EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Waardering voor worstelen met opgaven

Bordjesmethode in de schijnwerpers

Bijzondere eigenschappen van parabolen

Verschillende gemiddelden

Leerlijn statistiek: een verkenning

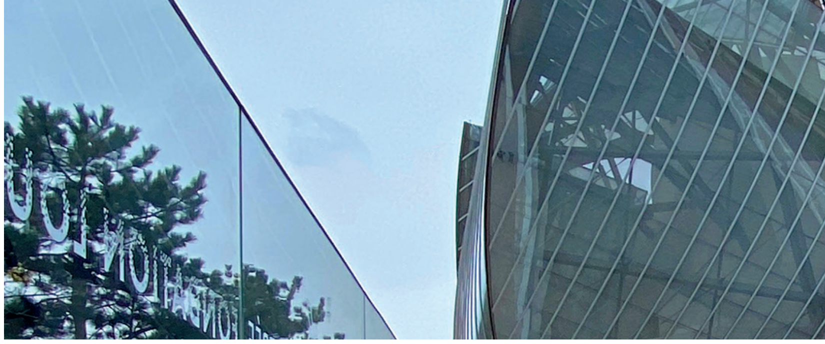
NR.6

JAARGANG 97 - MEI 2022

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR6



IN DIT NUMMER

Foto voorkant:
Het Fondation Louis Vuitton te Parijs. Architect: Frank Gehry.

Foto:
Heleen van der Ree

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

Rectificatie

In het artikel van Rogier Bos 'Van taxicab-getallen en algebraïsche raaklijnen' (*Euclides* 97-5) is een fout blijven staan. De auteur had aangeven dat de volgende zin op p. 36 weg moest:
'Een korte inspectie … negatief is.' Helaas is deze correctie niet doorgevoerd en is de zin blijven staan.

De redactie

Kort vooraf

Het is goed om bij te houden of we in een mooi wis- of natuurkundig 'gedenkjaar' zitten. Daar kan dan in het klein in dit Kort Vooraf bij worden stilgestaan, of in het groot door het gedenkjaar als aanleiding te nemen tot een symposium. Zo kunnen we rond 27 maart stilstaan bij de vijftigste sterfdag van MC Escher. Zelf ben ik niet zo gecharmeerd van de grafische grappen van Escher, maar wel van het feit dat zijn werk bol staat van wiskunde en dus een manier kan zijn om leerlingen op een speelse manier kennis te laten maken met symmetrie, vlakvullingen, meetkunde enzovoort. Een paar weken geleden hoorde ik op NPO radio 1 een interview met de veelzijdige Zwolse kunstenaar Dennie Boxem. Hij was, samen met meer dan 500 leerlingen en medewerkers van een school in Leeuwarden, een schilderij met Eschermotieven aan het maken, ter ere van de vijftigste sterfdag. Het klonk als een geweldig plan, eigenlijk meer geschikt om er een heel artikel aan te wijden, dan om het in het Kort Vooraf te melden. Hoe het afliep? Dat kun je in de rubriek Wis & Waarachtig lezen. En laat ik het diplomatiek houden: ik vind daar wat van …
In deze *Euclides* komt het twee keer voor dat twee artikelen mooi in elkaars verlengde liggen: het 'gemiddelde-probleem' dat de kern is van het artikel 'Heen- en weerreis bij vakdidactiek wiskunde' van Nelleke den Braber en Gerrit Roorda, wordt in de bijdrage van Jacques Jansen over gemiddelden in een breder perspectief geplaatst. Irene van Stiphout heeft het over 'globaal kijken' en de 'bordjes en formules' van Martin Kindt gaan daar weer dieper op in. Toeval? Dat dacht ik niet.
Geniet van het voorjaar en voor alle docenten in examenklassen: succes met de laatste loodjes!

Tom Goris

Nelleke den Braber, Gerrit Roorda

Heen- en weerreis bij vakdidactiek wiskunde

De vakdidactiekcolleges van Gerrit en Nelleke beginnen vaak met een korte wiskundeopdracht. De verschillende aanpakken van studenten leiden tot interessante gesprekken over vakdidactiek. Ook binnen jouw school of vaksectie kunnen dergelijke opgaven voer zijn voor een inspirerend didactisch gesprek. In dit artikel een voorbeeld waarin iets valt te leren over opvattingen over en emoties bij het oplossen van wiskundeopgaven.

De heen- en weeropgave

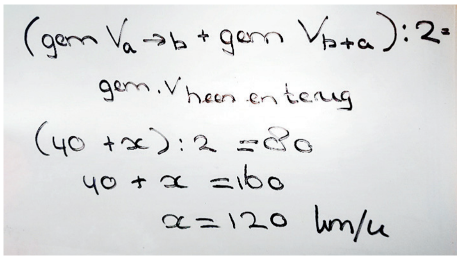
Conform het uitgangspunt hierboven is het mooi om zelf eerst na te denken over de aanpak die je als lezer zou gebruiken bij het oplossen van de volgende opgave, het liefst met uitgeschreven berekening.

> Stel je rijdt van plek *A* naar plek *B* met een gemiddelde snelheid van 40 km/u. Dat vond je wat traag. Je wilt daarom graag wat tijd goed maken, zodat je gemiddelde snelheid voor de heen- en terugreis samen precies 80 km/u is. Hoe hard moet je dan rijden op de terugreis (van *B* naar *A*)?[1]

Deze opgave wordt zowel in de bachelor als in de masteropleiding leraar wiskunde gebruikt. In beide opleidingen zien we alle onderstaande oplossingen langskomen.
We bespreken hier de inzet in de didactieklessen van de tweedegraads deeltijdopleiding. De opgave is daar onderdeel van een college over emoties bij het oplossen van opgaven en over beelden die studenten hebben van wiskunde en het oplossen van wiskundige opgaven. In het college werken studenten bij deze opgave eerst alleen. Vervolgens bespreken ze hun ideeën met medestudenten. Daarbij wordt regelmatig onderhandeld over de gewenste aanpak. Ze schrijven hun gezamenlijke uitwerking op een poster. De poster wordt opgehangen en vervolgens lopen de studenten langs de posters om de verschillende groepsantwoorden te bekijken.
We beschrijven eerst enkele oplossingen die langskomen. Daarbij benoemen we zowel de wiskundige vragen die een oplossing oproept als de gesprekspunten voor vakdidactiek.

Aanpak 1: middelen

Deze opgave lijkt een voor de hand liggende, maar niet bruikbare, aanpak uit te lokken. De eerste antwoordoptie die wordt gegeven is vaak 120 km/u, zie figuur 1.

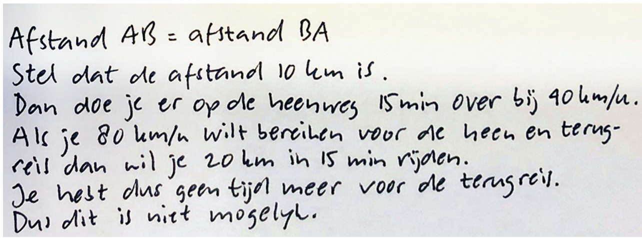


figuur 1 Uitwerking van een student

Ook een redenering zoals '*Snelheid* = *afstand* gedeeld door *tijd*; dus de terugreis moet drie keer zo snel, je zult 120 moeten rijden' komt langs. Soms wordt ook vragend geantwoord of het niet gewoon 120 is, al dan niet met de toevoeging dat dit waarschijnlijk niet goed is.
Bij deze oplossing komt als eerste naar voren: waarom mag dit wiskundig eigenlijk niet? Hierbij kijken we dan naar wat vast is, namelijk de afstand van *AB*, wat onbekend is (de snelheid terug) en wat varieert met de snelheid (de terugreistijd). Immers, hoe sneller teruggereden wordt, hoe minder tijd nodig is voor de terugreis. Daarmee is middelen van de snelheid, wat een samengestelde grootheid is met in 'de noemer' de tijd, niet mogelijk als je verschillende reistijden hebt. Dat werkt alleen als je gedurende de heen- en terugreis even lang onderweg bent, maar dat is bij een verschillende snelheid niet waarschijnlijk. Met een omweg terug kan hier de situatie, en daarmee de opgave, weer veranderen.
In het gesprek kan dan ook aandacht zijn voor het controleren van het gegeven antwoord. Als je vermoedt

dat je antwoord niet klopt, kun je dat dan controleren? Gesprekspunt voor vakdidactiek is wat je doet als docent met zo'n fout antwoord. Hoeveel tijd besteed je eraan en moet iedereen begrijpen hoe het zit voordat je verdergaat? Bovenstaande aanpak maakt de weg vrij voor de aanpakken 2 en 3, omdat het kijken naar de reistijden heen en terug een ingang biedt voor het beantwoorden van de vraag.

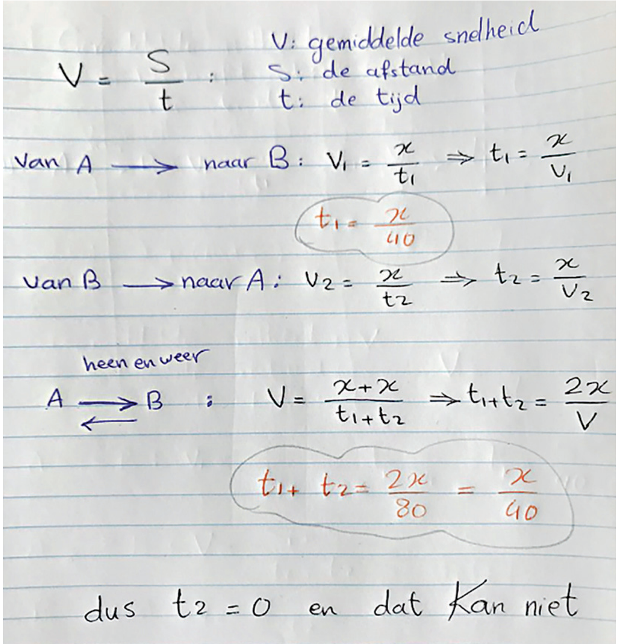
Aanpak 2: getallenvoorbeeld
In aanpak 2 wordt een getal gekozen voor de afstand *AB*, bijvoorbeeld 40 km. De redenering die volgt is dan in de trant van: 'Dat betekent vervolgens dat een uur reistijd nodig was op de heenreis. De heen- en terugreis is 80 km. Als je een gemiddelde snelheid van 80 km/u wil halen dan moet je deze totale afstand van 80 km in een uur afleggen. Echter, dat uur is al "opgemaakt" op de heenreis. Dus het rijden terug zal in 0 uur moeten. Dat is niet mogelijk. Hoewel het kiezen van de afstand als 40 km het handigst is, is het ook mogelijk om met andere waarden te werken, bijvoorbeeld 10 km, zoals in figuur 2 te zien is. Ook kiezen studenten soms als vaste afstand voor *AB* 1 km.


Afstand AB = afstand BA
Stel dat de afstand 10 km is.
Dan doe je er op de heenweg 15 min over bij 40 km/u.
Als je 80 km/u wilt bereiken voor de heen en terug-reis dan wil je 20 km in 15 min rijden.
Je hebt dus geen tijd meer voor de terugreis.
Dus dit is niet mogelyk.

figuur 2 Uitwerking van een student met afstand AB gekozen als 10 km

Een vakinhoudelijk discussiepunt betreft de keuze van het getal voor de afstand *AB*. Wat leent zich goed? De keuze voor de afstand in km is voor de hand liggend, maar ook hier zijn andere opties mogelijk. Een didactisch gesprekspunt is de onzekerheid die kan toeslaan. Mag ik zomaar een getal kiezen of moet ik een variabele gebruiken? Een tweede inhoudelijk punt is de manier waarop je antwoord geeft op de vraag. Zeg je dat het niet mogelijk is om gemiddeld 80 km/u te rijden, dat je oneindig snel moet rijden of accepteer je als antwoord dat 'het niet kan', zoals in figuur 2 te zien is. We zien dat ook hier de onzekerheid bij studenten toeslaat, omdat ze het gevoel hebben dat een dergelijk antwoord niet goed kan zijn.

Aanpak 3: algebraïsche benadering
Bij deze aanpak kan met de formule voor gemiddelde snelheid worden gewerkt waarbij de strategie is om eerst te kijken naar de tijd die je nodig hebt om heen te rijden, vervolgens naar de tijd nodig om terug te rijden en ten slotte de totale reistijd. In figuur 3 is een dergelijke uitwerking zichtbaar.


$V = \frac{S}{t}$: V: gemiddelde snelheid
S: de afstand
t: de tijd
Van A → naar B: $V_1 = \frac{x}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{x}{V_1}$
$t_1 = \frac{x}{40}$
van B → naar A: $V_2 = \frac{x}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{x}{V_2}$
heen en weer
$A \rightleftarrows B$: $V = \frac{x+x}{t_1+t_2} \Rightarrow t_1+t_2 = \frac{2x}{V}$
$t_1+t_2 = \frac{2x}{80} = \frac{x}{40}$
dus $t_2 = 0$ en dat Kan niet

figuur 3 Uitwerking van een student met algebraïsche aanpak

Inhoudelijk gesprekspunt zijn de gekozen getallen in de opgave. Al snel wordt de conclusie getrokken dat bij snelheden als 30 km/u en 60 km/u of 50 km/u en 100 km/u zich hetzelfde probleem voordoet.

Het is in de 'heen- en weeropgave' interessant om verder te kijken dan de getallen 40 km/u en 80 km/u. Wat gebeurt er bijvoorbeeld als de wens bestaat om 79 km/u gemiddeld te rijden? Dan kunnen we, conform bovenstaande aanpak een vergelijking voor v_2 oplossen: $\frac{x}{40}+\frac{x}{v_2}=\frac{2x}{79}$ waarbij een snelheid van 3160 km/u berekend kan worden. Een vergelijking die wel weer makkelijker op te lossen is door een geschikte waarde voor *x* te nemen of te zien dat *x* er hier niet toe doet. De formule kan ook herschreven worden waarbij bij gewenste gemiddelde snelheid eenvoudig de snelheid voor de terugreis kan worden bepaald via

$$v_{terug} = \frac{1}{\frac{2}{gemv_{totaal}} - \frac{1}{gemv_{heen}}}.$$

Dit geeft ons de mogelijkheid om grafisch zichtbaar te maken dat er bij twee keer de heenreissnelheid een asymptoot optreedt.

Aanpak 4: de verrassing
Natuurlijk is het altijd fijn als er ook antwoorden komen waarbij studenten kijken naar de grotere context en komen met een creatief antwoord. Een mooi voorbeeld hiervan is de zin 'Harder dan de toegestane maximale snelheid, deze opgave heeft dus geen legale uitkomst.' Dit kan overigens ook duiden op het niet weten hoe een dergelijke vraag moet worden aangepakt en het verhullen van een gevoel van ongemak. Een gesprekspunt hierbij is dan ook hoe je omgaat met dit soort antwoorden of ongemak.

De heen- en weeropgave, een reflectie

Met één korte opgave komen allerlei wiskunde-didactische vragen en thema's naar voren. De werkwijze waarbij oplossingen in groepen op een poster wordt beschreven is geïnspireerd door de ideeën van Peter Liljedahl over de Thinking Classroom.[2] De boodschap die we studenten in deze activiteit meegeven is: het is niet erg als je niet meteen een antwoord hebt bij een opgave, dat je vastloopt of dat je een antwoord geeft dat niet goed blijkt te zijn. Dat kan juist helpen om je probleem-oplosvaardigheden scherper te krijgen en om te reflecteren op hoe je leert en hoe anderen leren. Daarbij komen drie thema's naar voren: (1) foute antwoorden en 'afwijkende' opgaves en de mogelijkheid hiervan te leren, (2) emoties die bij het maken van wiskundeopgaven naar voren kunnen komen en (3) het worstelen met opgaven als onderdeel van een (wiskundig) leerproces.

Foute antwoorden

Bij de rondgang langs de posters worden de oplossingen zichtbaar, ook als aanpak 1 gekozen is met het middelen van de snelheden. Een onjuiste aanpak van een student biedt de mogelijkheid om met de klas te verkennen waarom die aanpak niet werkt. Wat gaat mis in de gekozen aanpak en wat kan daarvan worden geleerd? Zoals Phil Daro[3] aangeeft, is een fout antwoord vaak een 'kanarie in de mijn', een soort alarm dat meer mede-studenten dezelfde gedachten of vraag hebben of hebben gehad. Een fout antwoord vormt daarmee juist een dankbare start voor een gesprek over het idee van het middelen van gemiddelde snelheden, verhoudingen en samengestelde grootheden. Hierbij gaat het dus niet om het zogeheten 'answer getting', maar om de weg naar het antwoord toe.[4] De vertaalslag naar een opgave in een les met leerlingen is vervolgens makkelijk gelegd.
Dat er geen antwoord gegeven kan worden in de vorm van 'zoveel km/u moet je rijden' voedt ook de discussie. Meestal zijn er studenten die hebben berekend of beredeneerd dat je oneindig snel moet rijden, ofwel dat 'het niet kan', maar deze studenten durven dit niet altijd te delen met de groep. Daarbij lijkt onzekerheid over een 'afwijkend' antwoord te spelen, omdat je bij wiskundeopgaven toch altijd een antwoord hebt. Helemaal als de vraagstelling is 'bereken de ...' in plaats van 'is het mogelijk dat...'. Soms zeggen studenten dat deze opdracht een instinker is, en daarmee flauw om leerlingen voor te leggen. Dit zijn mooie aanknopingspunten voor een gesprek over het beeld dat leeft rond wiskundeopgaven en wat bij het maken ervan van belang wordt gevonden. Daarbij komt naar voren dat een antwoord van een opgave niet altijd van de vorm '$x = ...$' hoeft te zijn, of niet altijd eenduidig of exact te bepalen is. Welke variatie breng je aan in de opgaven die je kiest in de klas en de oplossingen die je langs laat komen en bespreekt? Wil je emoties oproepen of wil je alles gladstrijken? Dit brengt ons bij het tweede thema.

Emoties

De opgave is bewust gekozen om het gesprek te kunnen voeren over het vastzitten bij een wiskundeopgave en de emoties die dit oproept. De studenten wordt gevraagd om op post-its individueel aan te geven wat het werken aan de opgave bij hen opriep en deze op de posters te plakken. De opgave roept vaak verschillende gevoelens op, zoals frustratie, paniek, gevoel van domheid, lamgeslagen, maar ook vreugde. Door dit op post-its te expliciteren wordt ruimte gegeven aan de emoties: dat ze er mogen zijn[5] en dat er verschillen tussen zitten. We bespreken dat dit bij leerlingen niet anders zal zijn. Aardig is ook te zien dat het alleen werken aan de opdracht soms een negatief gevoel opriep, maar dat het bespreken met de groep er een positieve draai aan heeft gegeven.
De gevoelens leidden vaak tot bepaalde zichtbare individuele handelingen, enerzijds het vastbijten in de opgave, anderzijds opgeven en achterover leunen, of het met anderen overleggen. Sommige studenten die er niet uitkomen gaan googelen. Bij het vastzitten in de opgave komt altijd één van onze favoriete citaten van John Mason langs: 'Being *stuck* is an honourable state, because it provides an opportunity to learn about yourself.[6] De vraag is dan ook: 'wat heb je over jezelf geleerd?' Daarbij wordt opgemerkt dat er verschillen zitten tussen personen in leren en omgaan met opgaven. Waarmee de dubbele bodem naar een klas met leerlingen zichtbaar wordt. Ook leerlingen zijn verschillend in hun reacties en dat vraagt om verschillende reacties van de docent. Zoals het stellen van stimulerende vragen bij iemand die vastzit of het bieden van een mogelijkheid tot samenwerken. Overigens biedt het boek van John Mason[7] genoeg opgaven om mee te worstelen. Wat ons brengt bij het derde thema.

> "Sudderen en worstelen mogen onderdeel zijn van een oplossings-proces."

Worstelen

Veel studenten hebben in hun eigen studie al wel aha-momenten ervaren en geven aan dat ze het zo leuk vinden als ze zo'n moment bij leerlingen zien. Dat ze iets uitleggen en dan het kwartje zien vallen. Hierbij bespreken we dan de fasen van Hadamard[8] waarin zichtbaar is dat sudderen en worstelen onderdeel mogen zijn van een oplossingsproces, zie figuur 4. Soms bestaat het beeld dat je bij wiskunde alles meteen moet zien en de snelheid van oplossen telt. Dit lijkt te worden gevoed door de gedachte dat als je het niet meteen weet, dat iets zegt over je intelligentie. Aandacht en waardering voor het worstelen geeft tegenwicht aan dat beeld en biedt ook een beter beeld van hoe wiskundigen werken. Ook grote wiskundigen worstelen. Een mooi voorbeeld is natuurlijk het verhaal van Andrew Wiles die jaren nodig had om de stelling van Fermat te bewijzen terwijl vooraf niet zeker was of het hem ging lukken.

Als je het opeens wel ziet…. aha!

Wiskundige ontdekking:

Initiatie:	bewuste worsteling
Incubatie:	sudderen in onbewuste
Illumunatie:	aha-moment
Verificatie:	technische verificatie

figuur 4 De fasen van Hadamard [8]

Tot slot

Kortom: genoeg te bespreken in de vakdidactiekcolleges! Misschien ook interessant om een dergelijke activiteit met de vaksectie te bespreken. Nog interessanter wordt het als de opdracht ook door leerlingen van een passende klas is uitgewerkt met bijbehorend klassengesprek.

Noten

[1] Deze opdracht is gebaseerd op een opdracht uit de eerste editie van *Wiskundelijn* 4aVWO. Deze oudere wiskundemethode, ontstaan vanuit het promotietraject van Anne van Streun, begon met een striptekening waarin aan de hand van een opdracht over gemiddelde snelheid werd toegelicht wat een systematische probleemaanpak is.

[2] Liljedahl, P (2021). *Building a thinking classroom*. SAGE Publications Inc.

[3] Daro, P. (2011). Against answer getting. *https://vimeo.com/79916037*

[4] Wat bedoelen ze toch met… answer getting, Irene van Stiphout, *Euclides* 97-5 of *wiskundedidactiek.nl*

[5] Bus, E. (2004). Wiskunde en emoties. *Nieuwe Wiskrant* 24(2).

[6] Uit presentatie van John Mason op conferentie ProMath 2014.

[7] Mason, J. Burton, L., Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Prentice Hall.

