EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Aansluiting rekenen en wiskunde

Wiskunde voor braillelezers

Nieuwe leerlijn algebra voor wiskunde A

Wiskundig raadsel bij Sherlock Holmes

NR.7

JAARGANG 97 - JUNI 2022

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

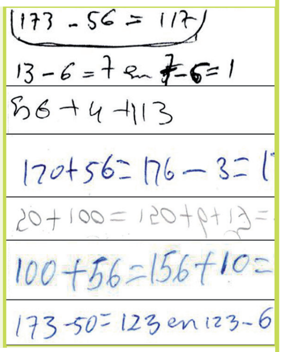
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR7

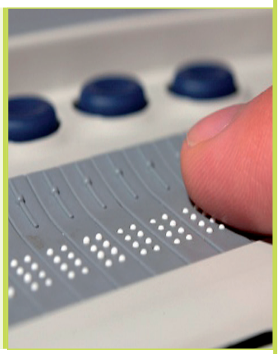
IN DIT NUMMER

HANDIG HUSSELEN MET REKENOPDRACHTEN 4
Sjef van Dongen

HET FIZIER GERICHT OP... REKENWINST 8
Mieke Abels



PUNT VOOR PUNT OP WEG NAAR BETER WISKUNDE-ONDERWIJS VOOR BRAILLELEZERS 10
Annemiek van Leendert



SENSEMATH, APP VOOR LEERLINGEN MET EEN VISUELE BEPERKING 14
Annemiek van Leendert

JAPANSE PUZZELS 17
Rob van Oord

JAPANSE PEN EN ANDERE VERHALEN 18
Gerrit Roorda

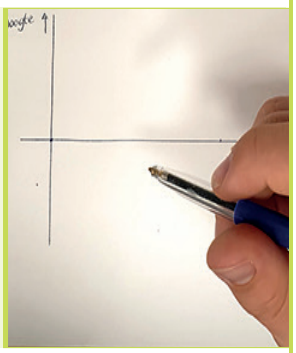
ABSTRACTE SCHOONHEID IN ARCHITECTUUR 20
FOTOGRAAF PAUL BROUNS
Henk Rozenhart

NIEUWE LEERLIJN ALGEBRA WISKUNDE A 22
Peter Kop,
Erik van Barneveld

PUZZELS EN RAADSELS VOOR IN DE ZOMER 27
Bert Smid
Simon Biesheuvel
Tom Goris

WIS EN WAARACHTIG 28

KLEINTJE DIDACTIEK 30
DE SAMENHANG TUSSEN SINUS EN EENHEIDSCIRKEL II
Lonneke Boels



WITJE: JONGLEREN 31

UITDAGENDE PROBLEMEN 33
HET PROBLEEM VAN LEUVEN
Jacques Jansen

Foto voorkant:
Into the rising lights. Kunstenaar: Paul Brouns. Voor meer informatie over het werk van Paul Brouns zie het artikel van Henk Rozenhart 'Abstracte Schoonheid in Architectuur' in deze *Euclides*. Zie ook: *https://paulbrouns.com/*

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

MEETKUNDE – EENVOUDIG, OF TOCH NIET? 36
Dick Klingens

ROUTE NAAR ROUTH 39
Fred Muijrers

VASTGEROEST 42
Ab van der Roest

VERENIGINGSNIEUWS 43
JAARVERGADERING/
STUDIEDAG 2022

PUZZEL 44
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

SERVICEPAGINA 46

Kort vooraf

Het laatste nummer voor de zomer alweer. Tijd om terug te blikken op het afgelopen schooljaar waarin we, na een kleine stuiptrekking in december, hopelijk voorgoed (of is 'voorlopig' beter, maar dat druist in tegen mijn optimistische aard...) verlost zijn van lockdowns. En waarin we hopelijk goede en nuttige bestedingen hebben bedacht voor de NPO-gelden die we allemaal ter beschikking kregen. De nabije toekomst zal uitwijzen of we de coronaschade binnen de perken weten te houden.
De redactie is versterkt met een nieuw redactielid: Martijn Schouw. Hij is werkzaam op Onderwijsroute 10-14 in Zwolle. In de volgende *Euclides* vertelt hij meer over het speciale karakter van zijn school. Martijn zal zich voornamelijk gaan richten op het vmbo.
Inmiddels ontpopt Henk Rozenhart, voormalig redactievoorzitter, zich meer en meer als onze 'kunstredacteur'. Het is hem wederom gelukt een kunstenaar te vinden die zich door wiskunde laat inspireren: fotograaf Paul Brouns. Je hebt al kennis gemaakt met zijn werk toen je deze *Euclides* uit de verpakking haalde. Door combinatie, ritmische uitbreidingen en omvormingen maakt hij een nieuwe fotografische werkelijkheid, zo lezen we in de bijdrage over het werk van Paul op bladzijde 20. En je hoeft je deze zomer niet te vervelen! Neem een stapel ruitjespapier, een spel kaarten en een setje jongleerballen mee op vakantie en deze *Euclides*. Dat ruitjespapier kun je gebruiken voor het zelf ontwerpen van Japanse puzzels: Rob van Oord legt uit hoe je dat doet. Of je stort je op de puzzels die in de loop der tijden ingezonden zijn door lezers: we bewaren ze voortaan tot nummer 7. Met de jongleerballen kun je het WiTje van dit nummer zelf uitproberen voordat je je leerlingen het probleem voorlegt, en het spel kaarten komt van pas bij de puzzel van Lieke en Wobien.
En al dan niet puzzelend: mede namens de redactie een mooie zomer gewenst!

Tom Goris

Sjef van Dongen

Handig husselen met rekenopdrachten

De husseleigenschap kan de commutatieve en associatieve eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging vervangen. Ook herleidingen kunnen erdoor vereenvoudigd worden.[1]
Dit artikel is bedoeld om de aansluiting van rekenen op de basisschool en wiskunde op de middelbare school te versoepelen.

Optellen en aftrekken

De meeste basisschoolleerlingen passen het wisselen van optellingen en aftrekkingen probleemloos toe, daartoe uitgenodigd door opdrachten als: 'reken handig uit' of 'reken slim uit'. Ze accepteren dat 40 – 20 + 5 – 7 – 8 hetzelfde oplevert als 40 + 5 – 7 – 8 – 20. Met andere woorden: als je alleen met optellen en/of aftrekken te maken hebt kun je de termen samen met hun bijbehorende opdracht van plaats wisselen (husselen) zonder dat de uitkomst zal veranderen. De vraag rijst: hoe zit dat met het eerste getal 40? Het is een ongeschreven wet dat bij het berekenen van een verandering wordt begonnen met 0, die we vervolgens niet noteren. Denk aan het tellen van het geld in je portemonnee. Beginnen we de bovengenoemde rekenopdracht met 0 dan wordt het duidelijk dat het getal 40 bij een optelling hoort.
$40 - 20 + 5 - 7 - 8 \equiv 0 + 40 - 20 + 5 - 7 - 8 \equiv$
$0 - 20 + 5 - 7 - 8 + 40$.[2]
Halen we de 0 weer weg, wat gebruikelijk is, dan zou je deze conclusie kunnen trekken: is bij een rekenopdracht het 'min'-teken het eerste teken dat je tegenkomt dan mag je dat 'min'-teken lezen als 'eraf'. Het antwoord op de vraag 'waar van af?' is dan: van nul. De opdracht -3^2 kun je dus lezen als: nul eraf het kwadraat van 3.[3] Het antwoord is negatief negen! Bijkomend voordeel: een leerling die de husseleigenschap heeft geleerd kan de commutatieve eigenschap van de bewerking optellen naast zich neerleggen.

De husseleigenschap bij optellen en aftrekken luidt: als een berekening alleen uit de opdrachten optellen en/of aftrekken van getallen bestaat, begin dan zo nodig met 0 of 0 + . Vervolgens maakt het niet uit in welke volgorde die opdrachten optellen en aftrekken worden uitgevoerd, mits je de opdrachten met hun bijbehorende getal bij het husselen maar bij elkaar houdt.

Vermenigvuldigen

Een vermenigvuldiging is in essentie de vervanging van een herhaalde optelling of aftrekking.

3	×	8	=	24
vermenigvuldiger[5]		vermenigvuldigtal[5]		product

figuur 1

Vermenig-vuldiger	×	Vermenig-vuldigtal	=	product	omdat	vermenig-vuldiger	×	Vermenig-vuldigtal	=	product
3	×	8	=	24	0 + 8 + 8 + 8 = 24	pos	×	pos	=	pos
3	×	-8	=	-24	0 + (-8) + (-8) + (-8) = -24	pos	×	neg	=	neg
-3	×	8	=	-24	0 – 8 – 8 – 8 = -24	neg	×	pos	=	neg
-3	×	-8	=	24	0 – (-8) – (-8) – (-8) = 24	neg	×	neg	=	pos

tabel 1

Een positieve vermenigvuldiger geeft aan hoe vaak het vermenigvuldigtal bij 0 moet worden opgeteld.
Een negatieve vermenigvuldiger geeft aan hoe vaak het vermenigvuldigtal van 0 moet worden afgetrokken.

Eigenschappen:

a Is de vermenigvuldiger gelijk aan 0 dan is het product ook 0.

b De *commutatieve eigenschap* van de vermenigvuldiging kan met onderstaande voorbeelden aannemelijk gemaakt worden:

1) Het oppervlak van een rechthoek van 3×8 is te berekenen met
$3 \times 8 \equiv 0 + 8 + 8 + 8$ of
$8 \times 3 \equiv 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

2) 24 leerlingen kun je verdelen in 3 groepen van 8 (3×8) maar ook in 8 groepen van 3 (8×3).
Dus $3 \times 8 \equiv 8 \times 3$.

c *Vermenigvuldigen met negatief één (-1)* is te vervangen door *het tegengestelde nemen van*.
$(-1) \times \text{getal} \equiv -\text{getal}$ [2]

Toepassing van vermenigvuldigen met negatieve getallen

Het is lastig om leerlingen het nut van vermenigvuldigen met negatieve getallen te laten ervaren. In gangbare wiskundemethodes wordt hier nauwelijks aandacht aan besteed. In een van de methodes bestaat de context uit een 'heks' die warme en koude blokjes in of uit een ketel gooit of haalt.[4] De uitgevoerde actie bepaalt of de vermenigvuldiger positief of negatief wordt. De toestand van de blokjes, koud of warm, bepaalt of het vermenigvuldigtal positief of negatief is.
Een andere context die het vermenigvuldigen met negatieve getallen kan verduidelijken is die van een autodealer die zijn autovoorraad wil bijhouden. Dat doet hij door middel van de maandelijkse in- en verkoopcijfers. De formule is: *Nieuwe voorraad = Oude voorraad + verandering*. De verandering ontstaat door in- en verkoopacties. Bij een inkoopactie hoort de optelling, bij een verkoopactie hoort de aftrekking. Inkoop en verkoop zijn tegengestelde grootheden.[3] Negatieve maatgetallen zijn daarom mogelijk. Zo kan '8 auto's verkopen' vervangen worden door '(–8) auto's inkopen'.
In tabel 2 is voor een zestal situaties de verandering voor het eerste kwartaal uitgerekend. De situaties 3 tot en met 6 leveren de vier verschillende vermenigvuldigingen met positieve en negatieve getallen.

Delen

Bij de opdracht delen wordt onderzocht hoe vaak de deler van het deeltal moet worden afgetrokken of opgeteld om bij 0 uit te komen. Het antwoord op deze vraag is het quotiënt.

	verandering			verandering		
situatie	**in januari**	**in februari**	**in maart**	**totaal**		
1	8 auto's ingekocht	2 auto's verkocht	(-5) auto's ingekocht	$0 + 8 - 2 + (-5)$		1
2	(-8) auto's verkocht	(-2) auto's ingekocht	5 auto's verkocht	$0 - (-8) + (-2) - 5$		1
3	8 auto's ingekocht	8 auto's ingekocht	8 auto's ingekocht	$0 + 8 + 8 + 8$	3×8	24
4	(-8) auto's verkocht	(-8) auto's verkocht	(-8) auto's verkocht	$0 - (-8) - (-8) - (-8)$	$(-3) \times (-8)$	24
5	8 auto's verkocht	8 auto's verkocht	8 auto's verkocht	$0 - 8 - 8 - 8$	$(-3) \times 8$	-24
6	(-8) auto's ingekocht	(-8) auto's ingekocht	(-8) auto's ingekocht	$0 + (-8) + (-8) + (-8)$	$3 \times (-8)$	-24

tabel 2

>

24	:	8	=	3
deeltal[5]		deler[5]		quotiënt

figuur 2

Het quotiënt is positief als de deler van het deeltal moet worden afgetrokken om bij 0 uit te komen. Het quotiënt is negatief als de deler bij het deeltal moet worden opgeteld om op 0 uit te komen, zie tabel 3.

Eigenschappen:

a Als de deler gelijk is aan 0 dan is het quotiënt niet te bepalen: delen door 0 is niet gedefinieerd!

b Als zówel het deeltal (teller) als de deler (noemer) *n* keer zo groot/klein wordt dan blijft het quotiënt gelijk.

De husseleigenschap bij vermenigvuldigen en delen

De husseleigenschap kan verduidelijkt worden aan de hand van het volgende vraagstuk:[6]
14 melkveehouders bezitten elk 50 melkkoeien. De melkproductie van een melkkoe is 175 liter per week. Elke koe wordt twee keer per dag gemolken. De totale hoeveelheid melk wordt opgeslagen in melkbussen met een inhoud van 25 liter. Hoeveel melkbussen kunnen worden gevuld bij een melkbeurt?
Het antwoord vind je bijvoorbeeld door eerst de melkproductie per week te berekenen en daarna per dag en per melkbeurt om vervolgens te delen door de inhoud van een melkbus, zie de eerste kolom in tabel 4.
Hetzelfde resultaat kan worden gevonden door de getallen[7] samen met hun bijbehorende bewerkingen van plaats te wisselen (husselen). Zo ontstaan er in dit geval 720 manieren om tot hetzelfde antwoord te komen.
In tabel 4 is een viertal manieren getoond.

De husseleigenschap bij vermenigvuldigen en delen luidt:
Als een berekening alleen bestaat uit de opdrachten vermenigvuldigen en/of delen, begin dan zo nodig met 1 × of 1. Vervolgens maakt het niet uit in welke volgorde die opdrachten worden uitgevoerd, mits je de opdrachten met hun bijbehorende getal bij het husselen maar bij elkaar houdt.

deeltal	:	deler	=	quotiënt	omdat	deeltal	:	deler	=	quotiënt
24	:	8	=	3	24 – 8 – 8 – 8 = 0	pos	:	pos	=	pos
24	:	-8	=	-3	24 + (-8) + (-8) + (-8) = 0	pos	:	neg	=	neg
-24	:	8	=	-3	-24 + 8 + 8 + 8 = 0	neg	:	pos	=	neg
-24	:	-8	=	3	-24 – (-8) – (-8) – (-8) = 0	neg	:	neg	=	pos

tabel 3

14 × 50 × 175 : 7: 2 : 25 =	14 : 7 : 2 × 50 : 25 × 175 =	1 × 175 : 25 × 50 : 7 : 2 × 14 =	1 : 2 × 50 : 25 × 175 : 7 × 14 =
700 × 175 : 7 : 2 : 25	2 : 2 × 50 : 25 × 175	7 × 50 : 7 : 25 × 14	0,5 × 50 : 25 × 175 : 7 × 14
122500 : 7 : 2 : 25	1 × 50 : 25 × 175	1 × 50 : 25 × 175	25 : 25 × 175 : 7 × 14
17500 : 2 : 25	50 : 25 × 175	50 : 2 × 14	1 × 175 : 7 × 14
8750 : 25	2 × 175	25 × 14	25 × 14
350	350	350	350

tabel 4

Tot slot

Mijn ervaring is dat de husseleigenschappen een bevrijdend gevoel geven aan brugklasleerlingen. Eén vraagstuk dat op meerdere manieren mag worden opgelost! Ook ervaren ze de gegeven definities van het vermenigvuldigen en delen als een begrijpelijke ondersteuning van de 'plussen-en-minnencultuur' waarmee ze soms worden geconfronteerd. Ook kan door de introductie van de husseleigenschappen de commutatieve eigenschap, die wel voor de optelling en voor de vermenigvuldiging, maar niet voor de aftrekking en de deling geldt, uit het wiskundeonderwijs geschrapt worden.

Noten

[1] Bijvoorbeeld: delen door 3 is te herleiden tot vermenigvuldigen met het omgekeerde van 3. 'Bewijs': $7 : 3 = 1 \times 7 : 3 = 1 : 3 \times 7 = ⅓ \times 7 = 7 \times ⅓$.

[2] De triple bar $\equiv$ staat voor: 'is te vervangen door'.

[3] Zie het artikel 'Meer of minder minnen' in *Euclides* 96-6.

[4] *zie: https://www.youtube.com/watch?v=EeKlZOwsHvw*

[5] *zie ook: https://nl.wikipedia.org/wiki/Vermenigvuldigen* en *https://nl.wikipedia.org/wiki/Delen*

[6] Bij het vak natuurkunde komen dit soort berekeningen veelvuldig voor.

[7] Termen zijn de getallen, die bij optellen en aftrekken gebruikt worden. De getallen die bij vermenigvuldigen of delen gebruikt worden, heten vermenigvuldigtal, vermenigvuldiger, deeltal of deler. Het zou logisch zijn als ook hiervoor een verzamelnaam zou bestaan, bijvoorbeeld 'factor'.

Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna was hij 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent.
E-mailadres: *jjacvandongen@hotmail.com*

platform wiskunde nederland

Vakantiecursus 2022 voor wiskundeleraren Willekeur en structuur in netwerken

Hoofddocente: Nelly Litvak (Universiteit Twente)
Gastsprekers: Clara Stegehuis (UT), Pim van der Hoorn (TU/e)

Veel systemen bestaan uit objecten die met elkaar verbonden zijn. In het Nederlandse spoornetwerk bijvoorbeeld zijn stations met elkaar verbonden door rails. In sociale netwerken zijn mensen met elkaar verbonden door vriendschappen. En in het internet zijn routers met elkaar verbonden door kabels. Zelfs onze hersenen kun je zien als een netwerk, waar neuronen met elkaar verbinden als ze tegelijk vuren. Wiskundig gezien kun je zulke systemen zien als een graaf. Grafen zijn al heel oud: Leonhard Euler introduceerde ze al in 1736. Om grote netwerken zoals sociale netwerken of het World Wide Web te modelleren, gebruiken we vaak zogenaamde willekeurige, of stochastische grafen. In een stochastische graaf liggen de knooppunten vast maar zijn de verbindingen willekeurig. Relaties tussen objecten ontstaan namelijk vaak willekeurig, zoals vriendschappen in een sociaal netwerk. In deze cursus maken we kennis met verschillende stochastische grafenmodellen en hun voor- en nadelen voor het modelleren van echte netwerken. Wiskundige inzichten over deze modellen helpen ons om belangrijke vragen te beantwoorden, zoals: Hoe vindt Google de belangrijkste webpagina's? Wat is het meest centrale station van de NS? Hoe verspreidt een epidemie of een meme zich over een netwerk? En hoe hangt dit af van de structuur in de netwerkverbindingen? Naast haar onderzoek naar netwerken en stochastische grafen, heeft de hoofd-docente een passie voor innovatieve onderwijsmethoden. Ze is ervan overtuigd dat een mooi hoorcollege niet genoeg is om een onderwerp echt te begrijpen. Tijdens de cursus maakt zij daarom gebruik van een aantal vernieuwende onderwijsmethoden die zij heeft ontwikkeld voor haar onderwijs aan de Universiteit Twente.

De cursus vindt plaats op vrijdag 26 en zaterdag 27 augustus in Amsterdam (CWI), en op vrijdag 2 en zaterdag 3 september in Eindhoven (Academisch Genootschap Eindhoven)

De cursus is voor wiskundedocenten van elk niveau toegankelijk, evenals voor studenten van lerarenopleidingen en andere geïnteresseerden. De deelnemers ontvangen bij aanvang van de cursus een syllabus met teksten van de voordrachten. Het cursusgeld bedraagt €99. Voor studenten van lerarenopleidingen is het cursusgeld slechts €39. Voor gepensioneerden geldt een speciaal tarief van €55. Bij de cursus is inbegrepen een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag. Aanmelden is mogelijk via *www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus*, voor vragen kun je mailen naar: *vakantiecursus@platformwiskunde.nl*

Mieke Abels

Het FIzier gericht op...

Rekenwinst

Net zoals vele anderen, heb ik het afgelopen jaar veel opgeruimd. Maar toen ik in een doos een stapel leerlingenwerk tegenkwam dacht ik: 'Nee, dit gaat niet weg. Dit moet in een artikel.' Het onderwerp is nog steeds actueel: rekenachterstanden.

Ze kunnen niet rekenen

Dit vonden zowel de docenten van de avo-vakken als de praktijkdocenten. Ik wilde onderzoeken welke rekenvaardigheden de leerlingen wel en niet hadden. Dit onderzoek vond plaats in het kader van het WINST- project [1], [2], [3] over de integratie van de vakken wiskunde, ict, natuurkunde, scheikunde en techniek op het vmbo. Ik kreeg een groep van twintig leerlingen, allemaal jongens uit het derde leerjaar, in een lokaal met daarin losse tafeltjes. Ik maakte de afspraak: 'Wanneer je een antwoord weet steek je je vinger op en roept het niet door de klas.'

Hoeveel is 18 plus 9?

