Benadering van een natuurlijke logaritme – het algemene geval

Jack van der Elsen

Inleiding

We kijken nogmaals naar de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ voor $x \geq 1$.

Een primitieve van f is $F(x) = ln(x) + c$, waar $c \epsilon$ R.

Voor $b > a \geq 1$: $\int_a^b f(x)dx = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Nu gaan we kijken naar de grafiek van f op het interval $[a, b]$.

Om de oppervlakte onder de functie f op het interval $[a, b]$ te benaderen, kunnen we een onderschatting maken door een raaklijn l in $x = a$ aan f te snijden met een raaklijn m in $x = b$ aan f.

De vergelijking van de raaklijn l in $x = a$ is: $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

De vergelijking van de raaklijn m in $x = b$ is: $y = -\frac{1}{b^2}x + \frac{2}{b}$

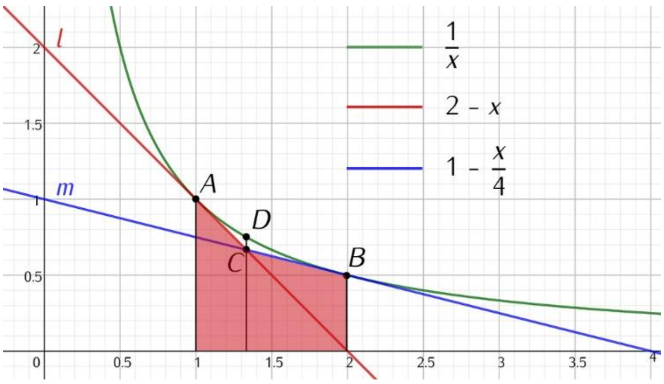
Het snijpunt van l en m is: $\left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{2}{a+b}\right)$ en noemen we C.

Als we nu de punten A, B en C verbinden en de oppervlakte daaronder uitrekenen komen we tot:

$$O_1 = \frac{\left(\frac{2ab}{a+b} - a\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a+b}\right)}{2} + \frac{\left(b - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right)\left(\frac{2}{a+b} + \frac{1}{b}\right)}{2}.$$

Vereenvoudiging leidt tot: $O_1 = 2(b - a)/(a + b)$.

We hebben de twee raaklijnen l en m gebruikt om de oppervlakte O_1 te berekenen. In onderstaande figuur is de oppervlakte O_1 rood ingekleurd voor $a = 1$ en $b = 2$:



Een derde raaklijn

Nu kunnen we de benadering O_1 van de oppervlakte onder f nog beter maken door gebruik te maken van meer dan twee raaklijnen.

Door de derde raaklijn door een punt $Z\ (z, \frac{1}{z})$ te laten gaan waarbij $z\ \in < a, b >$, komen we tot een oppervlakte van:

$O(z) = \frac{4(b-a)z}{(a+z)*(b+z)} = \frac{4b}{b+z} - \frac{4a}{a+z}$.

De afgeleide van hiervan is:

$O'(z) = \frac{4(b-a)(ab-z^2)}{(a+z)^2*(b+z)^2}$.

Als we dit nul stellen, krijgen we een z met een maximale oppervlakte:

$ab - z^2 = 0$

$z = \sqrt{}(ab)$

$O(\sqrt{ab}) = 4 - \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Nog meer raaklijnen

We hebben hierboven het segment $[a, b]$ opgedeeld in de twee segmenten $[a, \sqrt{ab}]$ en $[\sqrt{ab}, b]$.

We kunnen nog meer raaklijnen gaan gebruiken en het segment $[a, \sqrt{ab}]$ weer opdelen op dezelfde manier in twee segmenten $\left[a, \sqrt{a\sqrt{ab}}\right]$ en $\left[\sqrt{a\sqrt{ab}}, \sqrt{ab}\right]$ en het segment $[\sqrt{ab}, b]$ weer opdelen op dezelfde manier in twee segmenten $\left[\sqrt{ab}, \sqrt{b\sqrt{ab}}\right]$ en $\left[\sqrt{b\sqrt{ab}}, b\right]$.

