Middellijnen **Wobien Doyer**
Lieke de Rooij

Deze puzzel is naar een idee van Gerard Bouwhuis. Hierbij worden meetkundige figuren door een rechte lijn in twee stukken verdeeld, zodanig dat die twee stukken gelijke omtrek en oppervlak hebben. Zoals Gerard schrijft is dit onderwerp voor driehoeken al aardig afgegraasd en is te vinden op internet. In de literatuur wordt het vaak triangle equalizer of splitter genoemd. Zie bijvoorbeeld :

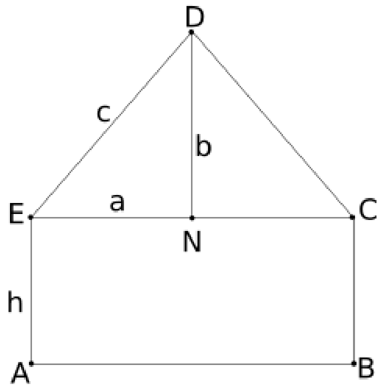
http://publications.azimpremjifoundation.org/1655/1/3_Equalizers%20Of%20A%20Triangle.pdf

Maar Gerard keek ook naar andere meetkundige figuren zoals een cirkel. En dan is het duidelijk: elke middellijn voldoet. En omdat bij een driehoek blijkt dat zo'n lijn altijd door het middelpunt van de ingeschreven cirkel gaat, noemde hij zo'n lijn "**middellijn** "

Hij keek ook naar een symmetrische vijfhoek met twee rechte hoeken, ofwel een huisje. Zie hiervoor figuur 1.

Met name opgave 1a is ook geschikt voor leerlingen die de stelling van Pythagoras hebben geleerd.

Opgave 1a: Er is precies één "huisje" waarbij behalve de symmetrielijn ook de dakgoot (CE) het oppervlak en omtrek in twee gelijke delen verdeelt. Hierbij is echter geen sprake van een ingeschreven cirkel. Bepaal de afmetingen van zo'n huisje.



Uitwerking Opgave 1a:

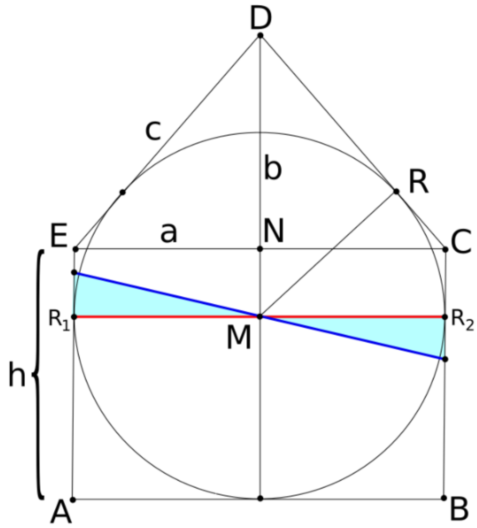
We kiezen $AB = 2a, AE = h,\ DE = c$ en de lengte van de loodlijn uit D op $EC = b$.
Dan geldt $c^2 = a^2 + b^2$
De oppervlakte van het dak is gelijk aan die van de rechthoek als $a \cdot b = 2a \cdot h$, dus $b = 2h$.
De omtrekken zijn gelijk als $2a + 2h = 2c$, dus $a + h = c$
Uit de laatste 2 kunnen we h elimineren, met $b = 2(c - a)$, of $c = \frac{1}{2}(b + 2a)$
Dit kunnen we invullen in $c^2 = a^2 + b^2$, met $\frac{1}{4}(b + 2a)^2 = a^2 + b^2$, en dus:
$b^2 + 4ab + 4a^2 = 4a^2 + 4b^2$, dus $3b^2 - 4ab = 0$ delen door b geeft $3b = 4a$ dus de verhouding $a{:}\,b{:}\,c = 3 : 4 : 5$. Met $b = 2h$ is dan $a{:}\,b{:}\,c{:}\,h = 3 : 4 : 5 : 2$ en daarmee ligt het huisje vast. Het halve dak is de bekende 3-4-5 driehoek.

We gaan nu op zoek naar huisjes die wel een ingeschreven cirkel hebben. We kunnen het huisje van opgave 1a hoger maken zonder de vorm van het dak te veranderen en er zo een raaklijnenvijfhoek van te maken. De lijnen die omtrek en oppervlakte halveren blijken dan door het middelpunt van de ingeschreven cirkel te gaan, zodat we ze met recht middellijnen mogen noemen. Het zijn er oneindig veel, waarvan één horizontaal.

Opgave 1b: Bepaal de afmetingen van dit huisje met ingeschreven cirkel en hetzelfde dak als in opgave 1 en geef aan welke middellijnen er zijn. Onderbouw je conclusies.