Ik zag heel veel vingers en vroeg één van de leerlingen het antwoord te geven.
'27', zei hij. Maar toen vroeg ik: 'Hoe heb je dit uitgerekend?'
'Huh?' zei hij en ik zag veel verbaasde gezichten.
'Heb je het zo gedaan (en ik gebruikte mijn vingers bij het tellen) 18, 19, 20, 21?' 'Nee, natuurlijk niet, je doet gewoon 2 erbij 7 erbij.' Een andere leerling zei: 'Ik heb het anders gedaan: 10 er bij 1 eraf.'
Ik schreef op het bord: 28 + 13.
Er kwamen verschillende strategieën:
28 + 10 en dan 38 + 3 = 41
28 + 2 en dan 30 + 11 = 41 (of 30 + 10 en dan 40 + 1 = 41)
28 + 12 en dan 40 + 1 = 41

Het leek wel een sport te worden om verschillende strategieën te verzinnen. Ze snapten in ieder geval wat de bedoeling was. Daarom gaf ik iedereen een blaadje met opdrachten waar bovenaan stond: leg hieronder uit hoe je het in je hoofd hebt gedaan. Toen het lesuur was afgelopen verlieten de leerlingen het lokaal op één na. 'Mevrouw, mag ik u iets vragen? Bent u misschien psychiater?'
Nu keek ik verbaasd. 'Omdat u in ons hoofd wilt kijken.'
Er volgde nog een tweede les en ik heb al hun werk geanalyseerd en ik was verrast te zien welke strategieën er allemaal gebruikt waren naast het cijferend (hoofd) rekenen.
17 + 19 =

Ik doe 17+20 = 37 37-1 = 36	19+1 = 20 + 16 = 36	40 − 4 = 36

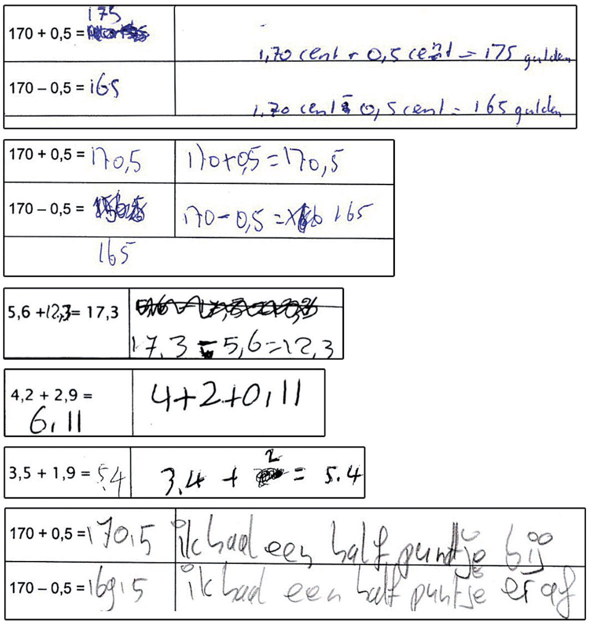
figuur 1

18 leerlingen hadden dit goed gedaan, twee leerlingen niet.
56 + ... = 173

173 - 56 = 117 13-6 = 7 en ~~7~~-6 = 1
56 + 4 + 113
120+56 = 176 − 3 = 173
20+100 = 120+[illegible]+13 = 53 = 133
100+56 = 156+10 = 166+7 = 173
173-50 = 123 en 123-6 = 117

figuur 2

Deze leerlingen vonden allemaal het goede antwoord. Kun je hun manier van denken volgen? Dit soort opdrachten werden door bijna alle leerlingen goed gemaakt, maar meer dan de helft van de leerlingen had problemen met kommagetallen. Hiernaast een selectie van foute en goede antwoorden.



figuur 3

'Ze kunnen niet rekenen', hadden de docenten van deze leerlingen gezegd. Maar ze zagen nu wat de leerlingen wel konden en dat verbaasde hen. De conclusie was: rekenen kunnen ze eigenlijk best goed, er moet nu gewerkt worden aan het begrip kommagetallen, zowel in de avo-vakken als in de beroepsgerichte vakken.

2022

Toen ik dit artikel schreef dacht ik aan de leerlingen van nu. Velen hebben tijdens het online werken achterstanden opgelopen en het is voor hen moeilijk om weer verder te gaan, ook omdat ze weer hele dagen lessen volgen op school wat ze niet meer gewend zijn. Het zou goed zijn om bij een bepaald onderwerp hen de gelegenheid te geven om te laten zien wat ze al wel kunnen en neem dat als uitgangspunt om ze weer 'op de rails' te zetten.

Noten

[1] Kemme, S.L. (2001). WINST voor het VMBO. *Nieuwe Wiskrant, 21*(1), pp. 19-21. *https://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/211/211september_kemme.pdf*

[2] Kemme, S.L. & Hoogland, K. (2001). Opbrengsten van het project VMBO-Aanloop. *Nieuwe Wiskrant,* 21(2), pp. 27-31. *https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4479.pdf*

[3] Abels, M., Jonker, V., Rooijen, J. van & Wijers, M. (2003). WINST voor het VMBO. *Nieuwe Wiskrant, 23*(1), pp. 13-18. *https://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/231/231september_abels-jonker-rooijen-wijers.pdf*

Over de auteur

Mieke Abels is jarenlang docent wiskunde geweest in het vo. Ze is betrokken geweest bij verschillende ontwikkel- en onderzoeksprojecten voor rekenen/wiskunde. Ook na haar pensioen blijft ze actief bij het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.J.Abels@uu.nl*

Annemiek van Leendert

Punt voor punt op weg naar beter wiskundeonderwijs voor braillelezers

Lees eens een complexe formule aan iemand voor: dat geeft een beetje een beeld van hoe leerlingen die een visuele beperking hebben en in braille lezen wiskunde ervaren.

Voorlezen en uit het hoofd berekenen

Dit artikel gaat over het verbeteren van het wiskundeonderwijs voor braillelezers. Ik wil beginnen met Albert Pomper aan je voor te stellen. Albert werd in 1862 in Sneek geboren. Op zijn zesde werd hij, ten gevolge van een ongeval in zijn woonplaats, blind. Op zijn zevende verhuisde hij naar het Instituut voor Onderwijs van Blinden in Amsterdam. Albert had veel interesse voor wiskunde en mocht daarom na schooltijd wiskundelessen volgen. Het lesmateriaal moest natuurlijk aangepast worden. De opdrachten in algebra werden omgezet in braille. Voor het tekenen van meetkundige figuren werd een met leer overtrokken plank gebruikt. Daarop werd een vel papier gelegd en werd met een pen, of een ander voorwerp met een scherpe punt, een tekening gemaakt. Zo werden de lijnen voelbaar. In 1880 haalde Albert, op 18-jarige leeftijd, zijn LO-akte voor wiskunde. Hij wilde verder met wiskunde maar dat was eigenlijk een onmogelijke missie omdat de wiskundige braillenotatie nog in de kinderschoenen stond.

Het was een groot geluk dat hij in contact kwam met dr. A.J. van Pesch, hoogleraar wiskunde aan de Gemeentelijke Universiteit. Dr. van Pesch bereidde hem met veel enthousiasme voor op de examens voor de MO-akten. Hij las noodgedwongen heel veel voor aan Albert, omdat er in die tijd nog geen wiskundige braillenotatie was voor differentiaalrekening, integraalrekening en bolmeetkunde. Albert heeft bijna alle berekeningen uit zijn hoofd moeten doen. Dat is een enorme prestatie. Ik zou graag nog even met hen meekijken. Hoe legde dr. Van Pesch deze ingewikkelde materie uit? En wat was zijn motivatie om zich zo in te zetten voor deze leerling? In 1884 behaalde Albert de akte M.O. K1 en 1888 de akte M.O. K5. Deze akten zijn te vergelijken met de huidige tweede- en eerstegraadsopleidingen. Hij was nu bevoegd om wiskundeles te geven.

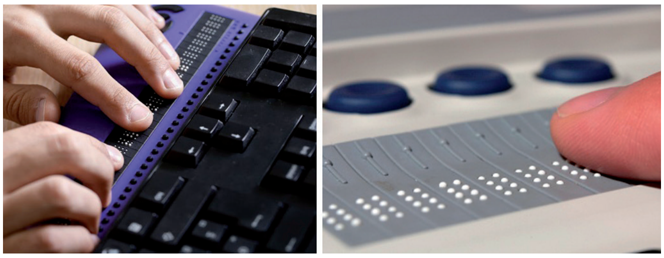
Betere hulpmiddelen

We zijn nu ruim honderd jaar verder. De hulpmiddelen zijn sterk verbeterd. Het is mogelijk om ook ingewikkelde wiskundige expressies in braille weer te geven. Grafieken kunnen vrij eenvoudig voelbaar en zelfs hoorbaar gemaakt worden. Braillelezers kunnen volop gebruik maken van 3D modellen. Wat zou ik ze graag Albert en dr. Van Pesch laten zien! Toch slaagt ook nu, ondanks de technologische ontwikkelingen, slechts een enkele braillelezer erin om zijn wiskundige talenten goed te ontwikkelen. Dat is ontzettend jammer en ik werk er al geruime tijd aan om dit te veranderen als ambulant begeleider en de laatste jaren met een promotieonderzoek.[2] De hoofdvraag van mijn onderzoek was hoe we braillelezers kunnen helpen bij het lezen en begrijpen van wiskundige expressies. Ik heb deze vraag vanuit verschillende invalshoeken benaderd, waarbij de nadruk lag op (1) onderzoek naar tactiele waarneming, (2) professionalisering van wiskundedocenten en (3) de representatie van wiskundige expressies in braille. Het is onmogelijk om in dit artikel mijn hele onderzoek te bespreken, en daarom beperk ik me tot een aantal interessante bevindingen. Daarvoor is het wel nodig dat ik je eerst iets vertel over het lezen in braille.

Lezen in braille

Braille is een schrift dat bestaat uit voelbare puntjes die met de vingertoppen gelezen kunnen worden. Het bestaat uit een systeem van zes (⠿) of acht puntjes (⣿). De letters van ons alfabet worden in braille altijd op dezelfde manier weergeven. Dat geldt echter niet voor cijfers, symbolen en bewerkingen in de wiskunde. Bijna elk land heeft zijn eigen 6-punts en/of 8-punts braillenotatie voor wiskunde. In 6-punts braille zijn slechts 64 (inclusief de spatie) combinaties mogelijk en kunnen dus niet alle letters, cijfers en symbolen als één braillekarakter worden weergegeven. Er wordt daarom vaak gebruik gemaakt van zogenaamde voortekens, bijvoorbeeld een cijferteken dat aangeeft dat

het volgende braillekarakter een cijfer is. Het getal 3 kan dan weergegeven worden als ⠼⠉ (cijferteken plus letter c).
In 8-punts braille wordt nauwelijks met voortekens gewerkt omdat meer combinaties mogelijk zijn. Het cijfer 3 wordt dan, bijvoorbeeld, weergegeven als ⠹ of ⢉
In de tijd van Albert Pomper werd braille op papier gedrukt. Dat wordt nog steeds veel gedaan. Het is tegenwoordig ook mogelijk om digitale informatie in braille te lezen. De braillelezer leest de tekst dan in braille op een zogenaamde brailleleesregel die aan de computer gekoppeld is, zie figuur 1. In Nederland hebben alle braillelezers die op de middelbare school zitten een laptop met brailleleesregel.



figuur 1 Lezen op de brailleleesregel. De tekst op het scherm wordt vertaald in braillepuntjes.

Je zult je wellicht afvragen wat nu het probleem is voor braillelezers, naast de ballast die veroorzaakt wordt door het gebrek aan goede notatieafspraken. Om daar meer inzicht in te krijgen, wil ik je vragen om het volgende experiment te doen.

Experiment

Pak een vel ondoorschijnend papier en knip uit het midden een kleine rechthoek waarin ten hoogste drie letters, cijfers of symbolen passen.
Leg dit blad op een opgavenblad voor wiskunde.
Lees door het kijkvenster en maak de opdrachten.
Wat zijn je ervaringen?

Wiskundige expressies in braille

Je moet je voorstellen dat een braillelezer zijn vingertoppen van links naar rechts over de brailleleesregel verplaatst bij het lezen van een expressie of vergelijking. De braillelezer moet elk braillekarakter afzonderlijk lezen, dat karakter ontcijferen en gelijktijdig proberen een overzicht over de expressie op te bouwen. Als je het hiervoor beschreven experiment hebt gedaan, zul je begrijpen dat dat niet eenvoudig is.
Een goedziende leerling kan meerdere letters, cijfers en symbolen tegelijkertijd waarnemen. Dat helpt bij het verkrijgen van overzicht. Een extra hulp is dat de 'gewone' wiskundige notatie, heel geraffineerd in elkaar zit. Een goedziende leerling zal direct – en waarschijnlijk al op enige afstand – de structuur van de expressie $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ herkennen. Voor braillelezers is dat niet mogelijk omdat ze door een klein venster – met de vingertoppen – waarnemen en braille een lineaire notatie is. $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ wordt in de huidige Nederlandse 8-punts wiskundige braillenotatie weergegeven als ⠭⡬⠣⠌⠎⠟⠗⠞⠦⠣⠴ (oftewel x^2/sqrt(2)). Je ziet dat het, ook visueel, heel lastig is om de verschillende braillekarakters van elkaar te onderscheiden.

Spraak

Tot nu hebben we het alleen over braille gehad. In de praktijk komt het echter steeds vaker voor dat braillelezers de laptop ook gebruiken voor tekst-naar-spraak output. De schermlezer leest de expressie dan hardop voor. Dit is een heel specifieke manier van 'lezen'. In mijn onderzoek heb ik de schermlezerssoftware aangepast, omdat de expressies vaak niet volledig en niet op een wiskundige manier werden gelezen. Ik kom daar later nog op terug. Het voordeel van spraak boven braille is het tempo, omdat gesproken taal veel sneller kan worden begrepen dan braillekarakters. Het voordeel van braille is dat je meer controle kunt uitoefenen op het lezen zelf. Je kunt bijvoorbeeld gemakkelijker stukjes tekst selecteren.

Onderzoek

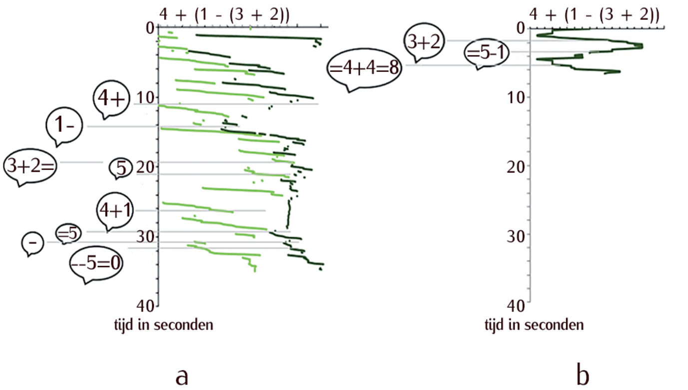
Mijn onderzoek naar het verbeteren van het lezen en begrijpen van wiskundige expressies in braille bestond uit drie onderdelen: 1 tactiele waarneming, 2 professionalisering van docenten en 3 verschillende representaties in braille.

1 Tactiele waarneming

Braillelezers lezen braillekarakters met hun vingertoppen. We noemen dat 'tactiel' waarnemen. Ik heb met behulp van finger-tracking- en eye-tracking-technologie geprobeerd om meer inzicht te krijgen in hoe respectie-

>

velijk braillelezers en goedziende leerlingen wiskundige expressies lezen. De veronderstelling was dat kennis over hoe goedziende leerlingen wiskundige expressies lezen en begrijpen aanwijzingen geven voor verbeteringen in de tactiele leesstrategieën van braillelezers.
De resultaten worden weergegeven in scanpaden. In figuur 2a zie je het tactiele scanpad van een braillelezer, in figuur 2b het visuele scanpad van een goedziende leerling. Op de horizontale as staat de expressie 4 + (1 – (3 + 2)), op de verticale as de tijd in seconden. In de tekstballonnen staat de tekst die de leerling heeft uitgesproken. In het tactiele scanpad zijn alleen de vingerbewegingen van links naar rechts weergegeven omdat braillelezers alleen van links naar rechts lezen. Lichtgroen geeft de vingerbeweging van de linker- donkergroen de vingerbeweging van de rechter-wijsvinger weer. Wanneer je beide figuren bekijkt valt een aantal zaken op. Figuur 2a is een stuk drukker dan figuur 2b. Dat komt omdat de braillelezer met twee vingers leest en alle stukjes van de expressie meerdere malen leest. De braillelezer heeft tien seconden nodig om een overzicht over de expressie te krijgen. Het berekenen kost ook meer tijd. De goedziende leerling daarentegen, lijkt direct een overzicht over de expressie te hebben. Hij fixeert niet op de gesloten haakjes. Dat is ook niet nodig omdat die, door de heel bijzondere vorm, al goed te identificeren zijn in zijn buitenste rand van zijn gezichtsveld.



figuur 2 Scanpad van een braillelezer (a) en van een goedziende leerling (b). De lichtgroene kleur stelt de beweging van de linkerwijsvinger, de donkergroene kleur de beweging van de rechterwijsvinger voor.

Individuele lessen
We hebben in dit deelonderzoek gezien dat de braillelezers veel minder gemakkelijk de kenmerken van de structuur van de expressie oppikten dan de goedziende leerlingen. Blijkbaar is dat iets wat ze, als ze daar niet heel specifiek in getraind worden, niet goed doen. We hebben daarom een lessenserie van vijf individuele lessen ontwikkeld waarin de braillelezers leerden om, met behulp van heel specifieke vingerbewegingen, meer vat te krijgen op de wiskundige structuur. Drie braillelezers namen deel aan de lessen. Ze leerden om bij de start een zogenaamde conjuncte leesstijl te gebruiken. Bij deze leestijl, die heel geschikt is voor precies lezen, verplaatsen de vingertoppen van beide wijsvingers zich heel dicht naast elkaar over de brailleleesregel. We zien deze leesstijl in figuur 2a terug. De lichtgroene en donker-groene lijnen liggen dan heel dicht boven elkaar. Vervolgens kan het handig zijn, afhankelijk van de complexiteit van de expressie en het niveau van de braillelezer, om een meer disjuncte leesstijl te gebruiken. In dat geval verplaatsen de vingertoppen van beide wijsvingers zich wat verder uit elkaar. Dat maakt het mogelijk om verschillende delen van een expressie of vergelijking – ook wanneer deze delen relatief ver uit elkaar staan – met elkaar te vergelijken of te verbinden. Een braillelezer kan op die manier, bijvoorbeeld, heel goed de linker- en rechterkant van een vergelijking met elkaar vergelijken. In figuur 2a zien we deze leesstijl niet terug, maar dat lijkt in dit geval ook niet erg zinvol. Wanneer er haakjes staan in een expressie, kan het ook handig zijn om met de linkerwijsvinger het haakje openen vast te houden en met de andere wijsvinger verder te lezen tot het haakje sluiten. Dit zie je, in een scanpad, terug in verticale lijnen. Onze braillelezer maakte daar nauwelijks gebruik van.
Het resultaat van de training was dat de braillelezers gemiddeld meer dan 30% tijdsbesparing hadden voor het berekenen en oplossen van de geselecteerde expressies en vergelijkingen. Dat zou voor 'ons' voorbeeld een reductie van 11 seconden of meer betekenen. Een ander resultaat was dat de braillelezers de kenmerken van de wiskundige structuur gemakkelijker oppikten.

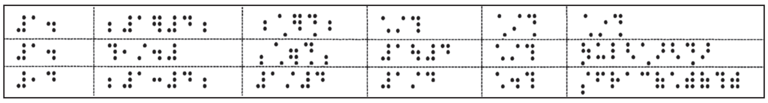
2 Professionaliseringscursus voor docenten

Er zijn nu meer en betere hulpmiddelen dan in de tijd van Albert Pomper. De docent moet de braillelezer helpen om de hulpmiddelen, brailleleesregel, spraak, reliëfpapier, 'manipulatives', et cetera, zo goed mogelijk in te zetten. Dat is niet gemakkelijk en de docenten hebben in hun opleiding daar vaak weinig specifieke scholing in gehad. We hebben daarom een professionaliseringscursus ontwikkeld waarbij tactiele en auditieve informatieverwerking centraal staat. Vijf wiskundedocenten die werken op een school voor leerlingen met een visuele beperking, namen deel aan de cursus. Er was veel aandacht voor wat er zich in hun lessen afspeelde. Hoe 'weet' je of een braillelezer een wiskundige fout maakt of vooral problemen heeft met het lezen in braille? Het modelleren van nieuwe lesmethoden werd afgewisseld met activiteiten waarbij de docenten zelf met deze methoden aan de slag konden. We hoopten dat dat hen zou stimuleren om de nieuwe kennis en vaardigheden

daadwerkelijk toe te passen in hun lessen. Onze bevindingen laten zien dat de docenten, na de cursus, beter begrijpen hoe braillelezers leren en meer mogelijkheden zien voor ondersteuning. Zij lijken zich ook meer verantwoordelijk te voelen voor wat betreft het gebruik van de hulpmiddelen bij wiskunde. Voor de start van de cursus hebben we ook het spraakwoordenboek van de schermlezerssoftware van de braillelezers uitgebreid met een wiskundig vocabulaire, en zijn ook andere instellingen van de schermlezerssoftware aangepast. Hierdoor kan elk element van de expressie uitgesproken worden, en meestal in de juiste 'wiskundetaal' (dus 'x^2' als 'x kwadraat').
We wilden natuurlijk ook weten of de cursus voor de docenten in combinatie met de aanpassingen van de schermlezerssoftware een positief effect hadden op de leerprestaties van de braillelezers. De meeste braillelezers, allemaal in de leeftijd van 13 – 18 jaar, vonden dat het wiskundespraakwoordenboek hen hielp om de expressies beter te begrijpen. De overige bevindingen waren wat teleurstellend. De braillelezers hadden moeite om de wiskundige structuur van een expressie te herkennen als deze hardop werd voorgelezen. Ze hadden veel moeite met het ontcijferen van de individuele braillekarakters in een expressie. Dat betekent dat ze al problemen hadden bij het begin van het oplossingsproces. De braillelezers vonden dat zelf ook een probleem, omdat ze – dat zijn min of meer hun eigen woorden – een complexe expressie niet kunnen lezen en begrijpen als ze geen gebruik maken van braille. Ze vonden spraak dan tekortschieten.

3 Representaties van wiskundige expressies in braille

In de tijd van Albert Pomper stond de wiskundige braillenotatie nog in de kinderschoenen. Inmiddels zijn we veel verder en worden over de hele wereld verschillende wiskundige braillenotaties gebruikt. Dat bemoeilijkt het samenwerken en ik ben daarom voorstander van een (meer) universele wiskundige braillenotatie. Om een eerste stap te kunnen zetten in die richting heb ik de wiskundige braillenotaties van 16 (13 Europese en 3 niet-Europese) landen onderzocht. Ik vond 18 verschillende representaties voor de breuk $\frac{1}{4}$, zie figuur 3. Ik vond het interessant om te ontdekken dat er notaties zijn die signaaltekens, voor bijvoorbeeld een breuk, gebruiken. Een voorbeeld is ⠹⠂ ⠌⠲⠼ (in ASCII-karakters:?1/4#). Het teken ⠹ betekent zoiets als 'er komt een breuk aan'. Dat helpt bij het verkrijgen van overzicht. In het algemeen kun je zeggen dat expressies zo omgezet worden in braille dat ze óf de braillelezers zelf ondersteunen bij wiskunde óf de communicatie tussen de braillelezers en goedzienden ondersteunen. Een notatie die erg lijkt op Excel, bijvoorbeeld, helpt de communicatie omdat de meeste goedzienden met deze notatie bekend zijn. De vraag is of er een notatie (te ontwikkelen) is die allebei doet. Als dat niet zo is, waar zou je dan voor moeten kiezen?



figuur 3 Verschillende manieren om $\frac{1}{4}$ weer te geven in braille

Tot slot

We hebben, sinds Albert Pomper zijn wiskundestudie voltooide, een flinke stap gezet in de ontwikkeling van de hulpmiddelen voor braillelezers. Je zou denken dat daarmee 'alle problemen zijn opgelost', maar dat is beslist niet het geval. Dat laat mijn onderzoek overduidelijk zien. Het leren en onderwijzen van braillelezers worden beïnvloed door de hulpmiddelen die worden ingezet en door hoe die worden ingezet. Het is van belang om die relatie heel nauwkeurig te onderzoeken en te verbeteren. Ik heb daaraan met mijn onderzoek een bijdrage geleverd en ik hoop hieraan te kunnen blijven werken.