[8] Fasen van Hadamard (1945) staan beschreven in een artikel van Peter Liljedahl die verder ingaat op de aha-erlebnis en daar een proefschrift over schreef. Zie ook, Illumination: An affective experience? April 2012 ZDM: *The international journal on mathematics education 45(2) DOI: 10.1007/s11858-012-0473-3*

Over de auteurs

Nelleke den Braber is docent wiskundedidactiek bij de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding van NHL-Stenden Hogeschool. E-mailadres: *nelleke.den.braber@nhlstenden.com*
Gerrit Roorda is docent wiskundedidactiek bij de eerstegraads lerarenopleidingen van de Universiteit Groningen en NHL-Stenden Hogeschool.
E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*

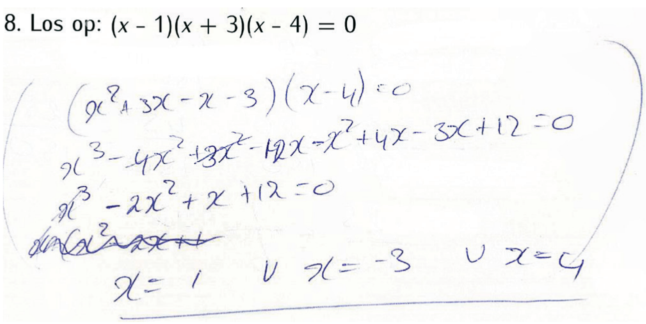
Irene van Stiphout

Wat bedoelen ze toch met ... globaal kijken?

In elke aflevering van 'Wat bedoelen ze toch met...?' staat een spraakmakend begrip uit de wiskundedidactiek of de onderwijskunde centraal. Irene van Stiphout schrijft deze keer over 'globaal kijken'. Globaal kunnen kijken naar algebraïsche expressies is een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. Maar wat is het eigenlijk? En wat kun je doen om leerlingen dit te leren?

Voorbeeld

Bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen zoals $x^2 - 8x + 15 = 0$ kan het vinden van de juiste ontbinding een hele klus zijn voor leerlingen. Is de ontbinding gevonden, in dit geval $(x - 5)(x - 3) = 0$, dan lukt het leerlingen wel om de oplossingen $x = 5$ en $x = 3$ te vinden. Dat laatste lijkt vanzelfsprekend, want de oplossingen staan er zo ongeveer, maar dat is het niet.



figuur 1

Dat werd duidelijk toen leerlingen uit vwo 6 de vergelijking $(x - 1)(x + 3)(x - 4) = 0$ werd voorgelegd.[1] De uitwerking van de leerling in figuur 1 laat zien dat de eerste strategie van deze leerling was om de haakjes uit te werken. Maar ja, hoe vind je dan de ontbinding weer? Deze leerling kwam tot inkeer en zag dat het anders moest. Een meer globale blik op de vergelijking bij de start van deze vraag, zou deze leerling geholpen hebben.

Globaal kijken

Algebraïsche vaardigheid kan worden gezien als een combinatie van basisvaardigheden en symbol sense.[2] Onderdeel van symbol sense is globaal kunnen kijken, zie figuur 2.

Algebraïsche vaardigheden

basisvaardigheden	*symbol sense*
· procedureel werken	· strategisch werken
· lokaal kijken	· globaal kijken
· algebraïsch rekenen	· algebraïsch redeneren

figuur 2[2]

Er zijn meerdere beschrijvingen van globaal kijken. Voor Gravemeijer[3] gaat het vooral om de houding om niet meteen te gaan rekenen maar om eerst maar eens te kijken hoe een expressie in elkaar zit. Drijvers[4] benoemt het lezen van formules en het kunnen onderscheiden van relevante en minder relevante kenmerken hierin. Bij het lezen van formules gaat het erom dat leerlingen ordening kunnen aanbrengen in een brei van letters en symbolen door niet van links naar rechts te lezen, maar eerst het geheel te overzien en daar delen in te herkennen die bij elkaar horen. Een voorbeeld hiervan is een uitdrukking als $-3 \cdot 4 - 2 \cdot (-6) \cdot 5$

Het vraagt om een globale blik om te herkennen hoe deze uitdrukking uiteenvalt in twee onderdelen: $-3 \cdot 4$ en daar moet van worden afgetrokken $2 \cdot (-6) \cdot 5$

Hierbij past ook het kunnen onderbreken van de automatische routine bij het lezen van een expressie.[5] Als voorbeeld noemt hij de vergelijking $3x + 5 = 4x$. Deze kun je oplossen door aan beide kanten $3x$ af te trekken. Als alternatief kun je de vergelijking lezen als om van $3x$ naar $4x$ te komen moet je x toevoegen. Er wordt 5 toegevoegd, dat betekent dus dat $x = 5$. Juist dat in staat zijn om een andere blik te hebben, om een ander perspectief te nemen, is een uiting van algebraïsche deskundigheid.

Globaal kunnen kijken naar expressies komt veel voor, zoals te zien is in de volgende voorbeelden.
Om te zien of, en zo ja hoe, een breuk vereenvoudigd kan worden, is eerst globaal kijken nodig. Neem bijvoorbeeld de breuk $\frac{12ac}{27bc}$.
Door deze als geheel te bekijken, kun je zien uit welke factoren de breuk is opgebouwd en hoe die met elkaar samenhangen. Dan wordt duidelijk dat 12 en 27 een factor 3 gemeenschappelijk hebben, en *ac* en *bc* een factor *c*. Pas als dat duidelijk is, kan de breuk vereenvoudigd worden naar $\frac{4a}{9b}$ (mits $c \neq 0$).

Bij het differentiëren is het handig om te zien of een uitdrukking als $\frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$ in de vorm x^{iets} te schrijven is (in dit geval is 'iets' = $2\frac{5}{6}$ dat maakt het vinden van de afgeleide een stuk eenvoudiger.
In het havo wiskunde A-examen van 2019 moesten leerlingen laten zien hoe de formule $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ kan worden omgeschreven naar $P = 10^{2-n}$. Dan moet je zien dat de 100 en 1/10 uit de eerste formule als een macht van 10 geschreven kunnen worden. In deze voorbeelden gaat het erom dat formules als geheel worden gezien, waarbij aandacht is voor welke structuren of factoren er in de formules zitten en hoe die met elkaar samenhangen.

Globaal kijken in het leerproces

Er zijn grofweg drie manieren om opgaven aan te pakken: informeel, routinematig en deskundig. [3] Onder informeel worden de strategieën van leerlingen verstaan die ze zelf bedenken. Deze zijn vaak wat primitiever en toegespitst op een bepaalde situatie. Een kenmerk hiervan is dat leerlingen snappen wat ze aan het doen zijn, wat waarschijnlijk ook de reden is dat ze hiervoor kiezen.
Als voorbeeld noemt Gravemeijer[3] het oplossen van de vergelijking $2x = 3$ door te zoeken naar welk getal voldoet aan twee keer dat getal is drie.
De routinematige aanpak gaat om het toepassen van methoden die leerlingen hebben geleerd. Hoewel die methoden handig zijn, zitten er ook wat haken en ogen aan. Het aanleren van die methodes kan snel gaan waardoor leerlingen het onderliggende begrip missen. Hierdoor zijn ze kwetsbaar voor het afgaan op uiterlijke kenmerken en is het oppassen voor generalisaties.
Een voorbeeld hiervan is
$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$
maar $\sqrt{A+B} \neq \sqrt{A} + \sqrt{B}$

In de deskundige aanpak speelt globaal kijken een rol en meer specifiek het vermogen om te kunnen globaliseren en te substitueren. Een voorbeeld hiervan is de bekende vergelijking van Wenger[6] : Los op voor *v*:

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

De wortels leiden hier af en nodigen uit tot kwadrateren. Daarbij wordt over het hoofd gezien dat het hier gaat om een lineaire vergelijking in v. Die lineaire structuur $v \cdot$ iets $= 1 + 2v \cdot$ *iets anders* herkennen vraagt om globaliseren en om substitueren, namelijk door de wortels te vervangen waardoor die structuur zichtbaarder wordt.

figuur 3

De vraag is hoe die deskundige aanpak ontwikkeld kan worden. In de informele strategieën van leerlingen spelen globaliseren en substitueren een rol. Zo leren jonge kinderen al redeneren met zogeheten vleksommen, zie figuur 3. Hierin ligt het globaliseren en substitueren besloten. Op deze aanpak kan verder worden gebouwd bij het oplossen van vergelijkingen. Hierdoor krijgen leerlingen al vroeg in het leerproces de kans om ingewikkelde vergelijkingen op te lossen. Als voorbeeld noemt Gravemeijer[3] de vergelijking $3 + 4(x - 3)^2 = 147$.

Door globaal te kijken en de term $4\,(x - 3)^2$ af te dekken, ontstaat de vergelijking $3 + \blacksquare = 147$. Die vergelijking is prima op te lossen: $\blacksquare$ moet 144 zijn. Door te substitueren ontstaat een nieuwe vergelijking, namelijk $4(x - 3)^2 = 144$. Opnieuw globaliseren levert $4 \cdot \triangle$, dus $\triangle = 36$ ofwel $(x - 3)^2 = 36$, dan nog een keer globaliseren en $x - 3$ substitueren totdat de oplossingen $x = -3$ en $x = 9$ zijn gevonden. Een complexe vergelijking is zo opgedeeld in vergelijkingen die op zichzelf eenvoudig zijn op te lossen en die aansluiten bij de informele kennis van leerlingen. Natuurlijk heeft deze methode zijn beperkingen. Zo is hij nogal omslachtig en niet algemeen geldend. De winst zit hem er hierin dat leerlingen hun eigen informele kennis kunnen gebruiken waardoor ze het globaal kijken ontwikkelen en inzicht wordt versterkt.

Wat te doen in de klas?

Hierboven is betoogd dat globaal kijken vroeg in het leerproces past omdat het aan kan sluiten bij de informele strategieën die leerlingen hebben. Juist door daarbij aan te haken, kunnen leerlingen zelfvertrouwen ontwikkelen. Een andere aanpak is om in opgaven expliciet aandacht

>

WIL-de Wiskunde *Welkom*

WIL-de Wiskunde

Vanwege overweldigend succes van ons kanaal komen wij nu ook langs bij jou op school voor trainingen en ondersteuning.

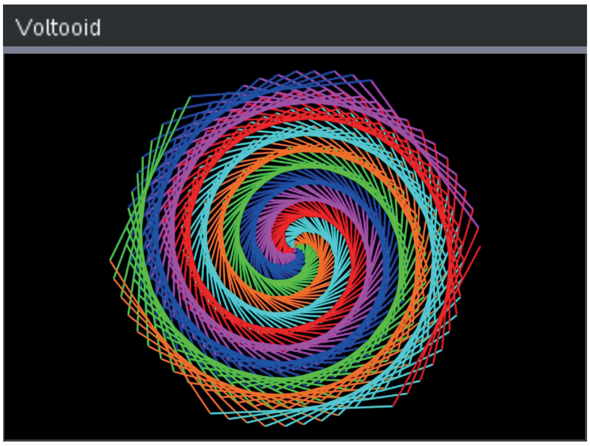
Wij helpen je graag!

Powered by Texas Instruments

WIL-de Wiskunde komt naar je toe

WIL-dePython.nl

Computational thinking:
Leer de leerlingen denken in structuren en formules door te programmeren in Python.



WIL-deSTEM.nl

Multidisciplinaire projecten voor de bètavakken. Zeer geschikt voor de vakken: mens en natuur, NLT en O&O.

Ondersteuning

Gebruik de TI-Nspire™ CX II-T en de TI-84 Plus CE-T Python Edition voor meer dan alleen het berekenen van een snijpunt. Zet ze in als instrument voor meer begrip bij je leerlingen.

Op de toekomst voorbereid

In de software en de handheld van de TI-Nspire™ CX II-T komt alle technologie voor de bètavakken samen. Zo ben je voorbereid op themagericht en interdisciplinair onderwijs.

Neem contact op met Ludovic Wallaart, consultant educatieve technologie
l-wallaart@ti.com
Tel. 06 30513681

Hier vind je ons materiaal

TI op LinkedIn

T³ NEDERLAND

Teachers Teaching with Technology™

T³ Nederland wordt ondersteund door:

Texas Instruments

te besteden aan het globaal kijken door dat als doel van de opgave te maken en het niet te zien als een mogelijke strategie in het vinden van een oplossing. Een mogelijkheid om dat te doen bij vergelijkingen is om te vragen naar het aantal oplossingen en niet (of nog niet) naar de oplossingen zelf. Bekijk het onderstaande rijtje vergelijkingen.

$$\left(x+2\right)^2=-9$$
$$8x+4=4(2x+1)$$
$$7+\sqrt{x}=-3$$
$$\frac{x-1}{2}=5(x-1)$$
$$-2=x+\sqrt{3}$$

Bij de eerste zou je willen dat leerlingen zich realiseren dat een kwadraat niet gelijk zal zijn aan -9, dus dat die vergelijking geen oplossingen heeft.
Bij de tweede vergelijking hoop je dat leerlingen de tautologie $8x + 4 = 8x + 4$ herkennen en zich realiseren dat iedere x een oplossing is.
De realisatie bij de derde vergelijking lijkt op die in de eerste: 7+ iets positiefs gaat geen -3 opleveren.

In de vergelijking $\frac{x-1}{2}=5(x-1)$ zit de structuur $A(x-1) = B(x-1)$ verscholen wat alleen kan als $x - 1 = 0$, dus er is één oplossing.
De laatste vergelijking is een soort afleider. De wortel kan leerlingen alert maken: komt er wel iets positiefs uit? In dit geval speelt die zorg niet. Dat herkennen, dat die zorg hier niet speelt, vraagt ook om globaal kunnen kijken.

Een andere mogelijkheid dan vragen naar het aantal oplossingen is vragen of het uitwerken van haakjes een zinvolle eerste stap is in het oplossingsproces. Dat is wat tricky, want wat is precies zinvol? Toch valt er wel iets te zeggen. Neem de vergelijkingen
$(x - 1)(x + 3)(x - 4) = 0$
$(x - 5)(x - 7) = 3$
In de eerste vergelijking is het, zoals we in de inleiding al zagen, duidelijk niet handig om haakjes weg te werken. In de tweede vergelijking is haakjes uitwerken juist wel zinvol om de vergelijking te herleiden tot $x^2-12x+32 = 0$ en naar de ontbinding $(x - 8)(x - 4) = 0$ te gaan.

De Britse wiskundeleraar Craig Barton heeft een website waar hij allerlei opgaven verzameld die dit soort denken uitlokken: *www.variationtheory.com.* De opgaven gaan niet alleen over globaal kijken maar ook bijvoorbeeld over objectvorming.[7]

Tot slot

Globaal kunnen kijken is een onderdeel van algebraïsche deskundigheid en net zo belangrijk als procedureel en strategisch kunnen werken, algebraïsch kunnen rekenen en redeneren. Daarmee is het geen kers op de taart van het wiskundig inzicht, niet weggelegd voor alleen de happy few van de leerlingen die goed zijn in wiskunde. Het is een essentieel onderdeel, voor alle leerlingen van belang en belangrijk in de hele leerlijn. Aandacht hiervoor in de hele leerlijn zorgt voor een versterking van de algebraïsche deskundigheid van leerlingen.

Dank aan Koeno Gravemeijer, Geeke Bruin-Muurling en Nelleke den Braber voor commentaar op eerdere versies van dit artikel.

Noten

[1] Van Stiphout, I. (2011). The development of algebraic proficiency. PhD thesis,Technische Universiteit Eindhoven, http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf.
[2] Drijvers, P. & Kop, P. (2012). Variabelen en vergelijkingen. In Drijvers, P., Streun, A. van & Zwaneveld, B. (Red.). Handboek wiskundedidactiek (pp. 53-81). Epsilon.
[3] Gravemeijer, K. (1990). Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid. Nieuwe Wiskrant, 10(2), 29-33.
[4] Drijvers, P. (2006). Algebraïsche vaardigheden en symbol sense in de tweede fase van havo en vwo. Nieuwe Wiskrant, 25(3), 4-10.
[5] Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sensemaking in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), 24-35.
[6] Wenger, R. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. Schoenfeld (Red.), Cognitive science and mathematics education (pp. 217-251). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
[7] Van Stiphout, I. (2020). Wat bedoelen ze toch met... proces-object? Euclides, 95(6), 4-9.

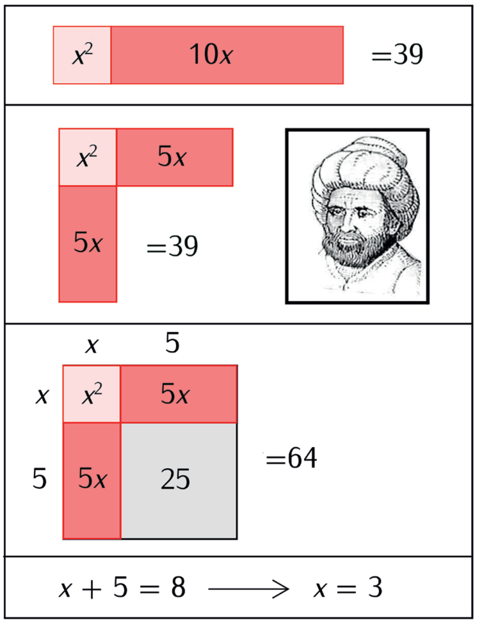
Martin Kindt

Bordjes en formules

In de jaren '90 van de vorige eeuw werd de term *bordjesmethode* ineens hip binnen de wiskundedidactiek. Is die nu in het vergeetboek beland? Maar hoe je het ook wilt noemen, *formele substitutie* is een niet te verwaarlozen aspect bij algebraïsch handelen.

Een vierkantsvergelijking

Het is zo'n vijftig jaar geleden dat op het schriftelijk eindexamen havo deze vierkantsvergelijking werd voorgelegd:
Los x op uit: $(x-2)^2 = 2$.
Mooier kun je het niet krijgen, denk ik dan.
Naar verluidt zijn er toen heel wat leerlingen geweest die de vergelijking eerst op nul hebben herleid en daarna het *abc*-kanon in stelling hebben gebracht. Mits ze geen rekenfouten maakten hebben deze leerlingen het volle pond gekregen, geen twijfel daarover.
Leerlingen die meteen zagen dat $x - 2$ gelijk moet zijn aan $\pm\sqrt{2}$, kregen dezelfde score, maar je kunt zeggen dat zij extra beloond werden door tijdwinst. Maar is de *abc*-aanpak hier niet te dom voor woorden en zouden de *abc*-ers eigenlijk strafpunten hebben moeten krijgen? Zouden zij, met de 'bordjesmethode' groot geworden, hetzelfde hebben gedaan?
Als leraar had ik destijds de naam 'vierkantsvergelijking' voor mijn havo-klas eer aan gedaan door het oplossen in de stijl van Al Khwarizmi (790-856) op te voeren, zie figuur 1.
Zeg maar: aanschouwelijke algebra!



figuur 1

Dit sloeg aan. Er moest natuurlijk nog wel het een en ander gebeuren, bijvoorbeeld om ook de negatieve oplossing op te laten treden, maar dat bleek allemaal niet onoverkomelijk. En het kwadraat afsplitsen werd tot op het eindexamen door veel van mijn leerlingen begeleid door plaatjes in de kantlijn! Voor hen zou die examensom een eitje moeten zijn en dat was het ook voor de meesten.
Over strafpunten gesproken: er waren er ook een paar die het niet zo leuk vonden een uitgepakt cadeautje te krijgen. Zij deden het papier er eerst weer omheen door de vergelijking te herschrijven tot $x^2 - 4x + 2 = 0$ om vervolgens kwadraat af te splitsen. Van dié leerlingen was er slechts één (sic!) die een streep zette door zijn terug-naar-af-tekst.
Aad Goddijn vertelde mij eens dat hij in een 5 vwo-groep van U-talent[1] een vergelijking van het genre:
Los x op uit: $(x + 5)^6 = 1000000$
had voorgelegd, waarbij een aantal leerlingen het linkerlid ijverig begonnen uit te werken ... Het algoritmisch en systematisch leren oplossen van vergelijkingen heeft kennelijk een keerzijde: het denken wordt afgeleerd!
Aan Al Khwarizmi hebben we het bijvoeglijk naamwoord 'algoritmisch' te danken, maar hoe vaak zal die zich niet, bij zulk gedrag, in zijn graf hebben omgedraaid?

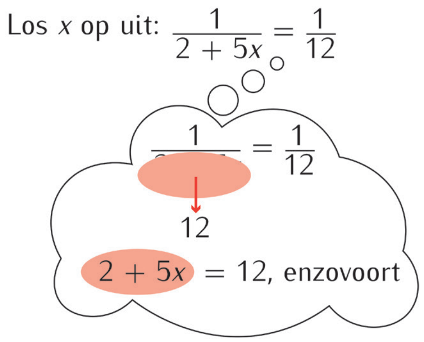
Bordjesmethode

Het idee van de bordjesmethode was om een deelvorm in een algebraïsche expressie even te bedekken en die dan tijdelijk als één variabele of onbekende te zien. Daarbij ging het dan vooral om toepassingen ervan bij het oplossen van vergelijkingen. Bij voorbeeld:

$$2 + 5x = 12 \longrightarrow 2 + \underset{\downarrow \atop 10}{\bullet} = 12 \longrightarrow \underset{\downarrow \atop x = 2}{5x = 10}$$

figuur 2

Of zo simpel mogelijk beginnen didactisch het beste is? Een beetje uitdaging kan geen kwaad, dus wat mij betreft liever meteen:



figuur 3

Nog een voorbeeld:
Los x op uit: $\sqrt{4+3x}=5$
Je kunt natuurlijk links en rechts kwadrateren, maar het is ook mooi om 5 te vervangen door $\sqrt{25}$ en dan de bordjesmethode in stelling te brengen.
Het is niet gebruikelijk in het onderwijs, maar mij lijkt het waardevol voor de ontwikkeling van het 'formuletaal-gevoel' om meer complexe opgaven voor te leggen. Zo van:

$$\frac{1}{2+\frac{3}{x+1}}=\frac{1}{3} \text{ of } \sqrt{30+\sqrt{30+x}}=6$$

Gestapelde bordjes. En misschien bevordert de bordjes-methode wel het uit het hoofd oplossen van dergelijke opgaven. Daar ben ik altijd wel voor geweest: niet meteen aanvallen, maar eerst kijken of je een oplossing direct ziet.
Een bekend type vergelijking waarbij de bordjesmethode goed werkt is:

$x(3x - 2) = 5(3x - 2)$
$x(\qquad) = 5(\qquad)$
$x = 5$ of $3x - 2 = 0$

In de schoolboeken zie je meestal hoofdletters in de rol van bordjes. Zo van:
$AB = AC \leftrightarrow A = 0$ of $B = C$
In dezelfde geest kennen we:
$A^2 = B^2 \leftrightarrow A = B$ of $A = -B$
van toepassing op bijvoorbeeld:
$(3x - 2)^2 = (4x - 3)^2$
Als je deze vergelijking lief aankijkt, krijg je de oplossing $x = 1$ snel cadeau, maar om de tweede oplossing ($\frac{5}{7}$) te vinden, moet er nog wat gerekend worden.