Uitwerking Opgave 1b:

De cirkel raakt aan alle 5 de zijden van de 5-hoek. De straal is dan $r = a$. R is het raakpunt op DC. Dan heeft ook driehoek MRD de verhouding 3: 4: 5 (want 2 gelijke hoeken), dus $r: MD = 3: 5$, en dus $MD = \frac{5}{3} \cdot r = \frac{5}{3} \cdot a$. Dan is
$h = r + MD - b = a + \frac{5}{3} \cdot a - b = \frac{8}{3} \cdot a - b = 8 - 4 = 4$.
De afmetingen van het huisje zijn dus: $a = 3, b = 4$,
$c = 5$, $h = 4$ en $r = 3$.



Middellijnen zijn behalve de verticale spiegelas (triviaal) ook de horizontale as: Voor de omtrek moet dan $4r = 2MN + 2c$.
Dat klopt: $4r = 12$ en $2MN + 2c = 2(h - r) + 2c =$
$2(4 - 3) + 2.5 = 2 + 10 = 12$
Voor de oppervlakte moet gelden: $2r^2 = 2a \cdot (h - r) + ab$.
Ook dat klopt: $2r^2 = 2 \cdot 9 = 18$ en $2a \cdot (h - r) + ab =$
$2 \cdot 3 \cdot (4 - 3) + 3 \cdot 4 = 18$.

Maar ook alle lijnen door M en een punt op ER_1 of CR_2.
Bijvoorbeeld de blauwe lijn is een middellijn omdat de lichtblauwe driehoekjes congruent zijn.
Omdat de rode lijn een middellijn is is de blauwe dat ook:
zowel van de omtrek als de oppervlakte van de onderste helft komt er bij de blauwe lijn rechts evenveel bij als er links af gaat. Zodra de blauwe lijn aan één van de twee kanten in het dak uitkomt klopt dat niet meer.

Bij opgave 1c en 1d mag het dak een andere hellingshoek hebben.

Opgave 1c: Toon aan dat het huisje van 1b ook de enige is die een horizontale middellijn heeft, nu onafhankelijk van de helling van het dak.

Uitwerking Opgave 1c:

Zie figuur van opgave 1b, maar nu is niet gegeven dat $a: b: c = 3: 4: 5$.
Dan hebben we:
$r = a$ en $a^2 + b^2 = c^2$
Omtrek: $4a = 2(h - a) + 2c \Leftrightarrow \quad 6a = 2(h + c) \Leftrightarrow h = 3a - c$
Oppervlakte: $2a^2 = 2a \cdot (h - a) + ab \Leftrightarrow 2a^2 = 2a \cdot (h - a) + ab \ \Leftrightarrow$
$2a = 2 \cdot (h - a) + b$ of $4a = 2h + b$

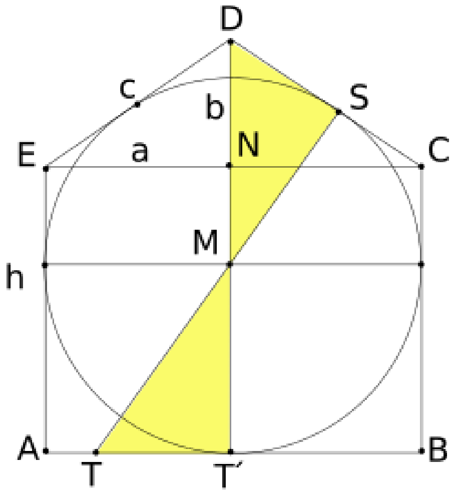
We vullen de waarde van h uit de omtrek hierin in:
$4a = 2(3a - c) + b$ dus $c = a + \frac{1}{2}b$. Invullen in $a^2 + b^2 = c^2$ levert
$a^2 + b^2 = (a + \frac{1}{2}b)^2 = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$ of $\frac{3}{4}b^2 = ab$ met $b = 0$ of $3b = 4a$.
$b = 0$ betekent een plat dak, zodat ons huisje een vierkant wordt met ingeschreven cirkel. Dan zijn natuurlijk alle lijnen door het middelpunt middellijnen.

En $3b = 4a$ betekent dat END en CND 3-4-5 driehoeken zijn, en dan is het hetzelfde huisje als in 1b.

Opgave 1d: Bij oneindig veel andere raaklijnenhuisjes (met dus een andere hoek van de daklijnen) blijken er precies 1 (de symmetrie lijn) of 3 middellijnen door het midden van de ingeschreven cirkel te zijn. Wat kan je zeggen over de helling van het dak als er precies 3 middellijnen zijn? Geef een bewijs. Tip: Twee van die lijnen snijden dan het dak en de vloer.

Uitwerking Opgave 1d:

In dit huisje is het dak minder steil dan in het huisje van opgave 1b en 1c. Trek uit M de loodlijn op CD met voetpunt S en verleng die tot hij AB snijdt in T.