Noten

[1] Naafs-Loman, I. (2018). Albert Pomper 1862-1917. *In 11 en 30, Mededelingenblad van de Nederlandse Genealogische Vereniging, Afdeling Friesland* 23/2.

[2] Van Leendert, A.-M.J.M (2021). Improving reading and comprehending mathematical expressions in braille [doctoral dissertation]. Utrecht University

[3] Zie ook: Het FIzier gericht op... wiskundige expressies voor braille-afhankelijke leerlingen, *Euclides* 91-7

Ik nodig je van harte uit voor een online meetup op 20 september 2022, van 19.30 – 21.00. Ik zal in deze bijeenkomst dieper ingaan op mijn onderzoek en eventuele vragen beantwoorden. Je kunt je aanmelden via mijn e-mailadres.

Over de auteur

Annemiek van Leendert is werkzaam bij Visio, een organisatie die zich inzet voor onderwijs en zorg aan mensen met een visuele beperking. E-mailadres: *annemiekvanleendert@visio.org*. Haar promotieonderzoek werd begeleid door Michiel Doorman en Paul Drijvers van het Freudenthal Instituut en Johan Pel en Hans van der Steen van het Erasmus MC.

Sensemath, app voor leerlingen met een visuele beperking

Annemiek van Leendert

Representaties van functies

Functies spelen een belangrijke rol in het wiskundeonderwijs. We kunnen ze onderzoeken door te kijken naar de verschillende representaties, zoals tabel, grafiek en functievoorschrift, en de samenhang daartussen. Elke representatie heeft zijn eigen voordelen en beperkingen die samenhangen met het soort kenmerk dat je naar voren wilt brengen. Een grafiek is bijvoorbeeld heel geschikt om het dynamische karakter van een functie weer te geven. Voor lokale kenmerken, die met name gericht zijn op de connectie tussen de onafhankelijke en afhankelijke variabele, zijn een tabel en functievoorschrift meer geschikt. Het nadeel van een tabel is dat vaak maar een beperkt deel van het domein weergegeven kan worden.

Tactiele grafiek

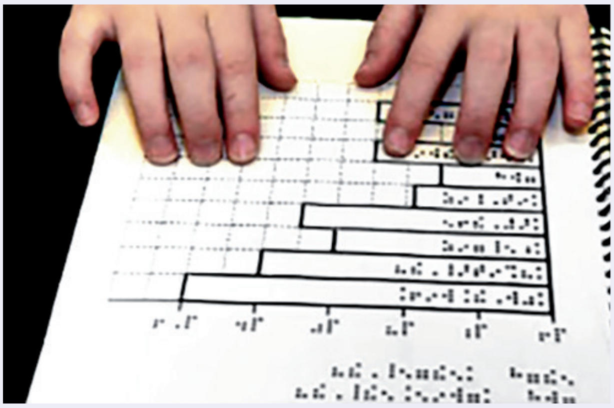
Voor leerlingen die goed kunnen zien geeft een grafiek in één oogopslag een overzicht van het verloop van een functie. Dat ligt anders voor leerlingen die blind of nagenoeg blind zijn. Zij maken gebruik van tactiele grafieken (zie figuur). De leerling onderzoekt zo'n grafiek met zijn vingertoppen en bouwt zo een overzicht op over het verloop van de functie. Je kunt je voorstellen dat dat veel tijd kost en veel vraagt van het werkgeheugen van de leerling. De meeste leerlingen zullen de grafiek ook pas echt goed begrijpen als ze verbale ondersteuning krijgen.

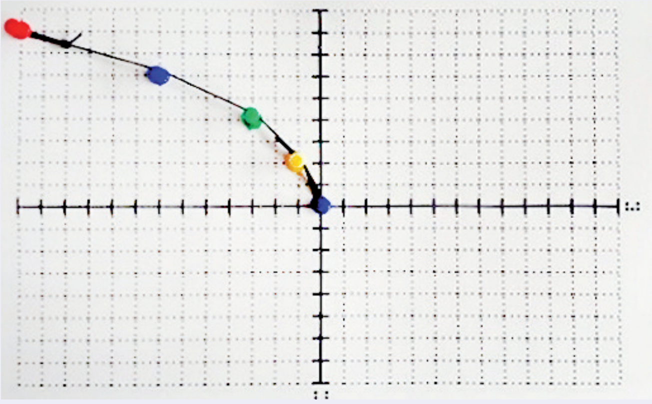
'...Als je nu de lijn omhoog volgt, voel je dat de grafiek steeds vlakker gaat lopen. Dat is een kenmerk van een wortelfunctie ... .'

Hoorbare grafiek

Sinds kort kunnen leerlingen ook gebruik maken van SenseMath. Deze app is ontwikkeld door Koninklijke Visio en het internetbureau Q42. SenseMath maakt grafieken hoorbaar. Ze is speciaal ontwikkeld voor leerlingen met een visuele beperking maar ook toegankelijk voor goedziende leerlingen. Op het scherm wordt, tegelijkertijd, ook een visuele voorstelling van de grafiek gegeven. Als de grafiek daalt of stijgt, wordt de toon respectievelijk lager of hoger. De coördinaten van, bijvoorbeeld, nulpunten kunnen uitgesproken worden. Wanneer een leerling gebruik maakt van een hoorbare grafiek moet hij, net als bij een tactiele grafiek, ook een overzicht over het verloop van de functie opbouwen. Een belangrijk voordeel van een hoorbare boven een tactiele grafiek is dat het opbouwen veel sneller gaat. De tactiele grafiek lijkt daarentegen meer geschikt voor het actief onderzoeken van de functie. Ik raad je aan om SenseMath eens uit te proberen. Zou deze app ook een meerwaarde hebben voor goedziende leerlingen?

SenseMath is gemaakt voor iOS apparaten. Deze app is gratis en te vinden in de App Store.





Tactiele grafieken

Verschenen

Kan dat geen toeval zijn? en Wiskundeplezier

Titel: Kan dat geen toeval zijn?
Ondertitel: Een kritische blik op statistische bewijsvoering
Auteurs: Ronald Meester en Klaas Slooten
Uitgever: Amsterdam University Press
ISBN: 9789463725088
Prijs: € 24,99
(192 pagina's; paperback)

Van de uitgever:

Statistiek is actueler dan ooit. Tal van beslissingen hangen van statistische overwegingen af: denk maar aan de coronacrisis of aan beslissingen over het goedkeuren van medicijnen en andere producten. Als iets statistisch bewezen is verklaard, weten we dan zeker dat het waar is? Helaas is dat niet het geval. Hoe, en vooral waarom, werkt statistiek eigenlijk? Wat kunnen we van statistiek wel maar ook niet verwachten? *Kan dat geen toeval zijn?* is geen leerboek dat de lezer statistische toetsen uitlegt, maar gaat in op wat daar vóór komt: de filosofie achter de statistiek. Moet je eigenlijk wel toetsen, of zijn er andere manieren om tegen statistiek aan te kijken?

Ronald Meester en Klaas Slooten laten met behulp van uiteenlopende voorbeelden – van rechtszaken tot theoretische natuurkunde – diverse visies op statistiek zien en beargumenteren wat volgens hen de beste zienswijze is. Dit boek is bedoeld voor iedereen die op de een of andere manier te maken heeft met, of geïnteresseerd is in statistisch bewijs: wetenschappelijke onderzoekers, studenten, docenten, wiskundigen, scholieren, filosofen, juristen, managers, en vast nog vele anderen.

Ronald Meester is hoogleraar waarschijnlijkheidsrekening, heeft ruime ervaring in de theorie, praktijk en filosofie van modellen, en heeft hierin breed gepubliceerd, ook voor een breed publiek. Klaas Slooten is als statisticus en DNA-verwantschapsdeskundige verbonden aan het Nederlands Forensisch Instituut en is tevens bijzonder hoogleraar forensische wiskunde aan de Vrije Universiteit.

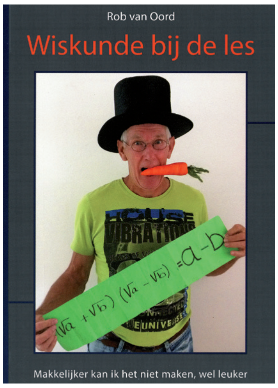
Titel: Wiskundeplezier
Ondertitel: Verander je mindset door te durven, doen én begrijpen
Auteur: Erik van Haren
Uitgever: Koninklijke van Gorcum, Assen
ISBN: 9789023258261
Prijs: € 29,50 (240 pagina's; paperback)

Van de uitgever:

In dit boek neemt Erik van Haren, dé wiskundepsycholoog, je mee in een reis door het brein. De verbindingen die hij legt tussen pedagogiek, psychologie en (vak)didactiek zijn uniek. Het zet je aan het denken en zal je een vernieuwde blik geven op het leerproces. Een leerproces waarin de docent leidt vanuit verbinding en durft te erkennen dat zijn onderwijs heeft gefaald wanneer hij een leerling met een onvoldoende moet beoordelen. Wiskundeplezier geeft handvatten aan iedereen die zichzelf maar vooral zijn/haar leerlingen wil helpen ontwikkelen.
Erik vat de psychologie die het leren bevordert samen in de drie-eenheid durven-doen-begrijpen, zijn Mathplay-methode die leidt tot Wiskundeplezier. Wiskundeplezier is een mindset, waarmee je je bewust wordt van je eigen denkkracht en waardoor je zelfvertrouwen groeit. De Mathplay-methode geeft je op een begrijpelijke manier waardevolle inzichten die direct toepasbaar zijn. Durf nieuwsgierig op onderzoek uit te gaan en angsten te overwinnen door buiten je comfortzone te treden en vergroot hiermee je zelfvertrouwen. Doe ervaring op en laat je verwonderen wanneer je spelenderwijs gemotiveerd steeds bekwamer wordt. Leer je overtuigingen en emoties begrijpen en ontdek jouw potentieel en de kracht van Wiskundeplezier. Deze methode is gemakkelijk over te brengen en voelt krachtig aan, als een manier om een grote verscheidenheid aan problemen van kinderen in de wiskundeles 'op te lossen'. Er werken al meer dan 2200 scholen met de Mathplay-methode en rekenspellen!

Verschenen

Wiskunde bij de les



Titel: Wiskunde bij de les
Ondertitel: Makkelijker kan ik het niet maken, wel leuker
Auteur: Rob van Oord
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam
ISBN: 9789050411912
Prijs: € 20,00
(128 pagina's; paperback)

Van de uitgever:

Rob van Oord was van 1974 tot 2014 een markante wiskundeleraar op het Coenecoop College. Gewaardeerd door leerlingen om zijn originele aanpak, de liefde voor zijn vak en soms zeer aparte lessen. Collega's kennen hem van workshops bij de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nationale Wiskunde Dagen, waarbij hij steeds weer wist te verrassen met originele lesideeën die ook nog eens heel toepasbaar waren. Ook na zijn pensioen is hij op beide terreinen actief gebleven. De weerslag van die veel meer dan veertig jaar liefde voor zijn vak vind je terug in dit boek.

Rob zegt er zelf over:

'Tijdens mijn loopbaan heb ik elke mogelijkheid aangegrepen om mijn lessen uitdagender, spannender en leuker te maken. Een blije leerling is gemotiveerder. En daarvan word ik ook weer enthousiast. Ik las iets van een collega, zag een mooi voorbeeld op een lezing, of liep zelf tegen iets bijzonders aan. Ik hoorde over bijzondere werkvormen. Vaak liet ik leerlingen in groepjes werken of koos ik een wedstrijdvorm. Waar mogelijk deed ik de lesstof een concreet jasje aan. Eerst maar eens tekenen, knippen en vouwen.
In workshops heb ik mijn ervaringen gedeeld met collega's. Ik heb mijn ideeën in dit boek bij elkaar gezet. Volgens mij bestond zo'n boek nog niet. Iedereen kan op zijn of haar eigen manier gebruik maken van deze voorbeelden. Op de bijbehorende website kunnen naar hartenlust werkbladen en kant-en-klare opgavenseries, sheets om groepjes mee in te delen, varianten op de thema's, worden gedownload. Als je in een les centraal start met een boeiende werkvorm dan houd je de leerlingen bij de les.
Er zijn ook voorbeelden die niet direct over de lesstof van het curriculum gaan maar over wiskunde die je bij de les kunt inzetten, als verrijking of verdieping. En dan zijn er de speciale dagen in het jaar die om een aparte les vragen, zoals 5-12, 14-2, 14-3, de laatste lessen voor de ... .
Ik daag collega's uit om *Wiskunde bij de les* te gaan uitproberen. Het levert mooie momenten op. En, waar je het vooral voor doet, leerlingen houden plezier in je vak. Maar wat vonden mijn leerlingen er zelf van? Ik laat enkele van hen aan het woord.'

Met toestemming van uitgever Fred Drissen en Rob van Oord mag in *Euclides* een van de lesideeën integraal worden gepubliceerd.

Gaudí en magische vierkanten

Als je in Barcelona de Sagrada Familia bezoekt ben je als wiskundige natuurlijk geïnteresseerd in de wiskunde die Gaudí gebruikte voor zijn ontwerp. Bijvoorbeeld de omgekeerde kettinglijn die hij voor veel van zijn bogen gebruikte. Daarnaast is het een mooie opdracht om

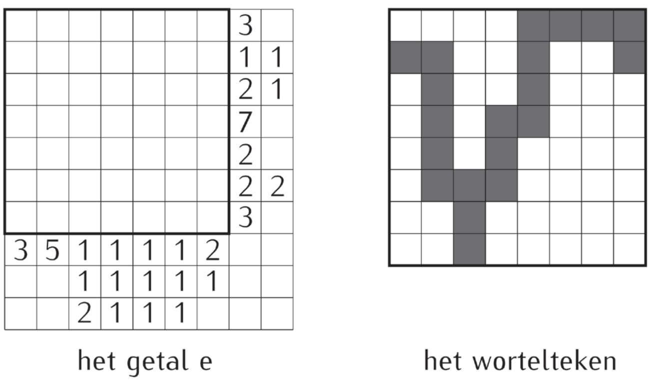
op zoek te gaan naar de magische vierkanten die je ziet op de afbeeldingen. Deze zijn ergens te vinden, maar waar? En waarom is 33 de som die bij deze magische vierkanten een rol speelt?

Japanse puzzels

Rob van Oord

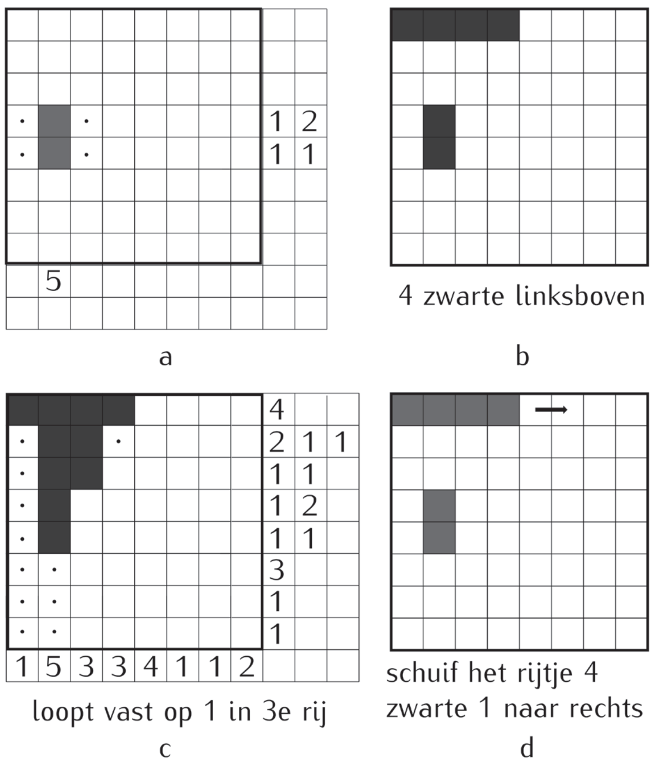
In deze les probeer ik leerlingen met een nieuwe uitdaging te motiveren door ze te laten puzzelen en redeneren buiten de lesstof om. Een bekend soort puzzel bestaat uit een vierkant rooster met langs de randen een of meer cijfers. Deze cijfers geven aan hoeveel vakjes aaneengesloten zwart gemaakt moeten worden. Tussen elk van de vakkenrijtjes in een rij of kolom moet minstens één hokje open blijven. In het voorbeeld betekent 3 naast de bovenste rij dat in de bovenste rij (van 7 hokjes) ergens 3 hokjes tegen elkaar zwart gemaakt moeten worden. In de derde rij (2 1) moeten van links naar rechts eerst ergens 2 hokjes tegen elkaar zwart worden en dan met minstens 1 open hokje ertussen nog 1 hokje zwart. Door redeneren kun je de oplossing van zo'n puzzel te weten komen.
Zet de getallen van het schema van het getal e langs een vierkant met ruitjes en probeer het op te lossen, zie figuur 1. Zie ook de bijlage.[1] Handige tips voor leerlingen hoe te beginnen lees je hieronder.

De zogeheten Japanse puzzels (ook wel nonopuzzels, of logische puzzels genoemd) staan in puzzelboekjes en worden aangeboden in roosters van 20 bij 20 of 25 bij 25 hokjes. Het oplossen van dergelijke grote puzzels kost veel tijd. Daarom maakte ik varianten in kleinere roosterblokken (van 7 bij 7 of 8 bij 8) zo maar als tussendoortje of grappige introductie van een nieuw onderwerp. Na het vullen van de vakjes moet je soms een beetje fantasie hebben om te zien wat er wordt afgebeeld. Het getal e en het wortelteken zijn goed te herkennen.



figuur 1

Bij het zelf ontwerpen moet je altijd controleren of de oplossing uniek is en tot jouw ontwerp leidt. Dit doen we nu bij mijn ontwerp van het wortelteken, zie figuur 1. Maak een 8 bij 8 vierkant op een ruitjesblad en zet bij de rijen en kolommen de getallen die bij de zwart gemaakte hokjes van het wortelteken horen naast en onder het vierkant, zie de bijlage.[1]
Bij het oplossen kijk je eerst naar grote getallen of veel getallen in eenzelfde rij/kolom, want daar moeten ook nog open vakjes tussen. Met de 5 van de 2^e kolom vind je in eerste instantie dat de twee vakjes in het midden van de 2^e kolom zwart moeten. Snap je waarom?
Het is handig om in vakjes waarvan je zeker weet dat die leeg blijven een stip te zetten, zie figuur 2a. De 2 1 1 van de 2^e rij brengen je niet dichter bij de oplossing. Probeer de puzzel verder op te lossen. Waar loop je tegenaan? Ik zou verder gaan met een van de twee cijfers 4. De 4 in de 5^e kolom brengt je niet verder. Nu de 4 in de bovenste rij. Als je begint met de 4 meest linkse hokjes van de bovenste rij zwart te maken, zie figuur 2b, en kijkt hoe het dan verder gaat, loop je snel vast. Probeer dit maar, zie figuur 2c. Idem als je dit viertal zwarte hokjes telkens een



figuur 2

hokje verder naar rechts zet, totdat het viertal helemaal rechts staat, dan kom je wel verder. Om te helpen kun je de leerlingen zeggen dat het vakje rechtsboven zwart moet zijn. Dan rolt de oplossing er zo uit. De oplossing is dus uniek. Dit is wel een lastige hoor!

Ik maakte ooit: kaars en kruis (kerstsfeer), voetballer met bal, wijnglas met fles, enzovoort, zie de bijlage.[1] Bij het ontwerpen moet je erop letten niet te veel 1 erin te gebruiken om ervoor te zorgen dat de oplossing uniek is. Controleer altijd je ontwerp door hem eerst zelf te maken. Ontwerp zelf een puzzel voor je klas.

Noot

[1] *https://www.epsilon-uitgaven.nl/uploads/docs/bijlage-hoofdstuk-9-22-04-12_18-22-11.pdf*

Over de auteur

Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Rob verzorgt al jarenlang workshops op de studiedag van de NVvW en tijdens de Nationale Wiskunde Dagen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Japanse pen en andere verhalen

Gerrit Roorda

Inleiding

Kort geleden verzorgde ik een nascholing voor een wiskundesectie. Ik begon de bijeenkomst met een kennismakingsronde waarin ik de deelnemende wiskundedocenten vroeg iets te vertellen over hun 'beroepsverhaal'. Wat een 'beroepsverhaal' is en waarom ik voor deze vorm koos zal ik zo eerst toelichten. Daarna beschrijf ik enkele verhalen die verteld werden. Aan het eind van de ronde, die ongeveer 20 minuten duurde, zat ik enerzijds met een glimlach en anderzijds met tranen in de ogen.

Beroepsverhalen

In maart 2022 bezocht ik in Brugge de Velon/Velov conferentie voor lerarenopleiders in Nederland en Vlaanderen. Een van de lezingen vond ik (en velen met mij) erg inspirerend. Dr. Thom Geurts, gepensioneerd onderzoeker van Inholland in Amsterdam en docent filosofie, sprak in zijn keynote lezing [1], [2] over beroepsethiek en professionele identiteit; voor mij altijd wat grootse en vage begrippen. Zonder de complete lezing te kort te willen doen, in mijn ogen een aanrader voor elke leraar en lerarenopleider, selecteer ik een element dat mij trof. Thom vertelde over zijn zoon die bij een verhuizing tegen de wens van zijn ouders, een grote hoeveelheid prullaria mee wilde nemen naar de frisse kamer in het nieuwe huis. Op de vraag waarom al die dingen meegenomen moesten worden, bleek bij elk voorwerp een verhaal te horen. De voorwerpen representeerden daarmee allerlei waardevolle momenten en situaties. Via de concrete verhalen kan inzicht ontstaan in waarden die voor deze zoon belangrijk waren.
Thom Geurts verbreedde dit voorbeeld naar beroepsverhalen: persoonlijke beroepsverhalen, maar ook beroepsverhalen van anderen kunnen een bron zijn van je beroepsethiek, door Thom Geurts gedefinieerd als de vraag: wat behoor ik (in mijn beroep), redelijkerwijs te doen als ik het beste wil? Dit bracht mij op het idee om in een kennismakingsronde te zoeken naar 'beroepsverhalen' met de vraag: is er een moment/situatie/herinnering/voorwerp dat voor jou staat voor een betekenisvol moment in je wiskundeonderwijs? Uit deze verhalen hoopte ik een beeld te krijgen van ideeën die door docenten uit deze sectie als belangrijk gezien werden.

