

**Bewijs.** De driehoeken $PBC$ en $PDA$ zijn gelijkvormig ($hh$), zodat:

· $PB : PD = PC : PA$

waaruit het gestelde volgt. ◊

Opmerking. Het 'secantproduct' is dus constant bij elke secant door het punt $P$.

**Gevolgen**

(a) Is $M$ het middelpunt van $F$ en $r$ de straal, dan blijkt via de secant $PM$ dat:

· $PA \cdot PB = (PM - r)(PM + r) = PM^2 - r^2$

Zodat:

· $\mu(P) = PM^2 - r^2$

(b) Is $T$ het raakpunt van een raaklijn uit $P$ aan $F$, dan is $PM^2 - r^2 = PT^2$, zodat:

· $\mu(P) = PT^2$

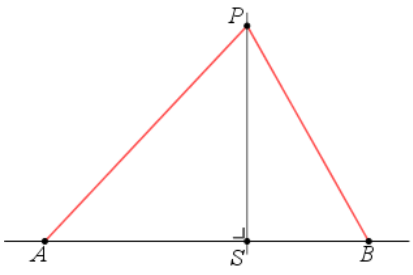
Of in woorden: van een buiten een cirkel gelegen punt is de macht bij die cirkel gelijk aan het kwadraat van de lengte van het raaklijnstuk uit dat punt. ◊

**Stelling 2.** De meetkundige plaats van de punten waarvan het verschil van de kwadraten van de afstanden tot twee gegeven punten constant is, is een rechte lijn die loodrecht staat op de lijn door die gegeven punten. ◊

Opmerking. Omdat "meetkundige plaats" hetzelfde begrip is als "verzameling" moet het bewijs van een stelling over een meetkundige plaats gesplitst worden in twee delen, te weten: [3]
(1) als een punt de genoemde eigenschap heeft, dan moet dat punt op het genoemde object liggen, en:
(2) als een punt op het genoemde object ligt, dan moet dat punt de genoemde eigenschap hebben. ◊

**Bewijs** (van stelling 2). In figuur 4 zijn $A$ en $B$ gegeven vaste punten.
(1) $P$ is een punt met de eigenschap dat $PA^2 - PB^2 = d^2$ (waarbij $d$ een gegeven constante is). De naamgeving is zo gekozen dat $PA > PB$.

figuur 4




Is $S$ de loodrechte projectie van $P$ op de lijn $AB$, dan is:
**(*)…** $PA^2 - AS^2 = PS^2 = PB^2 - BS^2$
zodat:

· $d^2 = PA^2 - PB^2 = AS^2 - BS^2$ (conform het gegeven)

of:

· $(AS - BS)(AS + BS) = d^2$

en dan is, met $AB = a$:

· $AS - BS = \frac{d^2}{a}$

Omdat $AS + BS = a$ is, kan uit beide laatste relaties een uitdrukking voor $AS$ worden afgeleid:

· $AS = \frac{1}{2}(a + \frac{d^2}{a})$

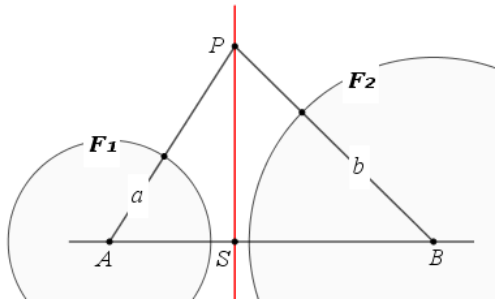
Het punt $S$ op de lijn $AB$ heeft dus een *vaste* positie, onafhankelijk van het punt $P$, immers $AS$ is onafhankelijk van de lengte van $PS$.[4]
Met andere woorden: *alle* punten $P$ liggen op de loodlijn in het punt $S$ op $AB$.

(2) Omgekeerd, ligt $P$ op die loodlijn, dan blijkt uit **(*)** dat $PA^2 - PB^2$ constant is, omdat $AS$ en $BS$ constant zijn. ◊

Een gevolg van stelling 2 is de – in dit verband belangrijke – volgende stelling.

**Stelling 3.** De meetkundige plaats van de punten met gelijke machten bij twee cirkels is een loodlijn op de verbindingslijn van de middelpunten van die cirkels.

figuur 5




**Bewijs.** In figuur 5 zijn gegeven de cirkels $F_1(A, a)$ en $F_2(B, b)$. Nu is voor een punt $P$:

· $\mu(P, F_1) = PA^2 - a^2$ en $\mu(P, F_2) = PB^2 - b^2$

Als $P$ gelijke machten heeft bij $F_1$ en $F_2$ is:

· $PA^2 - a^2 = PB^2 - b^2$

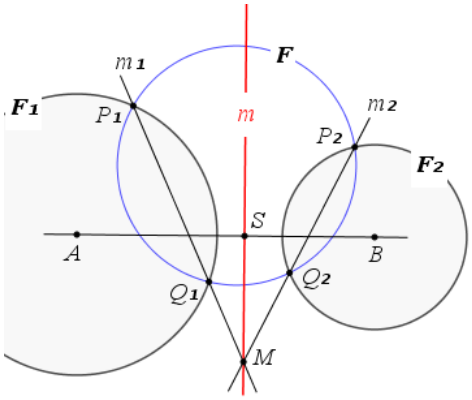
zodat:

· $PA^2 - PB^2 = a^2 - b^2$ = constant

Uit stelling 2 volgt dan hetgeen te bewijzen was. ◊

Constructie van de machtlijn van twee vrijgelegen cirkels. Uitgaande van de gegeven cirkels $F_1$ en $F_2$, die dus geen gemeenschappelijke punten hebben, construeer ik een cirkel $F$ die beide cirkels snijdt, in $P_1$, $Q_1$ en in $P_2$, $Q_2$; zie figuur 6.

figuur 6




Omdat $P_1$, $Q_1$ op $F_1$ liggen, is:

· $\mu(P_1, F_1) = \mu(Q_1, F_1) = 0$

en analoog is ook:

· $\mu(P_1, F) = \mu(Q_1, F) = 0$

En daarmee is de lijn $P_1Q_1 \equiv m_1$ de machtlijn van $F_1$ en F.
Zo is ook de lijn $P_2Q_2 \equiv m_2$ de machtlijn van $F_2$ en $F$.
Met $M = m_1$ & $m_2$ is dus:

· $\mu(M, F_1) = \mu(M, F_2)$

zodat $M$ een punt is van de machtlijn van $F_1$ en $F_2$. En die machtlijn is dan de loodlijn $m$ uit $M$ op $AB$.

Opmerking. Als de cirkels $F_1$, $F_2$ één punt gemeenschappelijk hebben, dan valt de machtlijn van die cirkels samen met de gemeenschappelijke raaklijn van die cirkels in dat punt. ◊

### 3. Middelevenredige (bij Oplossing 2)

**Definitie.** Als bij drie gegeven lijnstukken met lengtes $a$, $b$, $c$ een vierde lijnstuk met lengte $d$ bestaat, zodat $a : b = c : d$ , dan heet $d$ de (meetkundig) **vierde evenredige** bij $a$, $b$, $c$. ◊

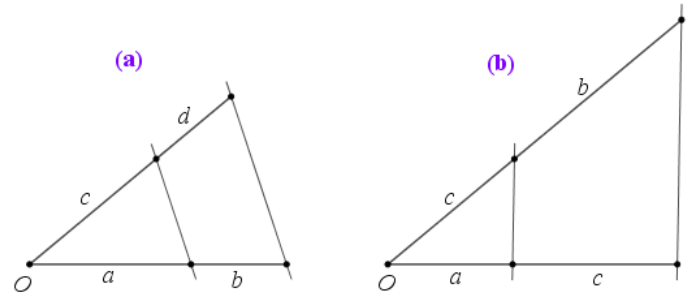
Hieruit volgt onder meer, dat $d = \dfrac{bc}{a}$ is.

**Definitie.** Als bij twee gegeven lijnstukken met lengtes $a$, $b$ een derde lijnstuk met lengte $c$ bestaat, zodat $a : c = c : b$, dan heet $c$ de (meetkundig) **middelevenredige** bij $a$ en $b$. ◊

Hieruit volgt onder meer, dat $c^2 = ab$ is.

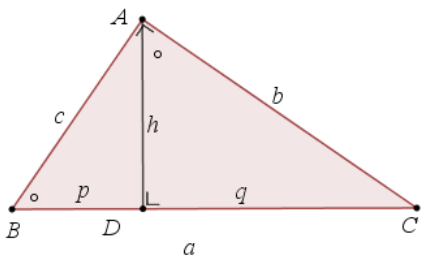
In de figuren 7a en 7b staan (gebruikelijke) illustraties van deze meetkundige evenredigheden.

figuur 7



In de A-rechthoekige driehoek *ABC* met zijden *a*, *b*, *c* en hoogtelijn *AD* = *h*, geldt:

figuur 8




- $\Delta ABD$ is gelijkvormig met driehoek $\Delta CAD$ (*hh*);
- $\Delta BCA$ is gelijkvormig met $\Delta BAD$ (*hh*).

En dan is:

- $BD : \underline{AD} = \underline{AD} : CD$ en $BC : \underline{BA} = \underline{BA} : BD$

Met $BD = p$, $CD = q$ zijn deze evenredigheden identiek aan:

- $h^2 = p \cdot q$ en $c^2 = p \cdot a$

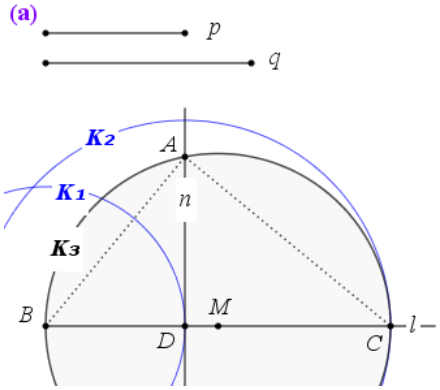
Beide laatste uitdrukkingen komen bij constructies vaak voor; bijvoorbeeld als twee lijnstukken met lengtes *p* en *q* gegeven zijn en een derde lijnstuk met lengte *x* moet worden geconstrueerd.

### Constructies

(a) Construeer het lijnstuk *x* als $x^2 = p \cdot q$ bij gegeven *p* en *q*.[5]
(b) En ook: construeer het lijnstuk *x* als $q^2 = p \cdot x$.

Bij de constructies ga ik in beide gevallen uit van een halve lijn *l* met beginpunt *B*.

figuur 9 (a)

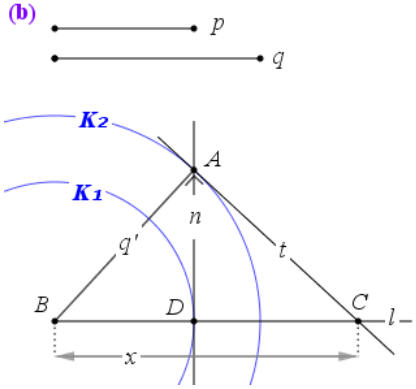



(a) Constructiestappen [6]

1. $K_1$ = Cirkel(*B*, *p*) // *p* is de straal
2. *D* = Snijpunt($K_1$, *l*)
3. $K_2$ = Cirkel(*D*, *q*)
4. *C* = Snijpunt($K_2$, *l*) // *C* ligt rechts van *D*
5. *M* = Midden(*B*, *C*)
6. $K_3$ = Cirkel(*M*, *a*) // *a* = *MB*
7. *n* = Loodlijn(*D*, *l*)
8. *A* = Snijpunt(*n*, $K_3$)

∗ *AD* is het te construeren lijnstuk *x*.

figuur 9 (b)



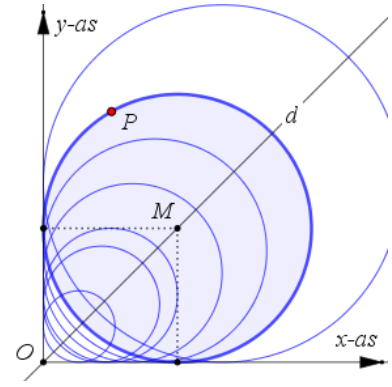

(b) Constructiestappen

1. $K_1$ = Cirkel(*B*, *p*)
2. *D* = Snijpunt($K_1$, *l*)
3. *n* = Loodlijn(*D*, *l*)
4. $K_2$ = Cirkel(*B*, *q*)
5. *A* = Snijpunt($K_2$, *n*)
6. *q'* = Lijnstuk(*A*, *B*)
7. *t* = Loodlijn(*A*, *q'*)
8. *C* = Snijpunt(*t*, *l*)

∗ *BC* is het te construeren lijnstuk *x*.