Formele substitutie

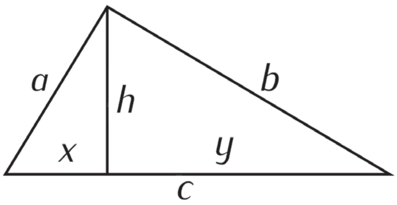
In mijn beginjaren als leraar op een lyceum heb ik het aangedurfd om bij een proefwerk in de eerste klas (!) over ontbinding in factoren als 'opgave-voor-de-10' te vragen om
$x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6$
te ontbinden. Gekkenwerk hoor ik de lezer denken, maar bedenk dat de leerlingen toen 3 uur algebra (en 2 uur meetkunde) per week kregen. Heus, er waren een paar 12-jarigen die via $(x + y)^2 - 5(x + y) + 6$ vonden dat het $(x + y - 2)(x + y - 3)$ moest zijn. Er was niet geoefend met sommetjes van een dergelijke structuur! De bordjesmethode had kunnen helpen, maar die lag nog in de schoot van de toekomst. Zouden er nu vwo-leerlingen in de bovenbouw zijn die bij analytische meetkunde uitvinden dat de vergelijking
$x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6 = 0$
twee evenwijdige lijnen voorstelt? Natuurlijk wél met tussenkomst van GeoGebra, om dan de factorisering na uitwerking te verifiëren.
Het noemen van de bordjesmethode lijkt op dit niveau wat kinderachtig, ik zou dan liever van *formele substitutie* spreken en eventueel $x + y$ tijdelijk bijvoorbeeld z noemen.
Het gebruik van 'hulpvariabelen' is de meer volwassen vorm van de bordjesmethode. Ik ben er een sterk voorstander van om dit in het bovenbouwonderwijs vaker te hanteren. Het gebeurt nu vermoedelijk af en toe wel bij integraalrekening, daar waar letterlijk sprake is van de substitutiemethode.

De formule van Heron

Ik heb het al eens eerder opgeschreven:[2] de eerste keer dat ik algebra op school leuk vond, was bij de afleiding van de formule van Heron. Wie kent die nog?
Dat je met drie willekeurige staafjes juist één (starre) driehoek kunt maken, mits de lengte van elk staafje kleiner is dan de som van de lengten van de beide andere, is misschien nog wel bekend. Noem de lengten van de staafjes a, b en c en veronderstel $a < b + c$, $b < a + c$ en $c < a + b$.

De driehoek gemaakt van deze staafjes heeft een oppervlakte die zou moeten kunnen worden uitgedrukt in de variabelen a, b en c.
De aanpak van mijn leraar maakte destijds zoveel indruk op mij, dat ik me die nu nog goed meen te herinneren. Hij behandelde eerst het klassieke voorbeeld $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ om daarna aan het algemene geval toe te komen.

Dat zal misschien niet meteen in hetzelfde lesuur gedaan zijn, maar toch. Zijn strategie was als volgt, zie figuur 4.



figuur 4

De oppervlakte is de helft van $h \times c$, dus is het zaak om h uit te drukken in a, b en c. De hoogtelijn (op de langste zijde c) verdeelt de driehoek in twee rechthoekige driehoeken. Aha, Pythagoras! Er volgt al snel dat
$a^2 - x^2 = b^2 - y^2$,
ofwel $a^2 - b^2 = x^2 - y^2 =$
$(x + y)(x - y) = c(x - y)$.
Nu komt er:

$$x - y = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

$$x + y = c$$

$$\underline{\hspace{8cm}} +$$

$$2x = \frac{a^2 - b^2}{c} + c = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{c}$$

Het lukt nu om h, en daarmee de oppervlakte van de driehoek, uit te drukken in a, b en c.

Er volgt:

$$h^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{(2c)^2}$$

$$= \frac{(2ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2}$$

Merkwaardig product en bordjesmethode zeggen dat h^2 gelijk is aan:

$$\frac{\left[2ac + (a^2 - b^2 + c^2)\right]\left[2ac - (a^2 - b^2 + c^2)\right]}{4c^2}$$

In de eerste factor van de teller zit het kwadraat van $a + c$ verstopt, in de tweede dat van $a - c$. De vorm in de teller kan daarom worden omgewerkt tot
$[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]$ en via twee nieuwe bordjes tot
$(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$
Jawel: ongevoelig voor permutaties van a, b en c! Noem ik dit product voor het gemak even P (weer een 'bordje'), de oppervlakte van de driehoek O, dan komt er via

$$h = \frac{\sqrt{P}}{2c} \quad \text{en} \quad O = \tfrac{1}{2}hc$$

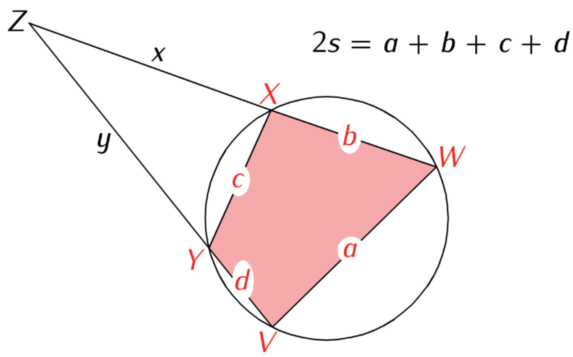
en na de afspraak $a + b + c = 2s$ komt er de zogeheten s-formule:

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Die formule wordt door sommige historici ook wel aan Archimedes toegeschreven, maar de tekst waarin Heron deze formule gebruikt is bewaard gebleven, evenals zijn fraai meetkundig bewijs ervan.[3]
Maar de afleiding die mijn leraar ons voortoverde moet ongeveer gegaan zijn zoals hier uitgewerkt, dus een opeenstapeling van formele substituties. En dat allemaal in het tweede jaar van het toenmalige vhmo, kom daar nu nog eens om. Dat de s-formule in de vergetelheid is geraakt is misschien niet zo verwonderlijk, maar mooi vind ik haar nog steeds vanwege de wiskundige aspecten, zoals de (voorspelbare!) symmetrie in a, b en c en de driehoeksongelijkheid die ervoor zorgt dat alle factoren van het product onder het wortelteken positief zijn.[2]

Van Heron naar Brahmagupta

Voor een willekeurige vierhoek bestaat er geen formule, die de oppervlakte uitdrukt in de vier zijden. Allicht, bij vier gegeven zijden zijn er vierhoeken met diverse oppervlakten te maken. Verrassend en minder bekend is dat er voor koordenhoeken wel zo'n formule bestaat, zie figuur 5.



$$\textit{opp. } VWXY = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

figuur 5

Deze formule wordt aan Brahmagupta toegeschreven.
Merk op dat voor $d = 0$ de formule van Heron tevoorschijn komt: de driehoek als ontaarde koordenvierhoek!
Er zijn verschillende manieren om de formule van Brahmagupta te bewijzen, het kan bijvoorbeeld met de hulp van goniometrie. Hier bewandel ik een route met bordjes-

algebra. Stel de oppervlakten van *VWXY*, *XZY* en *VZW* gelijk aan respectievelijk K, L en M, zodat: $K = M - L$.
Ik wil nu bewijzen dat $16K^2$ gelijk is aan
$(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$,
dat is equivalent met de beoogde s-formule.
VWXY is een koordenvierhoek, dus hebben de driehoeken *VZW* en *XZY* gelijke hoeken en zijn ze gelijkvormig met factor a / c. Gevolg:
$M / L = a^2 / c^2$ en dus $K / L = (a^2 - c^2) / c^2$.
Het doel is nu om L - en daarmee ook K – uit te drukken in a, b, c en d. Nu komt de alternatieve regel van Heron op de proppen die zegt dat $16L^2$ gelijk is aan:
$(x + y + c)(x + y - c)(x - y + c)(-x + y + c)$.
Ik kan x en y uitdrukken in a, b, c en d, maar even goed (bordjesmethode!) is het om dat met $x + y$ en $x - y$ te doen.

XYZ is gelijkvormig met *VWZ*, dus:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{c}=\dfrac{y+d}{a} \\[2ex] \dfrac{y}{c}=\dfrac{x+b}{a} \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{c}=\dfrac{x+y+d+b}{a} \\[2ex] \dfrac{x-y}{c}=\dfrac{-(x-y)+d-b}{a} \end{array}\right.$$

$$\text{Gevolg: } \left[\begin{array}{l} (a-c)(x+y)=c(b+d) \\ (a+c)(x-y)=c(-b+d) \end{array}\right.$$

Nu$16L^2$ uitdrukken in a, b, c en d:

$$16L^2=\left[\frac{c^2(b+d)^2}{(a-c)^2}-c^2\right]\left[c^2-\frac{c^2(b-d)^2}{(a+c)^2}\right]$$

Uit $K / L = (a^2 - c^2) / c^2$ volgt:

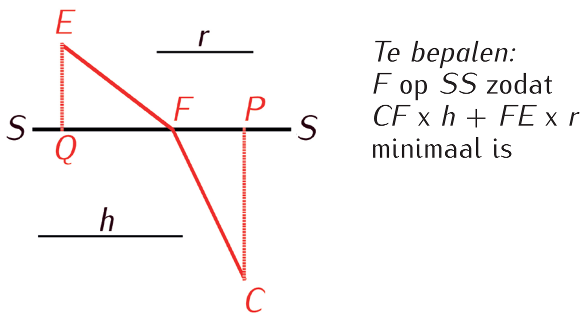
$$16K^2=\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)^2\cdot 16L^2$$

Alles valt op zijn plek, want na deze toch wel pittige algebraexercitie weet ik dat $16K^2$ gelijk moet zijn aan:
$[(b + d)^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - (b - d)^2]$
en - weer bordjes - dat is hetzelfde als
$(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$.

Leibniz en Snellius

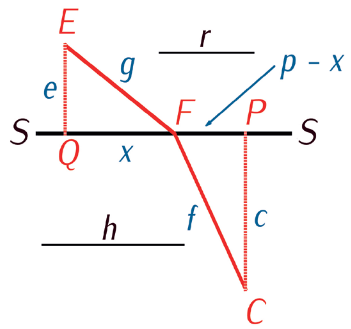
Tot slot een staaltje formele substitutie van niemand minder dan Leibniz. In het artikel uit 1684 waarmee hij de differentiaalrekening introduceerde onder meer als 'nieuwe methode om maxima en minima te bepalen'.[3]

Als toepassing van zijn methode behandelt Leibniz een bewijs van de brekingswet van Snellius. Hij baseert zich daarbij op wat het principe van Fermat werd genoemd: het licht kiest de snelste weg, in dit geval bij het passeren van twee media die verschillen in dichtheid. Meetkundig gezien komt dit, zie figuur 6, neer op:



figuur 6

Dan komen de hulpvariabelen, zie figuur 7:



figuur 7

$$g=\sqrt{ee+xx}=\sqrt{m}$$
$$f=\sqrt{cc+pp-2px+xx}=\sqrt{l}$$

Te minimaliseren: $w=h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$.

>

Leibniz' nieuwe methode zegt dan dat de 'differentiaal van w' gelijk moet zijn aan 0, en via zijn differentieerregels volgt:

$$dw = \frac{h \cdot dl}{2\sqrt{l}} + \frac{r \cdot dm}{2\sqrt{m}} = 0 \qquad (*)$$

Uit de formules voor g en f volgt dan:
$dl = -2(p - x)dx$ en $dm = 2xdx$
Dit gesubstitueerd in $(*)$ rekening houdend met:
$\sqrt{l} = f$ en $\sqrt{m} = g$ leidt tot:
$h(p - x) : f = rx : g$

Leibniz stelt dan $f = g = 1$ en concludeert:
$h : r = x : (p - x)$
Het quotiënt in het linkerlid kennen wij als *brekingsindex* en x en $p - x$ zijn gelijk aan de sinussen van de hoeken van inval en uitval.

Noten

[1] U-talent Academy (Freudenthal Instituut) biedt leerlingen van 5 en 6 vwo de mogelijkheid om op de campus van de UU een aantal lessen in de bètavakken te volgen.

[2] Kindt, M. (2000). De erfenis van Al-Khwarizmi. In F. Goffree, M. van Hoorn & B. Zwaneveld (Red.), *Honderd jaar Wiskundeonderwijs. Een jubileumboek.* NVvW: Leusden.

[3] Zie Maanen, J.A. van (1995). *Een complexe grootheid. Leven en werk van Johann Bernoulli.* Epsilon.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Een nieuw perspectief

Henk Rozenhart

Een prachtige optische illusie in de Kanaalstraat in Amsterdam. Hoe gevelreiniging leidt tot een nieuw perspectief. In dit project speelt de kunstenaar met de veranderingen die zich in de loop van de tijd hebben voorgedaan aan de zijgevel van het pand uit 1896. Door de opbouw, 25 jaar later, van een hoge werkruimte op de bestaande bebouwing is er een duidelijk verschil in structuur en kleur waarneembaar geworden in de zijgevel. Dit gegeven heeft de kunstenaar gebruikt en gedeeltelijk doorgetrokken naar de zijgevel zodat er in zijn geheel een verband ontstaat.

Kunstenaar: Hans van der Pas

Melanie Steentjes

Verhalen uit het vmbo

Sebastiaan

Bij ons op school hebben we al jaren een kansklas. In deze klas zitten leerlingen die randje praktijkonderwijs scoorden op de basisschool, maar wellicht toch vmbo basis aan zouden kunnen. Deze klas is wat kleiner dan de andere klassen (zo'n zestien leerlingen), maar verder hebben ze hetzelfde programma als de andere basisklassen. En eigenlijk stroomt iedereen in de derde door naar vmbo basis of zelfs kader. Dat is heel knap. En het lijkt of er bij sommige van deze leerlingen een extra vuurtje is gaan branden doordat ze hebben gezien dat ze meer kunnen dan men ooit dacht. Die hebben een enorme drive om verder te komen. Zo weet ik van een leerling die vanuit de kansklas eerst vmbo kader, daarna vmbo tl is gaan doen en nu bezig is met de havo.

Dat vuurtje zie ik ook bij Sebastiaan, ooit in de kansklas begonnen en nu in mijn 4 kader-klas. Een rustige sympathieke jongen, die altijd hard en serieus werkt. Hij bleef een keertje hangen na de les toen ik een andere leerling wat extra uitleg gaf die wilde proberen om wiskunde op tl-niveau te gaan doen. Sebastiaan wilde die opgaven ook wel eens maken. Het ging over goniometrie in 3D. Niet echt het meest eenvoudige onderwerp. Je moet behoorlijk meetkundig inzicht hebben om de driehoek eruit te halen waarin je moet rekenen. Sebastiaan draaide er zijn hand niet voor om. Ik was onder de indruk en vroeg hem of hij niet wilde proberen om ook wiskunde op tl-niveau te gaan doen. Zijn gezicht sprak boekdelen: hij begon te stralen. En ook al moest hij wennen aan het feit dat zijn cijfers op tl-niveau iets lager zijn dan een 9, hij doet het heel goed. Afgelopen periode moesten de leerlingen uit de examenklas twee weken stagelopen. Sebastiaan zou stagelopen op een basisschool, maar helaas kon dat vanwege corona niet doorgaan en kwam hij bij een bso terecht. Ik mocht hem op zijn stageplek bezoeken. Bij binnenkomst kreeg ik direct een rondleiding van hem. Ook hier straalde hij. Hij vertelde dat hij het nu helemaal zeker wist: met kinderen werken was wat hij wilde. Ook zijn stagebegeleider glom. Hij vertelde dat hij niet vaak stagiairs had gehad die zo goed werkten als Sebastiaan. Sebastiaan zag wat er moest gebeuren, nam initiatief en de kinderen waren dol op hem. Als we meer van zulke jongens op school hadden rondlopen, moesten we ze direct naar hem doorsturen. Sebastiaan zat er glimmend van trots naast.

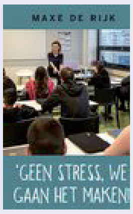
Soms denk ik bij jongens als Sebastiaan dat we ze tekort doen. Wat als er pas op zijn vijftiende gekeken was welk niveau hij aankon? Dan was hij wellicht direct op de havo terechtgekomen. Maar toen ik zag hoe hij genoot van zijn stageplek en wat een energie dat werk hem gaf, wist ik dat het met Sebastiaan sowieso goed zou komen. Hij gaat straks mbo onderwijsassistent doen. En daarna? Misschien wel pabo. En misschien wordt hij ooit wel docent wiskunde… Doet hij ook nog iets met zijn wiskundig talent.

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en toetsdeskundige bij Cito in Arnhem.
E-mail: *m.steentjes@hilfertsheem.nl.*

VERSCHENEN

Prachtig boek over vmbo-kansklas



Titel: Geen stress we gaan het maken. Verhalen uit mijn vmbo-kansklas
Auteur: Maxe de Rijk
ISBN: 9789021428734

Politicologe Maxe de Rijk is drie jaar mentor van een vmbo-kansklas in Amsterdam West. Maxe laat haar leerlingen zelf een motto bedenken voor hun klas en dat wordt 'Geen stress we gaan het maken'. Je volgt de leerlingen van de eerste klas tot het moment dat ze naar de bovenbouw gaan. Er gebeurt veel in de levens van de leerlingen en je leeft net als Maxe diep met ze mee. In de beschreven periode valt de coronatijd en duidelijk wordt hoe groot de impact is van de lockdowns op de leerlingen. Het boek is een ode aan de veerkracht van jongeren en aan hun docent die zo betrokken bij hen is. Maar het is ook een aanklacht tegen kansenongelijkheid en discriminatie.

Liesbeth Coffeng

Wis en Waarachtig

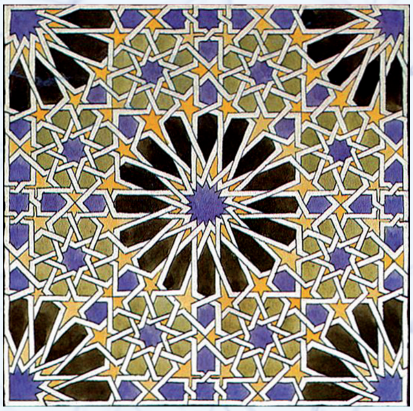
Zwolse kunstenaar moet noodgedwongen zijn Escher-schilderij witten

Dennie Boxem schilderde een levensgrote ode aan Escher, omdat de beroemde kunstenaar precies vijftig jaar geleden overleed. Alleen: niemand kan dit kunstwerk gaan zien, want er is namelijk niks meer van over. Boxem moest het hele schilderij overschilderen met witte verf, op last van de Escher Compagnie. Deed hij dit niet, dan riskeerde de Zwollenaar een enorme boete en vier jaar gevangenisstraf. Het idee voor het schilderij kwam van een school uit de geboortestad van Escher: Leeuwarden. Vijfhonderd leerlingen en zestig medewerkers van de school zouden gaan meewerken aan het grote schilderij. Het schilderij was helemaal klaar om vervoerd te worden naar Leeuwarden, zodat het daar verder afgewerkt zou worden door de leerlingen en medewerkers van de school. Maar zover zou het niet komen. De Zwolse kunstenaar kreeg onlangs een mailtje van de Escher Compagnie over het auteursrecht dat op het werk van Escher rust. Boxem vroeg de compagnie om een uitzondering te maken voor zijn schilderij. 'Ik heb geprobeerd uit te leggen dat er nog een grote bijdrage aan het schilderij moet worden geleverd door vijfhonderd leerlingen van de school.' De leerlingen zouden bijvoorbeeld blaadjes gaan schilderen op het schilderij. Dit strookte toch niet met de regelementen van de Escher Compagnie. Boxem mag dus geen Escher-gerelateerde afbeeldingen gebruiken. Pas zeventig jaar na het overlijden van de maker vervalt het auteursrecht.
Bron: *www.rtvoost.nl*

Wiskundedocent: bal was 5 cm over de lijn

De discussie over het wel of niet over de lijn zijn van een bal tijdens de topper PSV - Ajax van eind januari werd door een PSV-fan samen met de wiskundedocent (Ajax-fan) van zijn kind opgelost. De twee hebben een volgens hen betrouwbare berekening uitgevoerd en voor de Ajacieden die dat niet geloven zelfs een berekening in het voordeel van Ajax gedaan. De uitkomst: de bal was op z'n minst 0,3 cm over de lijn en zeer waarschijnlijk 5 cm. De hele berekening is terug te vinden in tweets die je kunt vinden via onderstaande bron.
Bron: *https://sportnieuws.nl/*

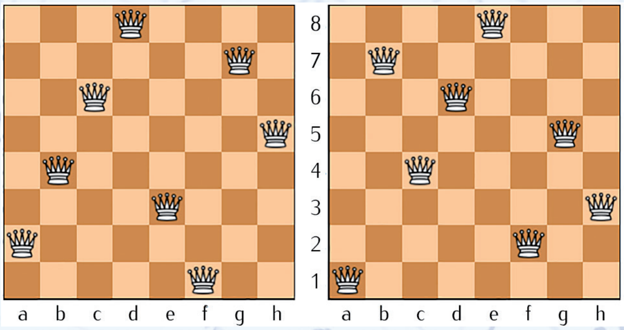
Escher en het Alhambra



Je kent ongetwijfeld de talrijke vlak-vullingen met dierenfiguren die Maurits Escher maakte. In 1922 rondt Escher zijn opleiding tot graficus af. In oktober van dat jaar bezoekt hij voor de eerste keer het Alhambra in Granada en kopieert er decoratieve motieven. Je kunt het Alhambra in Granada bezoeken vanuit een interesse in kunst, een interesse in geschie-denis, een interesse in wiskunde... . Op welke manier je het ook bezoekt, je wordt gegarandeerd omvergeblazen door de fabelachtige decoratie. Van de herhaling van een eenvoudig motiefje tot ingenieus in elkaar vervlochten patronen met spiegelingen en draaiingen, telkens is het resultaat weer net iets anders dan in de vorige zaal. Vorig jaar gaf Chris Cambré een online workshop over Escher en het Alhambra voor uitgeverij Boom.
De workshop is nu te bekijken op *https://www.youtube.com/watch?v=FczuohjZ7Xk&t=27s.*
Het interactieve lesmateriaal werd gebundeld in een aantal GeoGebraboeken van Chris Cambré (links via onderstaande bron): 'Symmetrie in het Alhambra', 'Escher en het Alhambra' en 'Alhambra met passer, liniaal en GeoGebra'.
Bron: *https://www.vvwl.be/escher-en-het-alhambra/*

Uitgebreide versie achtdamesprobleem opgelost

Stel: je hebt een normaal schaakbord van acht bij acht vakjes. Kun je dan acht dames zodanig neerzetten dat ze elkaar geen van allen aanvallen? Dit 'achtdamesprobleem' stamt uit 1848. Twee jaar later waren alle 92 oplossingen bekend, waaronder de volgende twee.