De Japanse pen

Om de opdracht te concretiseren gaf ik eerst zelf een voorbeeld. De vierkleurenpen op de foto kreeg ik tijdens mijn bezoek aan Japan in 2016, in het kader van een Lesson Study kennismakingsprogramma. De pen werd gebruikt door observatoren in wiskundelessen. Met de kleuren kon je in observatieaantekeningen onderscheid maken tussen bijvoorbeeld uitspraken van leerling A (groen) en B (blauw), input van de docent (rood) en eigen interpretaties (zwart). Nog nooit eerder had ik gezien dat je als observator in een les zo gefocust kon zijn op het leren en denken van leerlingen. Ik was gewend als opleider dat observaties gaan over hoe 'goed' de docent lesgeeft. Dit bracht in mijn denken een verschuiving teweeg van *hoe onderwijs ik iets*, naar *wat gebeurt er eigenlijk in het hoofd van de leerling*. In bredere zin, mijn reis naar Japan heeft veel invloed gehad op mijn denken over wiskundeonderwijs. De pen is een symbool ervan.[3]

figuur 1 de Japanse vierkleurenpen

De verhalen uit de sectie

De vraag lag op tafel in de sectie, het bleef even stil, iedereen dacht na. Toen kwamen verhalen over situaties, herinneringen, voorwerpen of momenten:

'Het moment dat een wiskundedocent zei dat ik niet goed was in wiskunde. Dat was het moment waarop ik dacht: ik zal je laten zien dat ik het wel kan.'

'Het moment dat mijn hoogleraar zei dat wiskunde niet iets voor meisjes was, heeft me geraakt... .'

'Ik heb enige tijd geleden de boeken van Barton aangeschaft. Die hebben gezorgd dat ik weer echt anders aankijk tegen hoe ik wiskunde geef.'

'Zowel op school, in mijn bachelor, als mijn master kreeg ik te horen dat ik zwak was in wiskunde.'

'Het lesgeven over telproblemen, wat in mijn studie nauwelijks aan de orde was geweest, maakte dat ik zelf opeens een inzicht kreeg over hoe dit onderwerp precies in elkaar zit, en hoe ik dit kan uitleggen.'

'Ik was twee jaar lang mentor van een meisje met veel problemen, zowel in de thuissituatie als met wiskunde. Ik kon haar veel persoonlijke aandacht gegeven. Op dit moment zit zij in 3 vwo en ik merk dat ze wiskunde langzamerhand begint te begrijpen en dat ze daardoor zelfvertrouwen krijgt. Als docent kun je het verschil maken.'

De beroepsverhalen van docenten die naar aanleiding van mijn vraag naar voren kwamen, geven een bijzonder inkijkje in dingen die voor deze docenten belangrijk zijn geweest in hun loopbaan als wiskundedocent.

Afsluiting

Enkele verhalen uit de wiskundesectie hadden betrekking op situaties die inzicht gaven in hoe je het beste wiskunde-onderwijs kunt geven. Mooie verhalen die ook anderen kunnen inspireren. Prachtig hoe een docent verwoordt dat zij/hij het verschil kon maken voor een leerling.
De meeste verhalen bleken betrekking te hebben op ervaringen als: 'je kunt het niet', 'wiskunde niet voor jou', wiskunde niet voor meisjes'. De tranen die er soms bijna, of soms helemaal bij kwamen maakten duidelijk dat dit soort 'momenten' veel invloed hadden of hebben gehad. Vanuit de verhalen ontstond zo een mooie verwoording van een aspect van beroepsethiek: 'Ik wil leerlingen altijd positief benaderen, ook als ze wiskunde moeilijk vinden, of er mogelijk niet goed in lijken te zijn'. Een gedachte die hopelijk alle lezers aanspreekt.

Noten

[1] Thom Geurts zelf aan het woord over deze lezing, zie:*https://kuleuven.mediaspace.kaltura.com/media/CONGRES_Keynotespreker_ThomGeurts1nov2021.mov+-+full+2.0/1_03t7po40* NB: de lezing zelf stond bij het ter perse gaan van deze *Euclides* nog niet op de site van het congres: *https://congreslerarenopleiders2022.be/*
[2] zie: *https://www.thomgeurts.nl/*
[3] zie Roorda, G. & Goei, S.L. (2018). Lesson study in Japan. *Euclides 93*(4). 14-17

Over de auteur

Gerrit Roorda is docent wiskundedidactiek bij de eerstegraads lerarenopleidingen van de Universiteit Groningen en NHL-Stenden Hogeschool.
E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*

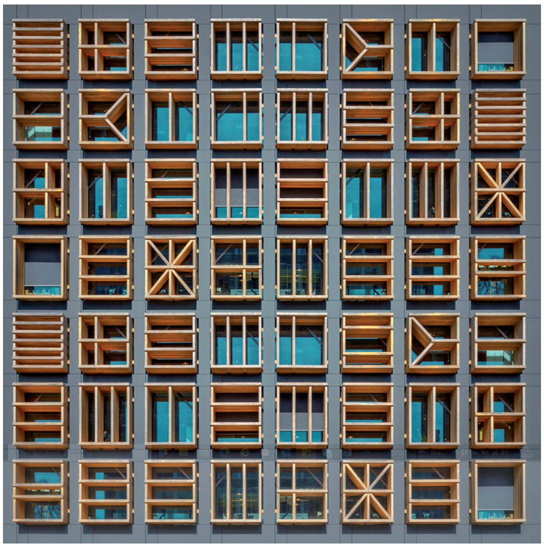
Abstracte schoonheid in architectuur

Fotograaf Paul Brouns

Henk Rozenhart

Nieuwe werkelijkheid

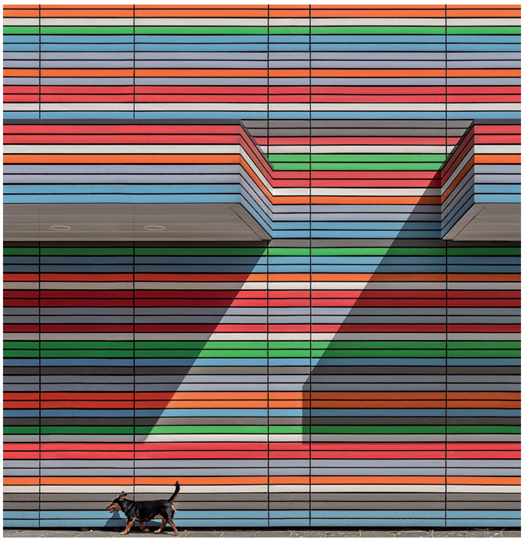
Op de voorkant van dit nummer staat het werk 'Rising into the light' van Paul Brouns. Hij is een Nederlandse fotograaf, die de stedelijke omgeving vastlegt en deze vervolgens bewerkt tot een nieuwe werkelijkheid. Kantoren of flatgebouwen vanuit een verrassend standpunt ontdaan van leven. Of toch niet? Vogels op weg naar het licht?



figuur 1 Morphology

Fascinerende patronen

Sommige foto's geven de werkelijkheid weer. Andere geven door manipulatie van een deel van een foto een prikkelend patroon. In figuur 1 heeft Paul Brouns een deel van een gevel op het Marineterrein in Amsterdam gebruikt om door middel van schuiven, roteren en andere bewerkingen tot een fascinerend patroon te komen. In figuur 4 heeft Paul twee deuren, die hij in Amsterdam Noord zag, uitgebreid tot een hele wand met deuren. Het jongetje brengt de menselijke maat in de abstractie. Het zijn vrije bewerkingen op basis van bestaande gebouwen. Door combinatie, ritmische uitbreidingen en omvormingen maakt hij een nieuwe fotografische werkelijkheid, zoals in figuur 7 duidelijk zichtbaar wordt. Er is door zijn werkwijze altijd een meetkundige prikkel in het werk aanwezig.

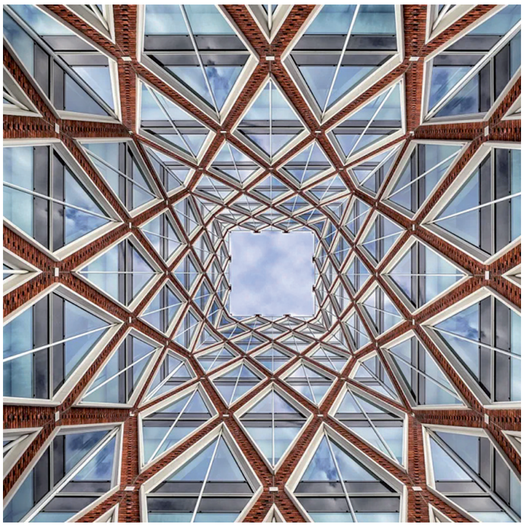


figuur 2 Walking the line

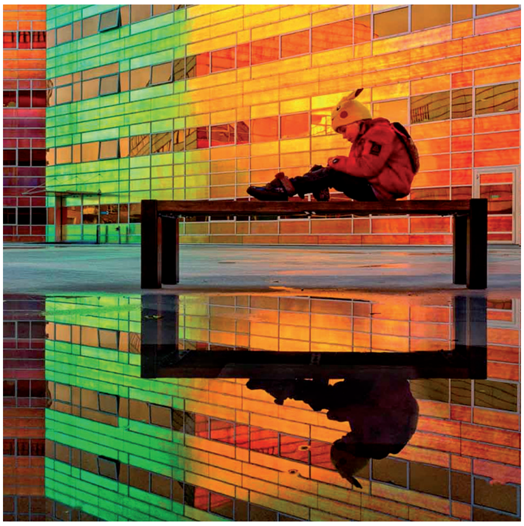
Paul zegt hier zelf het volgende over:
'Architectuur speelt een belangrijke rol in mijn werk. Ik fotografeer een bestaand gebouw en bewerk het dan digitaal tot een nieuwe werkelijkheid, die sprankelt van ritme en kleur. (Figuur 2 en 3). Ramen, deuren, trappen en muren zijn de basiselementen voor de stedelijke impressies, die ik maak. Door te spelen met het perspectief en standpunt van waaruit het object gefotografeerd is creëer ik inspirerende beelden, die een nieuw gevoel van abstractie en ritme geven.'
Zo ook in figuur 6 waar hij een jongen in Almere op een prachtige manier in spiegelbeeld vastlegt.

figuur 3 Venice of the north

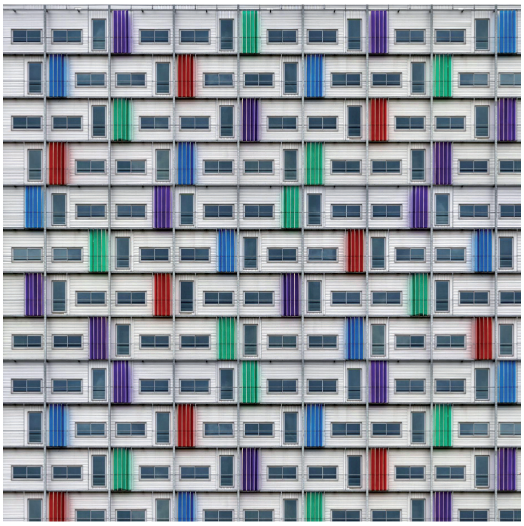
figuur 4 Variations in orange and blue



figuur 5 Ascension



figuur 6 Celebrating the light



figuur 7 Take this waltz

Spelen met architectuur

Het werk van Paul Brouns vertoont verwantschap met kunstenaars als Francois Morellet, Jan Dibbets en Ger Dekkers. Het wordt over de hele wereld getoond en gekocht. Op dit ogenblik wordt zijn werk tentoongesteld in Paleis Bembo in Venetië tijdens de biënnale.
Spelen met architectuur is wellicht een mooie omschrijving van zijn werk. Voorbeelden van zijn passie voor de nieuwe Hollandse Architectuur, maar ook voor een stad als New York. Voor de wiskundeleraar is natuurlijk de vraag of je met deze beelden iets in je lessen kunt doen. Als praktische opdracht of in een meetkundeles. Mogelijkheden genoeg lijkt mij.

Op de website *www.paulbrouns.com* kun je nog veel meer voorbeelden vinden van het werk van Paul Brouns.

Over de auteur

Henk Rozenhart was wiskundedocent op de Berger Scholengemeenschap. Tot voor kort was hij voorzitter van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *henk_rozenhart@hotmail.com*

Peter Kop, Erik van Barneveld

Nieuwe leerlijn algebra wiskunde A

Sinds kort staan er op de website van de NVvW drie algebrakaternen die passen bij het vwo wiskunde A-programma. Ze zijn ontwikkeld vanuit een nieuwe visie op het onderwijzen van algebraïsche vaardigheden bij wiskunde A. In dit artikel lichten wij toe hoe dit nieuwe lesmateriaal is ontstaan en wat de achterliggende gedachten zijn van deze opzet. Ter illustratie geven we enkele voorbeelden uit het katern voor leerjaar 5.

Waarom een nieuwe algebraleerlijn?

In de huidige eindexamenprogramma's voor havo en vwo wiskunde A is er ten opzichte van programma's uit 2007 meer aandacht voor algebraïsche basisvaardigheden.
Veel leerlingen vinden algebra moeilijk en abstract. In het algemeen kunnen zij maar moeilijk betekenis geven aan algebraïsche formules. Het gevolg is niet zelden dat leerlingen minder vertrouwen krijgen om algebraïsche taken aan te gaan. De extra aandacht voor algebra in de huidige programma's is niet of nauwelijks gepaard gegaan met enige vernieuwing van het algebraonderwijs.
In de gangbare lesmethoden wordt algebra nog steeds aangeboden via series van min of meer vergelijkbare opgaven met een focus op basisvaardigheden. Als dergelijke series van opgaven worden doorgewerkt door zelfstandig werkende leerlingen met een antwoorden- of uitwerkingenboek in de hand zal het voor veel leerlingen moeilijk zijn om een samenhangend geheel van begrippen en methoden te vormen die zij daadwerkelijk begrijpen en functioneel kunnen gebruiken.
Opvallend is dat de extra aandacht voor algebra destijds niet gepaard is gegaan met nieuw voorbeeldlesmateriaal. Voor bijvoorbeeld de domeinen Verbanden en Veranderingen is destijds wel nieuw lesmateriaal ontwikkeld.[1] In de tijd dat wij samen werkzaam waren als wiskundedocenten op dezelfde school, de GSG Leo Vroman in Gouda, gebruikten wij deze materialen en vulden we dit aan met lesmateriaal van eigen makelij. Op die manier werkten wij jarenlang met een bonte verzameling aan lesmaterialen die samen de examenstof vwo wiskunde A dekten. Op enig moment zijn wij met twee collega's een project gestart om een volledige eigen leerlijn havo en vwo wiskunde A te schrijven.[2] Voor vwo A gingen wij uit van één algebrakatern in elk van de leerjaren 4, 5 en 6. Tijdens de looptijd van het project is overeengekomen dat deze katernen als een schets van een nieuwe algebraleerlijn gedeeld kunnen worden met het veld via de website van de NVVW.[3]

Recente wetenschappelijke inzichten

In de wetenschappelijke literatuur over algebraonderwijs wordt het begrip symbol sense vaak gebruikt.
Drijvers e.a.[4] zien symbol sense als complementair aan basisvaardigheden met een focus op procedureel werken en algebraïsch manipuleren. Zij zien symbol sense als een soort kompas voor basisvaardigheden waarbij het gaat om globaal kijken, algebraïsch redeneren en strategisch werken.
Promotieonderzoek van Peter Kop heeft laten zien dat bepaalde aspecten van symbol sense, namelijk inzicht in formules, onderwezen kan worden via het schetsen van formules met de hand, zie figuur 1.[5]

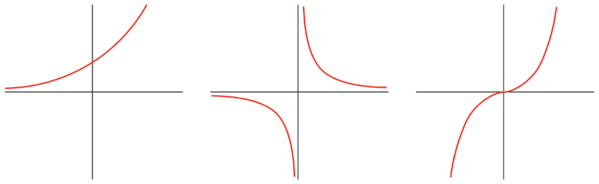
Op basis van deze wetenschappelijke inzichten zijn drie ideeën leidend geweest bij onze uitwerking van een nieuwe algebraleerlijn.

1. Focus op functies en functiefamilies en de koppeling tussen formules en grafieken om betekenis te geven aan algebraïsche formules.
2. Besteed meer aandacht aan het doorzien van de structuur van formules en het kwalitatief redeneren met formules en minder aan het maken van berekeningen met formules en het algebraïsch manipuleren van formules.
3. Gebruik een beperkte set aan parate kennis gecombineerd met expliciete aandacht voor probleemaanpak, met gebruik van het model in figuur 2.[6]

Lessenserie met vijf centrale vragen

1) Herkennen van basisfuncties en hun globale grafiek

$y=2^x; y=x^2; y=\sqrt{x}; y=x^3; y=x^4; y=\frac{1}{x}; y=\ln(x); y=\sin(x); y=e^x$



2) Functiefamilies met transformaties
Hoe hetzelfde, hoe verschillend?

a) $y=-3^x$ en $y=3^{-x}$

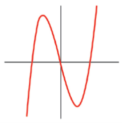
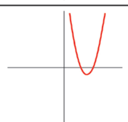
b) $y=3\cdot\ln(x)$ en $y=\ln(x)$

c) $y=-(x+4)^4+2$ en $y=-(x+4)^4$

3) Splitsen van formules in subformules

$$y_1=\frac{5}{x}+2x$$
$$y_2=x^2\cdot 3^{-x}$$
$$y_3=\frac{x^2-4}{9-x^2}$$

4) Herkennen nulpunten, min/max

$y=2x(x-2)(x+4)$	$y=2x^3+4x^2-16x$	
$y=(x-4)^2-1$	$y=(x-5)(x-3)$	

5) Kwalitatief redeneren over bv. oneindig gedrag

$$y=19-13\cdot 0{,}78^x$$
$$D=15{,}6\log(v)+4{,}1$$
$$P=100(1-3^{-0{,}5t})$$
$$D=6{,}9\sqrt{T-12}$$
$$TK=0{,}05q^2-80q$$

figuur 1 Lessenserie 'het schetsen van formules via herkennen en redeneren'[5]

Opbouw van katernen

We hebben drie algebra katernen geschreven (leerjaar 4, leerjaar 5 en leerjaar 6).
Alle drie de katernen hebben dezelfde opbouw.
§1 Breuken, verhoudingen, procenten
§2 Machten, wortels, exponenten en logaritmen
§3 Rekenen met haakjes
§4 Standaardfuncties en hun grafieken
§5 Redeneren met formules en grafieken
§6 Formules maken en modelleren
§7 Probleemaanpak en gemengde opgaven
§8 Formatieve opdrachten

Door drie leerjaren achtereen dezelfde opbouw te gebruiken ontstaat er een zekere concentrische opbouw met jaarlijkse verdieping. De paragrafen 1 t/m 6 worden gestuurd door centrale vragen die veelal voortvloeien uit een context of gekoppeld zijn aan grafieken. Hierdoor geven we betekenis aan de formules die aan de orde komen. Leerlingen worden uitgedaagd om deze centrale vragen bij voorkeur in kleine groepjes te beantwoorden. Als dat niet direct lukt zijn er verkennende opgaven waarmee beoogd wordt hulp op maat te geven. Door leerlingen in groepjes te laten werken willen we bereiken dat leerlingen met elkaar gaan praten over de leerstof, zodat zij vertrouwen opbouwen in hun eigen denk- en redeneervermogen. De centrale vragen in een paragraaf zijn ook bedoeld om leerlingen houvast te geven over hetgeen ze hebben geleerd en wat ze moeten kennen en kunnen. Zowel leerlingen als docenten kunnen focus houden op de kern van de stof via deze centrale vragen. Na de centrale vragen komt er een theorieblok waarbij wordt aangegeven wat tot de parate kennis van leerlingen dient te behoren. Vervolgens wordt er in een paragraaf geoefend waarbij we per opgave aangeven of het als een standaardopgave bij de behandelde theorie beschouwd kan worden of als een niet-standaardopgave. Elk katern wordt afgesloten met een expliciet stuk over probleemaanpak die leerlingen kunnen hanteren bij algebraïsche vraagstukken bij de gemengde opgaven en de formatieve opdrachten. In het stuk over probleemaanpak staat expliciet de rol van probleemfamilies en welke heuristieken leerlingen zouden kunnen inzetten om niet-standaardalgebraproblemen aan te pakken. In de gemengde opgaven worden verschillende aspecten van de leerstof met elkaar verbonden en zijn zowel standaard als niet-standaardalgebraproblemen opgenomen. In elk katern zit een formatieve toets en een aantal formatieve (les) opdrachten die naar eigen inzicht gebruikt kunnen worden.

>

Herkenningsniveau	Heuristieken
A. Gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend	Niet nodig
B. Een probleemfamilie wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend	Zoek 'parameters' van de probleemfamilie of gebruik kenmerken van de probleemfamilie
C. Het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familieproblemen	Los de deelproblemen op en voeg oplossingen samen, of, los de deelproblemen achter elkaar op
D. Enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend	
E. Er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart	Gebruik algemene heuristieken zoals Pólya: bekijk aparte gevallen, bekijk extremen, maak problemen kleiner, bekijk andere representaties

figuur 2 Model probleemaanpak met herkennen en heuristieken

Voorbeelden uit katern vwo 5

We geven enkele voorbeelden van centrale vragen.

§1 Breuken, verhoudingen, procenten

Centrale vraag
'De bol is tien keer zo groot als een voetbal'. Deze uitspraak kan verwarring geven. Wat wordt er nu bedoeld: een tien keer zo grote straal, een tien keer zo grote oppervlakte, of een tien keer zo grote inhoud?