## 4. Oplossing 4, van mij

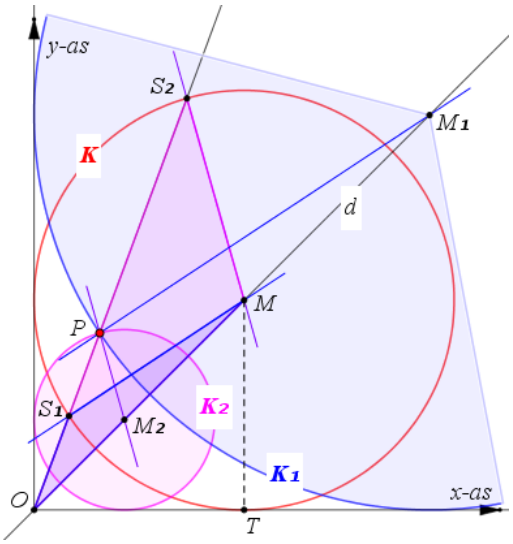
figuur 10




Zoals bekend is de bissectrice van een hoek de meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels die raken aan de benen van die hoek. In figuur 10 is dat de rechte lijn *d*.

In deze figuur ligt ook de bron voor oplossing: een vermenigvuldiging (homothetie) met het punt *O* als centrum, ingegeven door het feit dat de rakende cirkels van links naar rechts groter worden.

figuur 11




In figuur 11 heb ik eerst een willekeurige cirkel $K$ getekend (middelpunt $M$) die aan de $x$- en $y$-as raakt, een 'halve' oplossing. De snijpunten van de lijn $OP$ met die cirkel zijn de punten $S_1$ en $S_2$.

Er bestaat nu een vermenigvuldiging met centrum $O$ die het punt $S_1$ afbeeldt op het punt $P$. De lijn $S_1M$ wordt daardoor afgebeeld op de daarmee evenwijdige lijn $PM_1$, met $M_1$ op $d$. En dat punt is dan het middelpunt van een van de gezochte cirkels.
Een analoge constructie is er uitgaande van het punt $S_2$.

De hulpcirkel $K$ wordt nu afgebeeld op cirkel $K_1$ met straal $M_1P$ en op cirkel $K_2$ met straal $M_2P$. En natuurlijk, raking is een invariante eigenschap bij vermenigvuldigingen.

## 5. Vermenigvuldigen, gelijkvormigheid (bij Oplossing 4)

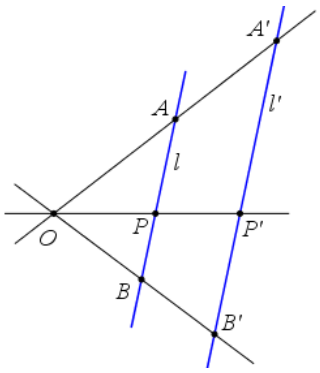
Definitie. Een **vermenigvuldiging** $V$ t.o.v. een vast, reëel punt $O$ (**centrum** van $V$) met een **factor** $k$ (een reëel getal) is een afbeelding van het euclidische vlak op zichzelf die aan ieder punt $P$ een punt $V(P) = P'$ toevoegt, waarbij moet worden voldaan aan:

- het punt $P'$ ligt op de rechte lijn $OP$;
- $OP' = |k| \cdot OP$, waarbij het teken van $k$ bepaalt of $P$ en $P'$ aan dezelfde kant van $O$ liggen ($k > 0$) of aan weerszijden van $O$ ($k < 0$);
- als $P \equiv O$, dan is $V(P) \equiv P$ (het punt $P$ wordt dan dus op zichzelf afgebeeld). ◊

Opmerking. Als $k = 1$ is, dan wordt *ieder* punt van het vlak op zichzelf afgebeeld; $V$ is dan de *identieke afbeelding*. ◊

Een belangrijke eigenschap van een vermenigvuldiging $V$ (met $O$ en $k$) is verwoord in de volgende stelling.

figuur 12




Stelling 4. Het $V$-beeld van een rechte lijn is een daarmee evenwijdige rechte lijn.

Bewijs. Zie figuur 12. Daarin is $l$ een gegeven rechte lijn en is $P'$ het $V$-beeld van het punt $P$ van $l$. Ik moet dan aantonen, dat de lijn $l'$ door $P'$ die evenwijdig is $l$, het $V$-beeld is van $l$.

Zij $A$ nu een willekeurig punt van $l$. Voorts is $A' = OA$ & $l'$. Volgens de 'lijnenstelling' van Thales is dan $OA' : OA = OP' : OP = k$. Met andere woorden $A' = V(A)$.
Is omgekeerd $B'$ een punt van $l'$, dan blijkt analoog dat $B' = V(B)$, waarbij $B = l$ & $OB'$. ◊

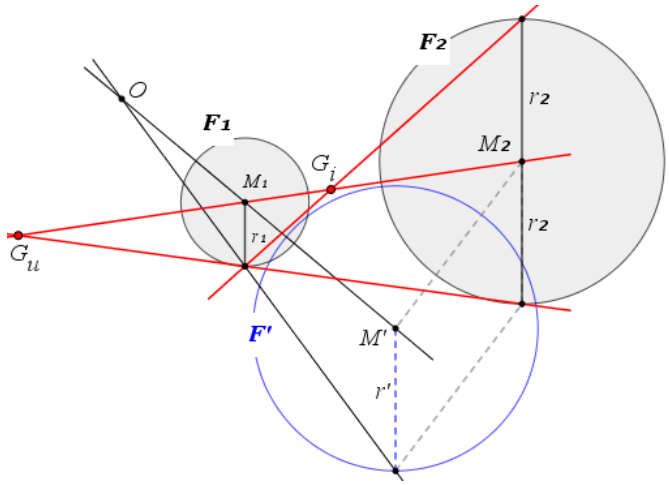
Definitie. **(a)** Twee figuren $F_1$, $F_2$ waarvoor bij een vermenigvuldiging $V$ geldt dat $F_2 = V(F_1)$ is, heten **gelijkstandig**(e figuren).
**(b)** Twee figuren $F_1$, $F_2$ heten **gelijkvormig** als er een vermenigvuldiging $V$ bestaat met $V(F_1) = F'$ én $F'$ congruent is met $F_2$. ◊

En daarbij als voorbeeld c.q. toegift:

Stelling 5. Twee niet-concentrische cirkels zijn gelijkvormig.

Zie voor het bewijs ook figuur 14, waarin Cirkel($M_1$, $r_1$) = $F_1$ en Cirkel($M_2$, $r_2$) = $F_2$ gegeven zijn.

figuur 13




**Bewijs.** Ik kies nu een willekeurig punt $O$ en pas op $F_1$ de vermenigvuldiging toe met centrum $O$ en factor $k = r_2/r_1$. Het $V$-beeld van $F_1$ is dan de cirkel $F'$ met middelpunt $M'$ en straal $r' = r_2$.
De cirkels $F'$ en $F_2$ zijn dus congruent.
Per definitie zijn dan $F_1$, $F_2$ gelijkvormig. ◊

Gevolg. Zijn $r_1$ en $r_2$ evenwijdige stralen van $F_1$, $F_2$, dan snijden de verbindingslijnen van de eindpunten van die stralen de lijn $M_1M_2$ in twee punten: $G_u$ en $G_i$. Ook deze punten kunnen dus als centrum van een vermenigvuldiging dienen; de punten worden in dit geval **gelijkvormigheidspunten** genoemd: $G_u$ is het *uitwendige* gelijkvormigheidspunt, $G_i$ is het *inwendige* gelijkvormigheidspunt. ◊

## 6. Noten

[1] Secant < Lat. secans, secare = snijden; mv. secanten.

[2] De notatie $\{X, Y\} = a \,\&\, b$ betekent: $X$ en $Y$ zijn (de) snijpunten van de objecten $a$ en $b$; $X = a \,\&\, b$ betekent: $X$ is een (c.q. het) snijpunt van $a$ en $b$.

[3] Er is hier sprake van twee verschillend gedefinieerde verzamelingen punten: $V = \{X \mid X$ heeft een zekere eigenschap$\}$ en $W = \{X \mid X$ ligt op een object$\}$. Om te bewijzen dat $V = W$ moet worden aangetoond dat $V \subset W$ én $W \subset V$.

[4] Dat het lijnstuk $x = \frac{d^2}{a}$ (of $a : d = d : x$) met p&l geconstrueerd kan worden als er lijnstukken met lengte $a$ en $d$ gegeven zijn, wordt duidelijk in paragraaf 3.

[5] Constructies binnen de euclidische meetkunde worden (traditioneel) uitgevoerd met p&l. Bij de meeste worden de “tussenstappen” niet vermeld, omdat die als *standaard* p&l-constructies worden beschouwd, zoals die van een loodlijn op een gegeven lijn en die van het midden van een lijnstuk.

[6] Bij de beschrijving wordt gebruik gemaakt van functies die ook in interactieve tekenprogramma’s zoals *GeoGebra* (zie: *www.geogebra.org*) zijn opgenomen. Na // staat commentaar bij de functie.

# IMO en GVA

DICK KLINGENS - november 2020

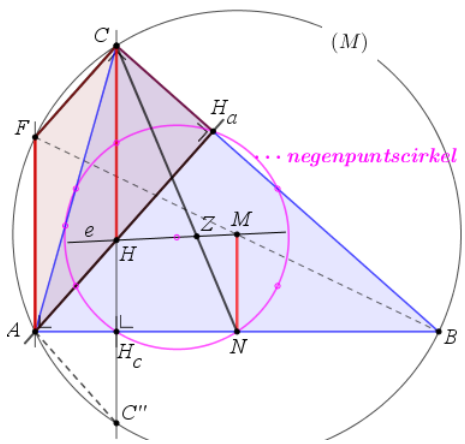
## 1. Een tijdje terug

Dat er sinds het jaar 1960 aardig wat veranderd is in het meetkundeonderwijs op scholen voor voortgezet onderwijs (middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs heette het in die tijd), wil ik graag illustreren met de volgende drie opgaven uit een leerboek van toen.[1]

figuur 1

15. De loodlijn in A op de zijde $c$ voor een scherphoekige $\triangle$ ABC snijdt de omgeschreven cirkel van deze driehoek in F. Als H het hoogtepunt van $\triangle$ ABC is, bewijs dan dat $CH = AF$ is.
16. De loodlijn uit M, het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een scherphoekige $\triangle$ ABC, op de zijde $c$, snijdt deze zijde in N. Als H het hoogtepunt van $\triangle$ ABC is, bewijs dan dat $CH = 2\,MN$ is.
17. Bewijs dat het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z, en het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van een scherphoekige $\triangle$ ABC op één lijn liggen en dat $HZ = 2\,ZM$ is.

figuur 2



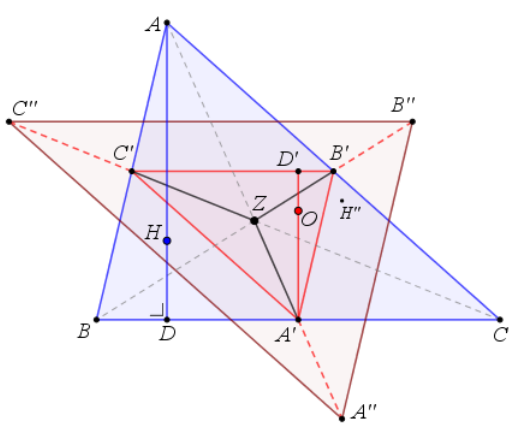

In de kantlijn van het boekje schreef ik “negenpts.”, waarmee ik de *negenpuntscirkel* bedoelde!
Ik herinner mij nog goed dat mijn toenmalige docent (in de derde klas, mevrouw Kok) bij die opgaven een aanvulling (een dictaatje) gaf.
Die aanvulling heeft mijn belangstelling voor de meetkunde blijvend gewekt! Jammer genoeg heb ik het schriftje waarin een en ander was uitgewerkt, niet meer in mijn bezit.

