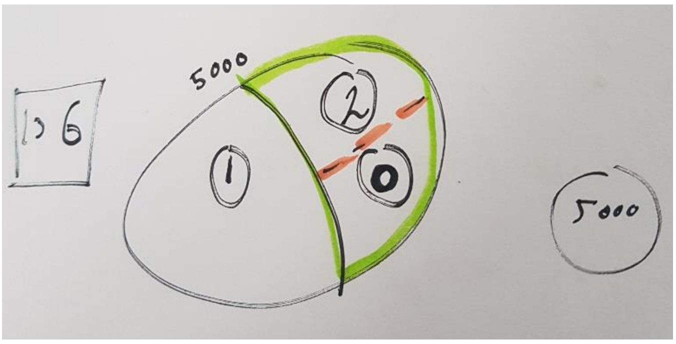
Uitwerkingen bij artikel Gemiddelden *Jacques Jansen*

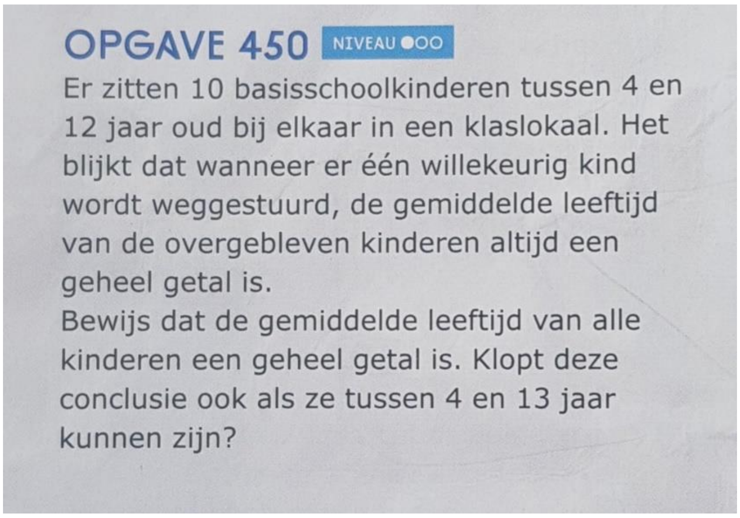
Het dooiersprobleem. Het is opgave 136 uit *De Dikke Pythagoras*.

We kijken naar dat deel met nul of twee dooiers. Daarvan is bekend dat de helft van de eieren nul dooiers heeft en de andere helft twee dooiers. Gemiddeld is dat per ei precies één dooier. In het overige deel is sprake van een dooier per ei. Gemiddeld heeft een ei een dooier. Er zijn dus in totaal vijfduizend dooiers.



Voor oudere leerlingen is wellicht het volgende probleem interessant.

Opgave 450 **Tien basischoolkinderen (**Pythagoras Nr 5 - 2021**)**


OPGAVE 450 NIVEAU ●○○

Er zitten 10 basisschoolkinderen tussen 4 en 12 jaar oud bij elkaar in een klaslokaal. Het blijkt dat wanneer er één willekeurig kind wordt weggestuurd, de gemiddelde leeftijd van de overgebleven kinderen altijd een geheel getal is.
Bewijs dat de gemiddelde leeftijd van alle kinderen een geheel getal is. Klopt deze conclusie ook als ze tussen 4 en 13 jaar kunnen zijn?

Door toevoeging van de tiende leeftijd moet het gemiddelde van alle tien de leeftijden hetzelfde blijven als van het gemiddelde van de eerste negen leeftijden. Maar je moet het voor alle realistische negenvouden controleren.

De leeftijden van de kinderen noemen we $x_1,\ x_2$....................x_{10}.

De som van de leeftijden van de eerste 9 leerlingen noemen we som_9. De totale som noemen we som_{10}. Het gaat eerst om leerlingen vanaf vier jaar tot en met twaalf jaar. som_9 moet een negenvoud zijn. Het kleinste negenvoud is 36. Het tienvoud dat het dichtste bij ligt is 40. Bij deze situatie zijn alle kinderen 4 jaar oud. Een tweetal van 3 en 5 kan niet. Vandaar dat bij som_9 van 36 de rij blauw gekleurd is. Zie tabel in figuur 1. Er is maar één rij mogelijk!!
Bij de volgende negenvoud zijn er tal van mogelijkheden. Zie tabel. Het tienvoud dat het dichtst bij 45 ligt is 50. Dus $x_{10} = 50 - 45 = 5$. Er zijn nu veel rijen mogelijk van de eerste 9 leeftijden. Dit gaat zo verder totdat we gekomen zijn bij negenvoud 108. Tienvoud 110 kan niet maar wel tienvoud 120. Alle leerlingen moeten nu 12 zijn. Er is maar een rij mogelijk. Als er ook leeftijden zijn van 13 zijn er weer meer mogelijkheden. Een tweetal leerlingen kan 11 en 13 zijn.