We vergelijken de aarde met de maan.

	aarde	maan
diameter	12.756 km	3.476 km
oppervl.	511.186.000 km^2	37.959.000 km^2
inhoud	1.086.781.300.000 km^3	21.990.643.000 km^3

a Bereken in elk van de drie aspecten de verhouding tussen aarde en maan en schrijf deze verhouding in de vorm ... : 1.
b Zoek een verband tussen de uitkomsten.
c Op 29 oktober 2006 werd een nieuw record Grootste Hamburger gevestigd in Clinton (New Jersey). De diameter van het vleesmonster was 71 cm. Een normale hamburger heeft een diameter van 10 cm en weegt 135 gram. Hoeveel zal het record gewogen hebben?

§2 Machten, wortels, exponenten en logaritmen

Centrale vraag
In deze opgave kijken we naar het verband tussen gewicht (G) en hersengewicht (H) van een zoogdier (beide in gram): $H = 0{,}16G^{\frac{2}{3}}$.
Maak de volgende vragen:

Schrijf een aantal andere formules op die gelijkwaardig zijn. Hieronder staan enkele voorbeelden; vul op de puntjes de correcte getallen in: $H = 0{,}06G^{\frac{2}{3}} + \cdots$ $H = 0{,}16G^{\frac{1}{3}} \cdot \ldots$ $H = 0{,}16\sqrt[\cdots]{G^{\cdots}}$ $H = (\ldots \cdot G)^{\frac{2}{3}}$ $H = 0{,}16\frac{\cdots}{G}$	Schets de grafiek bij deze formule.
Maak de omkeerformule, dus een formule van de vorm $G = \ldots$.	Maak een tabel bij deze formule en onderzoek hoe H steeds verandert als G twee keer zo groot wordt. En als G steeds drie keer zo groot wordt?

figuur 3

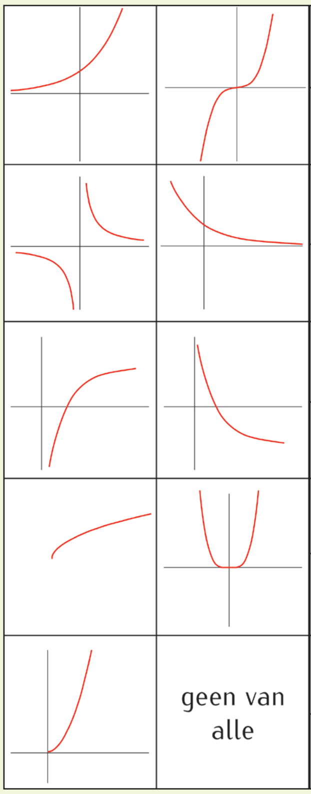
§3 Rekenen met haakjes

Centrale vraag
Voor een bedrijf is de opbrengstfunctie gegeven:
$TO = -11q^2 + 96q$, waarbij q het aantal producten is.
Voor de kosten geldt de formule $TK = q^2 + 10$.

a Onderzoek met de GR bij welk aantal producten winst gemaakt wordt.
b Bereken bij welk aantal producten de winst maximaal is.

§4 Standaardfuncties en hun grafieken

Centrale vraag
Om formules te leren ‘lezen’ is het nodig om van een aantal formules direct een plaatje voor ogen te hebben. Koppel de verschillende formules van figuur 4 aan een correcte grafiek. Noteer bij iedere grafiek kenmerken.

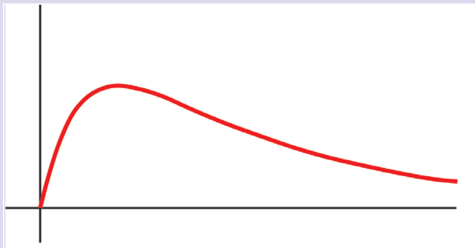


$y=x^2$	$y=\frac{4}{x}$
$y=x^3$	$y=\sqrt{x}$
$y=x^4$	$y=x^{1,2}$
$y=2^x$	$y=1,2^x$
$y=0,5^x$	$y=x^{0,8}$
$y=0,8^x$	$y=x^{-1}$
$y={}^{0,5}\log(x)$	$y=4^x$
$y=x^{1,5}$	$y={}^{3}\log(x)$
$y=100\cdot 0,82^x$	$y=6x^{2,32}$

figuur 4

§5 Redeneren met formules en grafieken

Centrale vraag
Gegeven is een grafiek waarin de concentratie van een medicijn in het bloed weergegeven is, zie figuur 5.



figuur 5

Kenmerken van deze grafiek zijn:
- Bij $t = 0$ moet $C = 0$ zijn.
- C moet overal positief zijn voor $t = 0$ en groter.
- Op den duur moet C naderen naar 0.

Beredeneer of de volgende functies deze kenmerken vertonen:

a $C=0,20(2^{-0,6t}-2^{-3t})$

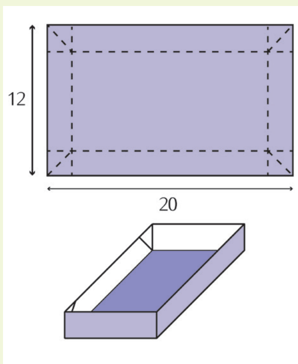
b $C=0,20\cdot 0,55^t-0,20\cdot 0,05^t$

c $C=\dfrac{0,2t}{t^2+10}$

§6 Formules maken en modelleren

Centrale vraag
Van een blaadje van 12 cm bij 20 cm wordt een (open) doosje gevouwen door aan iedere kant een strook met breedte x om te vouwen, zie figuur 6. De hoogte van het doosje wordt dus x.

a Maak een formule voor de inhoud van het (open) doosje



figuur 6

Iemand rijdt 600 km over autowegen naar zijn vakantiebestemming. De reistijd t (in uren) hangt af van de rijsnelheid v (in km/uur). In de eerste helft (300 km) van de reis rijdt ze met een gemiddelde snelheid van v km/uur en in de tweede helft met een gemiddelde snelheid van $v + 20$ km/uur.

b Maak een formule voor de totale reistijd.

Twee soorten opgaven die we meermaals gebruiken[1]

1) Welke formules zijn gelijkwaardig met $y=\frac{60}{x}$ (x>0)?

$$y=12x^{-1}\cdot 5;\ y=\frac{12}{x^2}\cdot 5x;\ y=\frac{60+x}{x^2};\ y=60\cdot\frac{1}{x};$$
$$y=\frac{6}{x}\cdot\frac{10}{x};\ y=\frac{6}{x}+\frac{54}{x};\ y=\frac{30}{x}\cdot 2;\ y=\frac{60}{x^{60}};$$
$$y=\frac{1}{60x^{60}};\ y=\sqrt{\frac{3600}{x^2}};\ y=\frac{120x^2}{2x^3};\ y=60x^{-2}-x^{-1};$$
$$y=30x^{-1}+30x^{-1};\ y=30x^{0,5}+30x^{0,5};$$
$$y=30x^{0,5}\cdot 30x^{0,5};\ y=2x^{0,5}\cdot 30x^{0,5};\ y=\frac{30}{x^{-0,5}}\cdot 2x^{0,5};$$
$$y=60\cdot x^{-60};\ y=2\cdot\frac{30}{x^{30}}\cdot\frac{1}{x^2};\ y=60\left(\frac{1}{x^{15}}\right)^4;$$
$$y=\frac{1}{x^{60}}\cdot 60;\ y=\left(\frac{2}{x^2}\right)^{30}$$

2) Orden de onderstaande formules in de categorieën: lineair, exponentieel, machtsfunctie, geen van drie.

$$y=100-2^t;\ y=100\cdot 1{,}9^t;\ P=3{,}6^x;\ A=5\cdot 1{,}2^p;$$
$$R=120-0{,}6t;\ y=3(x+2)-9;\ z=100(4\cdot 0{,}9)^t;$$
$$P=3{,}2^{(x+4)};\ A=5\cdot 1{,}2^t+120;\ R=\frac{120-1{,}6t}{4};$$
$$H=\frac{4}{2t};\ F=5\cdot 1{,}2^{-t};\ B=120+3t(t+2);\ C=120-(t+2);$$
$$D=\frac{4}{2^t};\ 2x+3y=10;\ 2xy=12;\ K=5\cdot t^{1{,}4}$$
$$L=100\cdot R^{0{,}5};\ y=\frac{10}{5t+30}$$

Tot slot

We hopen dat je na het lezen van dit artikel nieuwsgierig bent geworden naar de drie katernen die op de website van de NVVW staan. Omdat het om 'work in progress' gaat, ontvangen we graag feedback op het materiaal, zeker als je in jouw eigen lespraktijk (delen van) een katern hebt gebruikt. Het tot stand komen van de katernen is (voor een deel) gefinancierd uit het projectenfonds van de NVvW.

De katernen vind je via de volgende link.
https://www.nvvw.nl/lesmaterialen/algebra/

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld: Broek, L. van den, Koolstra, G. & Kop, P. (2009). Verbanden: exponenten en logaritmen, experimentele uitgave voor Verbanden, vwo 4, wiskunde A, versie 2 (augustus 2009) en Broek L. van den, Kop, P. (2011). Veranderingen: groeisnelheden, experimentele uitgave voor differentiëren, vwo, wiskunde A, versie 3 (januari 2011). Zie *www.ctwo.nl.*

[2] Voor meer informatie over deze volledige leerlijn havo en vwo wiskunde A kunt u contact opnemen met Annegeert Blonk, *blo@gsgleovroman.nl* of Maico Burger, *bur@gsgleovroman.nl*.

[3] Hetzelfde geldt voor een opzet (concept) van de katernen over statistiek en kansrekening. Hierover meer in een volgend artikel.

[4] Drijvers, P., Goddijn, A. & Kindt, M. (2011)., Algebra education: Exploring topics and themes. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pag. 5-26). Rotterdam, Boston, Tapei: Sense Publishers.

[5] Kop, P. (2020). Graphing formulas by hand to promote symbol sense. Becoming friends with algebraic formulas, proefschrift, Universiteit Leiden, ICLON.

[6] Kop, P., Problem Solving through Recognition and Heuristic Search (submitted)

Over de auteurs

Peter Kop is vakdidacticus bij ICLON in Leiden en was werkzaam als docent op de GSG Leo Vroman in Gouda. Email-adres: *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl* Erik van Barneveld was werkzaam als docent op de GSG Leo Vroman in Gouda en is thans werkzaam als docent op het Alfrink College in Zoetermeer. Emailadres: *bar@alfrink.nl*

Puzzels en raadsels voor in de zomer

Tom Goris

Met enige regelmaat worden er door lezers puzzels en raadsels aangedragen. Vorig jaar was dat de *Friemelmolen* van Pieter Slooten, die daar maar liefst twintig reacties op kreeg. Het was het begin van een traditie om die ingezonden puzzels en raadsels tot nummer 7 te bewaren voor de lange zomerdagen.

Gelijkzijdige driehoek (Bert Smid)

Wat is de grootst mogelijke gelijkzijdige driehoek die je kunt tekenen in een vierkant (met zijde 1 voor het rekengemak)?
Vervolgvraag zou kunnen zijn: Wat is de oppervlakte van die gelijkzijdige driehoek gedeeld door de resterende oppervlakte van het vierkant? Daar komt een mooi antwoord uit...

Omrijden (Simon Biesheuvel)

Vanuit Frankrijk naar Nederland omrijden via Luxemburg om goedkoop te tanken.
Het omrijden kost benzine. Hoeveel is dan de winst?
Maar... kost het omrijden de prijs van de dure benzine of van de goedkope benzine?

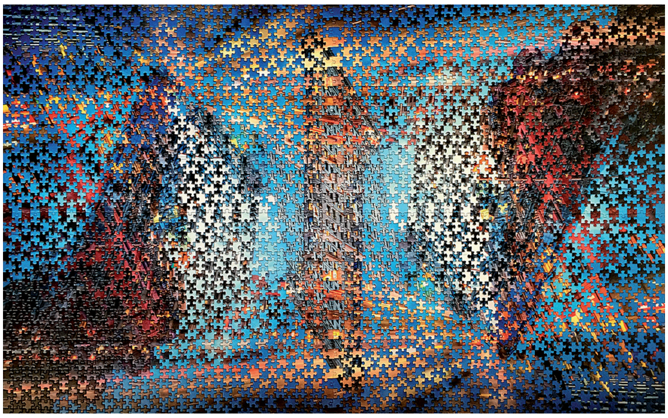
Cirkels en raaklijnen (Bert Smid)

Trek twee raaklijnen aan twee elkaar rakende cirkels met straal a respectievelijk b ($a < b$). In de ruimte tussen de kleinste cirkel en de twee raaklijnen past precies één klein cirkeltje die beide raaklijnen en de kleinste cirkel raakt.

a) Druk de straal k_1 van die kleine cirkel uit in a en b.
Maar in de open ruimte 'aan de andere kant van de twee cirkels' past ook precies één grote cirkel die beide raaklijnen en de grootste cirkel raakt.
b) Druk de straal g_1 van die grote cirkel uit in a en b.
c) Toon aan dat het product van de oppervlakten van de twee oorspronkelijke cirkels gelijk is aan het product van de oppervlakte van de kleine cirkel (waarvan de straal bij a) is bepaald) en de oppervlakte van de grote cirkel (waarvan de straal bij b) is bepaald).
Vervolgens kun je dit proces voortzetten: in de besloten ruimte tussen de twee raaklijnen en de cirkel met straal k_1 past weer precies één klein cirkeltje die beide raaklijnen en de cirkel met straal k_1 raakt.
d) Druk de straal k_2 van die kleine cirkel uit in a en b.
En in de open ruimte 'aan de andere kant van de cirkels' past ook precies één grote cirkel die beide raaklijnen en de cirkel met straal g_1 raakt.
e) Druk de straal g_2 van die grote cirkel uit in a en b.
f) Toon aan dat het product van de oppervlakten van de twee oorspronkelijke cirkels gelijk is aan het product van de oppervlakte van de kleine cirkel (waarvan de straal bij d) is bepaald) en de oppervlakte van de grote cirkel (waarvan de straal bij e) is bepaald).

Dit kan oneindig lang doorgaan. Steeds geldt de bij c) en f) getoonde eigenschap omdat voor alle natuurlijke getallen n geldt: $gn \times kn = a \times b$ en dat is m.i. toch een mooi resultaat.

Legpuzzel (Tom Goris)



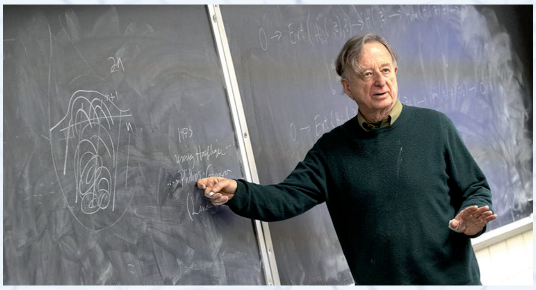
Er zijn legpuzzels die in twee delen met dezelfde matrijs gestanst zijn, ontdekte ik bij toeval. Gevolg: het hoekstukje van linksboven past ook rechtsonder, en zo kun je de hele puzzel 'reconstrueren' totdat je een merkwaardig draaisymmetrisch resultaat krijgt (is wel een klusje...).
Nog een gevolg: stel dat je een keer de áchterkant van de puzzel wilt leggen, dan is de oplossing niet één-éénduidig. En de vraag is uiteraard: op hoeveel verschillende manieren kun je de achterkant van deze puzzel leggen? (Deze puzzel meet 72 × 44 stukjes, maar een beetje puzzelaar lost deze vraag uiteraard voor een $m \times n$ puzzel op...)
Stuur je oplossingen naar de redactie, dan zorgen wij dat deze bij de auteurs van de puzzels terechtkomen.

Wis en Waarachtig

Grote zorgen om wiskundeonderwijs op middelbare scholen

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) maakt zich grote zorgen over het wiskundeonderwijs op middelbare scholen. Middelbare scholen door het hele land hebben te maken met een tekort aan docenten, maar bij wiskunde is het probleem het grootst en het blijft groeien. Wiskundelessen vallen daardoor langere tijd uit. Er is al jaren een groeiend aantal vacatures en een dalende instroom van studenten in de lerarenopleiding wiskunde. De komende vijf jaar verwacht het Ministerie van Onderwijs dat het tekort aan wiskundeleraren meer dan verdubbelt, naar 513 openstaande fulltime banen in 2026. Dat merkt ook de 73-jarige wiskundedocent Mart Hermans. Hij is al dertien jaar met pensioen, 'maar toch word ik ieder jaar weer gebeld en ingezet. Dan is iemand bijvoorbeeld met zwangerschapsverlof of heeft een burn-out, of een vacature kan gewoon niet worden ingevuld.' Ook zetten scholen vaak onbevoegde leraren voor de klas om het probleem op te lossen: mensen die nog niet zijn afgestudeerd of wel lesbevoegdheid hebben, maar in een ander vak, een andere graad of onderwijssoort. 'Voltijdstudenten aan de lerarenopleiding worden al in het tweede of derde jaar door scholen gevraagd om een paar uur per week betaald voor de klas te staan. En bijna alle deeltijdstudenten komen binnen met een baan als onbevoegd docent', vertelt Desiree Agterberg, lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. 'De studenten komen helemaal niet meer toe aan hun eigen huiswerk, omdat ze bijvoorbeeld een ouderavond hebben of een klas moeten overnemen. En bovendien kunnen ze soms nog helemaal niet zo goed lesgeven. Ze hebben bijvoorbeeld moeite met orde houden, maar worden wel voor de moeilijkste klassen gezet. Ze ervaren de druk als hoog en daardoor stoppen ze ook weer eerder met de opleiding.' Ook krijgen de studenten door het tekort weinig begeleiding van meer ervaren docenten, zowel tijdens als na de opleiding. Daardoor gaat de kwaliteit van het onderwijs achteruit, merkt ook Ebrina Smallegange, voorzitter van de NVvW. Op sommige vmbo's wordt wiskunde bijvoorbeeld vervangen door rekenlessen van gym- of aardrijkskundedocenten, zodat leerlingen daarna in ieder geval het schoolexamen rekenen kunnen maken. 'Maar rekenen en wiskunde zijn niet zomaar vakken die je kan geven, dat is echt moeilijk', zegt Smallegange.
Ze maakt zich grote zorgen over de toekomst. 'Op vwo's zien we dat het extra vak wiskunde D niet meer wordt gegeven, terwijl dat hét vak is voor toekomstige technische wetenschappers en wiskundigen. Die hebben dus een achterstand als ze aan hun studie beginnen.'
Half april bleek nog dat een toenemend aantal leerlingen het basisonderwijs verlaat met te weinig kennis van rekenen en/of taal. 'En dat zet zich op de middelbare school dus voort door het tekort aan leraren', vervolgt Smallegange. 'We hebben straks een hele generatie die gewoon niet meer goed kan rekenen, terwijl dat een basisvaardigheid is.'
En dat zou zomaar kunnen betekenen dat er straks niet alleen een tekort is aan wiskundedocenten, maar ook aan bijvoorbeeld architecten, accountants of it-adviseurs. Smallegange: 'We moeten nu echt gaan nadenken over structurele oplossingen.'
Bron: *nos.nl* (21 april 2022)

Abelprijs voor Amerikaan Sullivan



Dennis Parnell Sullivan

De Abelprijs is dit jaar toegekend aan de Amerikaan Dennis Parnell Sullivan voor zijn baanbrekende werk op het gebied van de topologie in de meest brede zin van het woord en de algebraïsche, meetkundige en dynamische aspecten in het bijzonder.
De Abel-prijs, genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Hendrik Abel (1802-1829), kan worden beschouwd als de Nobelprijs voor de wiskunde. Er is een bedrag aan verbonden van 7,5 miljoen Noorse Kronen, zo'n 750.000 euro. In tegenstelling tot de Fieldmedaille wordt de prijs vaak toegekend aan wat oudere wetenschappers.
Alex Bellos schreef een artikel over het werk van Sullivan, te vinden in onderstaande bron.
Bron: *https://abelprize.no/sites/default/files/2022-03/A%20glimpse_of%20the%20laureates%20work%20by%20AlexBellos.pdf*

Wiskundige truc kan ontwikkelingstijd van AI halveren

Artificiële intelligentie (AI) wordt steeds beter in het uitvoeren van complexe taken, maar om AI te trainen is wel

een enorme hoeveelheid rekenkracht nodig. Een efficiëntere techniek zou benodigde tijd, energie en vereiste computerkracht kunnen halveren.
Artificiële intelligentie maakt vaak gebruik van een methode die *deep learning* heet. Daarbij bestaat de AI uit een netwerk van kunstmatige 'zenuwcellen'. Deze zijn met elkaar verbonden door computercode, die input opnemen, er een bepaald gewicht aan toekennen, en dan weer een veranderde output doorgeven. Op die manier lijkt het netwerk op een ruwe versie van ons brein, waarbij zenuwcellen met elkaar in verbinding staan. Door steeds verschillende gewichten toe te kennen aan de input, kan het netwerk langzaam maar zeker een bepaalde taak leren, zoals het herkennen van gezichten of het digitaliseren van handgeschreven teksten. Voordat dat lukt, moet het netwerk wel duizenden tot miljoenen keren de toegekende gewichten veranderen.
Om een model te trainen, sturen onderzoekers data het netwerk in, waarna ze de kwaliteit van de output beoordelen. Vervolgens berekenen ze een 'gradiënt': een waarde die voorschrijft hoe de gewichten moeten veranderen om de output te verbeteren. Tijdens dit proces bewegen data voortdurend heen en weer door het netwerk, waarbij langzaam de gradiënt tot stand komt.
Atılım Güneş Baydin, AI-onderzoeker aan de Universiteit van Oxford, heeft met collega's dat proces nu versimpeld. In plaats van dat het proces in twee stappen moet verlopen – waarbij de data heen en weer bewegen – kan het nu in één stap. Hierbij komt de gradiënt in de eerste stap al zo nauwkeurig tot stand, dat een tweede berekening niet meer nodig is.
In theorie zou dit de ontwikkelingstijd van AI kunnen halveren. Het team vergeleek hun nieuwe AI-model met een 'ouderwets' model, en zag dat hun AI zijn taken even goed volbracht.
Bron: *www.newscientist.nl*

Zilver voor Nederlandse bij EGMO 2022

Allie Zong (16) uit Veldhoven heeft begin april een zilveren medaille gewonnen bij de European Girls' Mathematical Olympiad in Eger, Hongarije. Zij liet in de Europese wiskundewedstrijd voor meisjes ruim driekwart van de deelneemsters achter zich. Katya Nikitchenko (16) uit Eindhoven loste één van de opgaven foutloos op en verdiende daarmee een eervolle vermelding. De European Girls' Mathematical Olympiad vond plaats van 6 tot 12 april. Na twee jaar online te zijn georganiseerd, kon de wedstrijd dit jaar weer in fysieke vorm doorgaan in Eger, Hongarije. Een recordaantal van 57 landen en 222 deelneemsters nam deel aan de wedstrijd, waaronder ook 26 gastteams uit landen buiten Europa, zoals India en Peru. De leerlingen kregen op elk van de twee wedstrijddagen vier en een half uur de tijd om drie zeer lastige wiskundeopgaven op te lossen. Voor iedere opgave waren zeven punten te verdienen. De Nederlandse deelneemsters hebben de volgende resultaten behaald:

— 22 punten (zilver): Allie Zong (16 jaar, Veldhoven, 4 vwo, Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven)
— 10 punten: Lieke van Dam (17 jaar, Best, 5 vwo, Heerbeeck College Best)
— 8 punten (eervolle vermelding): Katya Nikitchenko (16 jaar, Eindhoven, 4 vwo, Huygens LyceumEindhoven)
— 7 punten: Wietske de Vos (17 jaar, Assendelft, 6 vwo, Zaanlands Lyceum Zaandam)

Naast de wiskunde, genoten de teamleden ook erg van de evenementen rondom de wedstrijd. Medaillewinnares Allie, die al twee keer eerder meedeed: 'Na twee online edities, is het erg leuk om de mensen die ik afgelopen twee jaar alleen maar op een schermpje had gezien, nu in het echt te ontmoeten! Ik heb ervan genoten om samen spelletjes te spelen, karaoke te zingen tot laat in de avond en Hongarije te ontdekken. Al met al heel gezellig en net als een grote familiereünie. En de zilveren medaille maakt het helemaal af!' Katya vult aan: 'Ik word sowieso al enthousiast van wiskunde, maar de puzzels die we kregen in de Szalaika-vallei vond ik extra fantastisch. In deze prachtige omgeving wordt wiskunde nog leuker!' In totaal ontvingen 62 van de 222 deelneemsters een bronzen medaille, 32 een zilveren medaille en 23 een gouden medaille. In het officieuze landenklassement eindigde Nederland op de 35e plaats van de 57 deelnemende teams.