Een eigen(tijdse) uitwerking van bovenstaande opgaven, gebaseerd op figuur 2, staat in de bij dit artikel behorende appendix (in paragraaf 1).[2]

De negenpuntscirkel zit niet meer in het curriculum van de huidige onderbouw van het voortgezet onderwijs. En in de bovenbouw ligt de nadruk op de analytische meetkunde; het gebruik daarvan bij die cirkel ligt niet erg voor de hand.
Maar de cirkel is mijns inziens zeker “stof” voor hen die meetkunde leuk vinden, en dus ook voor wiskundeleraren en de deelnemers aan wiskundewedstrijden zoals de Nederlandse en Internationale Wiskunde Olympiade (NWO, IMO)!
Aan die laatsten moest ik in het bijzonder denken toen ik een opgave zag uit de “shortlist” van de IMO in 2017. Ik kom op die IMO-opgave later terug, maar eerst behandel ik, ter voorbereiding daarop, toch ook iets, en *een ietsje anders* dan in de appendix, over de negenpuntscirkel.

## 2. Eerst roteren en dan vermenigvuldigen

figuur 3




De middens $A'$, $B'$, $C'$ van de zijden van een driehoek $ABC$ zijn de hoekpunten van een driehoek die gelijkvormig is met die driehoek; zie figuur 3.

Met het zwaartepunt $Z$ van driehoek $ABC$ als centrum voer ik een puntspiegeling uit op die driehoek, waardoor driehoek $A''B''C''$ ontstaat.
Als ik daarna $Z$ kies als centrum van een vermenigvuldiging (homothetie) met factor $k = ½$ en die toepas op $A''B''C''$, krijg ik $A'B'C'$ als beeld.

Omdat een puntspiegeling kan worden opgevat als een rotatie (over een hoek van 180°), is driehoek *A'B'C'* het beeld van driehoek *ABC* bij een *rotatie* die gevolgd wordt door een *vermenigvuldiging*. Zo'n afbeelding heet ook wel *draaistrekking* (*ds*).[3] Ik noteer dit hier als $ds(ABC) = A'B'C'$.

Is *AD* een hoogtelijn van driehoek *ABC*, met *D* op *BC*, dan is $ds(A) = A'$ en $ds(D) = D'$ waarbij *D'* natuurlijk op *B'C'* ligt. Dan is ook:

- $\angle ADC = 90^o = ds(\angle ADC) = \angle A'D'C'$

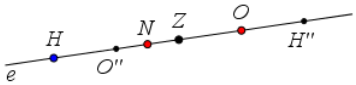
En ik merk daarbij op dat *A'D'* loodrecht staat op *BC* en door het midden *A'* van *BC* gaat. Met andere woorden, en uitbreidend naar de beide andere hoogtelijnen: een hoogtelijn van driehoek *ABC* heeft de ermee evenwijdige middelloodlijn als *ds*-beeld.

Is verder *H* het hoogtepunt en *O* het omcentrum [4] van driehoek *ABC*, dan is hieruit direct duidelijk dat:

- $ds(H) = O$ en $HZ : ZO = 2 : 1$

De punten *H*, *O* en *Z* zijn op grond van de draaistrekking collineair.[5]
En wat gebeurt er nu met de omcirkel van driehoek *ABC*? Uiteraard wordt die door de draaistrekking afgebeeld op de omcirkel van driehoek *A'B'C'*.

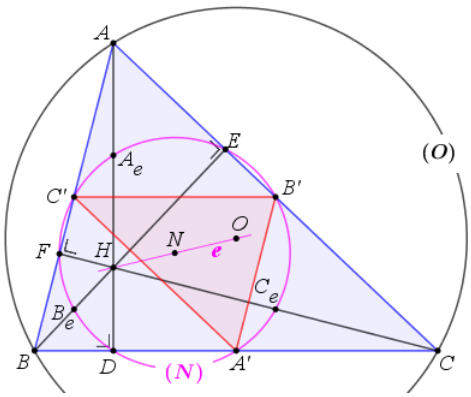
figuur 4




Is *N* het middelpunt van de omcirkel van *A'B'C'*, dan is dus $ds(O) = N$. Het punt *N* ligt dus ook op de lijn door *HO*.
In figuur 4 is de ligging van die punten weergegeven.[6]
Uit een eenvoudige berekening blijkt dat *N* het midden is van het lijnstuk *HO*.

*Opmerking.* Uit het feit dat $HN = \frac{1}{2}HO$ is, volgt dat (*N*) ook opgevat kan worden als beeld van (*O*) bij de vermenigvuldiging met *H* als centrum en met $k = \frac{1}{2}$. En hieruit volgt dan dat de middens van de 'bovenste hoogtelijnstukken' (tussen hoek- en hoogtepunt) en de voetpunten van de hoogtelijnen op de zijden eveneens op (*N*) liggen. In paragraaf 2 van de appendix ga ik daarop verder in. ◊

figuur 5

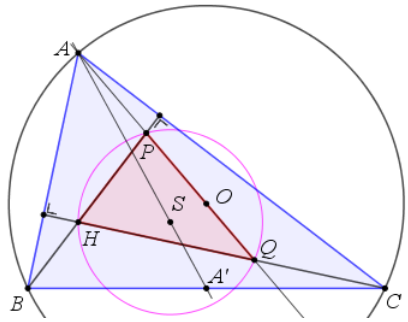



Het bovenstaande is in figuur 5 geïllustreerd, met min of meer de standaard naamgeving van de objecten:
de **negenpuntscirkel** met negen bijzondere punten.

## 3. Draaistrekking in Brazilië?

In de lijst met *Shortlisted Problems* van IMO 2017 [7] vond ik onder nummer G3 in de sectie *Geometry* het volgende door Oekraïne ingezonden vraagstuk; in mijn vertaling luidt het:

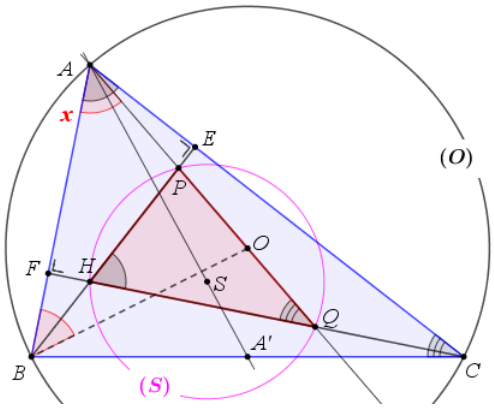
Het punt *O* is het omcentrum van een scherphoekige, niet-gelijkbenige driehoek *ABC*. De lijn *OA* snijdt de hoogtelijnen uit *B* en *C* in opvolgend *P* en *Q*. De hoogtelijnen snijden elkaar in *H*. Bewijs dat het omcentrum van driehoek *PQH* op een zwaartelijn van driehoek *ABC* ligt.




Het was vermoedelijk de tekening met daarin de omcirkels van beide driehoeken die mij deden denken aan een draaistrekking van driehoek *ABC* naar driehoek *HPQ*.

Een eerste stap in het bewijs moet dan dus zijn het aantonen van de gelijkvormigheid van die driehoeken (en het lijkt er in ieder geval op!).

figuur 6a




**Bewijs.** Zie figuur 6a, waarin de punten *E*, *F* de voetpunten zijn van de hoogtelijnen; *S* is het omcentrum van driehoek *PQH*.[8]

Vierhoek *AFHE* is een koordenvierhoek [9]; de overstaande hoeken *F* en *E* zijn immers recht. Dan is hoek *A* (in vierhoek én in driehoek) gelijk aan de buitenhoek van hoek *H*.
En **(1)** die buitenhoek is de hoek *H* van driehoek *PQH*.

Driehoek *OAB* is gelijkbenig (top *O*). Met $\angle OAB = x$ is in die driehoek:

- $2x + \angle BOA = 180^o$ of $x = 90^o - \frac{1}{2}\angle BOA$

En omdat in (*O*) geldt $\angle BOA = 2\angle C$ (*middelpunts- en omtrekshoek* van (*O*)), volgt daaruit via driehoek *QFA*:

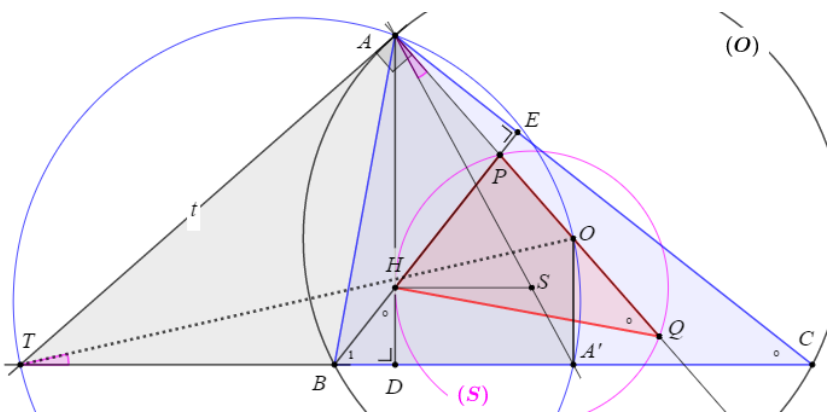
**(2)**... $\angle Q = 90^o - x = 90^o - (90^o - \frac{1}{2}\angle BOA) = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle C$

En uit (1) en (2) volgt dat driehoek *HPQ* inderdaad gelijkvormig is met driehoek *ABC* (*hh*).

Maar bestaat er nu een draaistrekking die driehoek *ABC* afbeeldt op driehoek *HPQ*?

Helaas, nee! Want de oriëntatie van *ABC* en die van *HPQ* zijn verschillend. Bij een rotatie en een vermenigvuldiging, dus bij een draaispiegeling, is de oriëntatie invariant. Ik spreek daarom maar 'gewoon' van een gelijkvormigheidafbeelding *gva* (spreek uit als 'gevea') van *ABC* op *HPQ* – het scheelt maar een spiegeling.[10]

figuur 6b




Met deze *gva* zal ik dan bewijzen, dat het snijpunt *A'* van de lijn *AS* met de zijde *BC* van driehoek *ABC* het midden is van die zijde.

Maar eerst meld ik nog iets over de hoogtelijn door *A* (voetpunt *D* op *BC*). Daarbij, het lijkt erop dat *HS* evenwijdig is met *BC*.
Zie figuur 6b. In driehoek *CEB* is $\angle B_1 = 90^o - \angle C$; in driehoek *DHB* is dan $\angle H = 90^o - \angle B_1 = \angle C$.
En dan is ook $\angle AHE = \angle AHP = \angle C$. Met andere woorden, de lijn *AD* raakt in *H* aan (*S*), immers op (*S*) is bg(*PH*) = $\frac{1}{2}\angle C$.
Ik teken vervolgens de raaklijn *t* in *A* aan (*O*) met *T* = *t* & *BC*.[11] Nu is:

- *gva*(*T*) = *gva*(*t* & *BC*) = *gva*("A-raaklijn" & *BC*) = "H-raaklijn" & *PQ* = *A*

Gevolg: $\angle OTA' = \angle OTB = gva(\angle OTB) = \angle SAP = \angle A'AO$.
En dit houdt in dat vierhoek *A'OAT* een koordenvierhoek is. Daarin zijn de hoeken *OAT* (= 90°) en *TA'O* overstaande hoeken: $\angle TA'O = 90^o$.
Het punt *A'* is dan de loodrechte projectie van het punt *O* op de zijde *BC*. Dit betekent dat *A'* het midden is van het lijnstuk *BC*, waarmee is aangetoond dat het punt *S* ligt op een zwaartelijn van driehoek *ABC* ligt, namelijk die door het hoekpunt *A*. ◊

## 4. Van Rio naar Rome

En natuurlijk zijn er meer wegen om van Rio in Rome te komen. In de appendix (in paragraaf 6) geef ik nog vijf andere bewijzen, waarbij ik in de eerste twee geen gebruik maak van afbeeldingen (wel van gelijkvormigheid). In het eerste bewijs gebruik ik de machtlijn van twee cirkels en in het tweede de eigenschap van een zwaartelijn naar een zijde van een driehoek die een met die zijde evenwijdige lijn snijdt. De andere drie bewijzen kennen een meer specifieke invalshoek.

## 5. Noten

[1] Deze opgaven staan op bladzijde 59 in:
D.N. VAN DER NEUT, A. HOLWERDA: *Meetkunde met de beginselen der goniometrie*, derde deel. Groningen: J.B. Wolters; 8e druk (1957).
Het boekje werd gebruikt in de derde klas van de hbs en het gymnasium, in ieder geval op de school die ik toen bezocht, namelijk Het Charloise Lyceum in Rotterdam-Zuid.

[2] Zie bladzijde 60 en verder.

