Olympiadepuzzel

Euclides 97 nummer 4

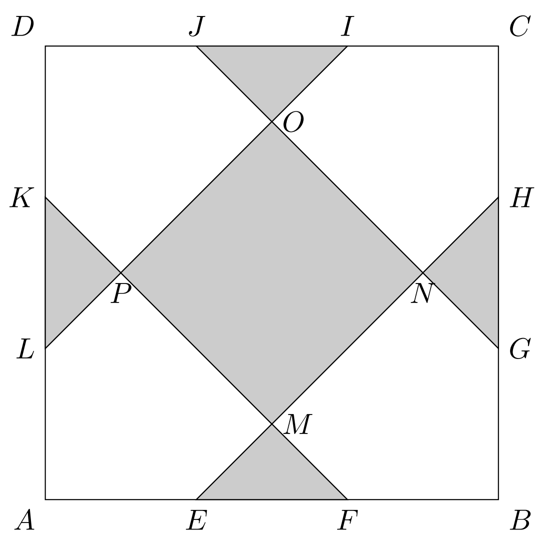
Vierkanten en driehoeken

Opgave

Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 1. De punten E, F, G, H, I, J, K en L liggen op de zijden van het vierkant zodat de lijnstukken EH, GJ, IL en KF evenwijdig zijn aan de diagonalen van het vierkant en $|AE| = |BG| = |CI| = |DK|$. Daarnaast is de oppervlakte van vierhoek $MNOP$ gelijk aan de som van de oppervlaktes van de driehoeken $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$.

Bepaal de lengte van lijnstuk EH.

(Het plaatje is niet op schaal getekend.)



Uitwerking

We tonen eerst aan dat de driehoeken $\triangle EBH$, $\triangle GCJ$, $\triangle IDL$ en $\triangle KAF$ congruent zijn.

Omdat EH evenwijdig is aan AC, is $\angle BEH = \angle BAC = 45°$. De hoek bij B is recht, dus driehoek $\triangle EBH$ heeft hoeken van 45°, 45° en 90°. Op dezelfde manier hebben $\triangle GCJ$, $\triangle IDL$ en $\triangle KAF$ hoeken van 45°, 45° en 90°. Omdat $|AE| = |BG| = |CI| = |DK|$, geldt ook dat $|EB| = |GC| = |ID| = |KA|$. De driehoeken hebben dus allemaal dezelfde hoeken en dezelfde rechthoekszijde, dus ze zijn congruent.

We kunnen nu op twee manieren berekenen dat $|EH| = 1$.

Oplossing 1

De driehoeken $\triangle EBH$, $\triangle GCJ$, $\triangle IDL$ en $\triangle KAF$ bedekken samen het vierkant $ABCD$ op de vierhoek $MNOP$ na, waarbij de driehoekjes $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$ tweemaal bedekt zijn. Er geldt dus dat

$$\begin{gathered}\mathrm{Opp}(\triangle EBH)+\mathrm{Opp}(\triangle GCJ)+\mathrm{Opp}(\triangle IDL)+\mathrm{Opp}(\triangle KAF)+\mathrm{Opp}(\triangle MNOP)=\\ \mathrm{Opp}(\triangle ABCD)+\mathrm{Opp}(\triangle EFM)+\mathrm{Opp}(\triangle GHN)+\mathrm{Opp}(\triangle IJO)+\mathrm{Opp}(\triangle KLP).\end{gathered}$$

Omdat gegeven is dat $ABCD$ zijde 1 heeft en dat $MNOP$ dezelfde oppervlakte heeft als $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$, kunnen we dit vereenvoudigen tot

$$\mathrm{Opp}(\triangle EBH)+\mathrm{Opp}(\triangle GCJ)+\mathrm{Opp}(\triangle IDL)+\mathrm{Opp}(\triangle KAF)=1.$$