TS is dan een middellijn:
De driehoeken MDS en MTT' zijn congruent want $SM = MT' = r$, ze hebben in M gelijke hoeken en zijn beide rechthoekig.

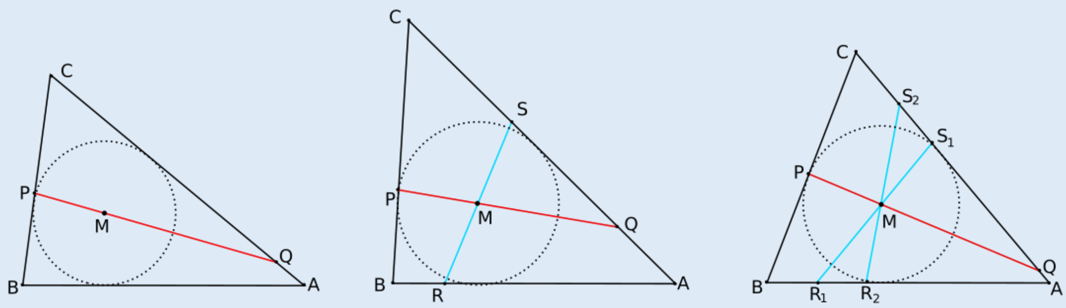
Dus $SD = TT'$.

Dit lukt voor alle raaklijnenhuisjes waarvan de helling van het dak minder steil is dan 45°, want bij 45° gaat het verlengde van de loodlijn uit M op CD door het punt A.
Daar voorbij valt T dus buiten de figuur.
Conclusie: Als de helling van het dak $\leq 45^\circ$ zijn er 3 middellijnen: de loodlijn door M op AB, de loodlijn door M op CD en ook zijn spiegelbeeld op ED. Als de hoek groter is dan 45° is er slechts één, de loodlijn door M op AB, tenzij het dak een helling heeft van 4/3 , we weten al dat er dan oneindig veel middellijnen zijn.

Vervolgens keek Gerard naar de middellijn(en) van driehoeken. We geven een aantal eigenschappen zonder bewijs. Sommigen zijn niet moeilijk te bewijzen en ze zijn te vinden op internet.

* Elke middellijn gaat door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek.
* Als een middellijn PQ bij hoekpunt A een driehoek PAQ afsnijdt, met P op $c = AB$ en Q op $b = AC$, dan is de lengte van $p = AP$ en $q = AQ$ te berekenen met: $p, q = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 2bc}}{2}$ waarbij s = halve omtrek van de driehoek. P en Q mogen dan natuurlijk niet buiten de driehoek vallen. Deze formule is af te leiden uit het feit dat $s = p + q$ en $bc = 2pq$.

Als A de scherpste hoek is van de driehoek, dan geldt afhankelijk van het deel onder de wortel:
Als $s^2 - 2bc < 0$: De driehoek heeft precies 1 middellijn.
Als $s^2 - 2bc = 0$: De driehoek heeft precies 2 middellijnen.
Als $s^2 - 2bc > 0$: De driehoek heeft precies 3 middellijnen.
Daarbij wordt het hoekpunt met de grootste hoek nooit door een middellijn afgesneden.
Zie de figuren hieronder, waarin steeds A de kleinste hoek is en B de grootste.



* Als voor een lijn van onderstaande drie voorwaarden er twee voldoen is er sprake van een middellijn.

  a) De lijn verdeelt de omtrek in twee gelijke delen.

  b) Die lijn verdeelt het oppervlak in twee gelijke delen.

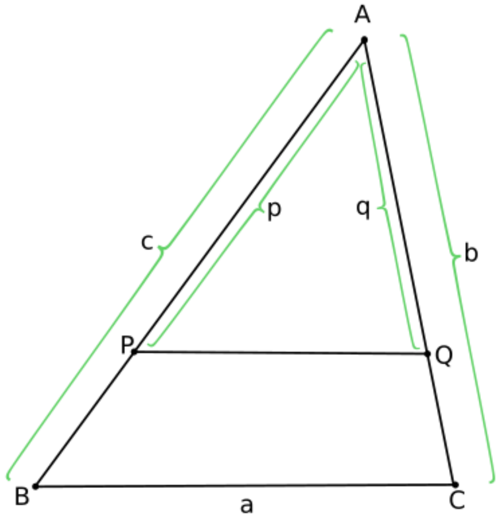
  c) Die lijn gaat door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Deze gegevens mag je zonder bewijs gebruiken in de uitwerkingen van de opgaven.

Opgave 2a en 2b gaan over gelijkbenige driehoeken. Je mag kiezen uit 2a en 2b.

Opgave 2a: Er zijn precies twee gelijkbenige driehoeken waarbij minstens een van de middellijn(en) evenwijdig is/zijn aan een zijde. Bepaal de afmetingen van zo'n driehoek.