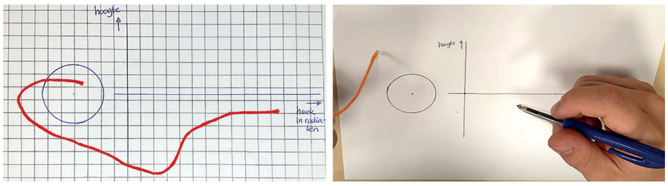
Vlnr: Katya Nikitchenko, Allie Zong, Lieke van Dam en Wietske de Vos Bron: wiskundeolympiade.nl

Kleintje didactiek

Lonneke Boels

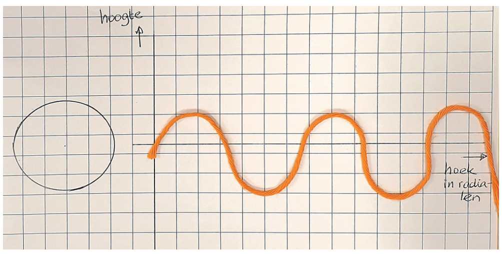
De samenhang tussen sinus en eenheidscirkel

Vorige keer schreef ik over digitale versies van de sinusgrafiek, dit is een vervolg daarop. Als herhaling kort voor een toets was ik op zoek naar een papier-en-potloodtaak voor in de klas. Mijn collega's Rosa Alberto en Anna Shvarts van het Freudenthal Instituut hebben enkele digitale taken ontworpen om leerlingen het verband tussen de eenheidscirkel en de sinusgrafiek te laten ontdekken.[1] Voor 6 vwo wiskunde A heb ik – geïnspireerd door hun ideeën – het bijgaande werkblad gemaakt. Leerlingen kregen naast dit werkblad een touwtje van circa 20 cm. De opdracht luidde: construeer minstens zes punten van de sinus die hoort bij de getekende cirkel op dit werkblad, waarbij je alleen gebruik mag maken van het touwtje, een potlood en het getekende assenstelsel. Verder moeten de zes punten binnen één periode liggen (die eis heb ik later toegevoegd toen een leerling het zesde punt vond door iets meer dan een periode te tekenen) en is de getekende eenheidscirkel je schaal (dus de sinus en de eenheidscirkel hebben dezelfde schaal). Verder had ik twee versies gemaakt: één op ruitjespapier en één op blanco papier.



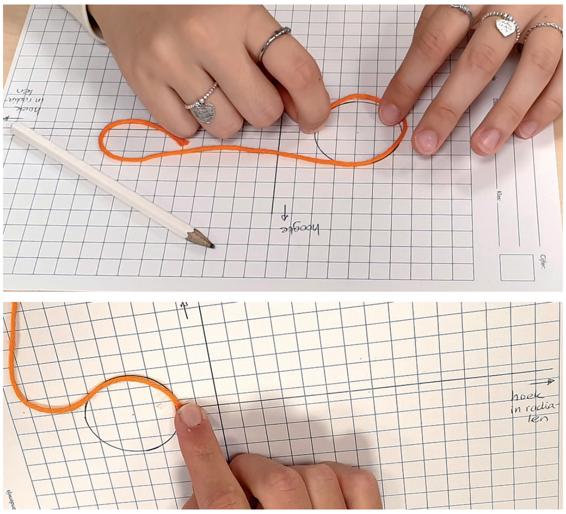
figuur 1 De twee versies van het werkblad met het touwtje

Hierbij enige impressies van deze les. Allereerst: het blanco papier werkt beter dan het ruitjespapier – wat ik ook wel verwacht had – omdat het rooster op het ruitjespapier uitlokt om dat als 'schaal' te gebruiken in plaats van de omtrek van de getekende 'eenheidscirkel'. In figuur 2 heeft de leerling bijvoorbeeld de sinus tegen een roosterlijn aangelegd (de toppen) in plaats van de hoogte van de eenheidscirkel te gebruiken.

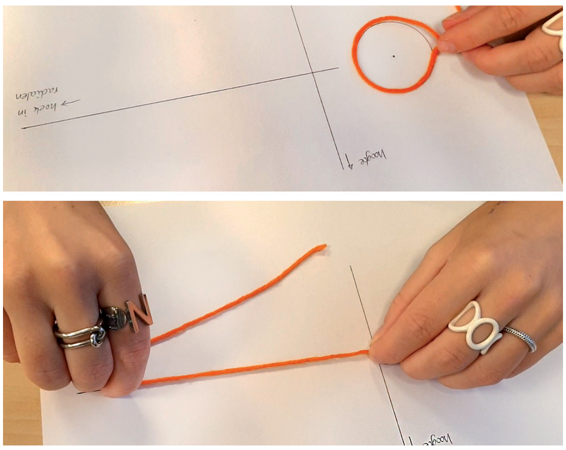


figuur 2 Het ruitjespapier lijkt leerlingen uit te lokken om het touw te gebruiken om de sinus te vormen in plaats van als meetlint, hoewel enkele leerlingen dit ook op het blanco papier doen.

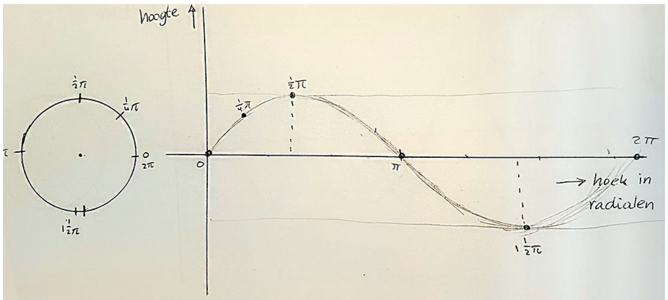
Nadat de docent opmerkt dat de schaal van de sinusgrafiek en eenheidscirkel niet dezelfde zijn (zonder te benoemen welke schaal wordt bedoeld), komen leerlingen op het idee om de eenheidscirkel op te meten, zie figuur 3. Sommige leerlingen redeneren vanuit de hele periode, zie figuur 4. Ze meten met het touwtje de omtrek van de cirkel, zetten deze lengte uit op de horizontale as voor het begin- en eindpunt van de cirkel, en halveren dan de lengte van het touwtje voor het derde punt waar de sinusgrafiek door de evenwichtsstand gaat. Door het touwtje nogmaals te halveren, komen ze op de horizontale coördinaat van het maximum, zie figuur 5 voor het eindresultaat. De meeste leerlingen meten echter een kwart cirkel (dus een kwart periode), een halve, driekwart en een hele cirkel apart op. Dat het katoenen touwtje mee rekt, was achteraf niet zo handig.



figuur 3 Twee leerlingen laten zien hoe ze de lengte van de cirkelboog meten.



figuur 4 Een hele periode afmeten op de eenheidscirkel en op de horizontale as



figuur 5 Het eindresultaat

Behalve dat deze les leerzaam was voor de leerlingen, was het voor mij ook leerzaam om te zien welke leerlingen nog niet het verband hadden gelegd tussen de lengte van de boog en de afstand op de horizontale as in de sinusgrafiek. Verder waren er leerlingen die de hoogte van de sinusgrafiek hoger tekenden dan de hoogte van de eenheidscirkel. Voor hen was de relatie tussen sinus en de hoogte van een punt P op de eenheidscirkel kennelijk nog niet duidelijk. Dat gaf mij de gelegenheid om via vragen hen deze relaties alsnog te laten ontdekken. Hoe erg heb ik dit soort lessen gemist, in het afgelopen jaar...

Voor het werkblad zie:
vakbladeuclides.nl/kleintjedidactiek_werkblad
Voor een video-impressie van deze les, zie:
vakbladeuclides.nl/kleintjedidactiek_video
Voor verwijzingen naar onderzoek waardoor ik geïnspireerd raakte, zie:
vakbladeuclides.nl/kleintjedidactiek_literatuur

Noot

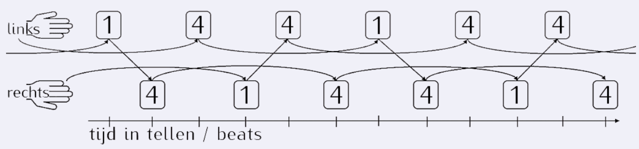
[1] zie *https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity/*

WiTje: Jongleren

Wiskunde in teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Jongleren doe je net als muziek op het tempo van een metronoom. Een bal kan alleen op de beat omhoog gegooid worden, en wordt meestal vlak daarvoor gevangen. Bij standaardtechnieken gooi je op de even beats met rechts en de oneven beats met links (of andersom). Een patroon om de ballen te gooien kan dan met een diagram worden weergegeven, zie figuur 1:



figuur 1

De getallen in de vakjes geven aan hoeveel beats de bal in de lucht is. In feite heb je genoeg aan het rijtje getallen:
1, 4, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 4, ... En omdat dat repetitief is, vertelt het afgebroken rijtje 1, 4, 4 het hele verhaal. Uitgaande van het gegeven dat je maar één bal tegelijk in je hand kunt houden leidt niet elk rijtje getallen tot een ‘gooibaar’ patroon. Zo is 1, 2, 3 wel oké, en 1, 3, 2, niet.

Kun je uitleggen welke rijtjes wel en welke niet gooibaar zijn? Hoe kun je uit een gooibaar rijtje getallen het benodigd aantal ballen berekenen?

Bron: Wiskunde B dag 2020,
zie *https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28971/*

Alles voor je school

Maak gratis gebruik van onze producten en lerarensoftware

» Uitleenprogramma

We bieden je de mogelijkheid om onze producten kosteloos vier weken uit te proberen via ons uitleenprogramma. Breng samen met je collega's of leerlingen je programmeervaardigheden in de praktijk met onze grafische rekenmachines en bijvoorbeeld de Rover-robotauto.

» Training

Goed voorbereid het nieuwe schooljaar in door na de zomervakantie een training te volgen met je collega's. Dan verzorgt onze consultant educatieve technologie of één van onze T³-docenten een passende workshop.

Denk aan een voorbeeldles, inspiratie voor een multidisciplinair project, of samen sparren over hoe je computational thinking integreert in je les.

Zo hopen we je dagelijkse praktijk er iets eenvoudiger op te maken.

T³ NEDERLAND
Teachers Teaching with Technology™

» Softwareaanbiedingen

We hebben software in de aanbieding waar je als leraar gratis gebruik van kunt maken.

Deze projectiesoftware is ideaal om de rekenmachine op het scherm of een digibord in de klas te gebruiken. Lesgeven wordt dan ineens een stuk interactiever doordat leerlingen eenvoudig het onderwerp kunnen volgen of kunnen deelnemen aan discussies. Dit aanbod is geldig tot en met 30 juni 2022.

Texas Instruments

Jacques Jansen

Uitdagende problemen

Het probleem van Leuven

Het probleem van Leuven is heel kort samengevat: kies een natuurlijk getal k tussen 1 en n waarbij n een natuurlijk getal is tussen 50 en 500. De som van de getallen 1 tot en met $k-1$ is gelijk aan de som van $k+1$ tot en met n. Bepaal k en n. Maar verpakt in een raadsel uit Sherlock Holmes is het veel spannender!

Ooit gehoord van het probleem van Leuven? Een heel spannend probleem. Volgens de auteurs van *De Dikke Pythagoras*[1] – een feestelijke uitgave van de redactie van *Pythagoras* wiskundetijdschrift voor jongeren dat al zestig jaar bestaat – is het bekend geworden door het verhaal van de oplossing ervan door de geniale Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Het probleem van Leuven verscheen in 1914, het beginjaar van de eerste wereldoorlog, in het Britse tijdschrift *The Strand*. Dat magazine kreeg bekendheid door de publicatie van de verhalen van Sherlock Holmes.

figuur 1 The Strand Magazine

Dit is de oorspronkelijke tekst van het probleem:

'I was talking the other day,' said William Rogers to the other villagers gathered round the inn fire, 'to a gentleman about that place called Louvain, what the Germans have burnt down. He said he knowed it well – used to visit a Belgian friend there. He said the house of his friend was in a long street, numbered on his side one, two, three, and so on, and that all the numbers on one side of him added up exactly the same as all the numbers on the other side of him. Funny thing that! He said he knew there was more than fifty houses on that side of the street, but not so many as five hundred. I made mention of the matter to our parson, and he took a pensil and worked out the number of the house where the Belgian lived. I don't know how he done it.' Perhaps the reader may like to discover the number of that house.

Probeer het eerst maar eens op te lossen voordat je verder leest.

Aan de slag

Als er niet meer dan tien huizen in die straat zijn, dan heb je snel door 'trial and error' een oplossing gevonden. Het werkt al bij acht huizen: het gezochte huisnummer is 6. Immers de som van de lage nummers is
$1+2+3+4+5=15$
en de som van de hoge nummers is
$7+8=15$.

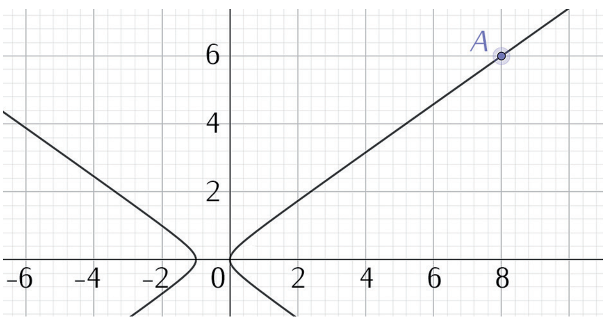
Het gezochte huisnummer noemen we k en het totaal aantal huizen in die straat n. Er zijn beperkende voorwaarden: k en n zijn groter dan 1 en n is groter dan 50 maar kleiner dan 500. k moet uiteraard kleiner zijn dan n. De som van de huisnummers die lager zijn dan k geef ik aan met *Som*(*lager*) en de som van de huisnummers die hoger zijn dan k geef ik aan met *Som*(*hoger*). We gaan beide gelijke sommen uitrekenen.
We tellen de lage huisnummers op:
$1+2+3+\ldots+(k-1)$
en dat geeft
$\frac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot k$, ofwel $\frac{1}{2}\cdot(k^2-k)$.

Nu de huisnummers die hoger zijn dan
k: $(k + 1) + ... + n$.
Trek je van die getallen k af dan zie je meteen dat er $(n - k)$ nummers zijn.
Som(*hoger*) $= ½\cdot(n - k)\cdot(n - k + 1) + k\cdot(n - k) =$
$(n - k)\cdot(½\cdot(n - k + 1) + k) = ½\cdot(n - k)\cdot(n + k + 1)$.
Voor het aantal huizen in de straat geldt: $50 < n < 500$.
Uit *Som*(*lager*) = *Som*(*hoger*) volgt:
$½\cdot(k^2 - k) = ½\cdot(n - k)\cdot(n + k + 1)$
Uitwerken geeft:
$k^2 - k = n^2 + nk + n - kn - k^2 - k$.
Dit herleiden we tot $2k^2 = n^2 + n$.
Een belangrijke relatie!

Kan de afleiding van deze relatie eleganter? Jazeker.
Som(*lager*) = *Som*(*hoger*) $\rightarrow$
Som(*lager*) + *Som*(*lager*) + k = *Som*(*alles*) $\rightarrow$
$2\cdot(½\cdot(k - 1)\cdot k) + k = ½\cdot n\cdot(n + 1) \rightarrow$
$k^2 = ½\cdot n\cdot(n + 1) \rightarrow$
$2k^2 = n^2 + n$.

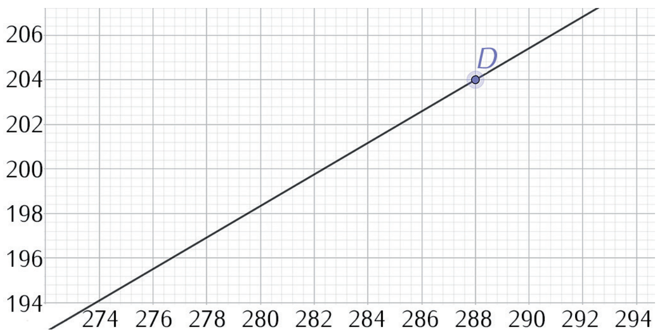
Ik werd geboren en groeide op in de oudste winkelstraat van Nederland, de Lange Hezelstraat, te Nijmegen. Het huisnummer van mijn woning was 100. Ik was trots op dat mooie nummer maar de geschiedenis van de straat was mij toen onbekend. Zou 100 ook voldoen aan de relatie $2k^2 = n^2 + n$? Invullen van 100 geeft een waarde voor huisnummer n met cijfers achter de komma. Jammer toch? De geschiedenis van deze straat kunnen we niet verder verrijken...

We roepen de hulp in van GeoGebra. Je kunt aan de vergelijking $2k^2 = n^2 + n$ zien dat het om een deel van een hyperbool gaat (dat deel van de rechtertak in eerste kwadrant) waarvan de toppen op de horizontale n-as liggen. Zie figuur 2.



figuur 2

Je ziet al snel het mooie roosterpunt (8, 6): $n = 8$ en $k = 6$. Dit hebben we al eerder gezien. Maar n moet groter zijn dan 50, jammer!



figuur 3

Punt D, zie figuur 3, lijkt heel mooi. (288, 204): $k = 204$ en $n = 288$. *Som*(*lager*) = 20706 en *Som*(*hoger*) $= (1 + ... + 84) + (84 \times 204) = 20706$.
Kassa! Het huisnummer is 204 en de straat bestaat uit 288 huizen. Wellicht vind je zelf het roosterpunt (45, 35). Dat voldoet dan weer niet. Elegant is dit grafisch oplossen natuurlijk niet. Is er een andere aanpak? Terug naar de vergelijking $2k^2 = n^2 + n$!

Diophantische vergelijking $2k^2 = n^2 + n$

figuur 4 Diophantus van Alexandrië

Weet je het nog? Een Diophantische vergelijking is een veeltermvergelijking waarbij zowel de coëfficiënten als de oplossingen gehele getallen moeten zijn. Hoe lossen we de Diophantische vergelijking $2k^2 = n^2 + n$ op?
n staat voor het aantal huizen in die straat en k voor het huisnummer van die vriend.
Ik moest denken aan de zomercursus van 2010, waar Frits Beukers een voordracht hield onder de titel: 'Diophantische vergelijkingen. Een onmogelijke uitdaging'. Hij had het over Pell-vergelijkingen, een speciaal soort Diophantische vergelijkingen.

We herschrijven $2k^2 = n^2 + n$ totdat we een Pell-vergelijking krijgen. Ik gebruik even de variabelen u en v. Een voorbeeld van zo'n Pell-vergelijking is: $u^2 - v^2 = 1$. Wat algemener: $u^2 - N \cdot v^2 = 1$ waarbij N een natuurlijk getal is dat geen kwadraat mag zijn. u en v zijn gehele getallen die groter of gelijk aan nul zijn. We beginnen met herschrijven met behulp van kwadraat afsplitsen.

$$(n+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} = 2k^2$$
$$(n+\tfrac{1}{2})^2 - 2k^2 = \tfrac{1}{4}$$
$$4(n+\tfrac{1}{2})^2 - 8k^2 = 1$$
$$(2n+1)^2 - (2\sqrt{2}k)^2 = 1$$

Nu hebben we de juiste vorm.
Stel $u = 2n + 1$ en $v = 2\sqrt{2}k$ dan:
$u^2 - v^2 = 1$ of $(u + v)(u - v) = 1$.
Stel $a = u + v$ dan
$u - v = 1/a \rightarrow 2u = a + 1/a \rightarrow u = ½(a + 1/a)$.
Zo vind je ook $v = ½(a - 1/a)$.
Nu kunnen we k en n uitdrukken in a:
$u = 2n + 1 = ½(a + 1/a)$.

$$n = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4a} - \tfrac{1}{2} \text{ en } k = \frac{v}{2\sqrt{2}} = \frac{\tfrac{1}{2}(a - \tfrac{1}{a})}{2\sqrt{2}}.$$

Maar hoe nu verder? Hoe kies je a zodat je gehele oplossingen krijgt?
Vermoeden: a wordt toch een irrationaal getal van de vorm $c + d\sqrt{2}$. Die $\sqrt{2}$ gooit roet in het eten, of toch niet?
Ik zat vast met mijn aanpak. Terug naar Frits Beukers. Hij schreef het boek *Getaltheorie voor Beginners*. Beginners? Wat een bescheidenheid. Hoofdstuk 15 gaat over de vergelijking van Pell en dat bracht mij verder.

