

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Toepassing van variatietheorie in 2 vmbo

Staat de druk van goede cijfers behalen de
beheersing van wiskunde in de weg?

Examenwoorden wiskunde B onder de loep

Formules, vergelijkingen en identiteiten:
gelijk of niet?



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.5

JAARGANG 97 - MAART 2022

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR5



IN DIT NUMMER

HET FIZIER GERICHT OP...
TOEPASSING VAN VARIATIE THEORIE
IN HET WISKUNDEONDERWIJS

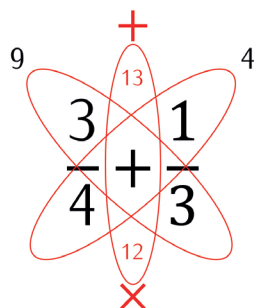
Dédé de Haan, Hella de Vries

4

WAT BEDOELEN ZE TOCH
MET... ANSWER GETTING?

Irene van Stiphout

10



EXAMENWOORDEN WISKUNDE B
ONDER DE LOEP

Joke Daemen, Ivo Claus

14

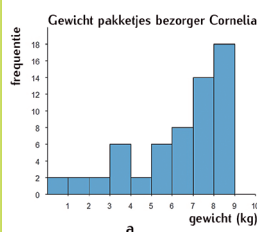
WITJE: KRASSEN IN DECEMBER

19

KLEINTJE DIDACTIEK
INTERPRETEREN VAN
HISTOGRAMMEN
EN STIPPENGRAFIEKEN

Lonneke Boels

20



VERHALEN UIT HET VMBO
BRYAN

Melanie Steentjes

21

BOEKBESPREKING

ZEBRA 60: VERDWIJNPUNT OPGELOST

Jacques Jansen

22

ABSOLUUT VAN WAARDE

Martin Kindt

24

FORMULES, VERGELIJKINGEN EN
IDENTITEITEN: GELIJK OF NIET?

Sjef van Dongen

29

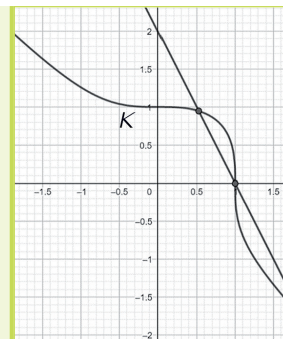
WIS EN WAARACHTIG

32

VAN TAXICAB-GETALLEN EN
ALGEBRAÏSCHE RAAKLIJNEN

Rogier Bos

34



REGELMAAT IN
EEN ONREGELMATIGE VIERHOEK

Herman Zunneberg

37

VASTGEROEST

Ab van der Roest

40

Kunstwerk op de voorkant: Towering heights, van Peter Snijder. Towering heights zijn groene gotische torens. Groot, groen en gotisch, symboliseren ze de hang naar vergroening en visualiseren ze ambitie. Te zien tijdens I light U expo in Utrecht, januari 2022.

Foto: Liesbeth Coffeng

BENADERING
VAN EEN NATUURLIJKE LOGARITME
Jack van der Elsen

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

SERVICEPAGINA

42

45

46

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Ondanks het WiTje over de december-krasloten en de enigszins winterse uitstraling van de voorkant van deze *Euclides* gaat de lente

volgende week beginnen en ontwakken de examenriebels bij velen. Een mooi moment om helder voor ogen te krijgen wat er nu bij wiskunde B bedoeld wordt met *bereken exact*, *bereken algebraïsch*, *bereken of bewijs* en wanneer je nu wel en wanneer niet de GR kunt inzetten. Joke Daemen (CvTE) en Ivo Claus (Cito) hebben dit uitvoerig op een rijtje gezet in het artikel 'Examenwoorden wiskunde B onder de loep'. In het verlengde hiervan is het ook interessant om te kijken naar de fundamentele verschillen tussen formules, vergelijkingen en identiteiten. Sjef van Dongen laat hier zijn licht op schijnen in het artikel 'Formules, vergelijkingen en identiteiten, gelijk of niet?' En of je de 'vlinder' mag gebruiken op de examens? In het artikel 'Wat bedoelen ze toch met... answer getting' beschrijft Irene van Stiphout de vlindermethode om ongelijknamige breuken bij elkaar op te tellen. Ik kende deze methode niet en ik kon me niet voorstellen dat die érgens ook echt gebruikt wordt. Maar googelen op 'rekenen vlinder breuken' leverde onthutsende resultaten op. Toen ook meteen maar even gezocht op 'rekenen natuurkunde driehoek' en ja hoor: de driehoekmethode om formules om te bouwen blijkt springlevend te zijn. Toch iets om je zorgen over te maken, de didactisch niet altijd even verantwoorde (eufemisme...) trucs die onze leerlingen natuurlijk ook tegenkomen. Dit overpeinzend zag ik in de tuin een gaai én een winterkoninkje. En nog steeds in de googlemodus: de gaai staat op 14 en het winterkoninkje op 21 in de ranglijst van de getelde vogels van de Nationale Tuinvogeltelling van eind januari. En mocht je nog data nodig hebben voor statistiekprojecten: www.vogelbescherming.nl/tuinvogeltelling. Wie verzint er een goed project en schrijft daar een mooi artikel over?

Tom Goris



Het Flzier gericht op...