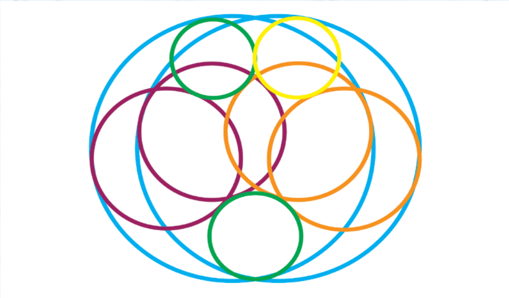


In 1869 publiceerde de Franse wiskundige Eugène Lionnet in *Nouvelles Annales de Mathématiques* een algemene versie van het probleem: op hoeveel manieren kun je op een schaakbord van n bij n vakjes n dames zodanig neerzetten dat ze elkaar niet aanvallen?
Bij dit n-damesprobleem loopt het aantal mogelijkheden heel snel op. Bij tien dames zijn er 352 manieren, bij vijftien dames zijn het er ruim twee miljoen en bij twintig dames ruim 39 miljard. Het hoogste aantal dames waarbij het exacte aantal mogelijkheden is uitgerekend, is 27. Hierbij zijn er 234.907.967.154.122.528 mogelijkheden.
In deze snelle stijging zit geen vast patroon. Je kunt dus geen formule opstellen om het aantal manieren voor een bepaald aantal dames precies uit te rekenen.
De Amerikaanse wiskundige Michael Simkin van de Harvard-universiteit heeft onlangs wel een formule opgesteld waarbij je het aantal mogelijkheden bij grote schaakborden – vanaf enkele tientallen dames – vrij dicht kunt benaderen. Hij ontdekte dat de dames dan op ongeveer $(0{,}143n)^n$ manieren kunnen worden neergezet. Simkin kwam op deze formule door te onderzoeken hoe de dames zich op zo'n megaschaakbord meestal zouden verdelen. Zouden ze bijvoorbeeld vooral in het midden van het bord komen te staan, of meer aan de randen? Door te focussen op de vakjes die de grootste kans maken te worden bezet, berekende de wiskundige een onder- en bovengrens voor het aantal mogelijke oplossingen.
De formule geeft de waarde die precies tussen deze grenzen inzit. De grenzen zitten relatief dicht bij elkaar, zodat de formule het aantal mogelijkheden goed benadert. Als je een bepaalde voorwaarde over de verdeling van de dames meegeeft, kan Simkin bij elk aantal dames zelfs het exacte aantal mogelijkheden uitrekenen.
Met zijn onderzoek heeft Simkin het n-damesprobleem nog niet schaakmat gezet. In theorie moet er een formule te vinden zijn die het aantal mogelijkheden nog dichter benadert. Dat laat Simkin echter graag aan anderen over. 'Ik heb de laatste tijd veel gedroomd over schaken. Ik ben klaar om verder te gaan met mijn leven', zegt hij tegen *The Harvard Gazette.*
De algoritmes die Simkin ontwikkelde, kunnen ook op andere gebieden van pas komen. Zo nam de beroemde Nederlandse wiskundige Edsger Dijkstra het achtdamesprobleem in 1972 als voorbeeld om het nut van gestructureerd programmeren aan te tonen.
Bron: *www.newscientist.nl*

Variant vermoeden Gilbreath bewezen

Norman Gilbreath, nu 86 jaar, ontdekte iets opmerkelijks toen hij op een zomerdag in 1958 op een servetje een reeks getallen opkrabbelde. De toen 22-jarige wiskundestudent uit Los Angeles noteerde de eerste zoveel priemgetallen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Daaronder schreef hij de verschillen van de opeenvolgende getallen op: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, ... Daarvan pende hij weer de verschillen op: 1, 0, 2, 2, 2, 2, ... Dit proces zette hij voort tot er maar één getal overbleef. Het viel hem op dat al die verschilrijen met het getal 1 beginnen.
Het servetje was het begin van wat 'Gilbreaths vermoeden' ging heten: elke verschilrij begint met 1. Het vermoeden is intussen dankzij slimme trucs met krachtige computers voor miljarden verschilrijen geverifieerd. Maar natuurlijk blijven er altijd nog oneindig veel verschilrijen over...
Wiskundigen vermoeden dat de ontdekking van Gilbreath geldt voor een brede klasse van getalrijen. Voornaamste voorwaarde: de verschillen tussen getallen mogen toenemen, maar niet met al te grote sprongen.
Zachary Chase, promovendus uit Oxford, heeft voor bepaalde willekeurig gegenereerde getallenrijen de eigenschap nu bewezen.
Ruwweg komt zijn stelling erop neer dat voor elke rij getallen die begint met een 2, gevolgd door een 3, en daarna verder volgens een exact gedefinieerd toevalsproces, geldt dat vanaf een zeker moment elke verschilrij begint met een 1. De rij getallen mag niet te hard groeien. Die eis is vastgelegd in het toevalsproces: elk getal in de rij is gelijk aan het voorgaande plus een aselecte getrokken getal uit een verzameling waarvan de bovengrens wordt bepaald door een formule waarin logaritmen voorkomen. Het toevalsaspect in het resultaat van Chase is essentieel. Priemgetallen zijn uiteraard geen toevalsgetallen, maar ze gedragen zich in zekere zin wel willekeurig. Chase: 'Misschien gedragen de afstanden tussen priemgetallen zich op een vreemde manier, waardoor het vermoeden van Gilbreath toch onjuist kan zijn.'
Bron: *NRC Handelsblad*, 8 februari 2022

Vijf kleuren onvoldoende voor rakende cirkels



Teken op een blad papier een stel cirkels in verschillende kleuren. De cirkels hoeven niet even groot te zijn en mogen elkaar overlappen. Er zijn twee voorwaarden: (1) niet meer dan twee cirkels mogen elkaar in hetzelfde punt raken en (2) twee cirkels die elkaar wel raken moeten verschillende kleuren hebben. Snijdende cirkels mogen wel gelijke kleuren hebben. Vraag: heb je altijd aan vijf kleuren genoeg, ongeacht het aantal cirkels? Deze vraag werd door de Duitse wiskundige Gerhard Ringel in 1959 gesteld. In 1984 gaf Ringel twee configuraties waarbij vijf kleuren nodig zijn, een van acht cirkels en een van negen cirkels (die hierboven staat). Sindsdien was de vraag of je altijd met vijf kleuren kunt volstaan. Vijf wiskundigen van universiteiten in Canada, Israël, Duitsland en Polen hebben de vraag nu ontkennend kunnen beantwoorden. Ze geven geen enkel voorbeeld van een configuratie waarbij bijvoorbeeld zes kleuren nodig zijn, maar geven een algemeen bewijs van het feit dat er helemaal geen grens zit aan het aantal benodigde kleuren. Het is bijvoorbeeld mogelijk een reeks cirkels te tekenen waarvoor zelfs duizend kleuren niet volstaan. Alleen het aantal cirkels is dan zeer groot, zelfs een tekening waarvoor maar zes kleuren nodig zijn is praktisch al onhaalbaar: 'het aantal cirkels is waarschijnlijk dan al groter dan het aantal atomen in het heelal', aldus Linda Kleist. De wiskundigen gebruikten een inductieve methode: 'onze methode laat zien dat als je een configuratie *A* hebt die niet met vier kleuren kan worden gekleurd, je een nieuwe, veel grotere configuratie *B* kunt construeren die niet met vijf kleuren kan worden gekleurd. Vervolgens kun je *B* gebruiken om, volgens hetzelfde principe, een configuratie *C* te maken waarvoor zes kleuren niet volstaan.' En zo kun je doorgaan...
Bron: *NRC Handelsblad*, 25 januari 2022.

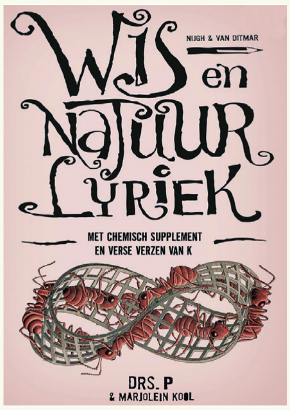
PARABOOL

Een parabool die heel bedaard
zojuist zijn raaklijn had bezocht,
die vloog daarna in volle vaart,
vlak voor zijn toppunt uit de bocht.

Zijn hele auto total loss!
En dat zou niet het ergste zijn,
maar hij was ook nog zelf de klos:
hij werd op slag een rechte lijn.

'Hoe kan dat nou?' vroeg men op straat.
Hij zei: 'Ik zag een mooie meid
en acht, u weet wel hoe dat gaat,
toen werd ik even afgeleid.'

Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek *van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid.*

Paul Drijvers

De parabel van de parabool

Oude, vertrouwde parabolen blijven soms verrassen en blijken uniek te zijn in hun eigenschappen. Uitgaande van twee opgaven die hij al lang kende, verkent Paul Drijvers twee bijzondere eigenschappen van kwadratische functies en hun grafieken.

Inleiding

Midden jaren '90 van de vorige eeuw kwam ik vrijwel wekelijks in de lessen bij Gerard Stroomer, wiskundedocent aan het Liemers College in Zevenaar, dat een van de pilotscholen was voor de examenprogramma's die in 1998-1999 werden ingevoerd. In 4 vwo wiskunde B hadden de leerlingen geleerd om kwadratische functies te differentiëren. De school gebruikte de *Wageningse Methode*, en daarin stond een opgave die in vergelijkbare vorm ook in de huidige editie voorkomt, zie figuur 1. Het idee van onderdeel b is, informeel gezegd: als je twee verschillende punten pakt op de parabool met vergelijking $y = x^2$, dan is de raaklijn in het punt met gemiddelde x-coördinaat evenwijdig aan de lijn door die twee punten.

6

Gegeven $f : x \to x^2$ met daarop het punt $A(a, a^2)$.

a Laat zien dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt met eerste coördinaat $\frac{1}{2}a$ evenwijdig is met lijn OA (O is de oorsprong).

Wat je in **a** bewezen hebt is een speciaal geval van het volgende.
Gegeven twee punten $A(a, a^2)$ en $B(b, b^2)$ op de grafiek van f. Dan is de raaklijn in het punt met eerste coördinaat $\frac{1}{2}(a+b)$ evenwijdig met lijn AB.

b Bewijs dat.

STERCOLLECTIE

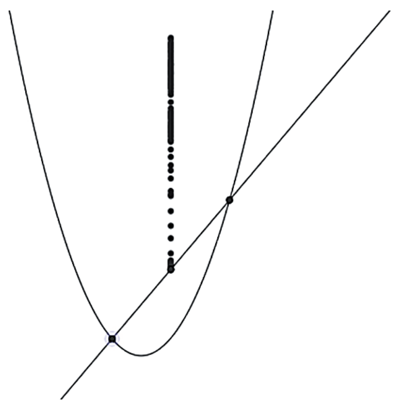
figuur 1 Opgave voor 4 vwo wiskunde B uit de Wageningse Methode[1]

Het bewijs hiervan vraagt een beetje algebra. De helling van de lijn door (a, a^2) en (b, b^2) is gelijk aan $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ofwel $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}$, en dit is gelijk aan $a + b$. Het punt met x-coördinaat midden tussen de twee andere x-coördinaten is $\left(\dfrac{a+b}{2}, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$. De afgeleide is het dubbele van die eerste coördinaat en dat is inderdaad gelijk aan $a + b$.

Toen dit in de klas aan de orde was geweest, kwam een leerling met een interessante omkeervraag: klopt het ook andersom? Met andere woorden, als deze 'middenraaklijneigenschap' (MRE) geldt voor een functie, is de grafiek dan een parabool? Zowel Gerard als ik waren hierdoor wat overvallen. We dachten van wel maar wisten niet meteen een bewijs daarvoor. Daarna gebeurde er weer wat anders in de klas en vergaten we het voorval.

Een tweede opgave

Kort voor de zomer 2021 gaf ik een gastles op de lerarenopleiding van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen, waarin ik een andere opgave besprak die ook aan de orde komt in de bijdrage van Jeroen Spandaw in *Eulides* 97(4). Weer ging het om de grafiek van een kwadratische functie die je met een rechte snijdt. Maar dit keer bekeken we de baan die het midden van de twee snijpunten beschrijft als je die rechte met gelijkblijvende helling omhoog- of omlaagschuift. Een animatie in bijvoorbeeld GeoGebra suggereert dat het middelpunt dan verticaal beweegt (zie figuur 2). Is dat echt zo? Omdat je elke parabool met wat 'schuiven en rekken' kunt omvormen tot die met vergelijking $y = x^2$, beperk ik me weer tot dit geval. Net als in de vorige opgave is de helling van de lijn door (a, a^2) en (b, b^2) gelijk aan $a + b$ en omdat we de lijn verticaal verschuiven, blijft die constant. Maar dan is $\dfrac{a+b}{2}$, de x-coördinaat van het midden van de twee snijpunten, eveneens constant. Als de x-coördinaat niet verandert, beweegt het middelpunt zich dus over een verticale lijn. En andersom, als van een bundel snijlijnen met de parabool de middelpunten van de snijpunten verticaal boven elkaar liggen, dan zijn de lijnen evenwijdig. Laten we dit de 'verticalemiddeneigenschap' noemen, VME. En net als in het vorige probleem kun je de omkeervraag stellen: als deze eigenschap geldt, is de grafiek dan een parabool? >



figuur 2 De verticale (?) baan van het middelpunt[2]: animatie in GeoGebra

Wat hebben die twee opgaven met elkaar te maken?

Tijdens de gastles op de lerarenopleiding moest ik weer aan de opgave uit de *Wageningse Methode* denken. Ik kreeg het vermoeden dat de twee eigenschappen equivalent zijn. Maar dat bewijzen viel niet mee.... De ene kant op lukt wel: als VME geldt, dan geldt MRE ook.
De verticalemiddeneigenschap houdt immers in:

Voor alle a, b, c, d: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$,

dan en slechts dan als geldt $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c+d}{2}$.

We kiezen nu $A(a, f(a))$ en $B(b, f(b))$ vast, en laten c en d naar het midden van $[a, b]$ lopen:

$$c_n=\frac{a+b}{2}-\frac{1}{n} \text{ en } d_n=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{n}.$$

Vanwege VME is de snijlijn door c_n en d_n evenwijdig aan de lijn door A en B want het midden van c_n en d_n is $\dfrac{a+b}{2}$, net als dat van A en B. In het limietgeval gaat deze snijlijn over in de raaklijn voor $x = \dfrac{a+b}{2}$, die dus ook evenwijdig is aan de lijn door A en B, zodat de middenraaklijneigenschap geldt.

Maar andersom volgt uit de middenraaklijneigenschap niet altijd de verticalemiddeneigenschap. Neem bijvoorbeeld een eenvoudige lineaire functie. Elke lineaire functie voldoet aan de middenraaklijneigenschap, omdat de raaklijn overal gelijk is aan de lijn zelf. Maar ze voldoet niet aan de verticalemiddeneigenschap: voor elk tweetal punten heeft de lijn dezelfde helling, maar dat betekent nog niet dat twee tweetallen punten altijd hetzelfde middelpunt hebben. Kortom, mijn equivalentie gaat niet door en de twee opgaven hebben minder met elkaar te maken dan ik dacht.

De omkeervraag opgelost

Dan rest nog de omkeervraag uit de *Wageningse Methode*: als MRE geldt, is de functie dan kwadratisch? Die vlieger gaat inderdaad wel op. De omgekeerde stelling kan op verschillende manieren worden bewezen. De eerste manier is bedacht door Arnoud van Rooij, mijn oude leermeester. Nadat we samen even vruchteloos naar het probleem hadden gekeken, belde hij me een paar uur later op om zijn bewijs uit te leggen. Ik meende het te begrijpen, maar toen ik had opgehangen speelde het 'Van der Blij-effect' me parten: prof. Van der Blij kon alles zo goed uitleggen tijdens het college, dat je er na afloop pas achter kwam dat je het nog niet echt had begrepen. Maar goed, na enige reconstructie ontstond het volgende bewijs.

Stel we hebben een differentieerbare (en dus continue) functie f. We noemen de eerste coördinaat van het middelpunt c.
Dan geldt voor alle c en $x \neq 0$: $f'(c)=\dfrac{f(c+x)-f(c-x)}{2x}$.

Dus geldt voor alle c en $x \neq 0$:
$2x \cdot f'(c)=f(c+x)-f(c-x)$

Dit differentiëren we naar x:
Voor alle c en $x \neq 0$ geldt:
$$2f'(c)=f'(c+x)+f'(c-x) \qquad (*)$$

Dus voor alle c en $x \neq 0$ geldt:
$$f'(c)=\frac{f'(c+x)+f'(c-x)}{2}$$
Met andere woorden, voor elk tweetal punten van de grafiek van f' ligt het middelpunt ook op de grafiek. Dat kan alleen maar als f' een lineaire functie is, en daarmee is f kwadratisch.

Je kunt ook $(*)$ nog een tweede keer naar x differentiëren:
Voor alle c en $x \neq 0$ geldt:
$0=f''(c+x)-f''(c-x)$.

Maar dit betekent dat alle tweetallen functiewaarden van f'' aan elkaar gelijk zijn. Met andere woorden, f'' is een constante functie, waarmee f kwadratisch is.

Een tweede oplossing

Gerard Stroomer, de docent op het Liemers College indertijd, liet zich ook niet onbetuigd en kwam via dezelfde differentiaalvergelijking met een bewijs dat uitgaat van machtreeksontwikkelingen. Dit stijgt dus uit boven het niveau van 4 vwo, maar als je bereid bent om de stippeltjes op de koop toe te nemen, is het toch wel inzichtelijk: Stel dat $f(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + \cdots$

Dan geldt:
$f'(c) = a_1 + 2a_2 c + 3a_3 c^2 + 4a_4 c^3 + \cdots$

En:
$$2x \cdot f'(c) = 2a_1 x + 4a_2 cx + 6a_3 c^2 x + 8a_4 c^3 x + \cdots \qquad (**)$$

Dit zou voor alle c en $x \neq 0$ weer gelijk moeten zijn aan $f(c+x) - f(c-x)$.

Als we de reeksontwikkeling voor f invullen, krijgen we:
$$f(c+x) - f(c-x) =$$
$$2a_1 x + 4a_2 cx + a_3((c+x)^3 - (c-x)^3)) + \cdots \qquad (***)$$

In $(**)$ en $(***)$ stemmen de termen bij a_1 en a_2 overeen en a_0 is eruit gevallen. De rest kan alleen voor alle c en $x \neq 0$ gelijk zijn als $0 = a_3 = a_4 = \dots$.
Met andere woorden, de reeksontwikkeling van f stopt na a_2 dus f is een kwadratische functie.

"Ogenschijnlijke eenvoudige verschijnselen uit de schoolwiskunde kunnen leiden tot diepere beschouwingen."

Moraal

Wat leren we nu van deze exercitie? Behalve dat ik er zelf plezier in heb om dit op te schrijven, wil ik hiermee benadrukken dat ogenschijnlijk eenvoudige verschijnselen uit de schoolwiskunde kunnen leiden tot wat diepere beschouwingen, die vervolgens toch weer met relatief elementaire middelen kunnen worden aangepakt. Daarnaast blijkt uit de niet-kloppende equivalentie dat niet alles is zoals het lijkt, ook een leerzame ervaring.

Het lijkt me goed om je open te stellen voor dit soort op het eerste gezicht eenvoudige vragen, niet alleen omdat het leuk is om zelf over wiskunde na te denken, maar ook in de hoop dat zich af en toe zulke gelegenheden in de klas zullen voordoen om dat met leerlingen te delen. Ik denk dat dergelijke momenten voor leerlingen waardevol en inspirerend kunnen zijn. Met deze moraal is dit stukje nog geen parabel geworden, maar omdat in het Frans parabole zowel parabel als parabool betekent, heb ik deze titel gekozen.

Dankwoord

Dank aan Arnoud van Rooij, emeritus-hoogleraar wiskunde bij de Radboud Universiteit, Gerard Stroomer, docent wiskunde aan het Thomas à Kempis College in Arnhem, en Rogier Bos, collega bij het Freudenthal Instituut, voor hun inhoudelijke bijdragen.

Noten

[1] Zie *http://wm.math4allview.appspot.com/view?comp=lj4-v-b-h06&subcomp=lj4-v-b-h06-09&variant=basis_wm&item=1*

[2] De opgave staat op p. 11 van Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2006). Oriëntatie op schoolalgebra. In P. Drijvers (Red.), *Wat a is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school* (pp. 7–24). Utrecht: Freudenthal Instituut.