Nieuwe poging

We bleven hangen bij het oplossen van de vergelijking $2k^2 = n^2 + n$. We proberen dit weer te schrijven in de vorm $u^2 - N \cdot v^2 = 1$ maar nu met $N = 2$.
Dat geeft: $u^2 - 2v^2 = 1$.
We gaan weer kwadraat afsplitsen:

$$4(n+\tfrac{1}{2})^2 - 8k^2 = 1$$
$$(2n+1)^2 - 2(2k)^2 = 1$$

Kies weer $u = 2n + 1$ en kies $v = 2k$ (hier zit de verandering) en we hebben de juiste vorm.
Een oplossing van $u^2 - 2v^2 = 1$: $u = 3$ en $v = 2$.
Invullen: $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 \rightarrow 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 1 \rightarrow$
$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$.
Voor de vergelijking $u^2 - 2v^2 = 1$ kunnen we dus schrijven $(u + v\sqrt{2})(u - v\sqrt{2}) = 1$.
Je kunt kwadrateren, derdemacht nemen, enzovoort van het linkerlid, maar de uitkomst blijft 1.
We kwadrateren: $(3 + 2\sqrt{2})^2(3 - 2\sqrt{2})^2 = 1$. Uitwerken: $(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 1$. Een oplossing: $u = 17$ en $v = 12$.

Dat betekent $n = 8$ en $k = 6$, maar het aantal huizen moet groter zijn dan 50...
We kwadrateren weer: $(17 + 12\sqrt{2})^2(17 - 12\sqrt{2})^2 = 1$.
Uitwerken: $(577 + 408\sqrt{2})(577 - 408\sqrt{2}) = 1$. Oplossing: $u = 577$ en $v = 408$. Dat betekent met $u = 2n+1$ dat $n = 288$. v = 2k dus $k = 204$. Hoera, we hebben een oplossing!

Is er nog een oplossing?

We nemen de vijfde macht van
$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$:
$(3 + 2\sqrt{2})^5(3 - 2\sqrt{2})^5 = 1$.
Als we dit uitwerken krijgen we
$(3363 + 2378\sqrt{2})(3363 - 2378\sqrt{2}) = 1$.
$u = 2n + 1 = 3363$. Dat geeft $n = 1681$ en dat is meer dan 500. Merk op dat $v = 2k = 2378$ en dat geeft $k = 1189$. Voor controle vullen we dat in de vergelijking $2k^2 = n^2 + n$ in. Zowel linker- als rechterlid geeft de waarde 2827442. Zijn we er nu wel zeker van dat er één oplossing is voor $50 < n < 500$? Dat mag je zelf nagaan...

Tot slot

De vraag is natuurlijk hoe de Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan dat probleem van Leuven oploste? Het schijnt dat hij dat gedaan heeft – we weten het niet zeker - met behulp van kettingbreuken. Daar is ook weer een Zebraboekje (deel 33) over. Dat deel is geschreven door Martin Kindt en Piet Lemmens. Maar veel leuker zijn de worstelingen van geïnteresseerde leerlingen en collega's. En gaat het net niet zoals in de kunst? De worsteling is belangrijker dan het uiteindelijke product. Ik nodig je uit om je leerlingen of collega's uit te dagen. Geef ons ook een bericht als je een huis bewoont met de vermelde eigenschappen van het probleem van Leuven. Ik doe er wel een andere beperking bij. Het huisnummer moet groter zijn dan tien. Dan heeft de redactie een fles wijn voor jou of een leuk boekje van Sherlock Holmes ....

Noten

[1] Guigelaar, J., Levrie, P. & Vanhommerig, R. (2020). *De dikke Pythagoras*. Lannoo.
[2] Beukers, F. (2005). *Getaltheorie voor Beginners*. Epsilon.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*.

Dick Klingens

Meetkunde - eenvoudig, of toch niet?

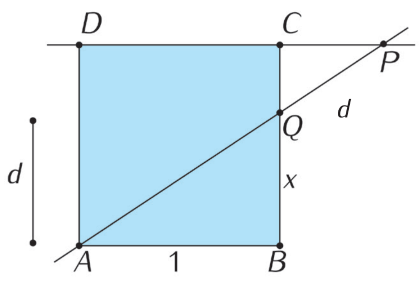
Een eenvoudig ogende opgave blijkt toch ingewikkelder te zijn.

Jammer

De ruimte die de vlakke meetkunde in het leerplan wiskunde voor havo/vwo inneemt, is in de loop der jaren kleiner geworden, en daarmee neemt natuurlijk ook de vaardigheid in het oplossen van meetkundeproblemen af – ook die van wiskundeleraren. Wat dat op termijn betekent voor de (vul maar in) wiskunde, wetenschap, samenleving, ..., daarover heb ik wel mijn gedachten. Het enige wat ik er *hier* over kwijt wil, is dat het jammer is. Die gedachten kwamen bij mij op toen mij door een (jongere) oud-collega het volgende, eenvoudig ogende en hierna te bespreken constructieprobleem werd voorgelegd.

Gevraagd

Zie figuur 1. Gegeven is een vierkant $ABCD$ en een lijnstuk (met lengte) d. Op de lijn DC moet het punt P en op BC het punt Q zó geconstrueerd worden – uiteraard met passer en liniaal (p&l) – dat A, Q en P collineair zijn én $PQ = d$.



figuur 1

Oplossing?

Met het plaatje erbij lijkt de oplossing inderdaad voor de hand te liggen (eenvoudig ogend). De driehoeken ABQ en PCQ zijn gelijkvormig. Als je dan voor het gemak $AB = 1$ stelt en $BQ = x$, dan is $AQ = \sqrt{(1 + x^2)}$, zodat uit $BQ : CQ = AQ : PQ = AB : CP$ volgt dat:

(1) $x : (1 - x) = \sqrt{(1 + x^2)} : d$

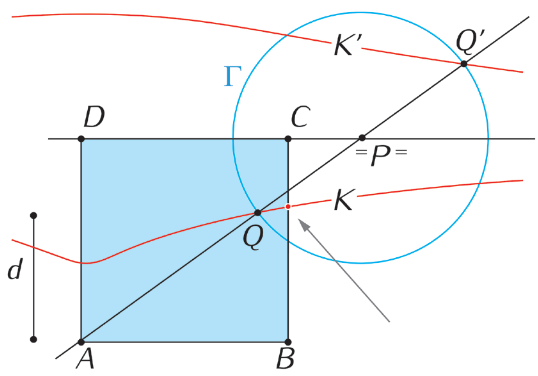
Maar dit leidt tot een vierdegraads vergelijking in x! ... En in $BQ : CQ = AB : CP$ zit naast x ook CP als onbekende. Evenwel, uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABQ en PDA volgt:

$AB : PD = BQ : DA$ of $1 : PD = x : 1$, zodat:

(2) $PD = \dfrac{1}{x}$

En deze relatie speelt, zoals aan het einde zal blijken, een belangrijke rol.

Dan toch maar verder werken met relatie (1)? Nog even niet. Eerst nog een ander plaatje, zie figuur 2, waarin het punt P 'wandelt' over de lijn CD en de meetkundig plaatsen K, K' worden getekend [1] van de snijpunten Q, Q' van de lijn AP met de cirkel Γ met middelpunt P en straal d.



figuur 2

Tja, het probleem zou 'GeoGebra-oplosbaar' zijn als het snijpunt van die meetkundige plaats met BC, het punt Q in figuur 1, zou kunnen worden bepaald;[2] maar dat is dan *niet* met p&l! De constructie van de meetkundige plaats heeft overigens wel een bijzondere naam: *neusis* (ook wel neusis-constructie).[3, 4]

Oplossen van de vergelijking

Dus zit er niets anders op dan verder te gaan met de vergelijking die volgt uit de eerdergenoemde gelijkvormigheid. Kwadrateren van relatie (1) gevolgd door ordenen geeft:[5]

(3a) $x^4 - 2x^3 + (2 - d^2)x^2 - 2x + 1 = 0$

Merk op dat de coëfficiënten in (3a) symmetrisch (*palindromisch*[6]) zijn: 1, -2, $(2 - d^2)$, -2, 1.

Dat biedt mogelijkheden voor de substitutie $x + \frac{1}{x} = y$, na deling door x^2:

(3b) $x^2 - 2x + (2 - d^2) - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

En vervolgens, iets anders gerangschikt:

$(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 2(x + \frac{1}{x}) - d^2 = 0$,

zodat: $y^2 - 2y - d^2 = 0$

Omdat $y > 0$ is, volgt hieruit:

(4a) $y = 1 + \sqrt{(1 + d^2)}$

Het aangename is dat het lijnstuk y in ieder geval p&l-construeerbaar is.

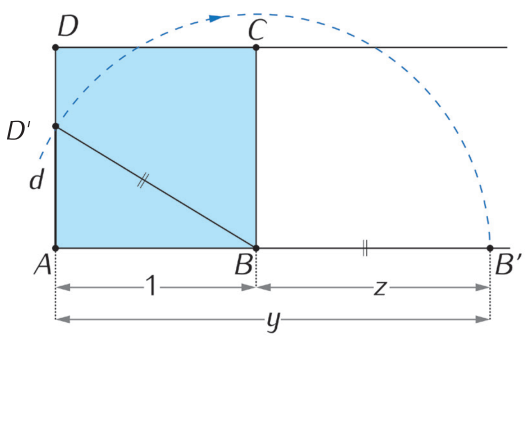
Stel in (4) namelijk $z = \sqrt{(1 + d^2)}$. Dan volgt daaruit dat $z^2 = 1 + d^2$ is. In een rechthoekige driehoek kan dan z, en dus ook $y = 1 + z$, worden gevonden.

Zie daarvoor figuur 3, waarin:

(4b) $AD' = d$, $BD' = \sqrt{(1 + d^2)} = z = BB'$

En inderdaad, via de cirkel (B, BD') is:

(5) $y = 1 + z = AB'$



figuur 3

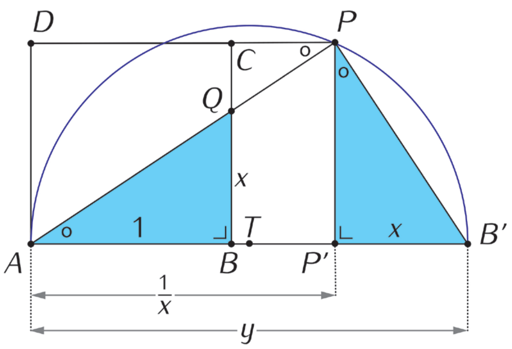
En dan moet met *die* y het lijnstuk x op basis van de relatie $x + \frac{1}{x} = y$ worden geconstrueerd. Maar, kan dat wel met p&l?

Een driehoekje erbij

Nu kan ik en ga ik gebruik maken van relatie (2):

$DP = \frac{1}{x}$

In mijn 'analysefiguur' – deze staat in figuur 4 – is P' het voetpunt van de loodlijn uit P op AB. Dan is ook $AP' = \frac{1}{x}$, met als gevolg dat $P'B' = x$, immers $x + \frac{1}{x} = y = AB'$.

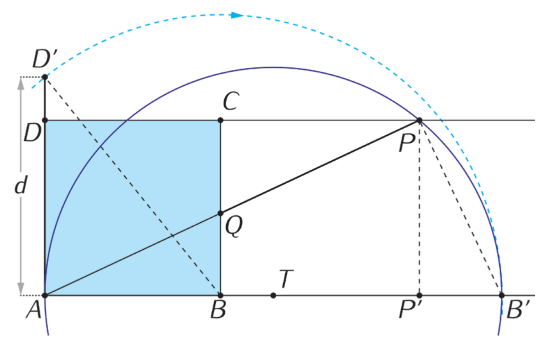


figuur 4

Met $AB = 1 = PP'$ en $BQ = x = P'B'$ zijn de driehoeken ABQ en $PP'B'$ congruent (ZHZ). In die driehoeken is dan $A = P$, zodat Ð$APB' = 90^\circ$.

Daarmee ligt het punt P dus op de Thales-cirkel met AB' als middellijn (middelpunt T). En dan is het punt P met p&l te construeren als snijpunt van die cirkel met de lijn DC. De constructie van het punt Q is daarna triviaal.

De gehele p&l-constructie is nog eens opgenomen in figuur 5, waarin de lengte van het gegeven lijnstuk d (= AD') nu groter is dan 1 (dus groter dan AD).



figuur 5

Wat zo eenvoudig oogde – en eigenlijk nog – eiste toch echt wel wat!

>

Naschrift

En toen ik het bovenstaande in klad op papier had gezet, keek ik ook maar eens in de literatuur naar de constructie met de neusis en naar de conchoïde.[1]
In [7], pag. 412 vond ik bij een stelling van Pappos van Alexandrië (290–350) een plaatje dat overeenkomt met figuur 4. En bij het lezen van de naam Nikomedes (de ontdekker van de kromme van figuur 2.) herinnerde ik me dat ik ooit (het bleek in 2005 te zijn) een stukje schreef over diens conchoïde – het had een paragraaf in een Zebra-boekje moeten worden. Ook hiervan is in de appendix het een en ander terug te vinden, namelijk in de paragrafen 4 (met het bedoelde plaatje), 5 en 6.
En mijn oud-collega? Die heb ik niet alleen op de geschiedenis van het probleem gewezen, maar natuurlijk ook een kopietje van mijn uitwerkingen gegeven.

Een appendix bij dit artikel vind je op de *Euclides*-site.
vakbladeuclides.nl/977meetkunde_eenvoudig

De artikelen die Dick voor *Euclides* schreef in één pdf:
vakbladeuclides.nl/977dickklingens

Met dank aan Martin Kindt voor het redigeren van dit artikel.

Noten

[1] De naam van de tweedelige meetkundige plaats is conchoïde. Nikomedes (± 280 – ± 210 v. Chr.) gebruikte zo'n kromme om het probleem van de verdubbeling van de kubus (het zogeheten Delisch probleem) op te lossen, een probleem waarvan sinds 1837 (Pierre Wantzel) bekend is dat het niet p&l-construeerbaar is. Zie bijvoorbeeld op Wikipedia: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Verdubbeling_van_de_kubus Etymologie. Conchoïde < Gr.* kogcoeidhς (koncho-eidès), (een lijn) gelijkend op een schelp. Een vroeger gebruikt woord voor conchoïde is schulplijn.

[2] Het programma GeoGebra heeft (nog?) geen functie waarmee direct een snijpunt van een meetkundige plaats met een ander meetkundig object kan worden gevonden.

[3] De methode werd in de klassieke oudheid toegepast met een neusisliniaal bij constructies die niet met p&l uitvoerbaar waren. In figuur 2 fungeert de lijn AQ' als zodanig. Voor een verdere toelichting zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Neusis Etymologie.* Het woord 'neusis' komt van het Griekse werkwoord neueiv (neu-ein), dat 'neigen' betekent; wiskundig gebruikt als 'inschuiven'. Zie ook: Meskes, A. & Tytgat, P. (2015). *Met passer, liniaal en neusislat.* Zebra 41. Epsilon.

[4] Zie paragraaf 2 in de appendix voor een analytische afleiding van de vergelijking van een conchoïde.

[5] In de appendix staat in paragraaf 1 ook een stukje analytische meetkunde dat tot dezelfde vierdegraads vergelijking leidt.

[6] Een algemene behandeling van zo'n vergelijking staat in paragraaf 3 van de appendix.

[7] Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics.* New York (USA): Dover Publications, reprint 1981; vol. II, pp. 412-416.

Over de auteur

Dick Klingens overleed in mei 2021. Dit is een van de drie laatste artikelen die hij de redactie van *Euclides* stuurde, die we, met toestemming van zijn nabestaanden, postuum mogen publiceren.

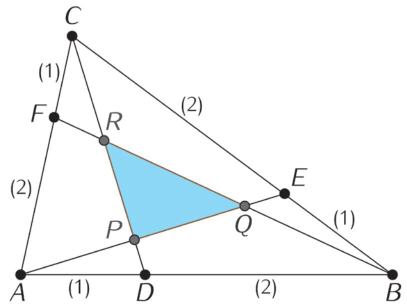
Fred Muijrers

Route naar Routh

Drie lijnen door de hoekpunten van een driehoek kunnen door één punt gaan, zwaartelijnen bijvoorbeeld, maar ook een driehoek vormen. Wat is de oppervlakte daarvan?
Van vanzelfsprekendheid via verbazing naar verkenning en verdieping.

Inleiding

Jaren geleden was op WDR3, het derde Duitse tv-net, een soort Teleac-cursus over wiskunde. Dit type onlineles, rond 1975(!), eindigde steevast met een probleem voor thuis. Bij figuur 1 werd gevraagd de oppervlakte te bepalen van ΔPQR ten opzichte van de oppervlakte van ΔABC. De getallen zijn verhoudingsgetallen.

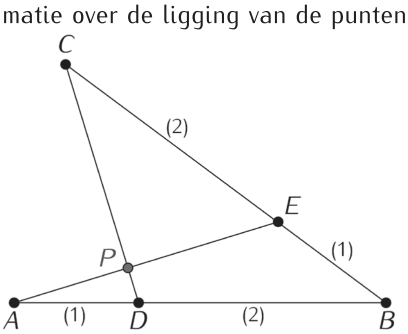


figuur 1

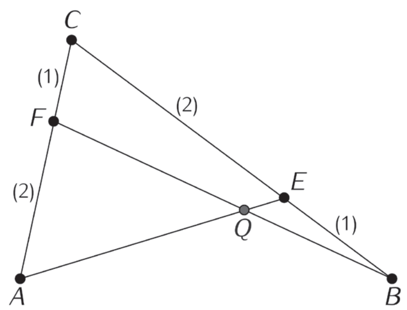
Aan de lezer om eerst zelf een antwoord te vinden of te schatten. In een cursus gaven vrijwel alle studenten snel als antwoord 'zal wel een zesde deel zijn'. Bij controle met GeoGebra was men verbaasd. Hé, dat klopt niet. Hoe zit het dan?

Een analyse

De kern van het probleem is de bepaling van de ligging van de punten P, Q en R. Hiervoor is de stelling van Menelaos [1] te gebruiken. De lijn door C en D is een transversaal van ΔABE, zie figuur 2. BF is een transversaal van ΔACE, zie figuur 3. De stelling geeft nu informatie over de ligging van de punten P en Q.



figuur 2



figuur 3

$$1 = \frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BC|}{|CE|}\cdot\frac{|EP|}{|PA|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{|EP|}{|PA|}.$$

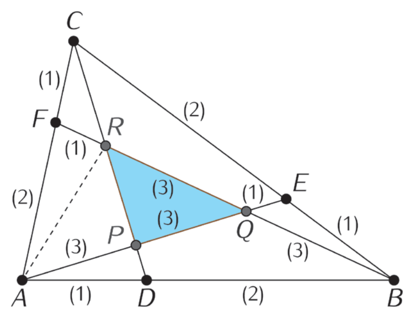
Hieruit volgt: $\frac{|PA|}{|PE|} = \frac{3}{4}$ dus $|PA| = \frac{3}{7}|AE|$.

Analoog geldt voor BF bij ΔACE:

$$1 = \frac{|AF|}{|FC|}\cdot\frac{|CB|}{|BE|}\cdot\frac{|EQ|}{|QA|}.$$

En er volgt: $\frac{|AQ|}{|QE|} = \frac{6}{1}$ dus $|QE| = \frac{1}{7}\cdot|AE|$.

Bijgevolg geldt: $|PQ| = \frac{3}{7}\cdot|AE|$. Hiermee hebben we gevonden dat $|AP| : |PQ| : |QE| = 3 : 3 : 1$.
Met deze verhouding ook voor de ligging van de punten op de andere transversalen, zie figuur 4, kunnen we nu de oppervlakte van ΔPQR gaan bepalen.



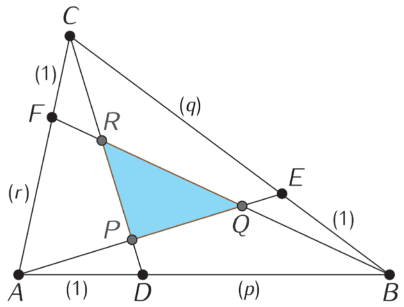
figuur 4

$$O(\triangle PQR) = \frac{3}{6}\cdot O(\triangle AQR) = \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot O(\triangle AQF) =$$
$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\cdot O(\triangle ABF) =$$
$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot O(\triangle ABC) = \frac{1}{7}\cdot O(\triangle ABC).$$

We maken hierbij gebruik van het feit dat oppervlaktes van driehoeken met gelijke hoogtes zich verhouden als hun bases. Een verrassend resultaat ook voor mijn studenten.

Algemener: de formule van Routh

De aanpak hiervoor is eveneens te gebruiken voor een driehoek als in figuur 5.



figuur 5

Er volgt nu:

$\frac{|PA|}{|PE|} = \frac{1+q}{pq}$ en $\frac{|AQ|}{|QE|} = \frac{r(1+q)}{1}$.

Analoog aan het concrete voorbeeld vinden we:

$$|AP| = \frac{1+q}{pq+q+1} \cdot |AE| \text{ en}$$

$$|QE| = \frac{1}{qr+r+1} \cdot |AE| \text{ en}$$

$|PQ| = |AE| - |AP| - |QE|$.

Na uitwerking:

$$|PQ| = \frac{(q+1)(pqr-1)}{(pq+q+1)(qr+r+1)} \cdot |AE|.$$

Conclusie: $|AP| : |PQ| : |QE| =$
$(q + 1)(qr + r + 1) : (q + 1)(pqr - 1) : (pq + q + 1)$. [∗]

Voor de punten Q en R op lijn BF vinden we snel soortgelijke uitdrukkingen: wijzig p in q, q in r en r in p. We vinden voor de driehoeken in figuur 5 met

$$|AQ| = |AP| + |PQ| = \frac{r(q+1)}{qr+r+1} \cdot |AE|:$$

$$O(\triangle PQR) = \frac{|PQ|}{|AQ|} \cdot \frac{|RQ|}{|FQ|} \cdot \frac{|FQ|}{|BF|} \cdot \frac{|AF|}{|AC|} \cdot O(\triangle ABC) =$$

$$\frac{(q+1)(pqr-1)}{r(q+1)(pq+q+1)} \cdot \frac{(r+1)(pqr-1)}{(qr+r+1)(rp+p+1)} \cdot \frac{r}{(r+1)} \cdot O(\triangle ABC) =$$

$$\frac{(pqr-1)^2}{(pq+q+1)(qr+r+1)(rp+p+1)} \cdot O(\triangle ABC).$$

Fraaie symmetrie zit in deze formule van Routh [2].