Op het segment $[a, \sqrt{ab}]$ komen we dan tot een oppervlakte

$O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{\sqrt{ab}}}$.

Op het segment $[\sqrt{ab}, b]$ komen we dan tot een oppervlakte

$O\left(\sqrt{b\sqrt{ab}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{\sqrt{ab}}}{\sqrt{\sqrt{ab}}+\sqrt{b}}$.

Ga na dat $O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right) = O\left(\sqrt{b\sqrt{ab}}\right)$ en dat

$O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right) + O\left(\sqrt{b\sqrt{ab}}\right) = 8 - \frac{16\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

We kunnen nog een stap verder gaan met de raaklijnen en komen dan tot:

$$O\left(\sqrt{a\sqrt{(a\sqrt{ab})}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a\sqrt{ab}}}$$

$$O\left(\sqrt{a\sqrt{(b\sqrt{ab})}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{\sqrt{(a\sqrt{ab})}}}{\sqrt{(a\sqrt{ab})}+\sqrt{(\sqrt{ab})}}$$

$$O\left(\sqrt{b\sqrt{(a\sqrt{ab})}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{(\sqrt{ab})}}{\sqrt{(\sqrt{ab})}+\sqrt{\sqrt{(b\sqrt{ab})}}}$$

$$O\left(\sqrt{b\sqrt{(b\sqrt{ab})}}\right) = 4 - \frac{8\sqrt{(b\sqrt{ab})}}{\sqrt{(b\sqrt{ab})}+\sqrt{b}}.$$

Ga na dat $O\left(\sqrt{a\sqrt{(a\sqrt{ab})}}\right) = O\left(\sqrt{a\sqrt{(b\sqrt{ab})}}\right) = O\left(\sqrt{b\sqrt{(a\sqrt{ab})}}\right) = O\left(\sqrt{b\sqrt{(b\sqrt{ab})}}\right)$

en dat

$$O\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ab}}}\right) + O\left(\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{ab}}}\right) + O\left(\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{ab}}}\right) + O\left(\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{ab}}}\right) = 16 - \frac{32a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}}.$$

Opdelen van het interval in 2^n segmenten

Nog even terug naar een van de eerste formules:

$$O(\sqrt{ab}) = 4 - \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Omdat a en b willekeurig gekozen zijn (alleen $a < b$) , kunnen we a en b vervangen door andere waardes.

Bijvoorbeeld het segment $[a, \sqrt{ab}]$ met een oppervlakte $O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right)$ en het segment $[\sqrt{ab}, b]$ met een oppervlakte $O\left(\sqrt{b\sqrt{ab}}\right)$, waarbij dan $O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right) = O\left(\sqrt{b\sqrt{ab}}\right)$.

Omdat de oppervlaktes van deze twee segmenten gelijk zijn, zullen bij verder onderverdelingen de oppervlaktes van ieder van de segmenten ook aan elkaar gelijk zijn, zoals ook al gedemonstreerd in de vorige paragraaf.

Omdat de oppervlaktes van de segmenten steeds gelijk zijn, hoeven we alleen de oppervlakte van het meest linkse segment uit te rekenen en te vermenigvuldigen met het aantal segmenten.

Tot nu toe hebben we:

één segment met oppervlakte $O(\sqrt{ab})$

twee segmenten met ieder een oppervlakte $O\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right)$

vier segmenten met ieder een oppervlakte van $O\left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ab}}}\right)$.

Ga na dat $\sqrt{ab} = a\sqrt{\frac{b}{a}}$, $\sqrt{a\sqrt{ab}} = a\sqrt[4]{b/a}$, $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ab}}} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{8}}$, etc.