Uitwerking Opgave 2a:

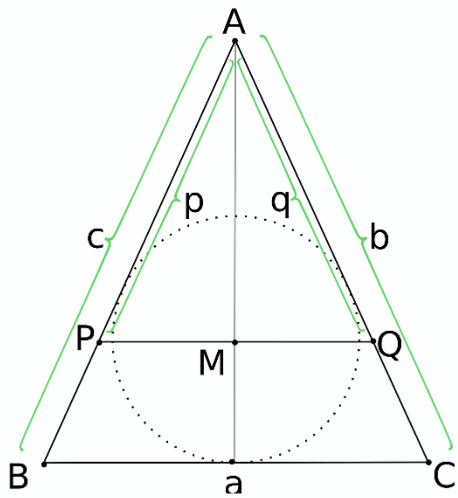


Laat ABC een (niet per se gelijkbenige) driehoek zijn waarin PQ een middellijn is // BC. We noemen de lijnstukken a=BC, b=AC, c=AB, p=AP en q=AQ met APQ gelijkvormig met ABC

APQ is de helft van de oppervlakte als $b \cdot c = 2p \cdot q$
Met de gelijkvormigheid volgt hieruit: $c^2 = 2p^2$ dus
$2p = c\sqrt{2}$ en $2q = b\sqrt{2}$,

APQ heeft dezelfde omtrek als $PQCB$ als $2(p+q) = a + b + c$.

Dan is dus $c\sqrt{2} + b\sqrt{2} = 2(p+q) = a + b + c$ of
I: $(b+c)\sqrt{2} = a + b + c$

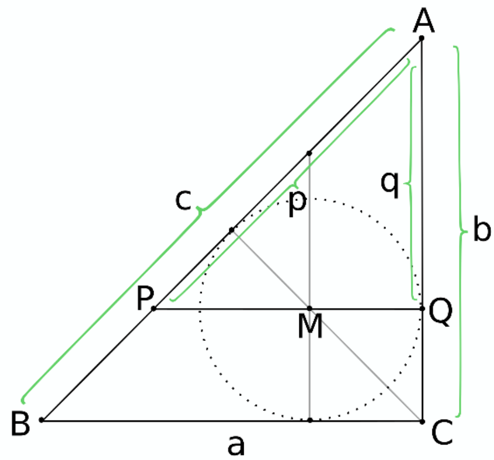


Als ABC gelijkbenig is is ofwel **A:** $b = c$ (met PQ evenwijdig aan de basis)
ofwel **B:** $a = b$ (met PQ evenwijdig aan één van de benen).

A: Als PQ evenwijdig aan de basis:
$b = c$: Dan wordt I:

$2c\sqrt{2} = a + 2c$ dus $a = 2c\sqrt{2} - 2c = 2c(\sqrt{2} - 1)$

De figuur met middellijnen en ingeschreven cirkel geeft een idee hoe het er uit ziet. PQ is de middellijn // AB (eigenlijk 2 samenvallende middellijnen). Ook de loodlijn uit A is natuurlijk een middellijn.



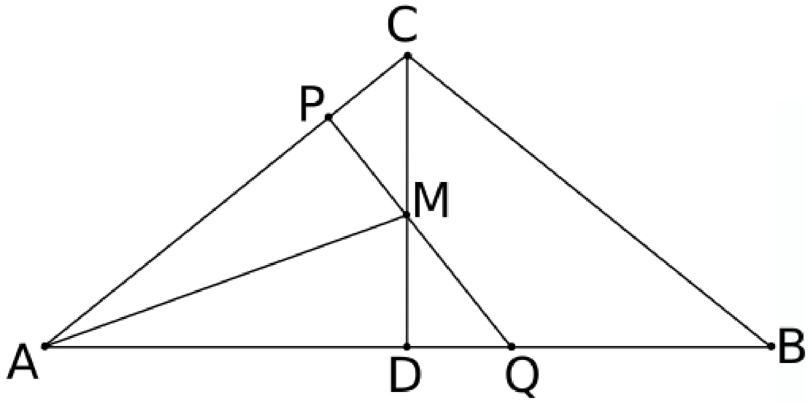
B: Als PQ evenwijdig aan één van de benen:
$a = b$: Dan wordt I:

$(b+c)\sqrt{2} = 2b + c$ dus
$c\left(\sqrt{2} - 1\right) = b(2 - \sqrt{2})$ dus $c = b \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = b\sqrt{2}$.

En omdat $a = c$ hebben we een 1-1-$\sqrt{2}$ rechthoekig-gelijkbenige driehoek. Omdat die symmetrisch is is er nog een middellijn loodrecht op PQ en een langs de symmetrieas.

Opgave 2b: Er zijn oneindig veel gelijkbenige driehoeken waarbij alle middellijnen (of de enige middellijn) loodrecht staan/staat op een zijde. Bepaal de afmetingen van zo'n driehoek.