[3] Een draaistrekking (ook wel *draaivermenigvuldiging* genoemd) heeft dus één centrum (voor de rotatie én de vermenigvuldiging) en is verder bepaald door een rotatiehoek en een vermenigvuldigingsfactor. Hiermee behoort de draaistrekking tot de klasse van gelijkvormigheidsafbeeldingen. Die afbeeldingen zijn onder meer *hoektrouw*.
Voor een ruimere behandeling van de draaistrekking verwijs ik naar:
WIM PIJLS (2004): *Gelijkvormigheid* (I en II). In: *Euclides*; jrg. 80, nr. 2 (blz. 48-51) en nr. 3 (blz.89).

[4] Ik gebruik *omcirkel* als korte aanduiding van ‘omgeschreven cirkel’. Het *omcentrum* van een driehoek is dan het middelpunt van de omcirkel van die driehoek.
Een cirkel met middelpunt $X$ geef ik aan met $(X)$ en als de straal $r$ ervan een rol speelt, met $(X; r)$.

[5] De lijn waarop onder andere de punten $H$, $Z$ en $O$ liggen, is de zogeheten *lijn van Euler* van de driehoek (naar LEONHARD EULER, 1707-1783, Zwitserland).

[6] In figuur 4 zijn de punten $H''$ en $O''$ de beeldpunten van $H$ en $O$ bij de puntspiegeling ($180^o$-rotatie) met $Z$ als centrum.

[7] IMO 2017 vond van 12 juli t/m 23 juli 2017 plaats in Rio de Janeiro (Brazilië). Zie ook:
*https://www.imo2017.org.br*

[8] Het scherphoekig zijn van de driehoek is volgens mij geen noodzakelijke voorwaarde, stomphoekig mag ook. In paragraaf 5 van de appendix staan daarover enkele opmerkingen.

[9] De theorie van de koordenvierhoek staat ook in het derdeklasboekje dat ik noemde in [1], op de bladzijden 60 en 61.

[10] Ik zou die abeelding ook *indirecte* draaistrekking kunnen noemen, omdat er in dit geval sprake is van indirecte gelijkvormigheid.
Zie op WikipediA-NL:
*https://nl.wikipedia.org/wiki/Gelijkvormigheid_(meetkunde)*

[11] De notatie $X = a \,\&\, b$ betekent: $X$ is het/een snijpunt van de meetkundige objecten $a$ en $b$.

# Appendix – IMO en GVA

DICK KLINGENS (e-mailadres: *dklingens@gmail.com*)

november 2020

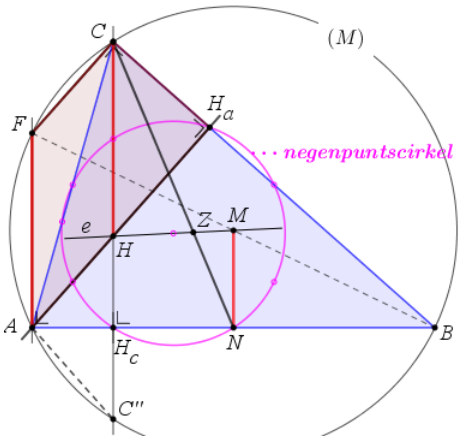
## 1. Uit “Van der Neut en Holwerda”, deel 3

In het in 1960 in het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs gebruikte schoolboekje *Meetkunde met de beginselen der goniometrie* staan op bladzijde 59 van deel 3 onder meer de volgende opgaven:

15. De loodlijn in A op de zijde c voor een scherphoekige △ ABC snijdt de omgeschreven cirkel van deze driehoek in F. Als H het hoogtepunt van △ ABC is, bewijs dan dat CH = AF is.
16. De loodlijn uit M, het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een scherphoekige △ ABC, op de zijde c, snijdt deze zijde in N. Als H het hoogtepunt van △ ABC is, bewijs dan dat CH = 2 MN is.
17. Bewijs dat het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z, en het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van een scherphoekige △ ABC op één lijn liggen en dat HZ = 2 ZM is.

Ik zal deze opgaven bewijzen binnen de, mijns inziens, aan de toenmalige (in de derde klas zittende) leerling bekende theorie.

figuur 1




### == 15.

Omdat $\angle BAF = 90^o$ is, is de lijn *BF* een middellijn van (*M*) [1]; conform de *cirkelstelling van Thales*. Daarmee is ook $\angle BCF = 90^o$.

Is $AH_a$ de hoogtelijn uit *A*, dan is vierhoek $AH_aCF$ een rechthoekig trapezium ($CF \,//\, AH_a$). Daarin is *CH* evenwijdig met *AF* (beide staan loodrecht op *AB*), zodat *AHCF* een parallellogram is. En daarin is:

- $CH = AF$ ◊

### == 16.

In driehoek *ABF* is *MN* middenparallel ($MN \perp AB$). Dus is:

- $MN = \frac{1}{2}AF$

Omdat $AF = CH$ (opgave 16) is, is ook $MN = \frac{1}{2}CH$. Of ook:

- $CH = 2MN$ ◊

### == 17.

Ik teken het lijnstuk *CN* en zal nu bewijzen dat het punt $Z = CN \,\&\, HM$ [2] het zwaartepunt is van driehoek *ABC*.

De driehoeken *CHZ* en *NMZ* zijn gelijkvormig, immers:

- $\angle ZCH = \angle ZNM$ (*CH // MN, verwisselende binnenhoeken*)
- $\angle CZH = \angle NZM$ (*overstaande hoeken*)

Omdat $CH : NM = 2 : 1$ (opgave 17) is, volgt uit de gelijkvormigheid van de genoemde driehoeken:

- $CH : NM = CZ : NZ$

Uit $CZ : NZ = 2 : 1$ volgt dat *Z* het zwaartepunt is van driehoek *ABC*. ◊

**Gevolg.** In figuur 1 snijdt de hoogtelijn uit *C* de cirkel (*M*) voor de tweede keer in het punt *C''*. Vierhoek *AC''CF* is nu een trapezium waarvan de hoekpunten concyclisch zijn. Het is dus een *gelijkbenig* trapezium: $AC'' = FC$. Maar ook is $FC = AH$ (zie het parallellogram in opgave 16), zodat driehoek *AC''H* gelijkbenig is (top *A*). Omdat $\angle AH_cH = 90^o$ is, is ook:

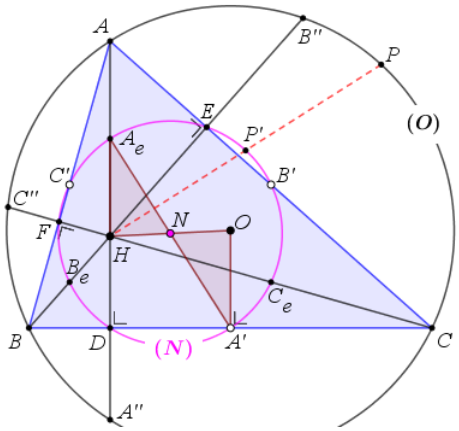
- $HH_c = H_cC''$

## 2. Een belangrijk gevolg: de negenpuntscirkel

Uit opgave 17 in paragraaf 1 en uit het aan het einde van die paragraaf genoemde gevolg kan met betrekking tot een driehoek worden afgeleid:

- het midden van elk bovenste hoogtelijnstuk (het deel van de hoogtelijn tussen hoek- en hoogtepunt) is het beeld van een hoekpunt bij vermenigvuldiging met centrum $H$ (het hoogtepunt) met een factor gelijk aan ½;
- het voetpunt van een hoogtelijn is het beeldpunt van het tweede snijpunt van die hoogtelijn met de omcirkel bij diezelfde vermenigvuldiging.

figuur 2




Dus zijn de in figuur 2 daarmee corresponderende 6 punten $A_e$, $B_e$, $C_e$ en $D$, $E$, $F$ (afwijkend van de namen in figuur 1) concyclisch. Ze liggen immers op het beeld $(N)$ van de omcirkel $(O)$ bij de vermenigvuldiging met centrum $H$ en factor ½.
En $N$ is daarbij (dus) het midden van het lijnstuk $HO$.

Maar liggen ook de middens $A'$, $B'$, $C'$ van de zijden van de driehoek $ABC$ op $(N)$?
Het antwoord op deze vraag is "ja".
Ik zal namelijk bewijzen dat de straal $r = NA_e$ van $(N)$ gelijk is aan $NA'$.

Ik bekijk daartoe de driehoeken $HA_eN$ en $OA'N$. In deze driehoeken is:

- $\angle A_eHN = \angle A'ON$ (*Z-hoeken*, immers $AH \,//\, A'O$)
- $HN = ON$ (gevolg van de vermenigvuldiging met ½ t.o.v. het punt $H$)
- $A_eH = A'O$ (zie opgave 17 in paragraaf 1)

De genoemde driehoeken zijn daarmee congruent (*ZHZ*), zodat inderdaad $NA' = NA_e = r$.
En op dezelfde manier blijkt dat $NB' = r$ en $NC' = r$.

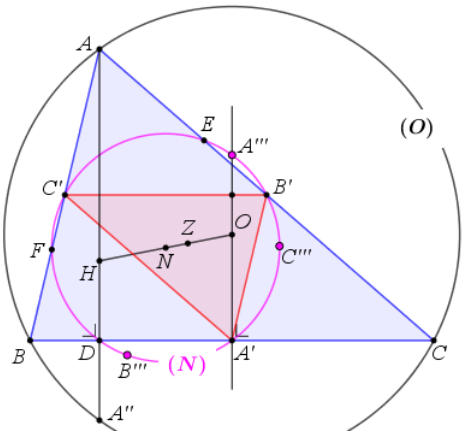
Bij de eerder genoemde 6 punten die op $(N)$ liggen, komen er zo 3 bij. Er dan is er inderdaad sprake van een cirkel waarop 9 (min of meer bijzondere) punten van de beschouwde driehoek liggen: de *negenpuntscirkel* van die driehoek.

*Opmerkingen*

1. Er is een eenvoudig verband tussen de straal $r$ van de negenpuntscirkel en de straal $R$ van de omcirkel een driehoek. Er geldt: $r = ½R$.
2. Ook de volgende eigenschap zal direct duidelijk zijn: Is $P$ een willekeurig punt van de omcirkel, dan ligt het midden $P'$ van het lijnstuk $HP$ op de negenpuntscirkel.
3. De punten $A_e$, $B_e$, $C_e$ worden in de buitenlandse wiskundeliteratuur ook wel *Euler-punten* van driehoek $ABC$ genoemd.
4. Voor een behandeling van de negenpuntscirkel die geheel gebaseerd is op het gebruik van draaistrekkingen, zie [3].

## 3. Van negenpunts- naar twaalfpuntscirkel

figuur 3




In het artikel *IMO en GVA* is onder meer opgemerkt (in paragraaf 2), dat de hoogtelijn op een zijde van een driehoek als $ds$-beeld (hier met centrum $Z$, $\varphi = 180^o$, $k = ½$) de middelloodlijn heeft die met die hoogtelijn evenwijdig is.
Immers:

· $ds(A) = A'$, $ds(H) = O$, zodat:
· $ds(AH) = A'O$ ; *hoogtelijn* $\rightarrow$ *middelloodlijn*

En ook is:

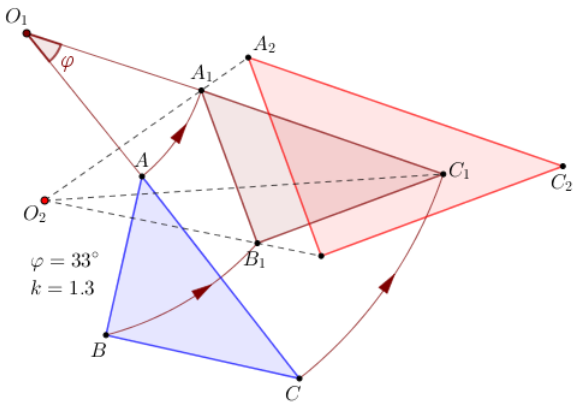
· $ds((O)) = ((N))$ ; *omcirkel* $\rightarrow$ *negenpuntscirkel*

Het *ds*-beeld $A'''$ van het punt $A''$ – dat is het tweede snijpunt van de $A$-hoogtelijn met $(O)$ – ligt dus op $(N)$ én op $A'O$.
Verder zijn collineaire verhoudingen [4] onder een draaistrekking invariant, zodat $A'''$ het spiegelbeeld is van het punt $O$ in de lijn $B'C'$ (die weer het *ds*-beeld is van de lijn $BC$).
Analoog zijn er dan ook punten $B'''$, $C'''$ op $(N)$ die het spiegelbeeld zijn van het punt $O$ in de lijnen $C'A'$, $A'B'$.
En daarmee liggen er dus 12 (min of meer) bijzondere punten van de driehoek op de negenpuntscirkel.