Iedere verfijning levert dus op: 2^{n-1} segmenten, ieder segment met een oppervlakte $O\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right)$

De totale oppervlakte van iedere benadering is dus:

$$2^{n-1} \cdot O\left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right) = 2^{n-1} \cdot \left(4 - \frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}}\right) = 2^{n-1} \cdot \left(4 - \frac{8}{1 + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}}\right)$$

$$= 2^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}}\right) = 2^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}\right) = (Ga\ na!) = 2^{n+1} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{(2^n)}} - a^{\frac{1}{(2^n)}}}{b^{\frac{1}{(2^n)}} + a^{\frac{1}{(2^n)}}}\right).$$

We kunnen dus stellen dat de n-de benadering een oppervlakte heeft van:

$$2^{n+1} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{(2^n)}} - a^{\frac{1}{(2^n)}}}{b^{\frac{1}{(2^n)}} + a^{\frac{1}{(2^n)}}}\right).$$

Dat zou betekenen dat:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{(2^n)}} - a^{\frac{1}{(2^n)}}}{b^{\frac{1}{(2^n)}} + a^{\frac{1}{(2^n)}}}\right) = \ln b - \ln a$$

Als we dan $a = 1$ kiezen, wordt het:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{(2^n)}} - 1}{b^{\frac{1}{(2^n)}} + 1}\right) = \ln b$$

Nemen we bijvoorbeeld $b = 5$ en $n = 9$:

$\ln 5 = 1{,}6094379124$

$2^{10} \cdot \frac{-1+5^{\frac{1}{(2^9)}}}{1+5^{\frac{1}{(2^9)}}} = 1{,}6094365872\,.$

En voor $n = 99$:

$2^{100} \cdot \frac{-1+5^{\frac{1}{(2^{99})}}}{1+5^{\frac{1}{(2^{99})}}} == 1{,}6094379124\,.$

Echter, als we goed kijken naar de afgeleide limiet

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot \left(\frac{b^{\frac{1}{(2^n)}}-a^{\frac{1}{(2^n)}}}{b^{\frac{1}{(2^n)}}+a^{\frac{1}{(2^n)}}}\right) = \ln b - \ln a$$

zouden we m kunnen substitueren voor 2^n. Dat zou dan de volgende limiet opleveren:

$$\lim_{m\to\infty} 2m \cdot \left(\frac{b^{1/m}-a^{1/m}}{b^{1/m}+a^{1/m}}\right) = \ln b - \ln a$$

Deze limiet is een stuk eenvoudiger dan de vorige.

Maar we kunnen nog een stapje verder gaan. We substitueren t voor $1/m$:

$$\lim_{t\downarrow 0} 2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{b^t-a^t}{b^t+a^t}\right) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{2}{b^t+a^t} \cdot \left(\frac{b^t-a^t}{t}\right) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{2}{b^t+a^t} \cdot \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{b^t-a^t}{t}\right) = 1 \cdot \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{b^t-a^t}{t}\right) = \ln b - \ln a.$$

Dus uiteindelijk hebben we een standaardlimiet: $\lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{b^t-a^t}{t}\right) = \ln b - \ln a.$

Ofwel voor $a = 1$: $\lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{b^t-1}{t}\right) = \ln b$

Opdelen van het interval in 4^n segmenten

Met behulp van twee raaklijnen aan f op het interval $< a, b >$ kunnen we het segment $[a, b]$ verdelen in vier segmenten. Het lukte mij echter niet om uit te rekenen hoe je die twee raaklijnen moet kiezen om tot een maximale oppervlakte onder de raaklijnen te komen.

Interessant is het om te weten of dit zou leiden tot een andere limiet voor $\ln b$ dan de bovenstaande limiet.