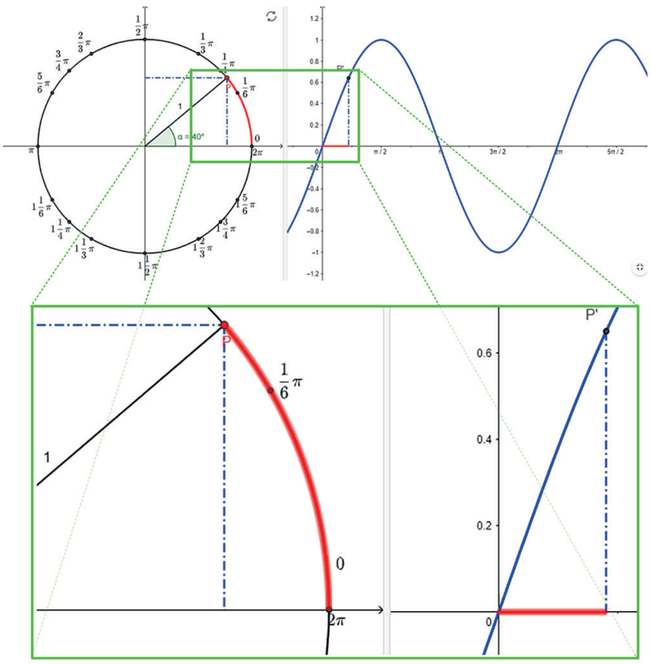
Over de auteur

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij de Universiteit Utrecht en wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

Lonneke Boels

De samenhang tussen sinus en eenheidscirkel

Op GeoGebra vind je veel mooie applicaties waarbij je de samenhang tussen de sinus en de eenheidscirkel zichtbaar kunt maken. Van deze applicaties maak ik dankbaar gebruik bij de introductie van de sinus. Een voorbeeld is de applicatie van Nico Johan van Wijngaarden[1] waarin een punt rond de eenheidscirkel kan worden gesleept zodat de sinusgrafiek verschijnt in het cartesiaanse vlak. Wat ik fijn vind aan deze applicatie is dat de lengte van de cirkelboog in rood is aangegeven, net als *diezelfde* lengte op de horizontale as, zie figuur 1. Dit kan leerlingen helpen om de relatie tussen beide te zien. Wat echter ook opvalt in figuur 1 is dat de lengte van de rode lijn op de cirkelboog niet gelijk is aan de lengte van de rode lijn op de horizontale as bij de sinus. Anders gezegd: de schaal van beide is niet hetzelfde, wat het voor leerlingen lastiger maakt om in te zien dat deze lengten gelijk zijn.



figuur 1

De verschillende schaling is niet per se fout en ik heb veel respect voor collega's die deze materialen ontwikkelen. Bij het aanleren van het verband tussen de eenheidscirkel en de sinus heb ik drie doelen:

(1) dat leerlingen leren dat de hoogte van punt *P* op de eenheidscirkel dezelfde hoogte is op de bijbehorende sinusgrafiek;
(2) dat de lengte van de boog op de eenheidscirkel (afstand die punt *P* heeft afgelegd vanaf 0) gelijk is aan de horizontale afstand op de horizontale as van de sinusgrafiek;
(3) dat leerlingen zelf de relatie construeren tussen punt *P* op de eenheidscirkel en punt *P'* op de sinusgrafiek.

Voor de eerste twee doelen is het belangrijk dat de schaal van de eenheidscirkel enerzijds en de assen van sinusgrafiek anderzijds gelijk zijn. De schaling voor de verticale as is bijna altijd wel gelijk. Bij mijn zoektocht naar een toepassing waarbij de schaling voor beide assen gelijk is, kwam ik alleen maar voorbeelden tegen met ongelijke schaal voor de horizontale as. [2, 3, 4] De applicatie van Jan Ellemans lijkt wel vrij dicht in de buurt te komen. Helaas onbreekt bij deze laatste een kleuring zoals in figuur 1. Voor het derde leerdoel zocht ik een toepassing waarbij de sinus nog niet getekend is maar je deze zelf maakt door punt *P* te bewegen. Ik heb deze nog niet gevonden, dus voor tips houd ik mij aanbevolen. In een volgend artikel bespreek ik wat ik in plaats hiervan in mijn klas heb gedaan.

Noten

[1] Nico Johan van Wijngaarden. Sinus-eenheidscirkel. *https://www.geogebra.org/m/E8dchCym*

[2] Jacques Schetters. SinusGrafiek. *https://www.geogebra.org/m/Ta23GS3S*

[3] Gerben van der Hoek. *https://wiswise.nl/* bijvoorbeeld in dit filmpje: *https://youtu.be/DxSSKfMeFgw* of dit gave spel: *https://www.geogebra.org/m/rcebvqfb*

[4] Jan Ellemans. Sinus en reuzenrad. Inzicht. *https://www.geogebra.org/m/skdaMWTM*

WiTje: Meer ruimte voor het festival

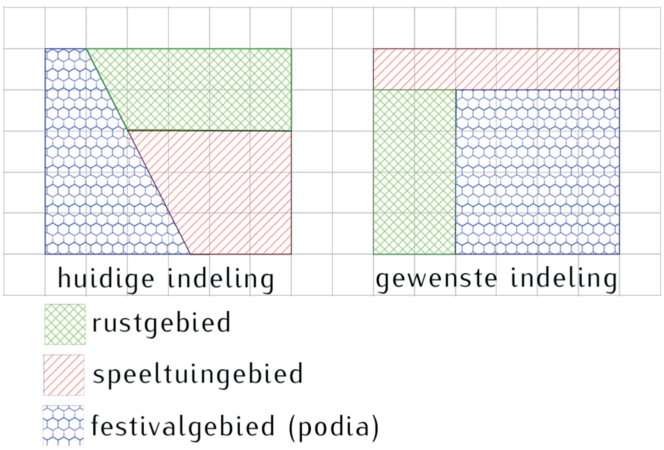
Wiskunde in teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Nederland wordt steeds meer festivalland: vooral in de zomer worden er veel festivals georganiseerd, van Lowlands tot De Parade. Bestaande terreinen worden tijdens een festival vaak tijdelijk omgebouwd tot een festivalterrein. Dat betekent dat er elektriciteit moet komen, er podia aangelegd moeten worden, de grond verstevigd moet worden, er toiletten moeten komen, horeca, chill-plekken, etcetera. In deze opdracht ga je aan de hand van een voorbeeld van een gewenste festivalindeling uitrekenen hoeveel dat kan gaan kosten.

Van park naar festival

In figuur 1 zie je links de huidige indeling van een gebied van 500 × 600 meter. De totale oppervlakte van dit gebied is 300.000 m^2 = 30 hectare (30 ha).
Met behulp van kleuren en arceringen is aangegeven welke bestemming ieder deel van het gebied heeft gekregen, dus welke activiteiten daar mogen plaatsvinden. Je kunt aan de hand van de schematische plattegronden in figuur 1 uitrekenen hoeveel m^2 er toegekend wordt voor rustgebied, speeltuingebied en festivalgebied in de huidige indeling en in de gewenste indeling.



figuur 1

Opdracht 1
Bereken met hoeveel m^2 het rustgebied is afgenomen vanuit de huidige indeling naar de gewenste indeling, met hoeveel m^2 het festivalgebied is toegenomen, en wat de toe- of afname is in m^2 voor het speeltuingebied.

Bij de herinrichting hoort de volgende kostentabel (in euro's per m^2):

van ... naar ...	rustgebied	speeltuin-gebied	festivalgebied
rustgebied	–	25	30
speeltuingebied	20	–	50
festivalgebied	20	20	–

Uit deze tabel lees je bijvoorbeeld af dat het €30,– per m^2 kost om rustgebied te veranderen in een festivalgebied.
Met behulp van figuur 1 en de kostentabel kun je een kostenkaart tekenen. In een kostenkaart wordt het hele gebied zo in stukken opgedeeld dat voor elk stuk zichtbaar is hoe hoog de kosten per m^2 zijn om het van de huidige in de gewenste bestemming te veranderen. Deze herinrichtingskosten per m^2 worden in elk stuk van de kaart aangegeven.

Opdracht 2
Maak zo'n kostenkaart voor de herinrichting van het gebied, zoals aangegeven in figuur 1. Bereken de totale kosten van de herinrichting van huidige naar gewenste indeling.

Bron: OnderbouwWiskundeDag 2017, zie *https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28540/*

Jacques Jansen

Uitdagende problemen
Gemiddelden

Welke gemiddelden gebruiken we zoal? Wat hebben we aan die verschillende gemiddelden? Kunnen we ze in één plaatje zichtbaar maken? Is er een onderlinge samenhang of staan ze geheel los van elkaar? Is er een gemeenschappelijke bron?

Inleiding


Dinsdag zijn 385 nieuwe patiënten opgenomen. Dagcijfers kunnen sterk fluctueren, op weekbasis daalt de instroom langzaam. Gemiddeld werden de afgelopen week dagelijks 295 nieuwe patiënten opgenomen, iets minder dan de week daarvoor.

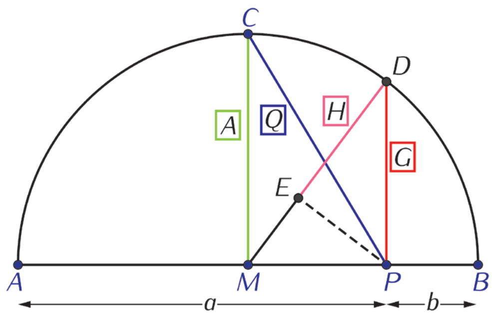
figuur 1

In de afgelopen coronaperioden vallen twee wiskundige termen in de media heel erg op. Dat zijn de begrippen exponentieel verband en gemiddelde. Gemiddelden zien we vaak terug in de overzichten van de besmettingen, zie figuur 1. Meestal is dat het aritmetisch of rekenkundig gemiddelde. De leerling is er zeer goed bekend mee, al was het maar om het rapportcijfer bij wiskunde uit te kunnen rekenen. Een leuk gemiddeldeprobleem om de leerlingen voor te leggen is het volgende.

Boer Jensen fokte kippen met vreemdsoortige eieren, soms met een dooier, soms met twee dooiers en dan weer zonder dooier. Boer Jensen hield hier een boekhouding van bij, maar na het vijfduizendste ei raakte hij zijn gegevens kwijt. Hij herinnerde zich alleen nog dat de meeste van de eieren slechts één dooier bevatte en precies de helft van de resterende eieren twee dooiers had. Hoeveel dooiers zaten er in totaal in deze vijfduizend eieren? [1]

Zichtbaar maken

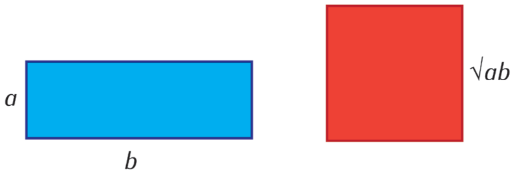
In een halve cirkel kunnen we vier verschillende gemiddelden als lengtes van lijnstukken zichtbaar maken, zie figuur 2. *AB* is een middellijn van de volledige cirkel met punt *M* als middelpunt en straal *r*. Punt *P* is willekeurig op middellijn *AB* gekozen. In de punten *M* en *P* zijn loodlijnen opgericht die de halve cirkel respectievelijk snijden in de punten *C* en *D*. De punten *C* en *P* worden met elkaar verbonden net zoals de punten *M* en *D*. Vanuit punt *P* is een loodlijn getrokken op lijnstuk *MD* met punt *E* als voetpunt. De lengte van lijnstuk *AP* geven we aan met *a* en de lengte van lijnstuk *BP* geven we aan met *b*. We leggen ons een beperking op tot het berekenen van gemiddelden van twee getallen *a* en *b*. Voor *a* en *b* nemen we dus twee positieve reële getallen.



figuur 2

We geven het aritmetisch (rekenkundig) gemiddelde aan met een *A*: $A=\frac{a+b}{2}$
Straal *MC* staat voor dit gemiddelde. Immers $CM=\frac{1}{2}\cdot AB=\frac{1}{2}(a+b)$.
Het geometrisch (meetkundig) gemiddelde geven we aan met *G*: $G=\sqrt{a\cdot b}$.
De lengte van lijnstuk *PD* staat voor het geometrisch

gemiddelde. Merk op dat $\angle ADB = 90^\circ$ (Thales). Zie de gelijkvormigheid van $\triangle APD$ met $\triangle DPB$. Hieruit volgt $AP : PD = DP : BP$ of $a : G = G : b$. Dus $G^2 = ab$.
We kunnen het ook zichtbaar maken met een rechthoek waarvan de afmetingen a en b zijn, zie figuur 3.



figuur 3

Het geometrisch gemiddelde is dan de grootte van een zijde van een vierkant dat dezelfde oppervlakte heeft als de rechthoek. In 3D, je raadt het al, gaat het natuurlijk om een balk en een kubus.
Het harmonisch gemiddelde geven we aan met de letter H: $H = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

Voor het harmonisch gemiddelde kunnen we ook schrijven:

$$H = \frac{2ab}{a+b}.$$

De lengte van lijnstuk ED staat voor het harmonisch gemiddelde. $\triangle PED \sim \triangle MPD$.
Hieruit volgt $ED : DP = DP : MD$ of $ED : G = G : r$.

$$ED = \frac{G^2}{r} = \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Het kwadratisch gemiddelde geven we aan met een Q:

$$Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

De lengte van lijnstuk PC staat voor het kwadratische gemiddelde. Pas de stelling van Pythagoras toe in $\triangle PMC$ met
$CP^2 = r^2 + (a - r)^2$ en na substitutie van r vind je dat $CP = Q$. Maar wat hebben we nu aan die vier soorten gemiddelden?

Nut van de gemiddelden

Voordat we verder kijken in de halve cirkel bekijken we eerst voorbeelden van het gebruik van de iets minder bekende gemiddelden.

Het harmonisch gemiddelde wordt vaak gebruikt bij verhoudingsgetallen. Bijvoorbeeld om het gemiddelde van twee snelheden uit te kunnen rekenen. Maar pas op met het formuleren van een vraag! Voorbeeld: Als je van Eindhoven naar Weert rijdt met een gemiddelde snelheid van 60 km/u en op de terugweg precies dezelfde weg neemt en een gemiddelde snelheid van 50 km/u hebt, wat is dan je gemiddelde snelheid over het hele traject?
Zo'n formulering vraagt om problemen. Ik vrees spookrijden en rotondes. Martin Kindt deed het zo in zijn boek *Wat te bewijzen was:* 'Een wandelaarster loopt met een snelheid van 2 km/u een steile bergweg omhoog. Zij daalt af langs dezelfde weg met een snelheid van 8 km/u. Hoe groot was haar gemiddelde snelheid over de gehele wandeling?'
Stel de lengte van de bergweg is a km. Over het klimmen doet ze $\frac{1}{2}a$ uur. Over het dalen $\frac{1}{8}a$ uur.
In een totaaltijd van $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{8}a)$ uur legt ze $2a$ km af.

Haar gemiddelde snelheid is dan: $\dfrac{2a}{\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}a} = \dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} =$

(de bergafstand doet er niet toe) $= H(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$.
Een uitdagende variant van de wandelaarsopgave is het volgende fietsprobleem:[2] 'Een wielrenster fietst met 20 km/u een berg op. Hoe snel moet zij langs dezelfde route afdalen om een totale gemiddelde snelheid van 40 km/u te halen?'

Het geometrisch gemiddelde wordt onder meer gebruikt om het gemiddelde van groeifactoren uit te rekenen. Voorbeeld: in 2020 kregen 5130 minderjarigen een boete voor het rijden zonder rijbewijs. Het gaat om scooter- en autorijden. In 2018 en 2019 ging het om respectievelijk 4066 en 4115 boetes, zie tabel 1.

jaar	aantal boetes	groeifactor
2018	4066	
2019	4115	1,0121
2020	5130	1,2467

tabel 1

De gemiddelde jaarlijkse groeifactor is

$\sqrt{\left(\frac{4115}{4066}\right)\left(\frac{5130}{4115}\right)} \approx 1{,}1232$ en hier zien we het geometrisch gemiddelde in terug. Merk op dat het aantal boetes van 2019 er niet toe doet.

>

Het kwadratisch gemiddelde wordt vaak in de statistiek gebruikt. Bijvoorbeeld: er wordt met een bepaald apparaat metingen verricht. Er worden niet steeds dezelfde waarden verkregen, ook niet als de metingen direct na elkaar worden gedaan. Men maakt meetfouten zodat er een reeks verschillenden uitkomsten wordt verkregen. Vaak zijn de meetfouten normaal verdeeld met nul als gemiddelde waarde. Om na te gaan hoe de waarden liggen ten opzichte van nul gebruiken we de standaardafwijking die in wezen niets anders is dan een kwadratisch gemiddelde. Nu is het wellicht aardig om te kijken naar de gekleurde lijnstukken in figuur 2.

Eigenschappen van de gemiddelden

De vier gemiddelden delen de volgende vier eigenschappen. We beperken ons weer tot het gemiddelde nemen van twee positieve reële getallen. We duiden een gemiddelde aan met de letter M.

Eerste eigenschap
Neem je het gemiddelde M van twee dezelfde getallen dan heeft M ook die waarde. Bijvoorbeeld harmonisch gemiddelde $H(a,a)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}}=\frac{2}{\frac{2}{a}}=a$. Het gemiddelde behoudt de waarde.

Tweede eigenschap
Maak je de getallen k (reëel getal) keer zo groot dan wordt het gemiddelde M ook k keer zo groot. Dit wordt homogeniteit genoemd. Bijvoorbeeld voor elk reëel getal k geldt $G(ka,kb)=\sqrt{ka\cdot kb}=k\cdot\sqrt{a\cdot b}=k\cdot G(a,b)$.

Derde eigenschap
Je kunt de getallen verwisselen, dat heeft geen effect op het gemiddelde. Dit heet de symmetrie-eigenschap. Met twee getallen noemen we het de wisseleigenschap. Met meer getallen hebben we het over permutaties.

Vierde eigenschap
Het gemiddelde M ligt tussen het minimum en maximum van twee getallen. Dit noemen we middeling. Ga dat maar eens na! Overigens het minimum en het maximum nemen van twee getallen voldoet ook aan de genoemde vier eisen. Ze worden ontaarde gemiddelden genoemd.

Ongelijkheid

Die zien we mooi in figuur 2, maar zien is geen bewijs. Schuine zijde PC is langer dan rechthoekzijde CM in rechthoekige driehoek $\triangle CMP$. De afstand van punt D tot de middellijn AB is kleiner dan de afstand van punt C tot de middellijn (straal r). In rechthoekige $\triangle PED$ is rechthoekzijde DE kleiner dan schuine zijde DP.

Dit geeft de ongelijkheid
$\min(a, b) \leq H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b) \leq Q(a, b) \leq \max(a, b)$.
Er is ook een andere samenhang tussen drie van die vier gemiddelden. Neem eens het geometrisch gemiddelde van het rekenkundig – en harmonisch gemiddelde van de positieve reële getallen a en b:

$$G(H,A)=\sqrt{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)}=\sqrt{a\cdot b}=G(a,b).$$

In figuur 2 zien we ook dat $\triangle EDP \sim \triangle PDM$. Daaruit volgt $\frac{ED}{DP}=\frac{DP}{DM}$ en dat geeft $\frac{H}{G}=\frac{G}{A}$ en dus $G=\sqrt{H\cdot A}$.

Als de vier gemiddelden een aantal eigenschappen delen, hebben ze dan niet een gemeenschappelijke bron? Jawel. Hiervoor moeten we naar het werk van de wiskundige Hölder kijken.

Höldergemiddelde

figuur 4 Otto Ludwig Hölder (1859-1937)

Dit gemiddelde, ook bekend als machtsgemiddelde of wortelgemiddelde, is genoemd naar de Duitse wiskundige Otto Ludwig Hölder (1859-1937), ooit leerling van bekendere wiskundigen zoals Weierstrass en Kronecker.
We nemen nu het machtsgemiddelde van n getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$M=\sqrt[p]{\frac{x_1{}^p+x_2{}^p\ldots\ldots x_n{}^p}{n}}$$

waarbij p een reëel getal is ongelijk aan nul. Bij twee getallen a en b schrijven we $M(a,b)=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$
Al een aardige exercitie voor de leerlingen, om de juiste p-waarden te vinden bij de vier genoemde gemiddelden. Voor $p = 1$ en $p = 2$ is dat geen probleem. Het levert respectievelijk het aritmetisch en kwadratisch gemiddelde op. Maar dan?
Kies $p = -1$: $M(a,b)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{\frac{1}{-1}}=\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}$.

En ja, hier hebben we het harmonisch gemiddelde.
Maar kunnen we het geometrisch gemiddelde hieruit afleiden? $G=\sqrt{a\cdot b}$ kunnen we wel als een macht schrijven: $(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}$ maar we zitten met het product a b in de maag. Ik zal het je maar meedelen: je moet p tot 0 laten naderen: $\lim\limits_{p\to 0}(\frac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}}$ en bij het berekenen van deze limiet hebben we gereedschap nodig zoals e-macht-regels, differentiëren en de regel van l'Hôpital.
Zo is het handig om te weten dat je een getal a als een e-macht kunt schrijven: $a=e^{\ln(a)}$. En ook als een macht van a: $a^p=e^{p\cdot\ln(a)}$.
Daar gaan we dan:

$$\lim_{p\to 0}(\frac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}}=\lim_{p\to 0}(e^{\ln(.....)})=$$

$$\lim_{p\to 0}(e^{\frac{1}{p}\ln(\frac{a^p+b^p}{2})})=\lim_{p\to 0}(e^{\frac{\ln(a^p+b^p)-\ln(2)}{p}})=$$

$$e^{\lim\limits_{p\to 0}(\frac{\ln(a^p+b^p)-\ln(2)}{p})}$$

De exponent van deze e-macht is als een limiet van een breuk geschreven en daarvoor gebruiken we de regel van l'Hôpital. Vul je in deze breuk voor p de waarde nul in dan krijgen we $\frac{0}{0}$. De afgeleide van de noemer is 1 maar de afgeleide van de teller is de afgeleide van $\ln(a^p + b^p)$ en dat is $\frac{1}{a^p+b^p}$ maal de afgeleide van $(a^p + b^p)$:.

$$\frac{a^p\cdot\ln(a)+b^p\cdot\ln(b)}{a^p+b^p}$$

De limiet hiervan (vul voor p nul in) is

$$\tfrac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b))=\tfrac{1}{2}\ln(ab)=\ln((ab)^{\frac{1}{2}})$$

Tot slot: $e^{\lim\limits_{p\to 0}(\frac{\ln(a^p+b^p)-\ln(2)}{p})}=e^{\ln((ab)^{\frac{1}{2}})}=\sqrt{ab}$

Uitdaging

Kunnen we voor de ontaarde gemiddelden 'minimum' en 'maximum' ook de juiste p-waarden vinden of moeten we dan met limieten aan de gang? Probeer het maar eens.
En dan die vier genoemde eigenschappen, geldt dat ook voor het Höldergemiddelde? Het is niet moeilijk om dat na te gaan. Ik ga het even na voor bijvoorbeeld de eigenschappen 'behoud' en 'homogeen'.
Voor de eerste eigenschap moet gelden dat $M(a,\ a) = a$.
We vullen $a = b$ in $M(a,b)=(\frac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}}$ in.
Dat geeft $M(a,a)=(\frac{a^p+a^p}{2})^{\frac{1}{p}}=(a^p)^{\frac{1}{p}}=a$.
Voor de eigenschap homogeen moet gelden dat voor elk reëel getal k geldt: $M(ka,\ kb) = k\cdot M(a,\ b)$.

$$M(ka,kb)=(\frac{(ka)^p+(kb)^p}{2})^{\frac{1}{p}}=$$

$$(\frac{k^p(a^p+b^p)}{2})^{\frac{1}{p}}=k(\frac{a^p+b^p}{2})^{\frac{1}{p}}=k\cdot M(a,b)$$

Het nagaan van de wisseleigenschap is simpel. Aan jou om de andere twee overige eigenschappen te verifiëren. Het bewijzen van eigenschap middeling is niet simpel. Zie het bewijs op de site. Als het Höldergemiddelde aan die vier eigenschappen voldoet, dan hebben we een tweede manier gevonden om te laten zien dat de vier gemiddelden, zie weer figuur 2, voldoen aan de vier eigenschappen.