Uitwerking Opgave 2b:



In de figuur is een (tamelijk "platte") gelijkbenige driehoek ABC getekend. M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel. We laten uit M de loodlijn neer op AC met voetpunt P en verlengen die totdat hij AB snijdt in Q. Doordat de driehoek tamelijk plat is liggen zowel P als Q op de zijden van de driehoek.
De driehoeken PCM en DQM zijn congruent (beide rechthoekig, gelijke hoeken in M en PM=DM) zodat de omtrek en oppervlakte van AQP en ADC gelijk zijn. Omdat CD natuurlijk een middellijn is is PQ dat ook.

PQ is dus een middellijn die loodrecht op een zijde staat. Ook de loodlijn uit C op AB en het spiegelbeeld van PQ in CD zijn natuurlijk middellijnen die loodrecht op een zijde staan. Er zijn dus 3 middellijnen die alle drie loodrecht staan op een zijde.

Dat blijft zo als we de driehoek nog platter maken (tot C op AB ligt).
Maken we de driehoek minder plat tot hoek C =60° dan hebben we een gelijkzijdige driehoek met precies 3 middellijnen.
De middellijnen vallen dan samen met de hoogtelijnen en gaan door de hoekpunten.

Zodra je de hoek C nog kleiner maakt schuiven Q en zijn spiegelbeeld buiten de driehoek en blijft alleen de middellijn CD over die loodrecht staat op AB.

Conclusie: Alle middellijnen in een gelijkbenige driehoek staan loodrecht op een zijde.
Er zijn er 3 als hoek $C \leq 60^\circ$ en één als hoek $C > 60^\circ$

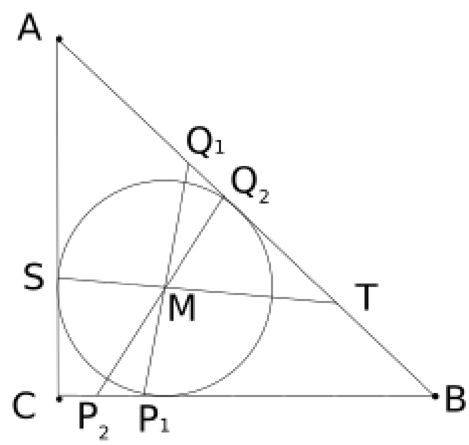
Ten slotte gaf Gerard een leuk voorbeeld van een rechthoekige driehoek met zijden 20, 21 en 29, waarbij hij de lengte van de middellijnen bepaalde. Er zijn er drie, waarvan twee een lengte hebben van $7\sqrt{5}$ en één van $5\sqrt{7}$.

Opgave 3a. Toon aan dat de rechthoekige driehoek met zijden 20, 21 en 29 middellijnen heeft van $7\sqrt{5}$ en van $5\sqrt{7}$. (Je hoeft niet aan te tonen welke lengte 2x voorkomt, maar wel dat de middellijnen bestaan)

Uitwerking Opgave 3a:

Omdat ABC een rechthoekige driehoek is met weinig verschil in lengte van de rechthoekszijden zijn er 3 middellijnen: 2 die de kleinste hoek afsnijden (P_1Q_1 en P_2Q_2). en 1 die de middelste hoek afsnijdt (ST) Ze snijden elkaar in het middelpunt M van de ingeschreven cirkel, en P_1Q_1 en P_2Q_2 zijn elkaars spiegelbeeld in de bissectrice uit B en dus even lang. We bekijken P_1Q_1 en ST:

Voor de middellijn P_1Q_1 geldt:
BQ_1en BP_1: $= \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 2 \cdot 29 \cdot 21}\right)$ met
$s = \frac{1}{2}(20 + 21 + 29) = 35$, dus:
$BQ_1, BP_1 = \frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{35^2 - 2 \cdot 29 \cdot 21}\right) = \frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{1225 - 1218}\right) = \frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{7}\right)$.
(In de tekening is $BQ_1 > BP_1$, dus geldt de + voor BQ_1 en de $-$ voor BP_1.)