Opdelen van het interval in 2^n segmenten (reprise)

Nogmaals het geval dat we een derde raaklijn door een punt $Z\ (z, \frac{1}{z})$ te laten gaan waarbij $z \in\ < a, b >$. Dan komen we tot een oppervlakte van:

$O(z) = \frac{4(b-a)z}{(a+z)\cdot(b+z)} = \frac{4b}{b+z} - \frac{4a}{a+z}.$

Stel je kiest in het algemene geval $z = \frac{a+b}{2}$ en $z = \frac{2ab}{a+b}$. Toen we de oppervlaktes berekenden voor $a = n$ en $b = n+1$ kwamen op dezelfde oppervlakte van $\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+3}$. We kunnen even verifieren of dat ook geldt voor willekeurige a en b.

Welnu:

$O\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{4(b-a)(\frac{a+b}{2})}{(a+(a+b)/2)*(b+(a+b)/2)} = \frac{8(a+b)(b-a)}{(3a+b)(a+3b)}$

en

$O\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{8ab(b-a)}{\left(a+\frac{2ab}{a+b}\right)*\left(b+\frac{2ab}{a+b}\right)} = \frac{8ab(a+b)(b-a)}{a(3a+b)b(a+3b)} = \frac{8(a+b)(b-a)}{(3a+b)(a+3b)}.$

Dus: $O\left(\frac{a+b}{2}\right) = O\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$.

Wanneer we dus de methode van het kiezen van de punten via de herhaaldelijke snijpunten van de raaklijnen toepassen, levert dat dezelfde groottes van oppervlakten O als wanneer we de methode van ‘het kiezen van de punten door herhaaldelijk het/de segment(en) van $< a, b >$ te halveren’ toepassen voor willekeurige a, b, waarbij $1 \leq a < b$.

Opdelen van het interval in 2^n segmenten (reprise II)

Nogmaals het geval dat we een derde raaklijn door een punt $Z\ (z, \frac{1}{z})$ te laten gaan waarbij $z\ \in < a, b >$. Dan komen we tot een oppervlakte van:

$O(z) = \frac{4(b-a)z}{(a+z)*(b+z)} = \frac{4b}{b+z} - \frac{4a}{a+z}.$

Voor het geval $z_1 = \frac{2ab}{a+b}$ en $z_2 = \frac{a+b}{2}$ geldt dat $z_1 * z_2 = ab$ en $a < z_1 < \sqrt{ab} < z_2 < b$.

Lemma:

Stel α ϵ R met $a < \alpha < b$. Dan geldt:

(1) $a < \frac{ab}{\alpha} < b$
(2) $O(\alpha) = O\left(\frac{ab}{\alpha}\right)$.

Bewijs:

(1)

$a < \alpha < b \Leftrightarrow 1/b < 1/\alpha < 1/a \Leftrightarrow ab/b < ab/\alpha < ab/a \Leftrightarrow a < ab/\alpha < b$.

(2)

We hebben al

$$O(\alpha) = \frac{4(b-a)\alpha}{(a+\alpha)\cdot(b+\alpha)}$$

Dan geldt:

$$O\left(\frac{ab}{\alpha}\right) = \frac{4(b-a)\left(\frac{ab}{\alpha}\right)}{\left(a+\frac{ab}{\alpha}\right)\cdot\left(b+\frac{ab}{\alpha}\right)} = \frac{4(b-a)\left(\frac{ab}{\alpha}\right)}{a\left(1+\frac{b}{\alpha}\right)\cdot b\left(1+\frac{a}{\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4(b-a)}{\alpha}}{\frac{(\alpha+b)(\alpha+a)}{\alpha^2}} = \frac{4(b-a)\alpha}{(b+\alpha)\cdot(a+\alpha)} = O(\alpha).$$

Q.E.D.

Voor het geval $a = n,\ b = n+1$ en $\alpha = \mathrm{n} + 1/2$ geldt:

$ab/\alpha = n(n+1)/(n + 1/2) = 2n(n+1)/(2n + 1)$.

Dit laatste getal is inderdaad precies de *x*-coordinaat die we in het begin van het artikel in Euclides berekend hebben.

Jack van der Elsen

Venray, 28 - 12 - 2021.