Overigens is het eenvoudig om in te zien dat de middens van de bogen $AB$, $BC$, $CA$ van $(O)$ als *ds*-beeld de middens van de bogen $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ van $(N)$ hebben. Er zou dus met evenveel recht van een *vijftien-puntscirkel* kunnen worden gesproken.

## 4. Het centrum van een draaistrekking

figuur 4

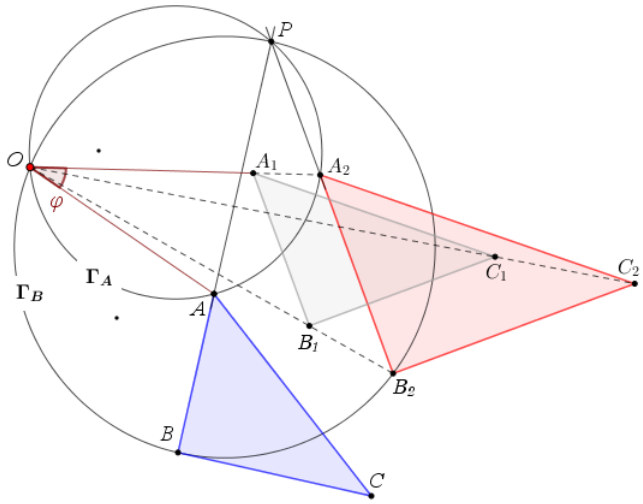



In figuur 4 is met $O_1$ als centrum een rotatie uitgevoerd van driehoek $ABC$ over een hoek $\varphi$.
De beelddriehoek is $A_1B_1C_1$.

Vervolgens is met $O_2$ als centrum een vermenigvuldiging toegepast op driehoek $A_1B_1C_1$ met een factor $k$.
De beelddriehoek is $A_2B_2C_2$.

De driehoeken $ABC$ en $A_2B_2C_2$ zijn daardoor (direct) gelijkvormig. Er is hier evenwel *geen* sprake van een draaistrekking omdat de punten $O_1$ en $O_2$ niet samenvallen.[5]

figuur 5



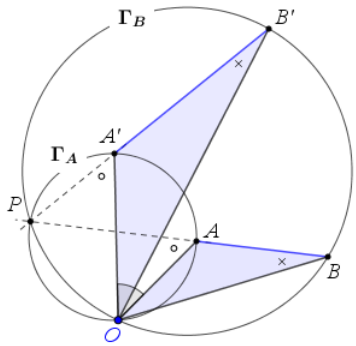

In figuur 5 zijn in eerste instantie alleen de driehoeken $ABC$ en $A_2B_2C_2$ weergegeven met dezelfde ligging en grootte als in figuur 4.

Het is mogelijk een punt $O$ te construeren dat kan dienen als centrum van een draaistrekking die driehoek $ABC$ afbeeldt op driehoek $A_2B_2C_2$.

Allereerst is $P = AB$ & $A_2B_2$. Vervolgens is $\Gamma_A = (PAA_2)$ en $\Gamma_B = (PBB_2)$.
Het tweede snijpunt $O$ van deze cirkels is nu het gezochte punt $O$.

Het bewijs van de juistheid van zo'n constructie volgt hierna.

figuur 6a



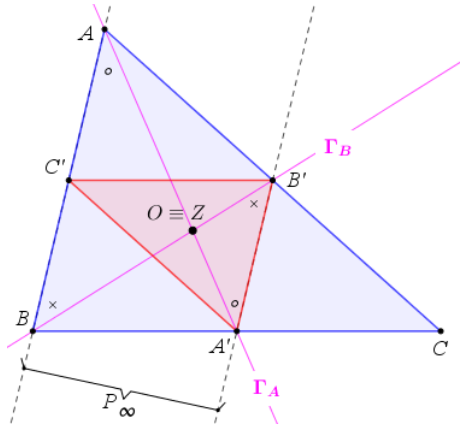

Een draaistrekking (*ds*) wordt bepaald door twee punten $A$, $B$ en hun beeldpunten $A'$, $B'$. Voor de vermenigvuldigingsfactor $k$ geldt in ieder geval $k = \frac{A'B'}{AB}$.
Voor de lijnstukken $AB$ en $A'B'$ die in figuur 6a in ligging en grootte gegeven zijn, moet nu worden aangetoond dat de driehoeken $OAB$ en $OA'B'$ gelijkvormig zijn; of ook:

- $ds(\Delta OAB) = (\Delta OA'B')$

**Bewijs.** De hoeken $OAP$ en $OA'P$ in $\Gamma_A$ staan beide op bg($OP$) en zijn dus gelijk, hetgeen inhoudt dat de hoeken $A$ en $A'$ in de beschouwde driehoeken (*nevenhoeken*) ook gelijk zijn.
Hetzelfde geldt voor de hoeken $B$ en $B'$ in die driehoeken, omdat die in cirkel $\Gamma_B$ beide op bg($OP$) staan.
De gezocht rotatiehoek $\varphi$ is dus gelijk aan $\angle AOA'$. ◊

*Opmerking.* Bij een andere ligging van de lijnstukken moet het bewijs enigszins worden aangepast. ◊

figuur 6b




Het bovenstaande geldt (min of meer) ook als lijnstuk en beeldlijnstuk evenwijdig zijn.

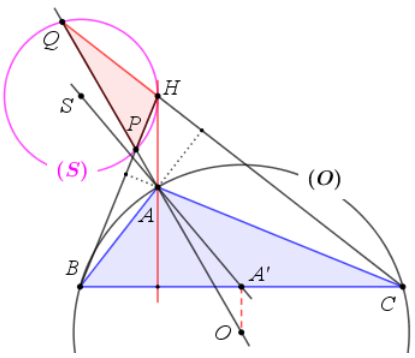
In figuur 6b is de "middendriehoek" $A'B'C'$ van driehoek $ABC$ weergegeven.
De evenwijdige lijnen $AB$ en $A'B'$ snijden elkaar nu in hun oneigenlijk punt $P_\infty$. $\Gamma_A$ is hier de 'cirkel' $(P_\infty AA')$ en $\Gamma_B$ is $(P_\infty BB')$ – het zijn de rechte lijnen $AA'$ en $BB'$ die elkaar snijden in $O \equiv Z$.

## 5. Scherphoekig, niet-gelijkbenig

In de Engelse tekst van het IMO-vraagstuk staat "an acute scalene triangle $ABC$". Het woord *scalene* in samenhang met een driehoek betekent *niet-gelijkzijdig*. Volgens mij geldt de genoemde eigenschap echter ook voor een stomphoekige driehoek, en met een aanvullende "afspraak" ook wel voor een rechthoekige. En ik denk dat scherphoekig gekozen is om het de deelnemers niet extra moeilijk te maken (het vraagstuk heeft het trouwens niet verder gebracht dan de *shortlist*).
In de figuren 7, 8 en 9 zal ik een en ander kort toelichten. Daarbij gebruik ik de volgende uitspraak c.q. bewering $|G|$:

- $|G|$ = "het punt $S$ ligt op een zwaartelijn van driehoek $ABC$"

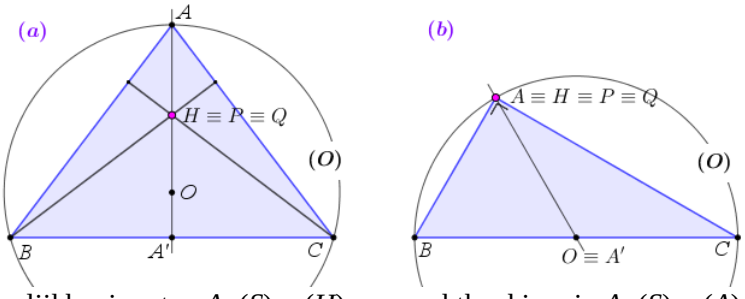
figuur 7




Als de driehoek $ABC$ stomphoekig is in $A$, dan is het uit figuur 7 direct duidelijk dat $|G|$ juist is.
Het bewijs van de uitspraak verschilt dan niet veel van het bewijs voor een scherphoekige driehoek.

Merk bijvoorbeeld op dat de hoogtelijn uit $A$ ook in dit geval raaklijn is in $H$ aan $(S)$ en dat $A'$ de projectie is van $O$ op $BC$.

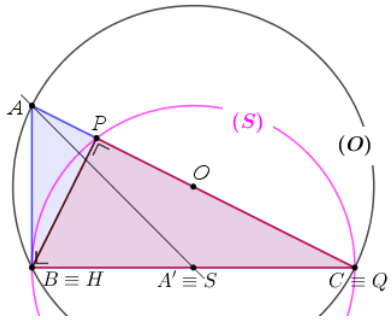
figuur 8




gelijkbenig – top $A$: $(S) = (H)$ rechthoekig – in $A$: $(S) = (A)$

Is de driehoek gelijkbenig (figuur 8a) of rechthoekig (figuur 8b), dan vallen er enkele punten samen, zoals in de figuur is aangegeven. In beide gevallen is $H \equiv P \equiv Q$, zodat de omcirkel van "driehoek" $PQH$ een *puntcirkel* is. Het bewijs van de juistheid van $|G|$ is triviaal, mits de hierboven in de eerste alinea bedoelde afspraak luidt: "ontaarding van $(S)$ tot een puntcirkel is toegestaan."

figuur 9



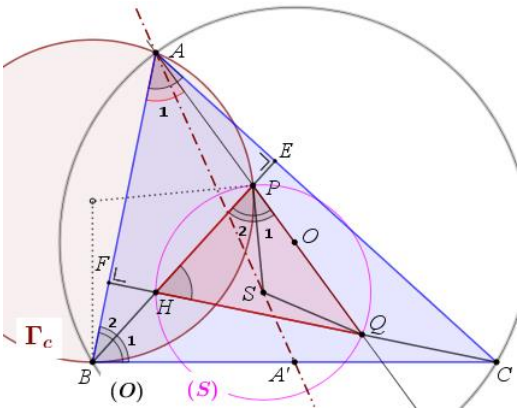

Is driehoek *ABC* rechthoekig in *B* (zie figuur 9), dan valt het punt *S* samen met *A′* – het midden van *BC* – immers dan is driehoek *PQH* (≡*PCB*) rechthoekig in *P*.
Het bewijs van |*G*| volgt dan direct uit de constructie.

## 6. Van Rio naar Rome

In deze paragraaf geef ik nog vijf bewijzen van de onderhavige eigenschap. In de eerste twee gebruik ik een tweetal cirkels die, bij wat langer kijken naar de figuur, bijna als vanzelf opdoemen.
Ik ga in alle bewijzen (behalve in het vierde) uit van wat in het artikel *IMO en GVA* bewezen is, namelijk dat driehoek *ABC* gelijkvormig is met driehoek *PQH* en dat de hoogtelijn *AH* in *H* raakt aan (*S*).

**Eerste bewijs.** Ik zal laten zien dat de lijnstukken *SP* en *SQ* (die dezelfde lengte hebben) elk aan een tweede en derde cirkel raken. Ik bewijs het raken alleen voor *SP*, omdat het bewijs voor het raken van *SQ* analoog verloopt.

figuur 10a




Zie figuur 10a. Het punt *A′* is hierin (weer) het midden van *BC*.
Verder is $\Gamma_c$ de omcirkel van driehoek *PAB*.

Is die cirkel eenmaal getekend, dan lijkt het erop dat deze in *B* raakt aan *BC*. En dat is ook zo.

Maar eerst volgt het bewijs dat *SP* in *P* raakt aan $\Gamma_c$.