Bij een negenvoud van 117 (alleen voor de school met 4-13) moeten we een leerling van 13 toevoegen. In die situatie kun je alleen een rij van 13 maken.

Je moet steeds nagaan of het dichtstbijzijnde tienvoud realistisch is. En dat kan bij een school van 4-12 maar ook bij 4-13.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	som_9	som_{10}	x_{10}
1	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**36**	**40**	**4**
2	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**4**	**6**	**45**	**50**	**5**
3	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**5**	**7**	**54**	**60**	**6**
4	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**6**	**8**	**63**	**70**	**7**
5	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**7**	**9**	**72**	**80**	**8**
6	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**8**	**10**	**81**	**90**	**9**
7	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**9**	**11**	**90**	**100**	**10**
8	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**	**10**	**12**	**99**	**110**	**11**
9	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**12**	**11**	**13**	**108**	**120**	**12**
10	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**13**	**117**	**130**	**13**

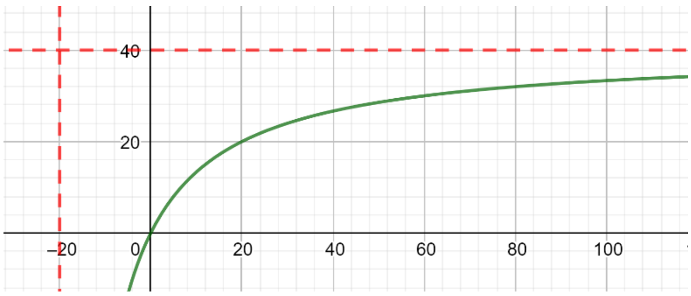
figuur 1

De daling van de wielrenster.

De gemiddelde snelheid bij de daling noemen we v. Totale gemiddelde snelheid noemen we y.

$y = \dfrac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{v}} = \dfrac{40v}{v+20}$. Hier herkennen we het voorschrift voor een hyperbool met de asymptoten v=-20 en y=40.

Conclusie: de totale gemiddelde snelheid van 40 km per uur is onmogelijk.



De juiste *p*-waarden voor de ontaarde gemiddelden minimum en maximum.

We kiezen a en b zo dat $a<b$. We weten dan $\lim\limits_{p\to\infty}(\frac{a}{b})^p = 0$.

$\lim\limits_{p\to\infty}(\dfrac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{p\to\infty}(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{p}} \cdot \lim\limits_{p\to\infty}(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} = 1\cdot b = b$ =Max(a, b). Immers voor alle x>0 geldt:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1$. En $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\dfrac{(\frac{a}{b})^p+1}{b^{-p}}\right)^{\frac{1}{p}} = b$.

Analoog $\lim_{p \to -\infty} (\frac{a^p + b^p}{2})^{\frac{1}{p}} = a$. a=Min(a, b)

Het gemiddelde van Hölder heeft de genoemde vier eigenschappen. Ze moeten wel even bewezen worden.

Het bewijs van de wisseleigenschap is triviaal. Nu nog het bewijs van de vierde eigenschap.

We gaan uit van twee positieve getallen *a* en *b*. Ik kies even *a*<*b*. Het minimum van *a* en *b* is dan *a* en het maximum is *b*.

Eerst voor p>0 .

We moeten aantonen dat $a < (\frac{a^p + b^p}{2})^{\frac{1}{p}} < b$ waarbij a<b. *p* is een positief reëel getal ongelijk aan nul. Merk op dat $a^p < b^p$.

We verheffen tot de macht *p*: $a^p < (\frac{a^p + b^p}{2}) < b^p$

Herschrijven: $2a^p < a^p + b^p < 2b^p$. Dit is juist omdat $a^p < b^p$.

Maar nu voor *p*<0! Nu geldt $a^p > b^p$.

We moeten bewijzen dat: $a < (\frac{a^p + b^p}{2})^{\frac{1}{p}} < b$.

We verheffen tot de macht *p*: $a^p > (\frac{a^p + b^p}{2}) > b^p$.

Dit vervangen we door: $2a^p > a^p + b^p > 2b^p$ en dit weer juist.