We passen de cosinusregel toe in BP_1Q_1:
$P_1Q_1{}^2 = BQ_1{}^2 + BP_1{}^2 - 2 \cdot BQ_1 \cdot BP_1 \cdot \cos(\beta) =$
$\left(\frac{35+\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35-\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{35+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{35-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{21}{29} = \frac{35^2+7}{2} - \frac{35^2-7}{2} \cdot \frac{21}{29} = \frac{1232}{2} - \frac{1218}{2} \cdot \frac{21}{29} =$
$616 - 21 \cdot 29 \cdot \frac{21}{29} = 616 - 21^2 = 616 - 441 = 175$
Dus $P_1Q_1 = P_2Q_2 = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Voor ST wordt dat:
$CS, CT = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 2 \cdot 29 \cdot 20}\right) = \frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{35^2 - 2 \cdot 29 \cdot 20}\right) =$
$\frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{1225 - 1160}\right) = \frac{1}{2}\left(35 \pm \sqrt{65}\right)$ Hier geeft de + de lengte $\approx 21{,}5$, dus groter dan AC, en dus is er hier maar één middellijn, met CT>CS

De cosinusregel in CST levert nu:
$ST^2 = CS^2 + CT^2 - 2 \cdot CS \cdot CT \cdot \cos(\gamma) =$
$\left(\frac{35-\sqrt{65}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35+\sqrt{65}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{35-\sqrt{65}}{2} \cdot \frac{35+\sqrt{65}}{2} \cdot \frac{20}{29} = \frac{35^2+65}{2} - \frac{35^2-65}{2} \cdot \frac{20}{29} = \frac{1290}{2} - \frac{1160}{2} \cdot \frac{20}{29} =$
$645 - 580 \cdot \frac{20}{29} = 645 - 20 \cdot 20 = 245$.
Dus $ST = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$.

Een bekende formule voor Pythagoras tripletten is: elke rechthoekige driehoek met geheeltallige zijden is te schrijven met behulp van een zekere *m*>*n* als: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$. Als GGD(*m, n*)=1 en van *m* en *n* is er één even (en dus de ander oneven) dan genereert de formule alle onvereenvoudigbare (primitieve) Pythagoras tripletten.

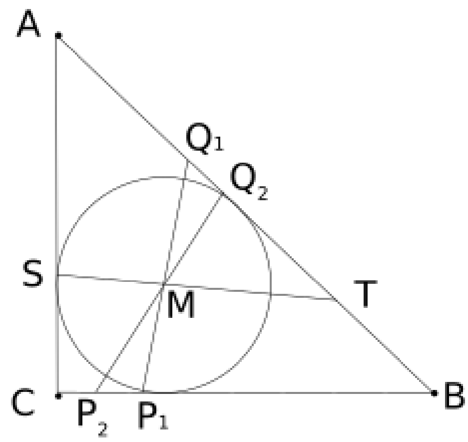
Met $m = 5$ en $n = 2$ krijg je het voorbeeld van Gerard: 20, 21, 29.
Zou het toevallig zijn dat de lengte van de middellijnen dan $(m + n)\sqrt{m} = 7\sqrt{5}$ en $m\sqrt{m + n} = 5\sqrt{7}$ zijn?

Opgave 3b: Onderzoek of er meer primitieve Pythagoras tripletten bestaan waarbij de middellijnen lengtes hebben van $m\sqrt{m + n}$ en $(m + n)\sqrt{m}$. (Dan hebben dus de lengtes van de drie zijden geen gemeenschappelijke deler en ook *m* en *n* niet . Bovendien zijn *m* en *n* niet allebei oneven.)

Tip: Hierbij kan het handig zijn de cosinusregel te gebruiken in de driehoek BPQ om PQ te berekenen en alles uit te drukken in m en n.

Uitwerking Opgave 3b:

We hebben nu een rechthoekige driehoek met zijden $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$.



De berekening uit opgave 3a word dan (we gebruiken eerst a, b en c en vullen later m en n in. We doen hetzelfde als wat we deden in 3a, maar vullen geen getallen in voor a, b en c):

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Voor de middellijn P_1Q_1 geldt: (we laten in het volgende de enen bij P en Q weg, omdat het niet uitmaakt of we $P_1Q_1$of P_2Q_2 gebruiken)

$BQ, BP = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}\right)$

Cosinusregel in BPQ:

$PQ^2 = BQ^2 + BP^2 - 2 \cdot BQ \cdot BP \cos(\beta) = BQ^2 + BP^2 - 2 \cdot BQ \cdot BP \cdot \frac{a}{c} =$

$\frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(s - \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}\right)\left(s - \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}\right) \cdot \frac{a}{c}$

Schrijf voor $w = \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}$ dan wordt dit:

$PQ^2 = \frac{1}{4}\left\{(s + w)^2 + (s - w)^2 - 2(s + w)(s - w) \cdot \frac{c}{a}\right\} =$

$\frac{1}{4}\left\{2s^2 + 2w^2 - 2(s^2 - w^2) \cdot \frac{a}{c}\right\} =$

$\frac{1}{2}\left(s^2 + w^2 - (s^2 - w^2) \cdot \frac{a}{c}\right)$

Vul nu weer in $w = \sqrt{s^2 - 2 \cdot ac}$:

$PQ^2 = \frac{1}{2}\left(s^2 + s^2 - 2 \cdot ac - (s^2 - s^2 + 2 \cdot ac) \cdot \frac{a}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(2s^2 - 2 \cdot ac - (2 \cdot ac) \cdot \frac{a}{c}\right) =$

$s^2 - ac - a^2 = s^2 - a(a + c)$.