In driehoek *PQH* is, met $\angle HPQ = \angle P = (\angle A =) \angle P_1 + \angle P_2$:
- $\angle P_2 = \angle SPH = \angle P - \angle P_1 = \angle B - ½(180^o - 2\angle H) = \angle B - 90^o + \angle A$

Zodat:
- $\angle P_2 = (\angle A + \angle B) - 90^o = (180^o - \angle C) - 90^o = 90^o - \angle C$ ...(1.1)

In driehoek *ABC* c.q. in de gelijkbenige driehoek *OAB* is:
- $\angle A_1 = \angle BAO = ½(180^o - 2\angle BOA) = 90^o - \angle C$ ...(1.2)

Uit de relaties (1.1) en (1.2) volgt dat op $\Gamma_c$ geldt:
- $\angle P_2 = \angle A_1 = ½\text{bg}(PB)$

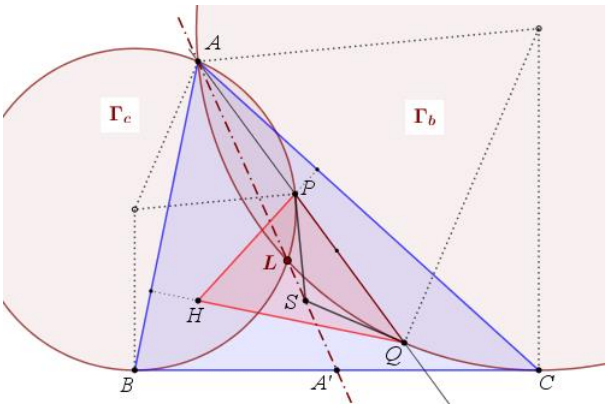
Met andere woorden: het been *PS* van hoek $P_2$ raakt in *P* aan $\Gamma_c$.

Vervolgens bewijs ik het raken van $\Gamma_c$ aan *BC*. Uit relatie (2) blijkt:
- $\text{bg}(BP) = 180^o - 2\angle C$

Maar in driehoek *BCE* is:
- $\angle B_1 = \angle\ 90^o - \angle C = ½\ \text{bg}(BP)$

Dus raakt het been *BC* van hoek *PBC* in *B* aan $\Gamma_c$.
Samengevat: de lijnen *PS* en *BC* raken aan $\Gamma_c$, en wel opvolgend in *P* en in *B*.

figuur 10b




In figuur 10b is ook de omcirkel $\Gamma_b$ van driehoek $AQC$ getekend.
Op dezelfde manier als hierboven voor $\Gamma_c$ kan worden aangetoond dat $SQ$ en $BC$ raken aan $\Gamma_b$.

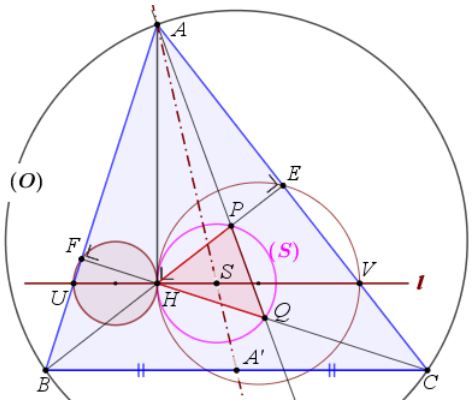
Omdat $SP = SQ$ is en $A'B = A'C$, is er sprake van twee paar gelijke raaklijnstukken aan de cirkels $\Gamma_b$ en $\Gamma_c$.

De punten $S$ en $A'$ liggen in dit geval ook op de *machtlijn* van beide cirkels. Het punt $A$ (een snijpunt van die cirkels) ligt *ook* op die machtlijn. Dus zijn de punten $A$, $S$, $A'$ collineair. ◊

*Opmerking.* In figuur 10b is ook het *tweede* snijpunt $L$ van $\Gamma_b$ en $\Gamma_c$ getekend. Dit punt is het zogenoemde humpty-punt bij $A$ (ook wel A-humpty-punt) van driehoek $ABC$.[6] Het punt $L$ wordt ook gebruikt in het hierna volgende vijfde bewijs, evenals de cirkels $\Gamma_b$ en $\Gamma_c$.

**Tweede bewijs.** Omdat $AH$ in $H$ raakt aan $(S)$, ligt het voor de hand de drager van de raakstraal $SH$ in ogenschouw te nemen; dat is de lijn $l$ door $H$ evenwijdig met $BC$ (immers $AH \perp SH$ en $AH \perp BC$); zie figuur 11a.

figuur 11a

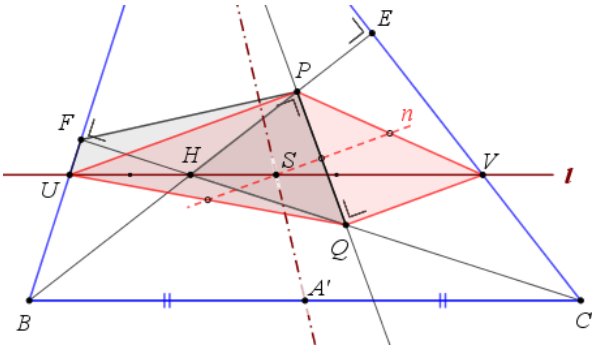



De lijn $l$ snijdt de zijden $AB$ en $AC$ opvolgend in de punten $U$ en $V$.
Omdat in de driehoeken $HFU$, $HEV$ de hoeken $F$, $E$ gelijk zijn aan 90°, zijn ook de Thales-cirkels op $HU$, $HV$ getekend.
Merk op dat de lijn $AH$ in $H$ raakt aan die cirkels, en natuurlijk ook in $H$ aan $(S)$.
Volgens de secantstelling [7] is nu bij $(HFU)$ en $(S)$:

- $AH^2 = AF \cdot AU$
- $AH^2 = AP \cdot AQ$

Zodat $AF \cdot AU = AP \cdot AQ$. En dit houdt in dat de punten $F$, $U$, $P$, $Q$ concyclisch zijn (volgens de omgekeerde secantstelling). Of ook: vierhoek $FUQP$ is een koordenvierhoek (met middellijn $UQ$). Zie nu verder figuur 11b, waarin een en ander vergroot is weergegeven onder weglating van enkele objecten.

figuur 11b

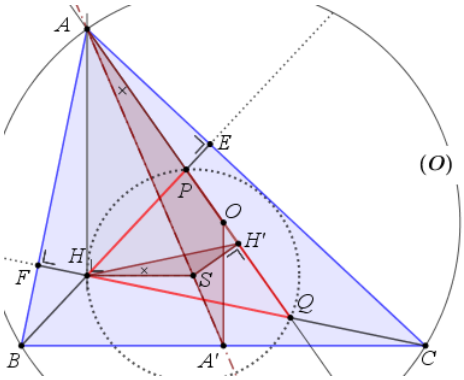



Op grond hiervan is $\angle QPU = \angle QFU = 90°$. En dit betekent dat het punt $P$ de *loodrechte projectie* is van het punt $U$ op de lijn $PQ$.
Analoog kan worden aangetoond dat het punt $Q$ de *loodrechte projectie* is van $V$ op de lijn $PQ$.

Daarmee is vierhoek $PUQV$ een trapezium, immers $VQ$ // $UP$ (beide staan loodrecht op $PQ$).

De middenparallel $n$ van dat trapezium – tevens de middelloodlijn van $PQ$ – snijdt $l$ in een punt $S'$. Evenwel voor $S'$ is dan $PS' = QS'$, waaruit volgt dat $S' \equiv S$.
Het punt $S$ (het omcentrum van driehoek $PQH$) is dus het midden van het lijnstuk $UV$ en de lijn $AS$ snijdt dan het met $UV$ evenwijdige lijnstuk $BC$ eveneens in het midden, dus in $A'$. De punten $A$, $S$ en $A'$ zijn inderdaad collineair.

figuur 12




**Derde bewijs.** Is nu $H'$ het midden van het lijnstuk $PQ$, dan is vierhoek $AHSH'$ een koordenvierhoek (immers, daarin is $\angle H = \angle H' = 90^o$). Ook is:

- $\angle SAH' = \angle SHH' = \xi$ (beide "staan" op de koorde $SH'$; zie de hoeken aangegeven met ×).
- Maar ook is via de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken $ABC$ en $HPQ$:
  - $vga(\Delta AOA') = \Delta HSH'$

Zodat:

- $\angle A'AO = \angle H'HS = \xi$

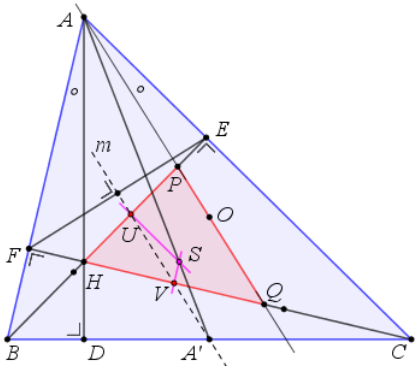
En dan is:

- $\angle A'AO$ (in driehoek $AOA'$) = $\angle SAO$ (in driehoek $SAH'$) = $\xi$

Met andere woorden: de punten $A$, $S$ en $A'$ zijn collineair.

**Vierde bewijs.** Op het bewijs zelf valt misschien wel iets af te dingen, maar wat volgt, lijkt mij op het oog het eenvoudigste bewijs van de onderhavige eigenschap.

figuur 13




In de figuur 13 is vast te stellen:

- de driehoeken $AEB$ en $AFC$ zijn gelijkvormig (*hh*);
- de driehoeken $AEP$ en $AFH$ zijn gelijkvormig (*hh*).

Er bestaat daardoor een gelijkvormigheidsafbeelding die het gerichte lijnstuk $\overrightarrow{BE}$ afbeeldt op het gerichte lijnstuk $\overrightarrow{CF}$, waarbij de daarop ingesneden verhoudingen intact blijven:

- $BH : HP : PE = CQ : QH : HF$

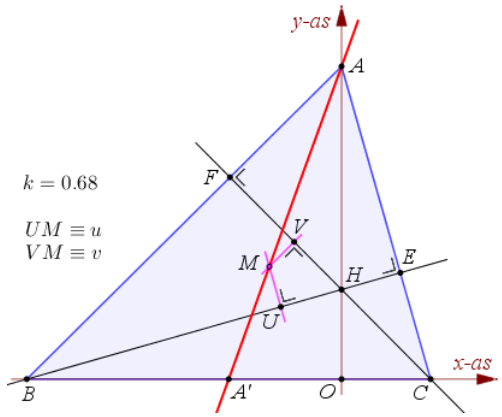
Zijn nu $U$, $V$ de middens van de lijnstukken $HP$, $HQ$ dan snijden de middelloodlijnen van die lijnstukken elkaar in het punt $S$ – het middelpunt van de omcirkel van driehoek $HPQ$, dat gelegen is op de zwaartelijn $AA'$ van driehoek $ABC$ (de te bewijzen eigenschap). Dit laatste is als volgt in te zien.

De middelloodlijnen van de lijnstukken $EF$ ($m$ is die van $EF$) en $BC$ snijden elkaar op die zwaartelijn; immers, vierhoek $BCEF$ is een koordenvierhoek waarvan de omcentrum samenvalt met het midden $A'$ van $BC$ (*Thales-cirkel* op $BC$).
De punten $U$ en $V$ bewerkstelligen de relatie $BU : UE = CV : VF$ of ook $BU : BE = CV : CF$.

Uit lineaire combinatie van verhoudingen volgt voor *alle* punten $U$, $V$ (op $BE$, $CF$) waarvoor die verhouding geldt, dat de loodlijnen elkaar op de lijn $AA'$ snijden. En dus geldt dit ook voor de middens $U$, $V$ van $HP$, $HQ$.