Meer resultaten

Voor $p = q = r$ volgt:

$$O(\triangle PQR) = \frac{(p^3-1)^2}{(p^2+p+1)^3} \cdot O(\triangle ABC) =$$

$$\frac{(p-1)^2}{p^2+p+1} \cdot O(\triangle ABC).$$

En voor $p = 2$ krijgen we inderdaad de verhouding 1 : 7. Overigens krijgen we deze verhouding ook voor de waarde $p = ½$. Dat is logisch en volgt tevens uit de formule. We kiezen $p \geq 1$.
Wanneer krijgen we de verhouding 1 : 6? Enig herschrijven laat zien dat dan geldt: $5p^2 - 13p + 5 = 0$. Dat geeft $p = 2{,}131\ldots$ en deze p-waarde is uiteraard iets groter dan 2.
Als $p = \frac{m}{n}$ dan volgt:

$$O(\triangle PQR) = \frac{(m-n)^2}{m^2+mn+n^2} \cdot O(\triangle ABC).$$

Nemen we nu $m = n + 1$ dan volgt:

$$O(\triangle PQR) = \frac{1}{3n^2+3n+1} \cdot O(\triangle ABC).$$

Dat geeft het rijtje $p = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$
met oppervlakteverhoudingen 1 : 7, 19, 37, 61, … .
We gaan even terug naar de algemene formule.
Als $pqr = 1$, dan is de oppervlakte gelijk aan nul. $\triangle PQR$ is ‘verworden’ tot een punt en de drie lijnen uit de hoekpunten gaan door dat punt. In feite hebben we hiermee de stelling van Ceva bewezen. Die stelling luidt: drie lijnen uit de hoekpunten van $\triangle ABC$ zijn concurrent dan en slechts dan als

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} \left(= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r}\right) = 1.$$

Voor $p = q = r = 1$ vinden we als bonus: de drie zwaartelijnen gaan door één punt (Z) en er geldt dat $|AZ| : |ZE| = 6 : 3 = 2 : 1$. Zie [∗].

Bijvangst

In figuur 5 kijken we naar $\triangle DEF$. Soortgelijk aan de aanpak voor $O(\triangle PQR)$ vinden we:

$$O(\triangle ADF) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{r}{r+1} \cdot O(\triangle ABC).$$

Analoog voor $O(\triangle DBE)$ en $O(\triangle ECF)$. Hiermee volgt:

$$O(\triangle DEF) = \left(1 - \frac{1}{p+1} \cdot \frac{r}{r+1} - \frac{1}{q+1} \cdot \frac{p}{p+1} - \frac{1}{r+1} \cdot \frac{q}{q+1}\right) \cdot O(\triangle DEF) =$$

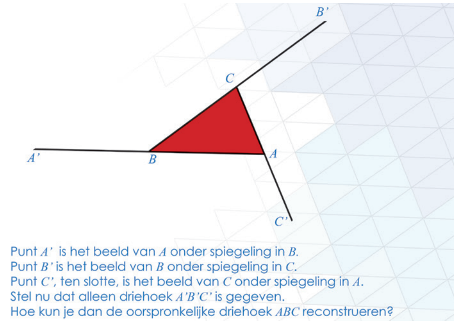
$$\frac{pqr+1}{(p+1)(q+1)(r+1)} \cdot O(\triangle ABC).$$

Ook fraai. Voor $p = q = r = 1$ krijgen we uiteraard de verhouding 1 : 4.

Kan de oppervlakte van $\triangle DEF$ gelijk zijn aan nul? Ja, dat kan mits D, E en F op één lijn liggen. Kies bijvoorbeeld D op het verlengde van BA. In onderscheid met D tussen A en B voorzien we $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{1}{p}$ nu van een minteken: $\overrightarrow{AD}$ en $\overrightarrow{DB}$ zijn tegengesteld gericht. Er kan dan volgen: $pqr = -1$. Feitelijk hebben we hier de stelling van Menelaos voor georiënteerde lijnstukken geformuleerd.

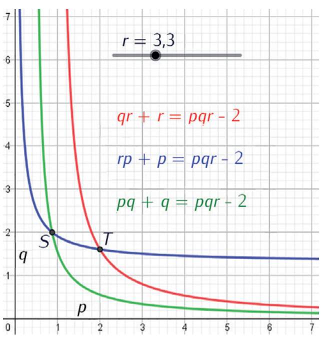
Een kanon op een mug

Op de achterkant van de gedrukte oratie van Paul Drijvers[3] staat een leuk probleem, zie figuur 6.



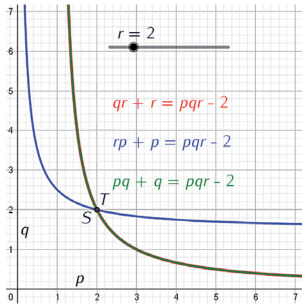
figuur 6

$\triangle PQR$ is niet gegeven maar wel $\triangle ABC$, waarbij de letters van de hoekpunten zijn aangepast aan voorgaand verhaal. Verder is gegeven dat A spiegelpunt is van Q in P, B spiegelpunt van R in Q en C spiegelpunt van P in R. Gevraagd is $\triangle PQR$ te (re)construeren. Dit kan door direct Menelaos te gebruiken maar ook met resultaten uit de route naar de formule van Routh: na al dat voorwerk een toepassing! Daarbij werken we in een driehoek als in figuur 5. In feite redeneren we van achter naar voren. Vooralsnog geldt dat p, q en r zouden kunnen verschillen. Als $|AP| = |PQ|$ dan moet gelden: $qr + r + 1 = pqr - 1$. Zie [$\ast$].
Als $|BQ| = |QR|$ dan moet gelden: $rp + p + 1 = pqr - 1$.
Als $|CR| = |RP|$ dan moet gelden: $pq + q + 1 = pqr - 1$.
We zoeken nu positieve waarden van p, q en r die aan deze drie vergelijkingen voldoen.
Nader onderzoek met *GeoGebra*, zie de figuren 7 en 8, laat zien dat na keuze van r altijd voor punt S geldt $q = 2$ en altijd voor punt T geldt $p = 2$. S en T vallen samen



figuur 7 Geen gemeenschappelijk snijpunt van de drie krommen bij deze waarde van r.

in het geval dat $r = 2$ en er geldt dan dat $p = q = 2$. Daarmee liggen D, E en F als snijpunten van de lijnen uit C, B en A vast op de zijden van $\triangle ABC$ en is $\triangle PQR$ te construeren. Het gaat blijkbaar om een driehoek als in figuur 1 en dat vermoedde de lezer waarschijnlijk al.

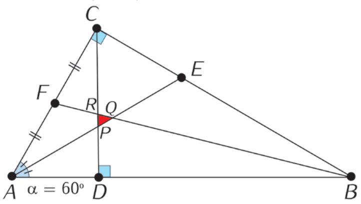


figuur 8 Wel een gemeenschappelijk snijpunt van de drie krommen bij deze waarde van r.

Mooi hoe meetkunde, algebra en grafisch onderzoek hier goed samengaan.

Afsluiter in WDR3-stijl

In figuur 9 is AE een bissectrice, BF een zwaartelijn en CD een hoogtelijn. Hoe verhouden de oppervlaktes zich nu?



figuur 9

En wie de smaak te pakken heeft kan laten zien, dat $\frac{1}{6}$ de kleinste bovengrens van die verhouding is bij variatie van hoek α in de rechthoekige $\triangle ABC$. Dat kan met maar ook zonder de formule! Tja, denkactiviteiten in tijden van corona.

Noten

[1] Zie: Bottema, O. (2010). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*, Hoofdstuk XIX. Epsilon: Utrecht. De stelling is iets subtieler dan hier geformuleerd.

[2] Edward John Routh (1831-1907) was een Britse wiskundige en begeleider van studenten aan de Universiteit van Cambridge.

[3] Oratie 'Denken over wiskunde, onderwijs en ICT' (2015), Paul Drijvers.
Zie: *https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/315607*

Over de auteur

Fred Muijrers was tot zijn pensioen lerarenopleider aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
E-mailadres: *fmuijrers@yahoo.com*

Vastgeroest
Taal bij wiskunde

Ab van der Roest

In de afgelopen week was er een drietal momentjes in mijn lessen die met taal te maken hebben. Eigenlijk vier, maar het moment waarop ik een vraag totaal verkeerd las, druk ik liever achterover. Maar docenten moeten eerlijk zijn en daarom begin ik maar met het vierde voorval. In 4 vwo stond in een oefenopgave de volgende vraag: ‘In welke maand was het aantal bezoekers per dag op de reguliere website voor het eerst minder dan 5000 meer dan op de mobiele website?’ Minder en meer in één vraag vraagt natuurlijk om moeilijkheden, en zo’n vraag zou je niet moeten stellen. Maar helaas de vraag stond in de opgave. Wiskundig herleiden we het probleem tot $R = M + 5000$ of tot $M = R + 5000$. Een bron voor verwarring en ik ging dus het verkeerde pad in.

Reflectie

Nee dit voorval heb ik niet in gedachte. In dezelfde oefentoets moest er met behulp van lineair extrapoleren een waarde uitgerekend worden.

Gemiddeld aantal dagen ziekteverzuim per jaar			
	2005	2010	2013
55 – 65 jaar	10,5	11,0	10,4

Het ziekteverzuim in 2045 moest geschat worden. Niet zo moeilijk. We kijken naar de laatste twee kolommen en zeggen dat er een afname met 0,2 per jaar is. In 2045, 32 jaar na 2013, vinden we dan $10{,}4 - 32 \times 0{,}2 = 4{,}0$. Maar een tweede vraag stond er in de opgave bij: ‘Geef commentaar’. Dit deed Micha verzuchten dat zo’n vraag bij wiskunde nog nooit gesteld was. Op een of andere manier was er in de onderbouw nog nooit gereflecteerd op een verkregen antwoord en daarom vinden veel leerlingen dat zo’n vraag helemaal niet bij wiskunde gesteld mag worden. Taal gebruiken bij wiskunde is voor hen heel ongewoon. Jammer, want dan blijft wiskunde iets van boekjes en niet van het dagelijks leven.

Limieten

Een ander voorval gaat over limieten. Bij asymptoten en perforaties gebruiken we het limietbegrip. Leerlingen worden er vertrouwd mee gemaakt bij gebroken functies. Maar bij logaritmische en exponentiële functies kunnen we de limieten ook gebruiken. Een opgave over $f(x) = \ln(x^2)$ was aan de orde en dat was aanleiding om ook even over $f(x) = \ln(x)$ na te denken. Verschil tussen limiet naar een getal en limiet van bovenaf en onderaf naar een getal. Een leerling die waarschijnlijk een beelddenker is, begreep niets van ‘bovenaf’. We kijken toch naar x en die staat op de horizontale as. Probleem was weg toen ik van links en van rechts introduceerde. Wat ik altijd zeg, is verwarrend voor sommige leerlingen. Taal kan hier problemen geven.

> “Taal gebruiken bij wiskunde is voor leerlingen heel ongewoon.”

Kruispunt en snijpunt

Het laatste voorval gaat over kruisende lijnen. Nou ja, snijdende lijnen wordt er dan bedoeld. Een snijpunt wordt zelden een kruispunt genoemd, maar lijnen die snijden worden wel vaak door leerlingen als kruisend aangeduid. Ik leg dan uit dat we een kruispunt bij de Zandstraat en de Rondweg wiskundig een snijpunt moeten noemen en daar waar de A12 over de Rondweg gaat is wiskundig gezien een kruispunt. Overigens heeft zo’n kruispunt helemaal geen naam in de Nederlandse taal. Zo merk je maar weer dat de taal niet zo vanzelfsprekend is. En dan doet de GR ook nog een duit in het zakje. Hoe bepalen we het snijpunt van twee grafieken? Ja, precies met ‘calc intersect’ en dat terwijl een intersection een kruispunt is...

Over de auteur

Ab van der Roest is tot aan het eind van dit schooljaar docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering/studiedag 2022

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/ studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 5 november 2022**.

Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.

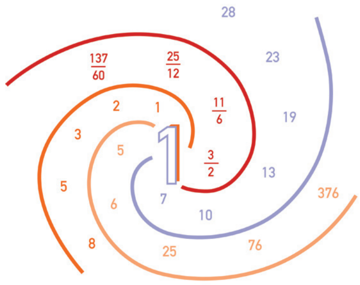
Thema studiedag: Wiskunde in eenheid

Met 1 valt veel te beleven: eenheden, eenheidscirkel, eenheidsvector, eenheidsmatrix, ja 1 is een bijzonder getal. Bij vermenigvuldiging van een getal met 1 krijg je hetzelfde getal als uitkomst, maar is dat altijd zo? 1 is het oudste wiskundige symbool, een kerf in het Ishango-beentje. Ga je in je lessen op zoek naar eenheid? Heeft iedere les 1 lesdoel? Maar 1 lesdoel kun je op meerdere manieren bereiken.

Oproep voor bijdragen

Met het thema 'Wiskunde in eenheid' kunnen we weer veel kanten op. We zijn op zoek naar workshopleiders voor de studiedag op 5 november. Het zou leuk zijn als *eenheid* op een of andere manier een centraal thema in je workshop is.
Denk bijvoorbeeld aan een wiskundige benadering van 1, maar andere invalshoeken zijn ook welkom. Om nog een idee te geven, eens moet de eerste keer zijn, wil je good practices delen met collega's met minder ervaring? Welke werkvormen kun je als beginnende wiskundeleraar inzetten en leveren die meteen de eerste keer een succes op?
Een ander didactisch thema is de rol van wiskunde in klas 1. De eerste klas van het voortgezet onderwijs is het startpunt van wiskunde in het voortgezet onderwijs. Leerlingen hebben vaak hoge verwachtingen van ons vak of zijn er juist onzeker over. In klas 1 zet je de trend m.b.t. de houding van leerlingen tot het vak en wat wiskunde is. Hoe geef je daar vorm aan?
Naast wiskundige en didactische onderwerpen zijn er ook maatschappelijke perspectieven op eenheid. Wat kunnen we in onze lessen doen om bij te dragen aan meer maatschappelijke eenheid in deze roerige tijd? We denken dan aan thema's als kansengelijkheid en achterstanden door corona. Hoe kunnen wiskundelessen hierin helpen?
Kortom, laat *Wiskunde in eenheid* een inspirerend thema zijn. We nodigen je graag uit om samen of in je eentje kennis en ervaringen te delen. We hopen dat deze studiedag weer één unieke gelegenheid biedt om elkaar te ontmoeten en te inspireren!
Heb je ideeën voor een workshop? Dan horen we die graag. Mail naar *studiedag@nvvw.nl*

Sharon Calor, Margot Rijnierse en Michiel Doorman



10.00-11.00 uur – Jaarvergadering (concept)agenda

1 Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange.
2 Jaarrede van de voorzitter
3 Notulen van de jaarvergadering van 6 november 2021
4 Jaarverslagen 2021/2022.
  4.1 Jaarverslag van de NVvW.
  4.2 Jaarverslag van *Euclides*.
5 Financiën
  5.1 Jaarrekening en balans 2021/2022
  5.2 Verslag kascommissie en decharge van de penningmeester
  5.3 Vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6 Bestuursverkiezing
7 Rondvraag
8 Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

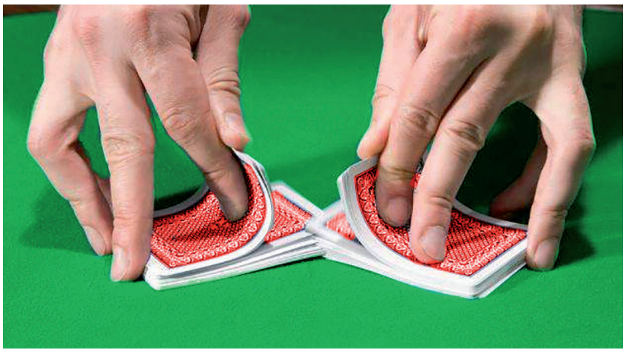
Nadere informatie volgt.
Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 5 november 2022.

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 5 november 2022. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree. (*hoofdbureau@nvvw.nl*).

Puzzel 97-7
Goochelen

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Misschien iets voor de laatste les voor de vakantie of voor vrienden en familie thuis. Bij deze puzzel kan kennis van getal- en groepentheorie misschien helpen maar is zeker niet noodzakelijk, maar modulo rekenen kan wel handig zijn. Wellicht een leuke toepassing bij wiskunde D?
Er liggen n kaarten op een voor een goochelaar bekende volgorde. Een toeschouwer trekt zonder dat de goochelaar dat kan zien een kaart en stopt die ergens in de stapel terug. De goochelaar schudt de kaarten een aantal keer en bekijkt dan de kaarten. Weet hij vervolgens welke kaart de toeschouwer had getrokken?
Hij gebruikt daarvoor de volgende schudmethode:



Splits de kaarten in twee gelijke of bijna gelijke stapeltjes en schuif ze om en om in elkaar. Dat kan door te zorgen dat of de bovenste kaart van het bovenste stapeltje daarna boven ligt, of de bovenste kaart van het onderste stapeltje komt boven. Zie de figuur hoe een ervaren schudder dat doet. Het schijnt dat je dat met een goed spel kaarten snel kan leren. Omdat het resultaat vastligt kan de goochelaar meestal bepalen welke kaart was getrokken.
Er zijn vier verschillende methoden van schudden:

n is even:
Methode A: De bovenste kaart wordt de op een na bovenste.
Methode B: De onderste en de bovenste kaarten blijven op hun plaats.

n is oneven
Methode C: De onderste kaart blijft onder.
Methode D: De bovenste kaart blijft boven.

Als de goochelaar meerdere keren schudt, gebruikt hij steeds dezelfde methode. Om formules te kunnen formuleren moet je de kaarten nummers geven, maar dat hoeft niet per se voor elke methode bij 1 te beginnen.

Opgave 1a: Bepaal voor methode A een zo eenvoudig mogelijke formule/methode om te bepalen waar een gegeven kaart na i keer schudden terechtkomt.

Opgave 1b: Als je een formule hebt voor methode A, dan kun je daar een recept voor de andere drie methoden uit afleiden. Bepaal zo formules voor alle vier de methodes.

Opgave 2a: Geef een methode om te berekenen hoe vaak je moet schudden (bij gegeven aantal kaarten n) met methode A tot de kaarten voor de eerste keer weer in de oorspronkelijke volgorde liggen, en leg uit dat het aantal keren dat je moet schudden nooit groter is dan n.

Opgave 2b: Hebben ze dan daarvoor al in omgekeerde volgorde gelegen? Hoe kun je dat bepalen? En geef een voorbeeld.

We kijken weer naar methode A:
In opgave 2 bepaalden we het aantal keren dat je moet schudden voordat bij een bepaald aantal kaarten n de kaarten weer in de oorspronkelijke volgorde liggen, en we zagen dat het aantal keren schudden nooit groter is dan n. Als het aantal keren dat geschud moet worden gelijk is aan n, dan noemen we het aantal keren schudden maximaal.

Het blijkt dat als $n + 1$ priem is de kaarten vaak na n ($= 2k$) keer schudden voor het eerst weer op hun plaats liggen, dus n is dan maximaal. Dat is echter niet altijd het geval, bijvoorbeeld voor $n = 42$, met $n + 1 = 43$ (priem).

Opgave 3a: Het aantal kaarten is dan even, dus $n = 2k$. Laat zien dat, als $2k + 1$ geen priemgetal is, het aantal keren schudden nooit maximaal kan zijn.
(Ook als opgave 3a niet lukt mag je natuurlijk bij de volgende vragen aannemen dat, als het aantal keer schudden maximaal is, $2k + 1$ priem moet zijn.)

Opgave 3b: Wat kun je zeggen over de volgorde van de kaarten na ½$n = k$ keer schudden als het aantal keren schudden voor n maximaal is?

Opgave 3c: Geef een functie waarmee je zo eenvoudig mogelijk kunt bepalen of voor een bepaalde n de volgorde na k keer schudden voldoet aan wat je vond in 3b. (3c geeft dus een noodzakelijke voorwaarde voor n maximaal, maar bewijst niet dat dat n maximaal is)

Opgave 3d: Dit is een extra opgave buiten de puntentelling. Als 3c geen uitsluitsel geeft of het aantal keren schudden maximaal is, hoe kun je daar dan wel uitsluitsel over krijgen?

Met methode B liggen 52 kaarten na acht keer schudden weer in de oorspronkelijke volgorde. Dat maakt methode B erg populair bij goochelaars!

Opgave 4: Bepaal het maximale aantal kaarten dat ook na precies acht keer schudden weer voor het eerst in de oorspronkelijk volgorde liggen met methode B. Geef ook een bewijs van je resultaat.

En dan de goocheltruc: de goochelaar hoeft daarvoor niet zo vaak te schudden dat de kaarten weer in de oorspronkelijke volgorde liggen.

Opgave 5a: Kan de goochelaar altijd precies weten welke kaart werd getrokken? Wanneer niet?

Opgave 5b: Een goochelaar oefent om de juiste kaart te vinden, ook als de kaarten nog niet in de oorspronkelijke volgorde liggen. Hij gebruikt een beperkt aantal kaarten, alleen schoppen aas, en schoppen 2 tot en met schoppen 10.

Nadat een kaart is getrokken en weer terug is gestopt, schudt hij een onbekend aantal keer en ziet het resultaat: schoppen aas, 8, 5, 3, 2, 9, 6, 4, 7, 10.
Bepaal welke kaart was getrokken en hoe vaak er is geschud, en dat met zo min mogelijk rekenwerk en/of geheugen van de goochelaar. Leg uit hoe je erachter bent gekomen.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 6 september 2022 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 97-5:
vakbladeuclides.nl/977puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerder puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Harm Bakker van harte met de ladderprijs.

Top 10 ladderstand t/m puzzel 97-5		
1	H. Bakker	160
2	J. Meerhof	138
3	F. van Hoeve	132
4	H. Huisman	117
5	H. Linders	115
6	J. van Doorn	110
7	J. Remijn	76
8	B. Dopheide	73
9	G. Bouwhuis	71
10	R. Stolwijk	64

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Martijn Schouw

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2022

Vr 26/08 Za 27/08 — Vr 02/09 Za 03/09

AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus wiskunde voor leraren
'Willekeur en structuur in netwerken'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Za 01/10

LEIDEN
Symposium Machtige verhalen
Organisatie: Werkgroep Geschiedenis NVvW

Za 05/11

VEENENDAAL
NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 98

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	14 september 2022	13 juni 2022
2	26 oktober 2022	22 augustus 2022
3	14 december 2022	10 oktober 2022
4	1 februari 2023	14 november 2022
5	15 maart 2023	2 januari 2023
6	3 mei 2023	27 februari 2023
7	21 juni 2023	24 april 2023

NIEUW!

Vanaf schooljaar 22/23
Getal & Ruimte
onderbouw 13e editie

Met digitale handschrift-herkenning

Meer weten over de 13e editie onderbouw?
Neem een kijkje op **getalenruimte.noordhoff.nl** en bestel gratis beoordelingsmateriaal om het lesmateriaal in te zien.

Noordhoff

Brengt je verder