Meer lezen over gemiddelden?

Kijk dan naar de prachtige artikelen 'Gemiddelden in soorten' en 'Het rekenmeetkundige gemiddelde' in het boek *Wat te bewijzen was* (2015) van Martin Kindt.

Tot slot

figuur 5 Annemiek van Vleuten (bron: en.wikipedia.org)

Een van de beste Nederlandse wielrensters is Annemiek van Vleuten. Zie eerdergenoemde fietsprobleem: ook al zou zij met 100 km/u afdalen, die gemiddelde snelheid van 40 km/u over het gehele traject- het is nu afgerond 33,33 km per uur - gaat zij niet halen. Je zult wel ontdekt hebben dat het onmogelijk is, hoe hard ze ook daalt.
Van Vleuten lijkt mij overigens niet het prototype van de gemiddelde Nederlander. Maar weet jij nu wel wat een gemiddelde Nederlander is?

vakbladeuclides.nl/976gemiddelden

Noten

[1] Guigelaar, J., Levrie, P. & Vanhommerig, R. (2020). *De dikke Pythagoras* (opgave 136). Lannoo.
[2] Tijdschrift *Pythagoras* nr 5 april 2021.

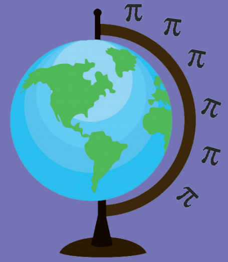
Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

Math between US

'These walls talk back'

Jana Dean



In deze column vertelt wiskundedocent Jana Dean over haar ervaringen en haar experimenten op een middelbare school in Washington State, USA.

Introduction

My best classroom has a ton of communication going on: peer-to-peer; student-to-teacher: teacher-to-student; and students-with-themselves. Learning math means learning language, that is, in order to really claim new ideas, learners need to voice them and represent them to themselves and to each other, over and over again. For the first time, I have been able to line the walls of my classroom with whiteboards. The boards are facilitating learning in some surprising ways: Not only do students interact more, but they also revisit and revise ideas within a class period and from day-to-day.

figure 1 Students, paper, whiteboard, cell phone...

How the whiteboards are used

When I put the boards up, I already knew that whiteboards make fixing mistakes easy. With a swipe, false starts and dead ends disappear completely. Everyone in each group can see the whole process toward a solution and can be curious about each others' ideas and help each other. They can also borrow ideas from across the room. All this demands communication and therefore using and learning language to describe what is happening.

What I didn't realize was the way the boards in combination with cell phones and our on-line classroom management system would invite revision from one day to the next. As the school year started, students began assignments on whiteboards that they would later turn in digitally. First, I wondered how this would feel to them. Would they think they were being asked to do work all over again? As solutions began to appear around the room, I offered to take photographs and email them so that students could revisit their thinking the next day.

I expected I might get in a lot of partially finished work in the form of photographed whiteboards. Instead, I am finding that the whiteboard work actually invites revision in some really powerful ways.

Sometimes students transfer photographed thinking to paper, in the process making changes as they learn.

They also upload the whiteboard image to the classroom management system and then annotate on top of that, fixing errors or adding explanations to clarify their thinking for themselves and for me.

Ella and Jason

Recently Ella had painstakingly drawn a 3-D representation of a pattern built with cubes. When she came in the next day, it had been erased by students who had used the board later in the day. She hung her head, discouraged, and then remembered she'd photographed her work. She knew she'd have to draw one more stage of the pattern to illustrate that the algebraic expression she had written would work but had to think through how she'd do that.

I suggested she sketch instead of making a detailed drawing and pointed to a few places in the room where

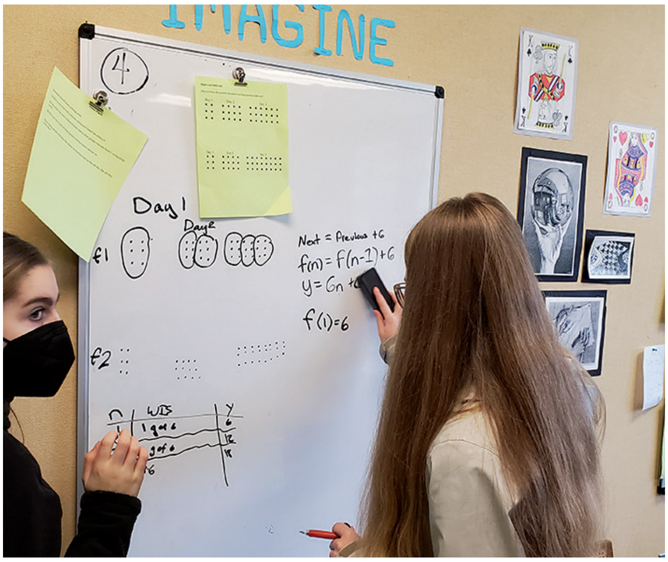


figure 2 Working on the whiteboard

students had done this. What she ended up turning in was an annotated photograph of her whiteboard work, to which she added sketches, labels and verbal clarifications. Her ideas got stronger and clearer with every revision.

> “Her ideas got stronger and clearer with every revision.”

Jason always seems to choose the board, even when working on paper or digitally might seem more efficient. When I asked why, he told me. ‘I can make my math bigger, and then I can redo it if it isn’t right.’ I wondered if it bothered him to have to take a picture and start again the next day.
‘Not at all,’ he said, ‘when I look again, I figure out my mistakes and my partner and I have more of a chance to think about it. Once it’s the way we want, we take a picture and turn it in.’ I remarked that sometimes he and his partner would add different ideas to their own photos before turning it in. ‘Yea,’ he said, ‘at the end we may both still see it differently.’

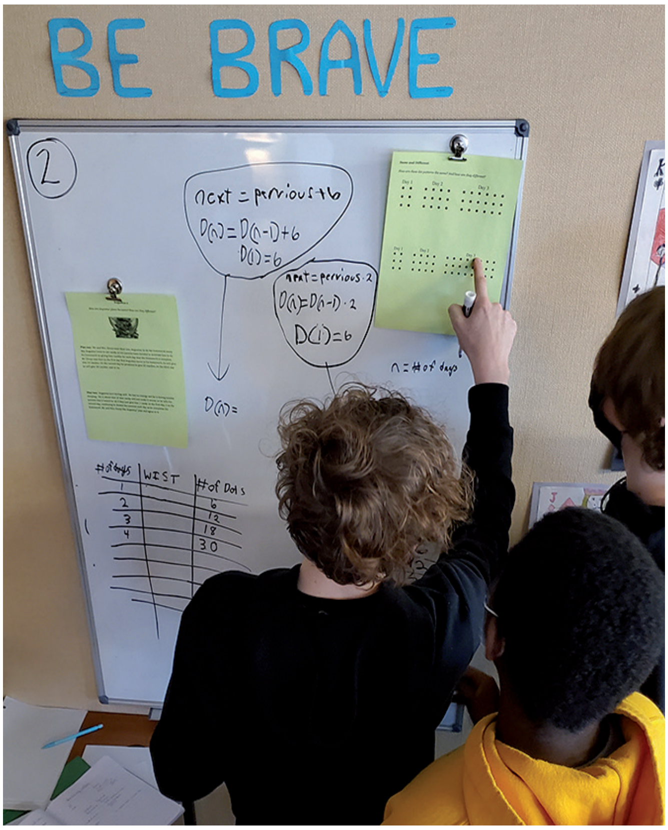


figure 3 Discussion at the whiteboard

Conclusion

All this is happening without me having to require final drafts, explanations or revisions. Instead of demanding that students show their work or make corrections, I let the walls do the talking.

References

To learn more about classroom whiteboards and learning language in math class, see:

[1] Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 361–386). Springer International Publishing. *https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21*

[2] Zwiers, J., et. al. (2017). Stanford University Graduate School of Education. *Understanding Language*, 21. *https://ul.stanford.edu/resource/principles-design-mathematics-curricula*

About the author

Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a PhD candidate in Leadership Studies at Saint Martin’s University (Lacey, Washington State). In 2019 Jana was a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019).
See: *www.mathbetweenus.org*.
E-mailadress: *jdean@reachone.com*

Alexander Schüler-Meyer

Tweetalig wiskundeonderwijs: ta(a)lrijke potentialen voor begripsvorming

Content-and-Language-Integrated-Learning (CLIL) heeft veel voordelen. Voor het wiskundeonderwijs is het belangrijkste voordeel het faciliteren van begripsvorming en conceptueel inzicht. Dit artikel, gebaseerd op recent onderzoek en huidige ontwikkelingen in superdiversiteit, geeft suggesties voor mogelijkheden om CLIL beter te benutten in het wiskundeonderwijs.

Inleiding

Content and Language Integrated Learning (CLIL) is een methodiek waarbij een schoolvak zoals wiskunde gedoceerd wordt in een andere taal. CLIL bereidt studenten voor op een toenemende internationale wereld en wereldburgerschap. CLIL in het wiskundeonderwijs kan het leren van wiskunde verbeteren, omdat het gebruik van meerdere talen de student ondersteunt in begripsvorming[1], interactie met gelijktalige klasgenoten[2] en eigenaarschap. Echter, CLIL moet worden heroverwogen,[3] vanwege twee ontwikkelingen:

- Hedendaagse klassen zijn al superdivers[4], met meerdere talen zoals Berbers, Arabisch, Turks, Pools, Chinees. Zodoende is de *basis voor internationalisering en wereldburgerschap* al aanwezig in deze klassen.
- Recent onderzoek in meertalig wiskunde onderwijs heeft aangetoond dat het didactische potentieel van CLIL ligt in het *verbinden van talen*. Meertalige leeractiviteiten die gebruik maken van het potentieel van CLIL voor begripsvorming kunnen dus worden ontworpen.

CLIL heroverwegen

Deze twee recente ontwikkelingen vragen om een nieuwe didactische aanpak van CLIL in het wiskundeonderwijs. Ondanks een hoge taaldiversiteit in veel klassen, blijft het een lastige vraag hoe deze diversiteit kan worden gebruikt op een manier waar wiskundeonderwijs van profiteert. Evenzo, terwijl talen verbinden de leerling helpt om zowel wiskundige begrippen en de wiskundige vaktaal beter te begrijpen, is de vraag hoe en wanneer de talen verbonden moeten worden om het potentieel voor leren te benutten. Een beknopte reflectie van de aard van meertaligheid kan helpen om deze vragen te beantwoorden.

In het verleden werd meertaligheid vaak begrepen als *meerdere eentaligheid*, met de aanname dat meerdere talen verschillende eenheden zijn in het menselijk brein. We weten echter sinds Cummins' *Interdependence Hypothesis*[5] dat meerdere talen één gecombineerde entiteit vormen – leerlingen zijn *translinguaal*. Dus wanneer leerlingen worden geconfronteerd met een taalprobleem, bijvoorbeeld, hoe je een kwadratische functie beschrijft, kunnen zij dit op een meertalige manier oplossen: ze kunnen hun moedertaal Turks gebruiken om in alledaagse taal te praten over de ruimtelijke aspecten van de grafiek, ze zouden informeel wiskundig Nederlands kunnen gebruiken om de symbolische uitdrukking te beschrijven ('snijpunt') of ze kunnen hun academische geletterdheid in het Engels gebruiken om een Wikipedia-pagina over kwadratische functies te lezen. Translingualiteit wordt evident als meertaligen zonder moeite talen afwisselen in dagelijkse gesprekken. Om de translingualiteit van leerlingen te benutten voor begripsvorming moeten leermogelijkheden het afwisselen van taalrepertoires uitlokken, zoals alledaags Turks, informeel wiskundig Nederlands en literaire vaardigheden (lezen en schrijven) in het Engels, zoals in het bovenstaande voorbeeld over kwadratische functies. De voordelen van het afwisselen van talen voor wiskundig denken zijn vergelijkbaar met het gebruik van het woord 'interdependence hypothesis' in dit artikel – woorden en zinnen kunnen in een specifieke taal meer betekenis hebben, en zijn daarmee beter voor conceptuele inzichten. Bijvoorbeeld, 'vergelijking' legt het concept van gelijkwaardigheid heel intuïtief vast, omdat het de vergelijking van twee kwantiteiten impliceert, wat niet het geval is voor het Engelse woord 'equation'.

Didactische principes

Modern CLIL realiseert het potentieel van meertaligheid voor zowel wereldburgerschap als voor begripsvorming. Bovendien behoudt modern CLIL zijn traditionele doelen, namelijk: 1)taal een expliciet medium voor leren te maken en 2)taal een expliciet leeronderdeel te maken en gecombineerd vormen deze twee doelen een tweedimensionale matrix, zie tabel 1. Deze matrix benadrukt vier centrale didactische principes van moderne CLIL wiskunde.

	Taal als leeronderdeel	Taal als medium voor leren
CLIL voor wereld-burger-schap	*Meertaligheid voor taalreflectie:* Leerlingen vertalen opdrachten in verschillende (moeder-)talen, waardoor ze reflec-teren op de betekenis van de terminologie in meerdere talen.	*Meertaligheid voor interactie:* leerlingen gebruiken meerdere (moeder-)talen om samen te werken aan het begrijpen van een probleem.
CLIL voor betekenis geving	*Meertaligheid voor het leren van de wiskundige vaktaal:* Leerlingen koppelen hun moedertaal expli-ciet aan de wiskun-dige vaktaal.	*Meertaligheid voor conceptueel inzicht:* Door het gebruik van meerdere talen krijgen leerlingen een dieper conceptueel inzicht.

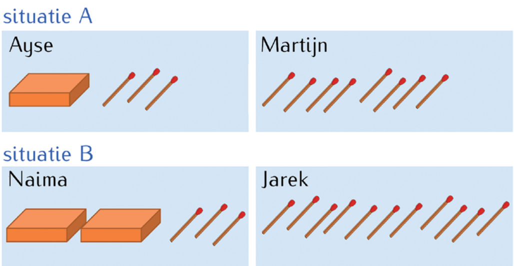
tabel 1 Tweedimensionale matrix van de doelen van CLIL in wiskunde, en de vier resulterende didactische principes

De vier didactische principes zullen worden geïllustreerd aan de hand van het introduceren van vergelijkingen en gelijkwaardigheid in 2 havo/vwo.

Meertaligheid voor interactie

De volgende opdracht, zie figuur 1, introduceert verge-lijkingen. Leerlingen krijgen twee situaties, A en B, met fictieve leerlingen die hun aantal lucifers vergelijken. De leerlingen wordt gevraagd om het aantal lucifers in de doos te bepalen, zodat Ayse en Martijn en Naima en Jarek hetzelfde aantal lucifers hebben. De luciferopdracht laat leerlingen op een informele manier met vergelijkingen werken, door de 'dagelijkse' ervaringen van het vergelijken van twee sets én van lucifers weghalen. De gegeven conditie 'zodat de leerlingen hetzelfde aantal lucifers hebben' zou moeten resulteren in het inzicht dat het mogelijk is om lucifers weg te halen, zolang hetzelfde aantal wordt weg-gehaald aan beide kanten. Zodoende zorgt de opdracht voor een eerste concept van gelijkwaardigheid. Bovendien bevordert de luciferopdracht het gebruik van taal. Met name opdracht b en c vereisen het genereren van taal en profiteren van de interactie met medeleerlingen. Omdat de opdrachten gebruik maken van dagelijkse ervaringen kunnen leerlingen informele taal gebruiken om opdrachten b en c uit te voeren. De luciferopdracht toont het CLIL-principe van gebruik van meertaligheid voor interactie. Door de informele aard van de opdracht hebben studenten geen vaktaal nodig, maar kunnen ze hun informele, alledaagse taal gebruiken om de opdracht te onderzoeken, dat is, om te praten over het verplaatsen en weghalen van lucifers. Zodoende kunnen studenten communiceren over de opdracht in het Nederlands, Turks, Berbers, ... Op deze manier kunnen ze in hun moedertaal met wiskunde omgaan.

Hoeveel lucifers moeten er in het doosje zitten zodat de leerlingen hetzelfde aantal lucifers hebben?



Opgave 1

a Hoeveel lucifers zitten er in het doosje, in situatie A en in situatie B?

b Gebruik de afbeeldingen om uit te leggen hoe je jouw oplossingen hebt gevonden.

c Bedenk en teken zelf nog een paar situaties met lucifers en doosjes en geef ze aan een klasgenoot.

figuur 1 Luciferopdracht om vergelijkingen te introduceren

Meertaligheid voor rijke alledaagse context

De luciferopdracht is een rijke opdracht die leerlingen helpt het concept gelijkwaardigheid te leren.[6] Het is echter een die niet aansluit op alledaagse situaties. Onderzoek heeft aangetoond dat rijke, alledaagse situaties wel uiterst belangrijk zijn om wiskunde te leren in een meertalige context.[7] Zulke rijke situaties kunnen over winkelen gaan of over sporten, door bijvoorbeeld verkoopprijzen te vergelijken als het over percentages gaat.
Terwijl de luciferopdracht geen prototypische, rijke, alledaagse context is, toont het desondanks hoe infor-mele ervaringen een startpunt kunnen zijn voor wiskundig denken. De opdracht kan namelijk leiden tot een diepe discussie over de regels over hoe de lucifers worden wegge-haald, of hoe om te gaan met meerdere luciferdoosjes – of zelfs twee verschillende soorten doosjes. Uiteraard zijn deze regels een voorbereiding op gelijkwaardigheidsbewerkingen.

Meertaligheid voor het leren van vaktaal

De luciferopdracht introduceert vergelijkingen op een informele manier, daarom moet het gevolgd worden door een formaliserende opdracht die het leren van de doeltaal Engels faciliteert, inclusief formele symboliek. De opdracht in figuur 2 maakt gebruik van het verbinden van talen om dit probleem aan te pakken, en wisselt naar Engels om leerlingen te stimuleren om meer Engels te spreken. >

De opdracht introduceert de termen 'variable', 'unknown number' en 'equation' in de Engelse vaktaal. Daarom is een definitie van 'variable' gegeven in een post-it. Bovendien wordt de term 'equation' geïntroduceerd als de naam van de symbolische uitdrukking. Het doel van de opdracht is voor leerlingen om de lucifersituatie symbolisch uit te drukken. Met name opdrachten a en c vereisen rijke taalproductie, waar opdracht c expliciet vraagt om het gebruik van de termen 'equation' en 'variable'. Daarnaast wordt leerlingen gevraagd meerdere talen in hun antwoord te verwerken. Dit om voort te bouwen op het gebruik van meerdere talen in opgave 1. Op deze manier verbinden leerlingen de Engelse vaktaal met de informele taal die ze eerder gebruikten om de luciferopdracht te begrijpen. Om leerlingen te ondersteunen in het verbinden van hun talen kunnen woord- of zinlijsten helpen de talen transparant te maken. Leerlingen zouden deze lijsten moeten uitbreiden met hun eigen alledaagse voorbeelden en uitleg in hun moedertaal, om op deze manier eigenaarschap te nemen voor hun lijst.

Variable x
To denote an unknown number, you can use the letter x. The letter x is called a **variable** and is a placeholder for the unknown number.

Connect languages

Opgave 2
Using the **variable x**, you can represent situatie A with an equation:

situatie A | equation

$$x + 3 = 8$$

a Explain why the picture and the equation describe the same. Give your explanation in both, English and another language of your choice.
b As in Opgave 1, you can change the situation to find the number of matchsticks in the box.
Find an equation for the changed situatie A.

changed situatie A | changed equation

=

c Explain the changes in the picture. How are they related to the changes in the equation?
Je kunt het ook in het Nederlands of in een andere taal uitleggen, maar gebruik de Engelse begrippen variable en equation.

figuur 2 Opgave 2 voor het introduceren van symboliek en academische taal.

Meertaligheid voor conceptueel inzicht

Meertaligheid kan ook gebruikt worden om het conceptuele begrip en inzicht van leerlingen te ondersteunen.[8] Natuurlijk is het gebruik van informele contexten zoals in Opgave 1 in figuur 1 al een vorm van begrip ondersteunen. Maar het meest bevorderlijk voor conceptueel inzicht is wanneer taalverschillen de leerlingen toestaan om verschillende perspectieven aan te nemen rondom een wiskundig concept.[9] Voor het onderwerp van vergelijkingen, wijzen de termen 'equation' en 'vergelijking' naar zo'n taalverschil. 'Equation' impliceert een concept van gelijkwaardigheid. Zodanig is een 'equation' een statement dat twee termen gelijk zijn. 'Vergelijking', aan de andere kant, impliceert een toetsing. Zodanig suggereert vergelijking een proces van het naast elkaar leggen van twee kwantiteiten, met het doel te ontdekken of en wanneer ze gelijk zijn.
Opgave 3, zie figuur 3, introduceert leerlingen bij formele symbolische manipulaties van vergelijkingen. Daarvoor werken leerlingen in een analogie van de lucifersituatie, waarin ze in a een stap in de situatie vertalen met een stap in de symbolische weergave (rode kaders aan de zijkant). Zulke analogieën laten leerlingen twee gelijke bewerkingen onderzoeken, zie kader. Deze bewerkingen kunnen gemotiveerd worden als manier om twee sets (of hun symbolische weergave) te vergelijken en op deze manier worden ze verbonden aan het concept 'vergelijking'. Om verder te gaan, kan het conceptuele verschil tussen 'vergelijking' en 'equation' expliciet gemaakt worden. Hiervoor zijn opgaven nuttig die dit verschil ook wiskundig duidelijk kunnen maken.

Connect languages

Opgave 3
You saw how variables and equations help to find the number of matchsticks in a box in Opgave 2.
You can do the same for situation B, where you have two boxes:

situatie B | vergelijking

stap 1: $2x + 3 = 11$
3 lucifers verwijderen
stap 2: =
stap 3: =

a Find the equations for *stap 2* and *3*. Describe how you changed the equation / situation in order to arrive at the next *stap*, by using the red fields.
b Write a *stappenplan* for how to find the number of matchsticks in any situation. Translate your stappenplan into a language of your choice. Find out how to translate variable, equation, unknown number, ... by asking your parents or searching the web.

figuur 3 Vervolgopdracht op de luciferopdracht die symbolische manipulaties introduceert

Gelijkheidsbewerkingen in luciferopdrachten
Aftrekken: Leerlingen halen lucifers weg zodat er alleen doosjes overblijven aan één kant. Dit is analoog aan het aftrekken van getallen in de vergelijking (stap 1).
Delen: Leerlingen groeperen lucifers zodat er evenveel groepjes zijn als doosjes (stap 2). Dan kan een doosje en een groepje lucifers worden weggehaald.