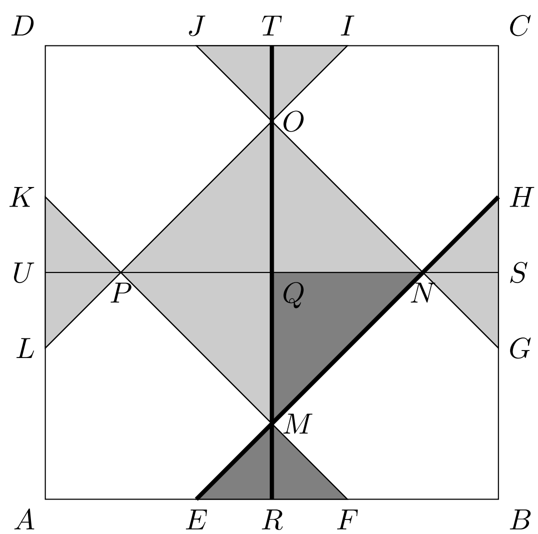
Uit de congruentie van $\triangle EBH$, $\triangle GCJ$, $\triangle IDL$ en $\triangle KAF$ volgt nu dat $\mathrm{Opp}(\triangle EBH)=\frac{1}{4}$. De oppervlakte van $\triangle EBH$ is gelijk aan $\frac{|EB|^2}{2}$, dus $|EB|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Het lijnstuk EH heeft dus lengte $\sqrt{2}\cdot|EB|=1$.

Oplossing 2

Merk op dat $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$ ook driehoeken met hoeken van 45°, 45° en 90° zijn. Daarnaast volgt uit $|EB|=|BH|$ dat $|CH|=1-|BH|=1-|EB|=|AE|$. Op dezelfde manier zijn ook $|BF|$, $|DJ|$ en $|AL|$ gelijk aan $|AE|$. De schuine zijdes van de driehoekjes $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$ zijn daarom allemaal gelijk aan $1-2\cdot|AE|$. De driehoekjes $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$ zijn dus ook congruent.

Omdat $\angle EMF=90°$, is ook $\angle NMP=90°$. Op dezelfde manier kunnen we aantonen dat de andere hoeken van vierhoek $MNOP$ recht zijn. Omdat $|EH|=|GJ|$ en $|EM|=|HN|=|GN|=|JO|$ is $|MN|=|NO|$. De vierhoek $MNOP$ is dus een vierkant.

Noem het middelpunt van het vierkant Q. De snijpunten van QM en QN met de zijdes van $ABCD$ noemen we respectievelijk R, S, T en U. De lijnen QM en QN delen het vierkant $MNOP$ in vier gelijke delen. Uit het gegeven dat de oppervlakte van $MNOP$ gelijk is aan de som van de oppervlaktes van $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$, volgt dat $\triangle QMN$ dezelfde oppervlakte heeft als $\triangle EFM$. Beide driehoeken hebben hoeken van 45°, 45° en 90°, dus ze zijn congruent.



Uit de congruentie van $\triangle QMN$ en $\triangle MEF$ volgt dat $|MQ| = |EM|$. Daarnaast is $|MN| = \sqrt{2} \cdot |MQ| = \sqrt{2} \cdot |EM|$. Hieruit volgt dat

$$|EH| = |EM| + |MN| + |NH| = (2 + \sqrt{2})|EM|.$$

Anderzijds geldt dat $|RM| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |EM|$ en dus

$$|RT| = |RM| + |MQ| + |QO| + |OT| = 2 \cdot |RM| + 2 \cdot |MQ| = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |EM| + 2 \cdot |EM| = (\sqrt{2} + 2) \cdot |EM|.$$

We zien dus dat $|EH| = |RT|$. Omdat $|RT|$ gelijk aan de zijde van vierkant $ABCD$, is $|EH| = 1$.

Inzenders met de juiste oplossing

Han Baumer, Rini van Bruchem, Marian van den Elshout, Gé Groenewegen, Kenneth Halman, Hans Linders, Jos Remijn, Ad Rijkers, Matthijs Schukking, Piet Smal, Auke Smid, Ruud Stolwijk, Monica Woldinga en Sjoerd van Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Piet Smal