Ik licht dit laatste nog toe met een analytisch bewijs. De keuze van de daarbij gebruikte coördinaten van de hoekpunten $A$ en $B$ van driehoek $ABC$ is gemaakt om het rekenwerk enigszins te vereenvoudigen.
De algemene geldigheid van het bewijs wordt daarmee deels aangetast, maar de methode is in alle gevallen valide.

figuur 14




In de hiernaast staande figuur is in een cartesisch assenstelsel $xOy$:

· $A = (0, 1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (p, 0)$

Vergelijkingen van de zijden van driehoek $ABC$ zijn dan:

· $AB: \; x - y + 1 = 0$

· $AC: \; x + py - p = 0$

Ten behoeve van de berekening van de coördinaten van het punt $E$ volgt dan:

· $BE: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ p\lambda \end{pmatrix}$

Substitutie van deze $x$ en $y$ in de vergelijking van de lijn $AC$ geeft:

· $(\lambda - 1) + p^2\lambda - p = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_E = \frac{p+1}{p^2+1}$

Voor een "genormeerde" [8] richtingsvector van $BE$ geldt $\vec{r}_{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{p^2+1}\begin{pmatrix} p+1 \\ p^2+p \end{pmatrix}$ en daarmee volgen uit de relatie $BU = k \cdot BE$ de coördinaten van het punt $U$:

· $U = (-1 + \frac{k(p+1)}{p^2+1}, \frac{kp(p+1)}{p^2+1})$

Voor de vergelijking van de lijn $u$ die door $U$ gaat en evenwijdig is met $AC$ (dus loodrecht staat op $BE$) volgt dan na enig rekenwerk:

• $u: \; (x + py) - (kp + k - 1) = 0$ **...(4.1)**

Ter berekening van de coördinaten van het punt $F$ is allereerst:

· $CF: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + \mu \\ -\mu \end{pmatrix}$

Substitutie van deze $x$ en $y$ in de vergelijking van $AB$ resulteert in:

· $(p + \mu) - (-\mu) + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \mu_V = \frac{-p-1}{2}$

Voor een "genormeerde" richtingsvector van $CF$ geldt $\vec{r}_{CF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -p-1 \\ p+1 \end{pmatrix}$; daaruit volgt dan via de relatie $CV = k \cdot CF$ voor de coördinaten van $V$:

· $V = (p + \frac{1}{2}k(-p-1), \frac{1}{2}k(p+1))$

De vergelijking van de lijn $v$ door $V$ loodrecht op $CF$ is dan:

• $v: \; (x - y) - (p - kp - p) = 0$ **...(4.2)**

De coördinaten van het snijpunt $M$ van de lijnen $u$ en $v$ voldoen aan de relaties (4.1) en (4.2). Voor de meetkundige plaats van het punt $M$ is het dus voldoende om $k$ te elimineren uit die vergelijkingen.
Dit geeft het stelsel:

· $k = \frac{x+py+1}{p+1} \;\wedge\; k = \frac{x-y-p}{-p-1}$

En daaruit volgt voor de vergelijking van de meetkundige plaats van het punt $M$:

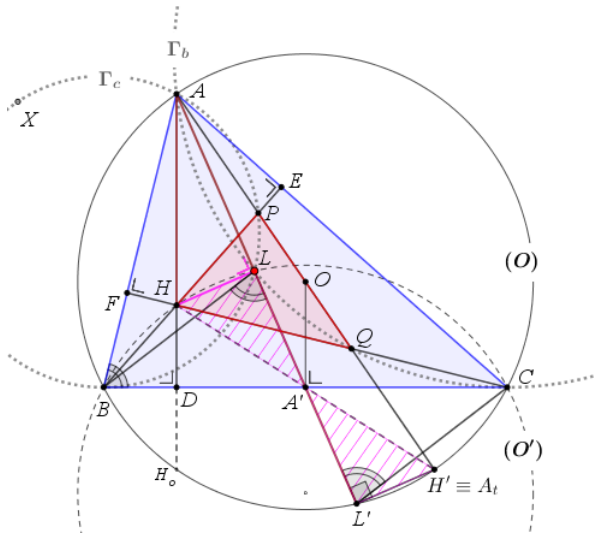
• $2x + (p-1)y - (p-1) = 0$

Dit is de vergelijking van een rechte lijn die door het punt $A = (0, 1)$ gaat en door het punt $A' = (\frac{1}{2}(p-1), 0)$. Dit laatste punt is (inderdaad) het midden van het lijnstuk $BC$.

De meetkundige plaats van het punt $M$ is dus de A-zwaartelijn van driehoek $ABC$.

**Vijfde bewijs.** De cirkel $(O')$ is de gespiegelde van $(O)$ in de lijn $BC$. Evenwel, $(O')$ kan ook verkregen worden als beeld van $(O)$ worden door een puntspiegeling met het punt $A'$ als centrum.

figuur 15




Daaruit volgt dan dat het A'-puntspiegelbeeld $H'$ van $H$ op $(O)$ ligt. Dan is:

- $HA' = A'H'$

De lijn $OA'$ is evenwijdig met $AH$ en is daardoor middenparallel in driehoek $AHH'$. En daaruit volgt dat $AH'$ door $O$ gaat ($H' \equiv A_t$; $A_t$ is het zogeheten tegenpunt van $A$ op $(O)$).

- Het binnen driehoek $ABC$ gelegen snijpunt van $AA'$ met $(O')$ is het punt $L$.

Het A'-puntspiegelbeeld $L'$ van $L$ ligt dus eveneens op $(O)$. Daardoor zijn de driehoeken $HLA'$ en $H'L'A'$ congruent ($ZHZ$), zodat daarin:

- $\angle A_tL'A' = \angle HLA'$

Maar $\angle A_tL'A = 90^o$ ($(O)$ is de *Thales-cirkel* op $AA'$), zodat ook $\angle HLA' = 90^o$. Met andere woorden:

- het punt $L$ is de projectie van het punt $H$ op de zwaartelijn $AA'$.

En ook is – vanwege de A'-symmetrie – bg($CL'$) op $(O)$ gelijk aan bg($BL$) op $(O')$, zodat voor de koorden geldt:

- $CL' = BL$

Waarmee ook de driehoeken $CL'A'$ en $BLA'$ congruent ($ZHZ$) zijn. Zodat:

- $\angle CL'A' = \angle CL'A = \frac{1}{2}\text{bg}(CA) = \angle BLA' = \angle B$

Of ook:

(5.1)... $\angle BLA = 180^o - \angle B$

Omdat de driehoeken $ABC$ en $HPQ$ gelijkvormig zijn (met onder meer $\angle B = \angle P$) is ook:

(5.2)... $\angle BPA = 180^o - \angle B$

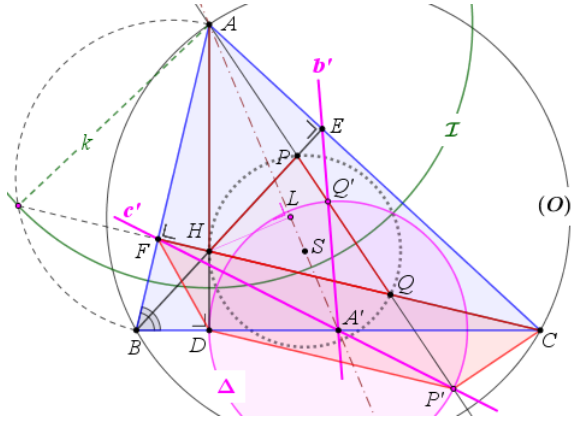
Uit de relaties (5.1) en (5.2) volgt dat de punten $A$, $P$, $L$, $B$ concyclisch zijn (met omcirkel $\Gamma_c$).
Analoog geldt dit ook voor de punten $A$, $L$, $Q$, $C$ (met omcirkel $\Gamma_b$).

### *Opmerkingen*

1. Omdat op $\Gamma_c$ bg($AXB$) $= 180^o - \angle B$ is, raakt de lijn $CB$ in $B$ aan $\Gamma_c$, en analoog in $C$ aan $\Gamma_b$.
2. Het punt $L$ is hier weer het A-humpty-punt van driehoek $ABC$; het is (hier) de loodrechte projectie van het hoogtepunt op de A-zwaartelijn.[6] Zie ook het eerste bewijs in deze paragraaf. ◊

Het bovenstaande dient als inleiding bij het uiteindelijke bewijs dat het omcentrum $S$ van driehoek $HPQ$ op de A-zwaartelijn ligt. Het bewijs daarvan zal ik hierna geven met behulp van *inversie*.

figuur 16




De driehoeken $ABD$ en $AHF$ zijn gelijkvormig ($hh$), zodat:

- $AF \cdot AB = AH \cdot AD$

Deze producten stel ik gelijk aan $k^2$. En ik kies $k$ als straal van de inversie(cirkel) $\mathcal{I}$ met $A$ als inversiecentrum.
Eenvoudig is nu via gelijkvormigheid van driehoeken in te zien dat ook:

- $AL \cdot AA' = AE \cdot AD = k^2$

Dit houdt in dat bij toepassing van de inversie $\mathcal{I}$ onder andere:

- $\mathcal{I}(F) = B$, $\mathcal{I}(H) = D$, $\mathcal{I}(E) = C$ en $\mathcal{I}(L) = A'$

Zoals hierboven is aangetoond, zijn de punten $B$, $L$, $P$, $A$ concyclisch (ze liggen op de niet-getekende cirkel $\Gamma_c$). Onder de inversie $\mathcal{I}$ is het beeld van $\Gamma_c$ een rechte lijn, namelijk de lijn $A'F \equiv c'$. Ook de $\mathcal{I}$-beelden

van $A$, $L$, $Q$, $C$ (die punten zelf liggen op de niet-getekende cirkel $\Gamma_b$) liggen op een rechte lijn, namelijk op $A'E \equiv b'$. Dan is duidelijk dat:

- $\mathcal{I}(P) = P' = c'$ & $AO$ en $\mathcal{I}(Q) = Q' = b'$ & $AO$

Omdat de punten $B$, $H$, $P$, $F$ collineair zijn op de B-hoogtelijn, zijn de $\mathcal{I}$-beelden van die punten concyclisch: ze liggen op een cirkel die gaat door $F$, $D$, $P'$ en $C$ (deze cirkel is niet getekend in figuur 16).
Omdat $A'F = A'C$ (in de F-rechthoekige driehoek $BFC$) is die koordenvierhoek een gelijkbenig trapezium met $DP' \,//\, CF$.
Gevolg:

- $A'D = A'P'$ en dan analoog natuurlijk ook:
- $A'D = A'Q'$

En daarmee is $A'$ het middelpunt van de omcirkel $\Delta$ van driehoek $DP'Q'$.
Als vervolgens op $\Delta$ de inversie wordt toepast, dan is het $\mathcal{I}$-beeld van $\Delta$ de omcirkel van driehoek $HPQ$.

> Nu is het echter zo, dat de inverse van het middelpunt van een cirkel *niet* samenvalt met het middelpunt van het inverse beeld van die cirkel. Wat echter wél geldt: inversiecentrum, middelpunt en inverse van het middelpunt zijn collineair.
> Het inversiecentrum is namelijk homothetie-centrum (centrum van vermenigvuldiging) van een cirkel en de inverse cirkel daarvan.[9]

Desalniettemin:

- het middelpunt $S$ van de omcirkel van driehoek $HPQ$ ligt op de zwaartelijn $AA'$.

## 7. Noten

[0] Deze appendix behoort bij het artikel *IMO en GVA* (International Mathematics Olympiad, gelijkvormigheidsafbeelding) dat door mij in december 2020 ter publicatie is aangeboden aan de redactie van het wiskundetijdschrift *Euclides*. Dat tijdschrift is het verenigingsorgaan van de Nederlandse vereniging van wiskundeleraren (NVvW).

[1] Met $(X)$ bedoel ik de cirkel met middelpunt $X$. Is daarbij de straal $r$ van die cirkel van belang, dan schrijf ik $(X; r)$. Als naam van omcirkel van de driehoek $XYZ$ gebruik ik $(XYZ)$.

[2] Met $X = a$ & $b$ wordt bedoeld: $X$ is het/een snijpunt van de meetkundige objecten $a$ en $b$.

[3] DICK KLINGENS (2006): *Draaistrekking en negenpuntscirkel*. In *Euclides*; jrg. 81, nr. 7; blz. 350-353.

[4] Een *collineaire verhouding* is een verhouding tussen de lengtes van lijnstukken die collineair zijn.

[5] Een formele definitie van een draaistrekking $ds$ luidt:
Een $ds$ is een afbeelding van het euclidische vlak op zichzelf waarbij voor elk punt $P$ ($\neq O$) geldt: $ds(P) = P'$ waarbij $P' = (\nu \cdot r)(P)$.
De samengestelde afbeelding $\nu \cdot r$ (uit te spreken als $\nu$ *na* $r$) is een rotatie $r$ gevolgd door een vermenigvuldiging $\nu$ resp. over een hoek $\varphi$ en met een factor $k$, beide met een *vast* punt $O$ als centrum.
Omdat de afbeeldingen $\nu$ en $r$ commutatief zijn, is ook $\nu \cdot r$ commutatief; dus is: $\nu \cdot r = r \cdot \nu$.