Deze groepering is analoog aan delen in symbolische weergave. De luciferopdracht staat geen negatieve getallen toe. Deze beperking kan expliciet worden gemaakt aan leerlingen, om de voordelen van symbolische representatie duidelijk te maken.

Opdracht b kan de kracht van taalverschillen voor conceptueel inzicht verwezenlijken. Als eerste, vergt het schrijven van een eigen stappenplan dat leerlingen hun bewerkingen in de vorige luciferopdrachten generaliseren naar algemene stappen. Generaliseren is van belang voor conceptueel inzicht. Daarna vertalen leerlingen hun stappenplan in een andere taal naar keuze, wat een nauwkeurig onderzoek vereist naar de betekenis van conceptueel rijke woorden als 'equation' en 'variable'. Dit onderzoek faciliteert een diepgaand inzicht in de exacte betekenis van deze woorden. Daarnaast worden leerlingen gestimuleerd om met wiskundige bronnen als Wikipedia om te gaan in hun moedertaal.

Samenvatting

Dit artikel heeft laten zien hoe CLIL voor wiskunde kan worden heroverwogen om de potentie voor *wereldburgerschap* en *begripsvorming* te benutten. Dit artikel presenteert de vier didactische principes van CLIL en illustreert ze met voorbeelden. Er moet echter nog meer werk worden gedaan in het nauwkeurig ontwerpen van leeractiviteiten voor innovatieve CLIL wiskundeklassen en om de rijke mogelijkheden van *talen verbinden* vast te stellen.

Oproep voor samenwerking

Ben je geïnteresseerd in een samenwerking op het gebied van meertalig wiskundeonderwijs? Momenteel loopt een project om de epistemische potentie van meertaligheid systematisch te benutten om begripsvorming te bevorderen. Ga naar *multilingualmath.nl* of stuur een e-mail naar *a.k.schuelermeyer@tue.nl*.

Noten

[1] Schüler-Meyer, A., Prediger, S., Kuzu, T., Wessel, L., & Redder, A. (2019). Is Formal Language Proficiency in the Home Language Required to Profit from a Bilingual Teaching Intervention in Mathematics? A Mixed Methods Study on Fostering Multilingual Students' Conceptual Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 317-339. *https://doi.org/10.1007/s10763-017-9857-8*

[2] Planas, N. (2014). One speaker, two languages: Learning opportunities in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 51-66.

[3] Nuffic (no date). Diversity and Inclusion. *https://www.nuffic.nl/en/subjects/research/diversity-and-inclusion*. Accessed Sept.-30-2021

[4] Vertovec, S. (2007). Super-diversity and its implications. *Ethnic and Racial Studies*, *30*(6), 1024-1054. *https://doi.org/10.1080/01419870701599465*

[5] Cummins, J. (2000). *Language, Power and Pedagogy. Bilingual Children in the Crossfire.* Multilingual Matters Ltd.

[6] Melzig, D. (2013). *Die Box als Stellvertreter: Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff.* DuEPublico 2.

[7] Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical thinking and learning*, *4*(2-3), 189-212. *http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/S15327833MTL04023_5*

[8] Uribe, Á., & Prediger, S. (2021). Students' multilingual repertoires-in-use for meaning-making: Contrasting case studies in three multilingual constellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100820. *https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100820*

[9] Prediger, S., Kuzu, T., Schüler-Meyer, A., & Wagner, J. (2019). One mind, two languages–separate conceptualisations? A case study of students' bilingual modes for dealing with language-related conceptualisations of fractions. *Research in Mathematics Education*, *21*(2), 188-207. *https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14794802.2019.1602561*

Over de auteur

Alexander Schüler-Meyer is lerarenopleider en universitair docent voor wiskunde didactiek op de Eindhoven School of Education (TU/Eindhoven). In zijn onderzoek houdt hij zich bezig met kwesties van taal in het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *a.k.schuelermeyer@tue.nl*.

Nicos Starreveld

Netwerken, percolatie en spelen tegen het toeval

Het Netwerkspel introduceert percolatietheorie en netwerken op een speelse manier. Het is bedacht en gebouwd voor de studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in 2020. Nicos Starreveld legt uit wat percolatietheorie is, hoe netwerken een belangrijke rol daarin spelen en hoe het netwerkspel gespeeld kan worden in de klas.

Percolatietheorie

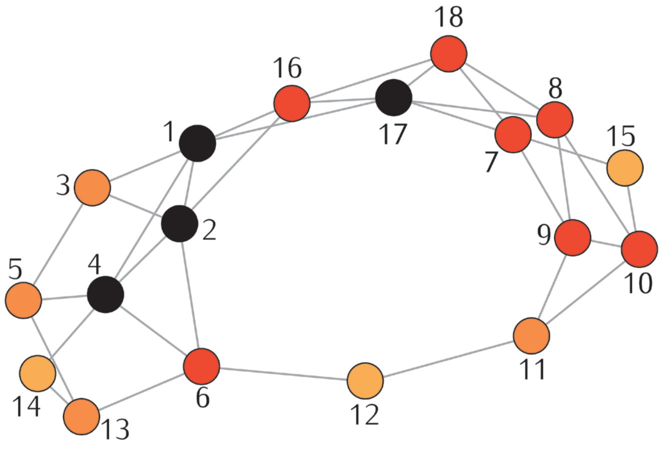
Percolatietheorie is een tak van de wiskunde op het snijvlak tussen kansrekening en grafentheorie. De term 'percolatie' (afgeleid van het Latijnse 'percolare', filteren) komt oorspronkelijk uit de materiaalkunde. Een representatieve vraag is deze: stel dat er wat vloeistof over een poreus materiaal gegoten wordt, zal de vloeistof zijn weg kunnen vinden van gat naar gat en de onderkant kunnen bereiken? Om inzicht te krijgen in hoe we deze natuurkundige vraag kunnen beantwoorden, bestuderen we een wiskundig model. We modelleren dit fenomeen met gebruik van een driedimensionaal netwerk van $n \times n \times n$ punten waarin de verbindingen tussen elke twee buren open kunnen zijn met waarschijnlijkheid p (waardoor de vloeistof doorlaat), of gesloten met waarschijnlijkheid $1 - p$. In dit model wil je weten hoe waarschijnlijk het is dat er van boven naar beneden een open pad bestaat.
Binnen de wiskunde wordt percolatie beschouwd als het proces van het willekeurig verwijderen van verbindingen in een netwerk. In het model hierboven correspondeert percolatie dus met het openhouden of dichtdoen van de verbindingen tussen de punten. Laten we bekijken wat percolatie betekent in een aantal andere voorbeelden van netwerken.

Netwerken

Veel alledaagse fenomenen kunnen worden beschreven door netwerken. Neem bijvoorbeeld filevorming op landelijk niveau. Het wegennetwerk beschrijft de mogelijke routes die het auto- en vrachtverkeer kunnen nemen en geeft de maximale verkeersstroom aan. Een elektriciteitsnetwerk beschrijft hoe elektrische stroom kan lopen.
Een sociaal netwerk beschrijft wie met wie in contact komt, waarbij een contact verschillende interpretaties kan hebben, denk aan echte vrienden die fysiek contact hebben, aan volgers op Twitter, of aan mensen die met elkaar contact houden op een online platform.
In zulke netwerken kan het gebeuren dat verbindingen beïnvloed worden door externe factoren en wegvallen of uitgeschakeld worden. In een wegennetwerk kunnen bijvoorbeeld wegen geblokkeerd worden door een ongeluk, in een elektriciteitsnetwerk kunnen verbindingen uitgeschakeld worden door overbelasting, onweer of ongelukken. In een sociaal netwerk kunnen mensen roddels, informatie, maar ook een virus overdragen aan hun kennissen. Dit zijn allemaal voorbeelden van willekeurige gebeurtenissen op de verbindingen van een netwerk. Zulke willekeurige gebeurtenissen op de verbindingen van een netwerk worden vaak wiskundig bestudeerd door middel van modellen uit de percolatietheorie.
In de percolatietheorie is men geïnteresseerd in de eigenschappen van het netwerk ná percolatie, het willekeurig verwijderen dus van een aantal verbindingen. In een stroomnetwerk is het bijvoorbeeld heel belangrijk om te weten hoe alle stroom verdeeld zal worden over de overige verbindingen als er een willekeurig aantal verbindingen wegvalt. In een sociaal netwerk van contacten wil je vaak weten hoe snel, en in welke mate, informatie of een virus verspreid zal worden aan andere mensen via hun kennissen.

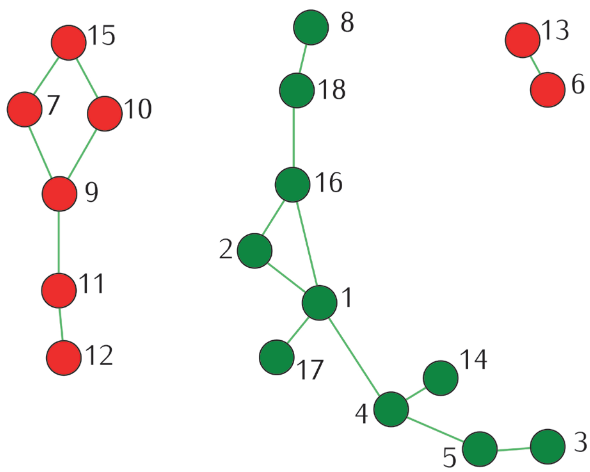
En de wiskunde?

Laten we een wiskundig voorbeeld bekijken van percolatie op een netwerk. Zoals eerder uitgelegd, bestaat een netwerk uit objecten die onderling verbonden zijn. Wiskundigen noemen zo'n netwerk een graaf, de objecten knopen en de verbindingen kanten. Neem een graaf met n knopen en stel dat er m kanten zijn tussen deze n knopen. Zie figuur 1, deze graaf bevat 18 knopen en 33 kanten.
Nu gaan we het volgende experiment doen: voor elke kant gaan we een eerlijke munt werpen, als er 'kop' uitkomt dan blijft de 'kant' bestaan, maar als er 'munt' uitkomt dan gaan we deze kant verwijderen. Als we dit voor iedere kant gaan doen, betekent dit dus dat we 33 keer een munt werpen, we krijgen dan een nieuwe graaf waar een



figuur 1 Een graaf van 18 knopen en 33 kanten

aantal kanten verwijderd is. In de percolatietheorie is men geïnteresseerd in de structuur en eigenschappen van de graaf die overblijft na de percolatie. In figuur 2 zien we een uitkomst van percolatie op de graaf in figuur 1.

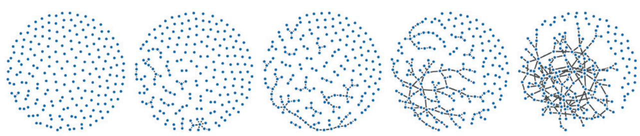


figuur 2 De graaf nadat een willekeurige helft van alle kanten is verwijderd

De wiskunde kan veel meer zeggen dan wat we in dit plaatje zien. Het aantal kanten dat verwijderd zal worden is in het algemeen een stochastische variabele die we wiskundig kunnen beschrijven door middel van een binomiale verdeling met parameters $n = 33$ en $p = 0{,}5$. Met gebruik van de eigenschappen van de binomiale verdeling zien we dus dat het verwachte aantal kanten dat verwijderd zal worden na percolatie gelijk is aan $33 \times 0{,}5 = 16{,}5$, dus ongeveer de helft van de kanten. In figuur 2 zien we dat er 16 kanten zijn verwijderd. Als we dit experiment meerdere malen herhalen dan gaan we merken dat er soms meer en soms minder kanten verwijderd zullen worden. Deze afwijking van het verwachte aantal verwijderde kanten wordt beschreven door de variantie, die voor een binomiale verdeling gelijk is aan $n \times p \times (1 - p)$, dus aan $33 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 8{,}15$ in dit voorbeeld. Je kunt ook wat ingewikkeldere vragen bedenken: hoe waarschijnlijk is het bijvoorbeeld dat de graaf samenhangend blijft na percolatie? Of hoe groot zijn de samenhangende componenten in de graaf als deze niet-samenhangend is? Een graaf heet samenhangend als alle knopen met elkaar verbonden zijn. De graaf in figuur 2 bijvoorbeeld is niet-samenhangend, maar bevat drie samenhangende componenten waarvan de groene de grootste is. Zulke vraagstukken staan centraal in de percolatietheorie en vereisen een rigoureuze en technische wiskundige analyse om ze te kunnen beantwoorden. Later gaan we kort toelichten hoe samenhangendheid wiskundig bestudeerd kan worden. Maar eerst gaan we het over een concept hebben waar wetenschappers gefascineerd door zijn: een faseovergang.

Van geïsoleerd naar verbonden

Een zeer interessant fenomeen in de percolatietheorie is dat van een faseovergang. Laten we door middel van twee voorbeelden, een wiskundig en een uit het dagelijks leven, een idee geven van wat een faseovergang is. Eerst het wiskundige voorbeeld. Neem n knopen en verbind alle paren van knopen aan elkaar met een kant. De resulterende graaf wordt door wiskundigen de *complete graaf* op n knopen genoemd. Voor percolatie op de complete graaf op n knopen gaan we elke kant behouden met waarschijnlijkheid p. Als $p = 1$ dan zullen met zekerheid alle kanten behouden worden, als $p = 0{,}5$ dan zal ongeveer de helft van alle kanten verwijderd worden en als $p = 0$ dan zullen alle kanten met zekerheid verwijderd worden.
We laten p nu variëren tussen 0 en 1 en kijken hoe de resulterende graaf er na percolatie uit zal zien. Zie dit als een filmpje waar p de tijd voorstelt en het beeld op je scherm de graaf is na percolatie met kans p. In het begin, voor $p = 0$, zie je dus een lege graaf want alle kanten zijn verwijderd. Naarmate p groeit worden steeds minder kanten verwijderd, zie figuur 3.



figuur 3 Voor alle vijf de grafen is n gelijk aan 200. De waarde voor p verschilt, van links naar rechts is deze gelijk aan 0,002, 0,004, 0,006, 0,008 en 0,01.

>

Twee wiskundigen, Paul Erdős en Alfred Rényi, hebben in 1960 bewezen dat wanneer p grofweg gelijk is aan $p^* = \frac{\ln(n)}{n}$, en n groot genoeg is, er iets interessants gebeurt met de graaf: er is een faseovergang. Dit betekent dat voor $p = \frac{c\ln(n)}{n}$, met $c < 1$, de graaf na percolatie met grote kans niet samenhangend is, maar voor waarden van $p = \frac{c\ln(n)}{n}$, met $c > 1$, is de graaf met grote kans wel samenhangend. Er vindt dus een overgang plaats van de ene fase (niet-samenhangend) naar een andere fase (samenhangend). De waarde $p^* = \frac{\ln(n)}{n}$, voor n groot genoeg, is in dit geval een scherpe grens voor samenhangendheid in de complete graaf. Hoe kunnen we dit resultaat wiskundig bewijzen? We geven een schets van het bewijs en verwijzen de geïnteresseerde lezer voor alle details.[1]

We nemen de waarschijnlijkheid p gelijk aan $\frac{\lambda}{n}$, en we geven een schets van het bewijs dat als $\lambda - \ln(n) \to \infty$ dan blijft de complete graaf na percolatie, waar we kanten met waarschijnlijkheid p gaan behouden, met grote kans samenhangend. Wat wonderbaarlijk is in het bewijs, is dat om samenhangenheid te bewijzen het voldoende is te bewijzen dat er geen geïsoleerde knopen ontstaan na percolatie! Een knoop heet een geïsoleerde knoop als deze knoop met geen van de andere knopen is verbonden. Er wordt bewezen[1] dat

$$P_\lambda(\textit{complete graaf na percolatie is samenhangend}) \approx P_\lambda(I = 0) \quad (1)$$

waar I staat voor het aantal geïsoleerde knopen in de graaf na percolatie. Deze I is dus een stochast en we kunnen deze als volgt schrijven als een som van indicatorfuncties:

$$I = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\text{knoop } i \text{ is een geïsoleerde knoop}\}}$$

De indicatorfunctie 1_A van een gebeurtenis A is gelijk aan 1 indien de gebeurtenis A gebeurt, en gelijk aan 0 als A niet gebeurt. We gebruiken ook de notatie P_λ om de waarschijnlijkheid van een gebeurtenis, na percolatie met waarschijnlijkheid $p = \frac{\lambda}{n}$, te beschrijven.
Het resultaat in (1) is wonderbaarlijk want het is helemaal niet evident waarom het feit dat er geen geïsoleerde punten ontstaan na percolatie, samenhangendheid van de graaf impliceert. Er zouden bijvoorbeeld twee of meer disjuncte componenten kunnen bestaan. Maar het blijkt dat, voor n groot genoeg, zo'n gebeurtennis heel zeldzaam is. Gegeven (1) het is dus voldoende om aan te tonen dat, naarmate $n \to \infty$, en voor λ (afhankelijk van n) zodat $\lambda - \ln(n) \to \infty$, geldt:
$\lim_{n\to\infty} P_\lambda(I = 0) = 1.$

Met behulp van Markovs ongelijkheid krijgen we:

$$P_\lambda(I = 0) = 1 - P_\lambda(I \geq 1) \geq 1 - E_\lambda(I). \quad (2)$$

We moeten dus het verwachte aantal geïsoleerde knopen na percolatie bepalen: $E_\lambda(I)$. Tijdens percolatie gaan we kanten verwijderen met waarschijnlijkheid $1 - p$. Dit betekent dus dat een knoop geïsoleerd wordt na percolatie als alle kanten met de andere $n - 1$ knopen in de graaf verwijderd worden, dit gebeurt met waarschijnlijkheid:

$$(1-p)^{n-1} = (1-\tfrac{\lambda}{n})^{n-1} \leq e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda}{n}},$$

waar de ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid $1 - x \leq e^{-x}$.
De verwachting in (2) is dus gelijk aan:

$$E_\lambda(I) = E_\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{\textit{knoop } i \textit{ is een geïsoleerde knoop}\}}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_\lambda\left(1_{\{\textit{knoop } i \textit{ is een geïsoleerde knoop}\}}\right) =$$

$$nP_\lambda(\textit{een knoop is geïsoleerd}) \leq n e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda}{n}}$$

Uit (2) volgt dus dat

$$P_\lambda(I = 0) \geq 1 - n e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda}{n}} =$$

$$1 - e^{\ln(n)-\lambda} e^{\frac{\lambda}{n}} \to 1, \text{ als } \lambda - \ln(n) \to \infty.$$

We zien dus dat het geval $\lambda = \ln(n)$, ofwel $p^* = \frac{\ln(n)}{n}$, een scherpe grens is voor samenhangendheid in de complete graaf! Bovendien merken we ook dat voor p groter dan de grenswaarde van p^*, alle knopen tot één component behoren, deze wordt de 'gigantische component' genoemd. Als je nog meer wilt zien van de wiskunde achter netwerken en percolatietheorie dan kun je onze online webklas over netwerken bekijken.[2]

Ineens weet iedereen een roddel

Het tweede voorbeeld van een faseovergang komt uit de praktijk en zal bekend klinken voor velen van jullie. Denk aan een sociaal netwerk. Sociale netwerken vormen de basis voor het uitwisselen van informatie, het verspreiden van nieuws en van roddels. Afhankelijk van de structuur van het sociaal netwerk van contacten, maar ook van de waarschijnlijkheid dat informatie wordt uitgewisseld bij een contact, kan het gebeuren dat een roddel alleen lokaal wordt verspreid, dat het helemaal niet wordt verspreid, maar het kan ook gebeuren dat het viraal gaat en dat iedereen in het netwerk de roddel kent. Bij het verspreiden van informatie is er dus ook sprake van

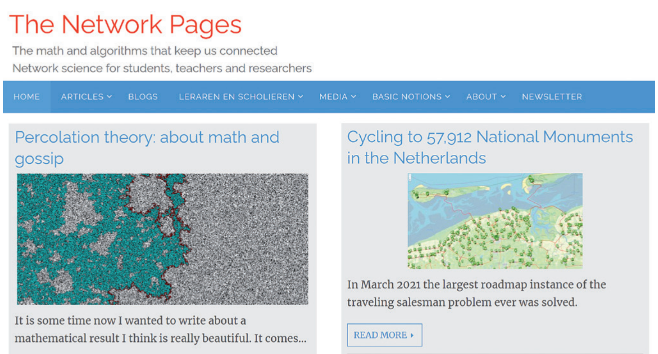
een faseovergang! Hoe kunnen we met wat we geleerd hebben de verspreiding van informatie beter begrijpen? Laten we aannemen dat ons contactnetwerk in feite de complete graaf is, oftewel alle knopen kunnen communiceren met alle andere knopen. Stel je nu voor dat op een gegeven moment in ons model knoop V een heel pakkende roddel komt te weten. In de volgende tijdstap is er een waarschijnlijkheid β dat de roddel verteld wordt naar een buurknoop W. We kunnen dit zien als de uitkomst van het opgooien van een oneerlijke munt, die met waarschijnlijkheid β op 'kop' landt. Het maakt nu niet uit of we deze munt aan het begin van het model gooien om te beslissen of de roddel van V aan W wordt doorgegeven wanneer V de roddel komt te weten, of dat we dit doen zodra V daadwerkelijk de roddel komt te weten.
Als we zo blijven redeneren, kunnen we voor elk paar knopen alvast een munt opgooien, en alleen de kanten waarvoor we 'kop' krijgen toevoegen aan het netwerk. Dit zijn precies de kanten waar de roddel wordt doorgegeven als één van de aangrenzende knopen de roddel komt te weten. Maar dit lijkt precies op percolatie op een volledige graaf waar elke kant met waarschijnlijkheid $p = \beta$ wordt behouden! Op lange termijn zal de roddel zich verspreiden door de gehele componenten waarin de eerste bron-knopen zich bevinden. Wanneer $p = \beta$ dusdanig groot is dat $p \times (n - 1) > 1$ is, dan is er een grote kans dat de eerste bron-knopen zich in de gigantische component bevinden, met als gevolg dat iedereen de roddel komt te weten!
Samenvattend, het willekeurig verwijderen van kanten in een graaf kan interessante structuren opleveren, wiskundigen die in de percolatietheorie werken proberen deze structuren te ontdekken voor verschillende soorten grafen, bijvoorbeeld voor de complete graaf zoals gezien in het voorbeeld hier.