ST^2 krijgen we door de a te vervangen door b dus:

$ST^2 = s^2 - b(b + c)$

Substitueren we $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$ wordt dat:

$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 + m^2 - n^2 + 2mn) = \frac{1}{2}(2m^2 + 2mn) = m(m + n)$

We zullen ook gebruiken: $b + c = 2mn + m^2 + m^2 = (m + n)^2$ en

$a + c = m^2 - n^2 + m^2 - n^2 = 2m^2$

De middellijnen worden dan:

$PQ^2 = s^2 - a(a + c) = m^2(m + n)^2 - (m^2 - n^2) \cdot 2m^2 =$

$m^2(m + n)(m + n - 2m + 2n) = m^2(m + n)(3n - m)$

Dus $PQ = m\sqrt{(m + n)(3n - m)}$

En: $ST^2 = s^2 - b(b + c) = m^2(m + n)^2 - 2mn(m + n)^2 = m(m + n)^2(m - 2n)$

Dus $ST = (m + n)\sqrt{m(m - 2n)}$

Dus we hebben middellijnen $PQ = m\sqrt{(m+n)(3n-m)}$ en $ST = (m+n)\sqrt{m(m-2n)}$.

We zochten middellijnen $m\sqrt{m+n}$ en $(m+n)\sqrt{m}$, dus moet $3n - m = 1$ en

$m - 2n = 1$ Hieruit is gemakkelijk te berekenen: $m = 5$ en $n = 2$, en dat levert de driehoek met zijden 20, 21 en 29 die we al hadden.

Er zijn dus niet meer oplossingen.

Extra opgave:

Zijn er meer geheeltallige rechthoekige driehoeken, niet congruent aan het voorbeeld van Gerard waarbij er middellijnen zijn met lengtes $s\sqrt{t}$, en $t\sqrt{s}$ met s en t gehele getallen (die dus ook kwadratische factoren mogen bevatten)?

Tip: Let wel op dat je moet controleren of de snijpunten P en/of Q niet buiten de driehoek vallen. Het kan nuttig zijn om na te denken over hoe je een driehoek moet vermenigvuldigen zo dat het kwadraat van de lengtes van de middellijnen de vorm heeft van s^2t en st^2.

Uitwerking extra opgave:

Laat ABC een rechthoekige driehoek zijn die gegenereerd wordt door m en n en die beide soorten middellijnen heeft.

We zullen dan laten zien dat er een vermeningsvuldigsfactor f^2 is waarmee we die driehoek kunnen vermenigvuldigen, zodat de de middellijnen zijn te schrijven als $s\sqrt{t}$, en $t\sqrt{s}$, met s en t gehele getallen (die dus ook kwadratische factoren mogen bevatten)

We zullen dat doen aan de hand van het voorbeeld n=5 en m=12.

We moeten dus eerst controleren of die driehoek beide soorten middellijnen heeft:
We bepalen a, b, c en s van de pythagorasdriehoek:
$c = m^2 + n^2, a = m^2 - n^2, b = 2mn$ en $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$:
$c = m^2 + n^2 = 12^2 + 5^2 = 169$
$a = m^2 - n^2 = 12^2 - 5^2 = 119$
$b = 2mn = 2 \cdot 12 \cdot 5 = 120$
$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(119 + 120 + 169) = 204$

De middellijn(en) die hoek α afsnijden bestaan als $s^2 - 2bc \geq 0$:
$s^2 - 2bc = 41616 - 2 \cdot 120 \cdot 169 = 1056$
en de middellijn(en) die hoek β afsnijden bestaan als $s^2 - 2ac \geq 0$:
$s^2 - 2ac = 41616 - 2 \cdot 119 \cdot 169 = 1394$
Beide soorten middellijnen bestaan dus.

We zoeken nu een vermenigvuldigfactor f^2, waarmee we de driehoek gaan vermenigvuldigen. Die nieuwe driehoek wordt dan gegenereerd door $M = fm$ en $N = f \cdot n$

Omdat de vermenigvuldigde driehoek dezelfde verhoudingen heeft als de oorspronkelijke driehoek bestaan in de nieuwe driehoek ook beide soorten middellijnen.

We vonden in opgave 3b dat als een rechthoekige driehoek ABC zijden heeft:
$c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$, dan zijn de middellijnen (als ze bestaan)

$m\sqrt{n+m} \cdot \sqrt{(3n-m)}$ en $(n+m)\sqrt{m} \cdot \sqrt{m-2n}$
Als we er dus voor zorgen dat $\sqrt{(3n-m)} = U\sqrt{V}$ en $\sqrt{m-2n} = V\sqrt{U}$ voor een bepaalde waarde van U en V, en ook nog dat de bijbehorende middellijnen bestaan, dan zijn we klaar.