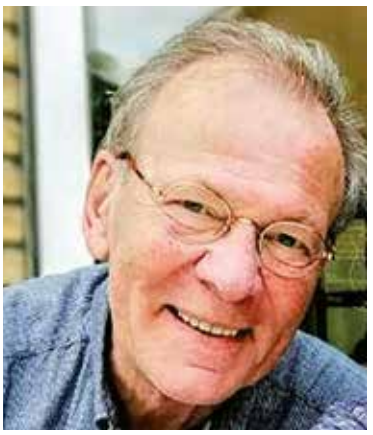
[6] Voor iets meer over de humpty-punten van een driehoek zie:
DICK KLINGENS (2019): *Een bijzonder punt, en nog een tweede*. Concept-artikel, dat als pdf beschikbaar is via:
*https://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/HumDum.pdf*

[7] De *secantstelling* houdt hetzelfde in als de *machtstelling* bij een cirkel: bij twee in $P$ concurrente lijnen die de cirkel in $A$, $B$ en $C$, $D$ snijden, geldt $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Vallen bijvoorbeeld $A$ en $B$ samen, dan is: $PA^2 = PC \cdot PD$. Bij de machtstelling wordt gebruik gemaakt van zogeheten gerichte lijnstukken; bij de secantstelling is dat niet het geval.
De *omgekeerde* secantstelling zegt dat, als $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ is, de punten $A$, $B$, $C$, $D$ concyclisch zijn.

[8] Met een *genormeerde* richtingsvector wordt hier bedoeld een zó gekozen vector $\bar{r}$, dat op de lijn *AB* met vectorvergelijking $\bar{x} = \bar{a} + \lambda\bar{r}$ door $\lambda = 0$ het punt *A* wordt bepaald en door $\lambda = 1$ het punt *B*.
Duidelijk is dat in dit geval de vector $\bar{r} = \bar{b} - \bar{a}$ daaraan voldoet.
Deze genormeerde vector is noodzakelijk om op de lijnen *BE* en *CF* de verhouding *k* = *BU* : *BE* = *CV* : *CF* te kunnen gebruiken; of ook, het gebruik van een homothetie op *BE*, *CF* met centrum *B*, *C* en met *dezelfde* factor *k*.

[9] Zie voor een bewijs bijvoorbeeld:
DICK KLINGENS (1999): *Inversie en vermenigvuldiging*. Via (de website van de auteur):
*http://www.pandd.demon.nl/inversie.htm#5*

# Herinneringen aan Dick Klingens



*Dick Klingens*

**Op 24 mei jl. overleed Dick Klingens, voormalig eindredacteur van Euclides (2000-2013) en mede-webmaster van de eerste website van de NVvW. Hij is 76 jaar geworden. Als voormalige collega's van Dick halen we graag wat herinneringen aan hem op.**

## Marian Kollenveld, voorzitter NVvW 1999-2014:

De eerste keer dat ik Dick zag, was bij zijn sollicitatie als eindredacteur voor *Euclides* en webmaster voor de vereniging. Dick bleek een man te zijn met zeer uitgesproken opvattingen. Uit mijn mailwisseling met Dick is wel een beeld te krijgen van onze onderlinge verstandhouding. Veel van die mails gaan over de studiedag en over de jaarrede, die hij netjes opgemaakt tijdig in het blad moest krijgen. Ook lees ik er mijn vertrouwen in Dicks technische en didactische vaardigheden in terug; geduldig legde hij me uit hoe ik moest (un)zippen en hoe ik foto's in de juiste resolutie kon versturen. En er was destijds veel gedoe rond het open forum van de website: rare mannen met onwelvoeglijke teksten en Viagra-advertenties die volgens mij weg moesten. Of Dick dat maar wilde doen.
Wat valt er verder uit al die mails af te lezen? Ach, we waren het zo vaak eens: over het belang van meetkunde, over de fans van de staartdeling, de vreugde van de lente of het gevoel dat het desondanks herfst is omdat het je lot is niet begrepen te worden. In latere jaren bleef hij zich zo lang mogelijk naar de jaarvergadering sleuren, ondanks het steeds zwakker wordende lichaam. En daar aangekomen bleef hij me koppig 'mijn voorzitter' noemen.
Dick, dankjewel, ik vond het fijn dat je er was!

## Kees Hoogland, hoofdredacteur *Euclides* 1996-2001:

Als ik aan Dick denk, zie ik...
... een beminnelijkheid van een met labradorvacht bedekte bol;
... een licht-Dorrestijnsiaanse hypochondrie als een bergparabool;
... een droge humor als een dalparabool;
... een verantwoordelijkheidsgevoel als een cirkel waaruit niets ontsnapt;
... een doordieselende werkhouding als een cycloïde;
... een scherpte voor kwaliteit als een hypocycloïde;
... een meetkundekennis als een tangens in de buurt van $\frac{1}{2}\pi$.
Ik denk terug aan jaren van geweldige samenwerking in de redactie van *Euclides*.

## Gert de Kleuver, redactievoorzitter *Euclides* 2000-2009:

Ergens in 2000 hebben Dick en ik elkaar ontmoet. We hadden beiden gesolliciteerd naar de functie van eindredacteur en zo kwamen we elkaar tegen in hotel Wientjes in Zwolle. Dick werd benoemd als eindredacteur en zelf ging ik verder als voorzitter van de redactie, met toen nog Kees Hoogland als hoofdredacteur. In dat eerste jaar gingen Dick, Kees en ik op zekere dag naar Groningen, voor een afspraak met de vormgever. Aldaar aangekomen werden we in een gangetje ontvangen: de man bleek helemaal geen tijd voor ons te hebben. Ik heb Dick zelden zo boos gezien; zó wenste hij niet behandeld te worden! Het jaar erna werd Marja Bos hoofdredacteur. Vanaf dat moment gingen Dick en ik één keer per jaar een dagje naar Marja, voor groot overleg. Die treinreis op en neer naar Drenthe was altijd weer memorabel. Zo kocht Dick eens een verkeerd treinkaartje. Hij wilde het ruilen aan het loket, en de rij wachtenden achter hem groeide en groeide... totdat één van hen vroeg, of zij misschien éérst geholpen mochten worden. Dit leverde onmiddellijk luidruchtig commentaar van Dick op. Ook de reis zelf was altijd een groot feest. Dick kon mooi vertellen, en als hij op stoom kwam, was hij net een trein die niet te stoppen was. Medereizigers en conducteur genoten volop mee.
Dick had destijds het initiatief genomen voor een special over de meetkundige Oene Bottema (1901-1992). Samen met Marja werd dit Bottema-nummer degelijk voorbereid, en veel mensen werden bereid gevonden een stuk te schrijven. Dick schreef zelf ook, onder meer het mooie artikel 'Sangaku en inversie'. De special werd goed

ontvangen. Het was de eerste van een serie die Marja en Dick ontzettend veel tijd heeft gekost, maar ook veel energie heeft opgeleverd. Het eindredactiewerk was Dick op het lijf geschreven: de tekeningen, de foto's, de formules... alles altijd uitstekend verzorgd, met als ultiem doel een mooi en foutloos nummer van *Euclides.*
Dank je wel, Dick!

## Gerard Koolstra, webmaster van de eerste NVvW-website, 1998-2006:

Zo rond de eeuwwisseling heb ik veel met Dick samengewerkt in het kader van het ontwikkelen van een website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het onderhouden daarvan. We hebben veel gesprekken gevoerd, waarbij de veelzijdigheid van Dick al snel duidelijk werd: zijn verleden als verzekeringswiskundige, daarna zijn loopbaan als wiskundeleraar en schoolleider, zijn bemoeienissen met de programmeertaal COMAL, en natuurlijk zijn werk op het gebied van meetkunde.
De gemeenschappelijke noemer was om zoveel mogelijk kennis en gereedschappen te delen met vakgenoten. Daarbij speelde in toenemende mate ook zijn bezorgdheid over het wiskundig-inhoudelijk niveau van de Nederlandse wiskundedocenten een rol. Zaken die hem aan het hart gingen besprak hij vaak met een flinke scheut ironie, waaronder zich soms een diepe gedrevenheid verborg.
Later sprak ik hem veel minder, maar wel minstens een keer per jaar. De laatste tijd was zijn mindere gezondheid ook onderwerp van gesprek. Voor de manier waarop hij hiermee omging past bewondering.
In warme herinnering.

## Marja Bos, hoofdredacteur *Euclides* 2001-2008:

Mei 2001. Ik loop Hogeschool Domstad in Utrecht binnen voor het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs. Dwars door een gang vòl met mensen roept iemand mij van verre luidkeels toe: "Heeeeee, daar is ze: m'n nieuwe baas!!!" Ik krijg meteen een rooie kop – brrrrrr, wie probeert me hier zo in verlegenheid te brengen?! Het is de mij op dat moment nog onbekende Dick Klingens, eindredacteur van *Euclides*, het blad waarvan ik nog maar nèt als hoofdredacteur benoemd ben. Na afloop van het symposium drinken we samen een paar koppen koffie om nader kennis te maken. En als ik daarna de trein in stap, doe ik dat met het volste vertrouwen in zowel onze toekomstige werkrelatie als onze persoonlijke klik. Dick bleek inderdaad een uitstekende eindredacteur te zijn, met uitgesproken ideeën over allerlei vormgevingskwesties en met veel technische expertise. Ik leerde Dick natuurlijk ook kennen in zijn hoedanigheid als groot meetkundeliefhebber. Zijn enthousiasme en expertise op dit terrein bleken bijvoorbeeld uit de totstandkoming van de Bottema-special, die in januari 2002 bij de *Euclides*-abonnees op de mat viel. Zie daarover de bijdrage van Gert de Kleuver. Menigmaal diende Dick eigen meetkundeartikelen bij me in, en vele ervan heb ik daadwerkelijk geplaatst. Maar niet allemáál... Om uiteenlopende redenen wees ik zo nu en dan een inzending van hem af. Met bloedend hart, overigens, want ik wist dat ik Dick daarmee op zijn meetkundige ziel trapte... Overigens, Dicks prachtige privé-website *www.pandd.nl* (met heel veel meetkunde) blijft vooralsnog gelukkig gewoon in de lucht.
Minder bekend is misschien, dat Dick een groot aandeel heeft gehad in de digitalisering van alle jaargangen van *Euclides* (dus vanaf 1924). Dat was een immense klus, maar alle nummers zijn daardoor nu terug te vinden via *archief.vakbladeuclides.nl.* Fantastisch!
Als kernredactie vormden Dick, Gert de Kleuver en ik een goed op elkaar ingespeeld team. En we hebben samen ook heel wat afgelachen, al moet gezegd worden dat de heren voortdurend probeerden mij schandelijk voor aap te zetten. Vooral Dick was hierin een meester – en hij schiep er bovendien een boosaardig genoegen in! Ach, ach, wat heb ik het zwaar gehad. En dan dat karakteristieke glunderende gezicht van hem erbij, als 't hem dreigde te lukken...
Naarmate de jaren vorderden, ging Dicks gezondheid achteruit. Maar hij beklaagde zich niet, en bromde met het nodige relativeringsvermogen de zorgen van zich af. Gelukkig fleurde hij mentaal weer wat op toen er kleinkinderen kwamen; hij bleek een enthousiaste grootvader.

Dick heeft *Euclides* een mooi gezicht gegeven.
Hij was een eindredacteur van formaat!
En een fijn mens.

## Klaske Blom, hoofdredacteur *Euclides* 2008-2011:

Als ik van iemand vertrouwen heb gevoeld in de allereerste zenuwachtige stappen die ik zette als hoofdredacteur van *Euclides*, dan is het wel van Dick. Ik voelde me verzekerd van opvang als ik een stommiteit zou begaan.
Als er iemand prachtige stukken schreef voor *Euclides*, dan was Dick het wel. Zo veel dat het regelmatig *te* veel was. Hij vond het erg als het niet geplaatst werd, en bedacht listen om te ontsnappen aan het strenge regime van de hoofdredacteur, bijvoorbeeld door gebruik te maken van zijn partners in crime: zijn alter ego's Daaf Spijker en>

Pim Diemitz. Buiten *Euclides* deelden we nog een passie: Noorwegen, een woest en wonderschoon land. Woest en wonderschoon, het zou een omschrijving van Dick kunnen zijn, toch? Woest in zijn reacties, in zijn ergernis, in zijn ideeën, woest zijn haar. Wonderschoon in zijn artikelen, wonderschoon zijn meetkunde, zijn bewijzen en zijn woordkunst. In mijn ogen kunnen we Dick niet dankbaar genoeg zijn voor datgene wat hij met zijn precisie, zijn oplettendheid, zijn enorme deskundigheid en ontelbare uren werk in al die jaren voor *Euclides* heeft betekend. Dick was niet de makkelijkste in gezelschap, maar zijn nabijheid, zowel digitaal als in redactievergaderingen, was me altijd bijzonder dierbaar.

Zie voor een *Euclides*-special met artikelen van Dick:
*vakbladeuclides.nl/977klingens*