Het netwerkspel

Het netwerkspel[3], ontwikkeld door Thom Castermans en Martijn Gösgens van de Technische Universiteit Eindhoven, introduceert percolatietheorie, en bovenal netwerken, op een speelse manier. In het netwerkspel mogen deelnemers een knoop met hun naam toevoegen aan het netwerk, die verbonden moet zijn met precies twee andere knopen. Spelers kunnen alleen verbinding maken met knopen die minder dan vijf buren hebben. Aan het eind van het spel wordt een willekeurige helft van de kanten verwijderd. Hierdoor zullen waarschijnlijk gedeelten van het netwerk losgekoppeld worden van de rest. De spelers die vervolgens in het grootste overgebleven verbonden deelnetwerk zitten, winnen het spel.
In figuur 2 winnen alle knopen in groen dus. Het netwerk wordt gebouwd door de gebruikers en percolatie zorgt voor het willekeurig verwijderen van de helft van de knopen.
Alhoewel toeval een groot rol speelt in het netwerk dat overblijft, vereist het spel ook een beetje strategisch denken. Bijvoorbeeld een knoop die verbonden is met maar twee andere knopen wordt verwijderd met waarschijnlijkheid 0,25. Dus hoogstwaarschijnlijk willen spelers verbonden zijn met knopen die zelf verbonden zijn met zo veel mogelijke andere knopen (maximaal vijf in dit spel). Het kan bijvoorbeeld gebeuren dat een knoop heel dicht verbonden is met andere knopen maar in een klein cluster, dat misschien met weinig kanten verbonden is met het grootste component van het netwerk. Na het percoleren kan het dus gebeuren dat zo'n clique losgekoppeld wordt van de grootste component van het netwerk. We nodigen je uit om het netwerkspel in jouw klas te gaan spelen. Op de website van het spel[3] kun je de instructies vinden om een klaslokaal op te zetten en het spel te spelen.

Network Pages

De Network Pages[4] is het wetenschapscommunicatieplatform van het wiskundeonderzoeksprogramma NETWORKS. Op de Network Pages willen we zowel netwerktheorie als de toepassingen hiervan in de echte wereld promoten. We zien dit in de eerste plaats als een wiskundige onderneming met nauwe banden met de informatica. Ons doel met de artikelen en blogs op de Network Pages is om wiskundige en algoritmische aspecten van de theorie van netwerken aan een breder publiek te presenteren, en om te laten zien hoe fascinerend dit moderne wetenschappelijke veld is. Kortom, we zijn erg enthousiast over de Network Pages en we hopen dat je ons de komende tijd vaak zult komen bezoeken!



figuur 4 The Network Pages

Noten

[1] Hofstad, R. van der (2017). *Random Graphs and Complex Networks*, Volume 1, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press. Zie: *https://doi.org/10.1017/9781316779422*
[2] Zie: *https://www.networkpages.nl/webklas/*
[3] Zie: *https://www.networkpages.nl/percolation-game*
[4] Zie: *www.networkpages.nl*
[5] Zie: *www.networkpages.nl/category/networks-goes-to-school/*

Over de auteur

Nicos Starreveld is docent wiskunde in de bachelor wiskunde van de Universiteit van Amsterdam. Daarnaast is hij beheerder van Network Pages, organiseert voor het wiskundeonderzoeksprogramma NETWORKS de masterclass *NETWORKS goes to school* bedoeld voor scholieren 5 en 6 vwo 5 en schrijft hij voor *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras.*

Saskia van Boven, Jules Ellis, Leontien de Kwaadsteniet, Inez van de Wolfshaar

Een kans gemist. Van vwo naar wo, op zoek naar een leerlijn statistiek

Een groep docenten uit het vo en wo, hebben met een student van de Radboud Universiteit verkend hoe de overgang van wiskunde A naar statistiek in het wo verloopt. Dit artikel is een kort verslag van deze zoektocht.

Inleiding

Een van de doelen bij de invoering van het nieuwe wiskundecurriculum in het vo in 2015 was het verbeteren van de aansluiting van wiskunde op vervolgopleidingen.
In het eindrapport van de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO, 2013) werd bij de presentatie van de nieuwe examenprogramma's de volgende ambitie geformuleerd:
De wijze waarop statistiek wordt behandeld bereidt beter voor op de wijze waarop in de vervolgopleidingen statistiek wordt gebruikt.
Om een indruk te krijgen of dat is gelukt is er vanuit de Radboud Universiteit een onderzoeksgroep ingesteld die zich in vier bijeenkomsten van anderhalf uur heeft gebogen over de aansluiting vwo wiskunde A – statistiek in de sociale wetenschappen.
De groep bestond uit twee docenten vwo, twee docenten wo (pedagogische wetenschappen en psychologie) en een eerstejaars student (pedagogische wetenschappen). Een van de docenten uit het vo is daarnaast werkzaam op de Radboud Universiteit bij het Pre University College en ook als tutor voor eerstejaars biologiestudenten. De groep stond onder leiding van de vakdidacticus wiskunde van de Radboud Docenten Academie. In dit artikel presenteren we onze bevindingen, waarbij we opmerken dat dit bevindingen zijn van een kleine en selecte steekproef.

Knelpunten

Allereerst zijn de knelpunten vanuit drie perspectieven benoemd, vanuit de docenten uit het vo, vanuit de student(en) en vanuit de docenten uit het wo.

Perspectief docenten vo

Er zijn binnen dit perspectief drie hoofdlijnen te onderscheiden, namelijk de inhoud van het statistiekprogramma, de plaats van statistiek in het curriculum en de doorgaande leerlijn naar het wo en de docentvaardigheden die nodig zijn om statistiek goed te onderwijzen. De inhoud van het statistiekprogramma is gericht op de technische kant van de statistiek, met de nadruk op berekeningen en minder op statistisch redeneren en omgaan met onzekerheid. Er wordt bijvoorbeeld veel aandacht besteed aan het rekenen aan binomiale en normale verdelingen met de grafische rekenmachine, die niet wordt gebruikt in het wo. Veelal wordt de lesmethode gevolgd, en goede praktijkvoorbeelden ontbreken. Het is de vraag of de leerling hierdoor begrijpt waar hij mee bezig is en wat de betekenis is van de uitkomsten van de berekeningen.

> “Er liggen kansen bij het profielwerkstuk. Leerlingen kunnen daarvoor sociaalwetenschappelijk onderzoek doen, data verzamelen en deze statistisch analyseren.”

Op het vwo wordt statistiek alleen in het schoolexamen getoetst. Het onderdeel statistiek wordt daarom op veel scholen afgerond in 5 vwo, waardoor leerlingen weinig tijd hebben om statistische bagage te ontwikkelen: ze zijn er, naast een oppervlakkige kennismaking in de onderbouw, in de bovenbouw alleen in klas 5 actief mee bezig. Daarnaast weten sommige leerlingen dat ze het niet meer krijgen in het CSE en kunnen het daarom minder belangrijk vinden. De focus ligt op het succesvol afronden van het SE. Voor docenten (secties) zou dit ook kunnen gelden, want de druk op het CSE-programma is groot. Als er tijdgebrek is, kan dit ten koste gaan van het onderdeel statistiek. De deelnemende docenten hadden ook niet scherp wat er op het gebied van statistiek van hun leerlingen wordt verwacht in het wo, ze weten dus niet goed waar ze leerlingen op voorbereiden.
Dat brengt ons meteen op het derde punt. De docenten gaven aan dat zij in hun opleiding niet goed zijn voorbereid op het verzorgen van goed statistiekonderwijs. Hun indruk is dat docenten vaak niet echt enthousiast zijn voor statistiek. Maar ook de kennisbasis die nodig is om goed statistiekonderwijs te geven is niet altijd op orde.

Perspectief student

Volgens de student heeft statistiek een imagoprobleem: er wordt gedacht dat statistiek erg moeilijk is. Verder merkt ze in haar omgeving dat studenten niet goed weten wat ze kunnen verwachten in het wo. Sommige studenten dachten dat het erg op kansrekening en combinatoriek zou lijken, maar dat bleek niet te kloppen. Daarnaast gaf ze aan dat statistiek voor haar pas interessant werd toen ze het kon toepassen op onderzoeksdata uit haar eigen leergebied (pedagogische wetenschappen).

Perspectief docenten wo

Net zoals de docenten in het vo niet goed weten wat er in het wo gebeurt, weten docenten in het wo niet goed wat er in het vo gebeurt. Daarnaast is in het wo sprake van instroom van studenten met zeer verschillende statistische voorkennis, namelijk van vwo-leerlingen met wiskunde A/C (met statistiek), vwo-leerlingen met wiskunde B (zonder statistiek) en studenten die via mbo, havo en het hbo naar de universiteit doorstromen. Bij psychologie heeft bovendien de helft van de studenten de middelbare school in het buitenland gedaan. Al deze studenten krijgen in het wo hetzelfde statistiekonderwijs. De statistiek in het wo is toepassingsgericht. Rekenwerk wordt aangeleerd voor zover het bijdraagt aan het ontwikkelen van begrip, en daarna overgelaten aan toepassingen als SPSS. Studenten moeten juist leren wat het verhaal achter het rekenwerk is, ze moeten leren om de uitkomsten van het rekenwerk te interpreteren en ermee kunnen redeneren. Een van de wo-docenten denkt een verschil te proeven tussen het vo waarin de focus ligt op wat begrippen zoals gemiddelde en standaarddeviatie betekenen, en anderzijds in het wo de empirische focus op wat we uit data kunnen concluderen. Zijn voorstel zou zijn om ook in het vo meer focus op het empirische te leggen.

Verbeteracties

Hoe kunnen we er gezamenlijk voor zorgen dat de aansluiting op dit gebied van vo naar wo verbetert? Uit de gesprekken kwam een aantal mogelijkheden en kansen naar voren.

>

> “De kern van wat er in het wo gebeurt, is leren hoe empirisch onderzoek wordt uitgevoerd in de sociale wetenschappen.”

Zicht krijgen op de doorlopende leerlijn

Voor zowel de leerlingen, de studenten als de docenten zou het behulpzaam zijn als de leerlijn statistiek beter in beeld komt. De docenten uit het wo bieden aan om voorlichting te geven over statistiek in de sociale wetenschappen aan docenten in het vo. De kern van wat er in het wo gebeurt, is leren hoe empirisch onderzoek wordt uitgevoerd in de sociale wetenschappen, zoals de analyse van numerieke data en het statistisch redeneren op basis van deze data. Hier zou in het vo al een start mee kunnen worden gemaakt. Wel is het daarbij zaak dat de doorlopende leerlijn zorgvuldig wordt opgebouwd, omdat veelvoorkomende misverstanden over de betekenis van statistische resultaten al vroeg kunnen ontstaan en hardnekkig zijn.[1]

Voorlichting en aansluiting

De universiteiten kunnen in hun voorlichting voor sociaalwetenschappelijke studierichtingen meer uitleg geven over het vak statistiek en de rol die dit heeft in het doen van wetenschappelijk onderzoek. Dit zou de verwachtingen bij studenten reëler kunnen maken. In het wo kan worden onderzocht of de leerstof meer gedifferentieerd en meer aansluitend bij de beginkennis van studenten kan worden aangeboden. Dat zou ook een positieve invloed kunnen hebben op het imago van statistiek, want nu heeft statistiek een imagoprobleem, aldus de student.

Profielwerkstuk

Alle betrokkenen zagen een grote kans bij het profielwerkstuk. In een profielwerkstuk kunnen leerlingen sociaalwetenschappelijk onderzoek doen, data verzamelen en deze statistisch analyseren. Hierin zouden het vo en wo gezamenlijk kunnen optrekken. Radboud Pre-University College of Science biedt leerlingen al ondersteuning bij hun profielwerkstuk voor de bètavakken.[2] (Profielwerkstuk - Institute for Science Education (ru.nl)). Een soortgelijke aanpak zou ook vruchtbaar kunnen zijn voor profielwerkstukken met een sociaalwetenschappelijk karakter. Het profielwerkstuk wordt in het wo gezien als een belangrijk onderzoek en de kwaliteit van het PWS zou ook kunnen worden meegenomen bij de aanname van studenten bij een studie met een numerus fixus, zoals bijvoorbeeld psychologie. De docenten in het wo zouden graag een rol in de begeleiding van leerlingen willen spelen.

Conclusie

Uit de gesprekken met deze groep blijkt dat er kansen liggen om statistiekonderwijs te verbeteren, zowel in het vo als in het wo. Elkaar opzoeken en samen nadenken over hoe we onze leerlingen en studenten beter kunnen opleiden helpt daarbij. Het is zeer de vraag of de wijze waarop statistiek sinds de curriculumwijziging wordt onderwezen beter voorbereidt op statistiek in het wo. Wij zien kans voor verbetering en gaan er daarom ook meteen mee aan de slag. Jij ook?

Noten

[1] Vorig jaar is Marianne van Dijke gepromoveerd op een onderzoek rond statistisch redeneren in het vo. Een samenvatting van dit onderzoek vind je op *https://youtu.be/ClgtXknhYvE*. Zie ook de artikelen van Marianne in *Euclides* 94-5 en het interview met Marianne in *Euclides* 96-7.

[2] Zie: *https://www.ru.nl/ise/outreach/pre-university-college-science/scholierenprogramma/profielwerkstuk/*

Over de auteurs:

Saskia van Boven is als vakdidacticus wiskunde werkzaam bij de Radboud Docenten Academie. E-mailadres: *saskia.vanboven@ru.nl*. Jules Ellis doceert statistiek als Universitair Hoofddocent aan het onderwijsinstituut Psychologie en Kunstmatige Intelligentie. Leontien de Kwaadsteniet is Universitair Docent en doceert statistiek bij Pedagogische Wetenschappen en Onderwijskunde. Inez van de Wolfshaar is docent wiskunde aan Het Rhedens.

Ombaka, Kenia

Monica Woldinga

Overstromingen en corona en dan toch het hoofd boven water zien te houden, mede dankzij een steuntje in de rug van het WWF.

Overstromingen

figuur 1 Overstroming op het terrein van de oude locatie van de Ombaka Secondary School

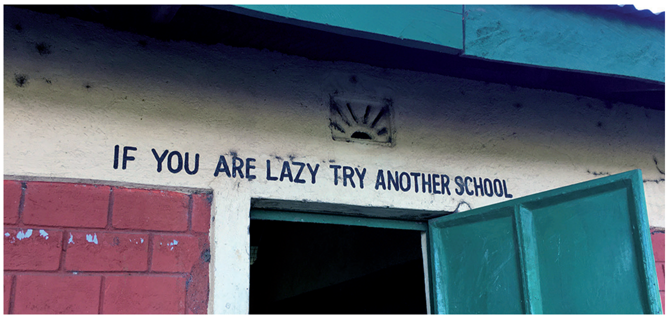
Het enorme Victoriameer, met een oppervlakte zo groot als Nederland en België samen, ligt tussen de landen Oeganda, Tanzania en Kenia. Dichtbij dit meer, in Kenia, ligt het gebied Ombaka. Dit gebied wordt vaak getroffen door overstromingen, en ook in 2020 was dat het geval. Samen met de covidpandemie leverde dit grote uitdagingen op voor het onderwijs. Tijdens de overstroming werd de basisschool gebruikt als tijdelijke huisvesting voor 1200 gezinnen! De staf van Ombaka Secondary School en de NGO 'Safe Water and AIDS Project (SWAP)' hebben ondanks de grote problemen alles op alles gezet om het onderwijs te hervatten toen de scholen weer open mochten. Gedurende de tijd dat de scholen gesloten waren, werd geprobeerd om de leerlingen te bereiken met voedselpakketten. Want 'geen school' betekent voor veel leerlingen ook 'geen maaltijden', omdat de kinderen normaal gesproken op school ook te eten krijgen. De toch al arme gezinnen, waarvan de meeste hun oogst zagen mislukken door de overstroming, moesten dus ineens ook hun kinderen een extra maaltijd geven.

Nieuwe boeken

De omgeving van de middelbare school overstroomde te vaak, dus werd besloten de school te verplaatsen naar een plek direct naast de basisschool. Na de heropening van de scholen kregen de leerlingen van de middelbare school daardoor tijdelijk les in tenten.

figuur 2 Les uit de nieuwe boeken

Het Wereldwiskunde Fonds hielp met de aanschaf van wiskundeboeken voor de hoogste klassen van de basisschool en de middelbare school. Op de nieuwe locatie, en met de nieuwe boeken, kon het wiskundeonderwijs weer met frisse moed gestart worden. De wiskundesectie van de middelbare school bestaat uit twee docenten, Zedrick Ochieng en James Odede die ook plaatsvervangend hoofd van de school is. Samen verzorgen zij zes wekelijkse lessen voor de klassen 1 en 2. De derde en vierde klas hebben zelfs acht lesuren per week. Daarnaast hebben alle leerlingen elke dag een verplicht huiswerkuur voor wiskunde meteen na de lunch. De docenten hopen dat de examenresultaten nu zullen verbeteren. Ze zijn de donateurs van het Wereldwiskunde Fonds heel dankbaar voor de hulp.



figuur 3 Het motto van de school

De foto's in dit artikel zijn gemaakt door Alie Eleveld van SWAP.

Over de auteur

Monica Woldinga is voorzitter van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: *mwoldinga@gmail.com*
Website WwF: *www.wereldwiskundefonds.nl*

Vastgeroest

Ab van der Roest

Het getallenvoorbeeld

Op een toets voor wiskunde A in 4 havo stond de volgende vraag:
Toon aan dat de formule $t=0{,}1\cdot\sqrt{\frac{2x}{9{,}81}}$ te schrijven is als $t=0{,}045\cdot\sqrt{x}$. Je herkent de vraag misschien wel, want hij komt uit een bij velen bekende bundel.
Doel van deze opgave is dat leerlingen een wortelvorm kunnen herleiden. Ik verwacht dus een antwoord als

$$t=0{,}1\cdot\sqrt{\frac{2x}{9{,}81}}=0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{9{,}81}}=0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{9{,}81}}=$$

$$0{,}1\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9{,}81}}\sqrt{x}=0{,}045\sqrt{x}\ .$$

Uiteraard is in de les aandacht geweest voor deze herleidingen en is daarbij verteld dat een getallenvoorbeeld niet voldoende is. Toch zijn er leerlingen die op de toets bij voorbeeld 4 voor x invullen en laten zien dat het bij beide formules hetzelfde antwoord oplevert. Er wordt meteen een aantal decimalen achterover gedrukt, maar daar bekommert de gemiddelde 4-havo-leerling zich niet om.

Om leerlingen te overtuigen dat één of twee getallenvoorbeelden nog niets zeggen over een bewering, gebruik ik het voorbeeld dat twee getallen bij elkaar optellen precies hetzelfde is als de twee getallen met elkaar vermenigvuldigen. Kijk maar: $2 + 2 = 2 \times 2$ en $0 + 0 = 0 \times 0$.
De klas sputtert dan meteen en geven als tegenvoorbeeld twee en vijf. Dat ze dan mij meteen helpen door hun handelen onderuit te halen, hebben ze niet meteen in de gaten.

> "Nadenken over fouten die leerlingen maken en daardoor weer nieuwe gedachten krijgen, dat ga ik zeker missen."

Oppervlakkig denkend over mijn bewering, dacht ik dat er maar twee voorbeelden zijn waar de bewering waar voor is. Er zijn er echter oneindig veel. Ga maar na. Twee getallen bij elkaar optellen en dezelfde getallen met elkaar vermenigvuldigen is de vergelijking $a + b = a \times b$ oplossen. Deze vergelijking is te herleiden tot $a{\cdot}b - a = b$ en vervolgens tot $a=\frac{b}{b-1}$.

Kies nu voor b achtereenvolgens 3, 4 , ... en je vindt respectievelijk $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, ... En $3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$ en $4 \times 1\frac{1}{3} = 4 + 1\frac{1}{3}$, enzovoort.

Dit levert dus een oneindig veel voorbeelden die de valse bewering ondersteunen. Toen ik dit besprak in de klas, was er best veel aandacht voor en tegelijkertijd deden we weer een mooi stukje algebra.

Toetsen nakijken vind ik altijd vervelend werk en dat ga ik niet missen. Maar het nadenken over fouten die leerlingen maken en daardoor weer nieuwe gedachten krijgen, dat ga ik zeker missen.

Wat een getallenvoorbeeldje toch met je kan doen!

Over de auteur

Ab van der Roest is tot aan het eind van dit schooljaar docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Olympiadepuzzel 97-6
Cijfersommen

Esther Bod

PZZL

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl.*

Voor een positief geheel getal n schrijven we $S(n)$ voor de som van de cijfers van n. We definiëren de functie $f(n)$ op recursieve wijze door:

$$f(n)=\begin{cases} n & \text{als } n\leq 9 \\ S(n)+f(S(n)) & \text{als } n\geq 10 \end{cases}$$

Er geldt bijvoorbeeld dat $S(123456789) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ en dus $f(123456789) = 45 + f(45) = 45 + 9 + f(9) = 45 + 9 + 9 = 63$.

Bestaat er een positief geheel getal n zodat $f(n) = 2022$? Geef een getal n met deze eigenschap, of toon aan dat zo'n n niet bestaat.

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 3 juni naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 4

Voor de puzzel *Vierkanten en driehoeken* hebben we 15 inzendingen ontvangen.
De opgave was een puzzel met vierkanten, driehoeken en oppervlaktes. In de figuur waren veel gelijke hoeken, congruente driehoeken en symmetrieën te vinden. De inzendingen toonden dan ook veel verschillende manieren om deze opgave op te lossen. Meetkunde, symmetrieën en zelfs een beetje algebra, vele wegen leidden naar Rome. Hoe de opgave ook werd opgelost, het eindpunt was hetzelfde: lijnstuk EH heeft een lengte van 1.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 14 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Piet Smal.

vakbladeuclides.nl/976olympiadepuzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2022

Vr 10/06
UTRECHT
Onderwijs meets onderzoek Toekomst van het statistiekonderwijs Organisatie: NVvW, SLO en Freudenthalinstituut

Vr 26/08 Za 27/08 — Vr 02/09 Za 03/09
AMSTERDAM en EINDHOVEN
Vakantiecursus wiskunde voor leraren
'Willekeur en structuur in netwerken'
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Za 01/10
LEIDEN
Symposium Machtige verhalen
Organisatie: Werkgroep Geschiedenis NVvW

Za 05/11
NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 97

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	21 juni 2022	25 april 2022