We moeten f dus zo kunnen kiezen dat $\sqrt{(3N-M)} = U\sqrt{V}$ en $\sqrt{M-2N} = V\sqrt{U}$ dus $3N - M = U^2V$ en $M - 2N = UV^2$ voor een bepaalde waarde van U en V.

Optellen van beide uitdrukkingen levert:
$3N - M + M - 2N = U^2V + UV^2$
$N = U^2V + UV^2 = UV(U+V)$ en dus
$M = 2N + UV^2 = 2(U^2V + UV^2) + UV^2 = 2U^2V + 3UV^2 = UV(2U+3V)$

Maar we hebben ook: $f \cdot n = N$ en $f \cdot m = M$ dus

$n = \frac{N}{f} = \frac{UV(U+V)}{f}$ en $m = \frac{M}{f} = \frac{UV(2U+3V)}{f}$

Dat lukt als $f = k \cdot UV$, $U + V = k \cdot n$ en $2U + 3V = k \cdot m$

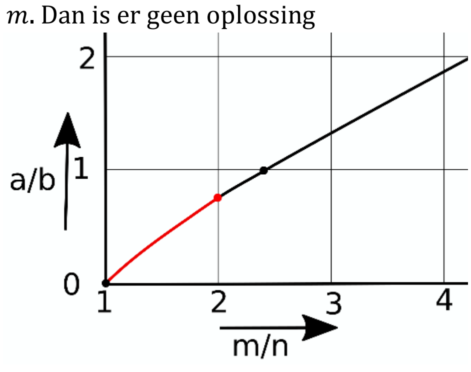
We lossen dan U en V op uit $U + V = k \cdot n$ en $2U + 3V = k \cdot m$ [1]) en kiezen de kleinste geheeltallige oplossing. Dat vullen we in in $f = k \cdot UV$ om f te bepalen.

Daarmee vinden we M en N en kunnen daarmee de driehoek vinden.
Omdat M en N f-maal zo groot worden worden de zijden van de driehoek f^2-maal zo groot en de middellijnen zijn van de vorm $s\sqrt{t}$, en $t\sqrt{s}$.

Dit geldt dus voor elke rechthoekige driehoek ABC die gegenereerd wordt door m en n en die beide soorten middellijnen heeft. QED.

---

[1]) Je kan je afvragen wat er gebeurt als V negatief wordt. Dat kan als $2n > m$. Dan is er geen oplossing (we gebruiken in de oplossing $\sqrt{V}$!) , maar dat is geen probleem.
Hiernaast een grafiekje waarin $a/b = \frac{2mn}{m^2-n^2}$ is uitgezet tegen m/n. Het rode deel van de grafiek geeft aan waar $2n > m$. De punten waarvoor beide middellijnen bestaan liggen rondom het zwarte punt, met $a/b \approx 1$, dus in de buurt daarvan zijn beide rechthoekszijden ongeveer even groot. Als $m = 2n$ (rode punt) krijgen we de 3-4-5 driehoek, waarin $s = 6, c = 5$ en $b = 4$, dus $c^2 - 2bc < 0$. In het rode deel van de grafiek liggen dus geen punten waarvoor beide soorten middellijnen bestaan, en we veronderstelden dat in onze driehoek ABC die middellijnen wel bestaan.



In ons voorbeeld met n = 5 en m = 12 wordt dat:
We lossen U en V op uit $U + V = k \cdot n$ en $2U + 3V = k \cdot m$ dus
$U + V = 5k$ en $2U + 3V = 12k$

Dan wordt dat: $V = 2k$ en $U = 3k$ met als kleinste oplossing $U = 3$ en $V = 2$.
Dan is $N = UV \cdot (U + V) = 6 \cdot 5 = 30$ en $M = UV(2U + 3V) = 6 \cdot 12 = 72$
Dus is de vermenigvuldigfactor $f = 6$.

Ter controle: Als we n=5 en m=12 met 6 vermenigvuldigen krijgen we $N = 30$ en
$M = 72$.
De middellijnen zijn volgens opgave 3b:

$PQ = m\sqrt{(m + n)(3n - m)}$ en $ST = (m + n)\sqrt{m(m - 2n)}$
In ons geval dus $PQ = 72\sqrt{(72 + 30)(90 - 72)}$ en $ST = (72 + 30)\sqrt{72(72 - 60)}$ dus
$PQ = 72\sqrt{102 \cdot 18}$ en $ST = 102\sqrt{72 \cdot 12}$ of
$PQ = 3 \cdot 72\sqrt{102 \cdot 2}$ en $ST = 2 \cdot 102\sqrt{72 \cdot 3}$ of
$PQ = 216\sqrt{204}$ en $ST = 204\sqrt{216}$

En dus van de vorm $s\sqrt{t}$, en $t\sqrt{s}$