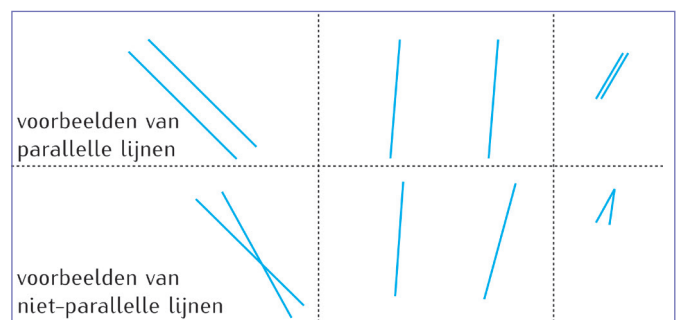
Toepassing van variatietheorie in het wiskundeonderwijs

In dit artikel legt Dédé de Haan uit hoe het toepassen van variatietheorie kan helpen bij het vinden van de hoogte in een driehoek, om daarmee de oppervlakte te berekenen. Hella de Vries ontwikkelde een onderzoeksles voor 2 vmbo met een aantal medestudenten (NHLStenden Hogeschool) en voerde de les uit.

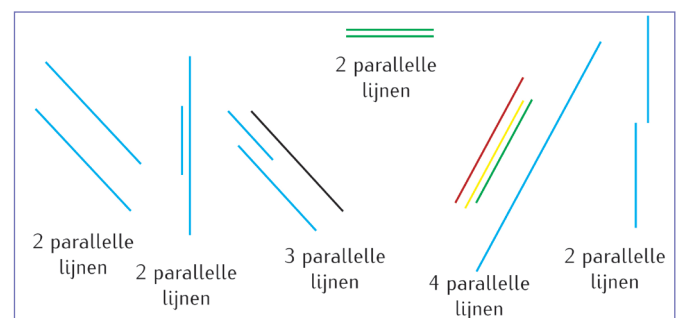
Leren door variatie

Variatietheorie is in Europa geïntroduceerd door Ferenc Marton^{[1], [2]}, een Zweedse hoogleraar onderwijskunde. Deze theorie gaat ervan uit dat het leren van iets gaat over het zien of ervaren van kenmerkende aspecten ervan. Om deze te kunnen onderscheiden, en om erop te kunnen focussen, moet je variatie ervaren, zodat je weet wat het wel is en wat het niet is (je weet alleen wat 'drie' is als je ook weet wat 'niet-drie' is). Een voorbeeld hiervan is in GeoGebra een aantal lijnen tekenen van de functie $y = ax + b$, bijvoorbeeld: $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$, $y = -x$, etc. met de bedoeling leerlingen inzicht te laten krijgen in wat de waarde van a te maken heeft met hoe de grafiek eruitziet. Het doel: zelf een lijn met willekeurige waarde van a kunnen tekenen, en kunnen formuleren hoe een lijn eruitziet met een bepaalde waarde van a , inclusief de lijn waarbij $a = 0$. Vervolgens lijnen met een waarde voor b toevoegen, en nu eerst de waarde van a vasthouden en variëren met b , zodat leerlingen een waarde van b verbinden met wat dat betekent voor de grafiek. Uiteindelijk zowel a als b variëren, en zelf laten tekenen.^[3] Dit is allemaal geen nieuwe didactiek, ook niet voor het Nederlands wiskundeonderwijs. Wij noemen dit 'het leren door voorbeelden (en non-voorbeelden)'. Wat er wel anders aan is, is de systematische nadruk op de essentiële kenmerken van het wiskundig concept, waardoor je van tevoren heel goed nadenkt over de voorbeelden en non-voorbeelden die je geeft, en daarna over de standaard- en niet-standaardvoorbeelden die je geeft, waarbij je de niet-essentiële kenmerken varieert, zodat de leerling met een 'flexibele' blik leert kijken. Zo is $3x + 4 = 2$ een eerstegraadsvergelijking, maar $4 = 2 - 3x$ is dezelfde eerstegraadsvergelijking, en $0 = z + 1$ is óók een eerstegraadsvergelijking. De essentiële kenmerken zijn immers: het moet een relatie zijn met een $=$ - teken tussen twee expressies en een

onbekende tot de eerste macht. Aan welke kant van het $=$ - teken de onbekende staat, of de onbekende een x is of een andere variabele, dat is niet-essentieel, dus daar varieer je dan in. Of over de evenwijdigheid van lijnen, zoals te zien is in figuur 1 en 2.



figuur 1 Voorbeelden en non-voorbeelden van parallelle lijnen

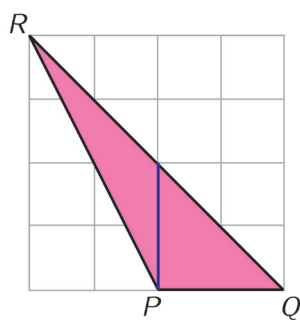


figuur 2 Standaardvoorbeelden en niet-standaardvoorbeelden van parallelle lijnen, waarbij de niet-essentiële kenmerken (zoals aantal lijnen, kleur, lengte, richting, grootte van de afstand) gevarieerd worden, zodat duidelijk wordt dat het essentiële kenmerk invariant is

Variatietheorie toegepast in 2 vmbo

Bij het bepalen van de oppervlakte van een driehoek hebben we een hoogte en een bijbehorende zijde nodig. Een groep van drie studenten van de lerarenopleiding wiskunde aan NHLStenden Hogeschool onderzocht de

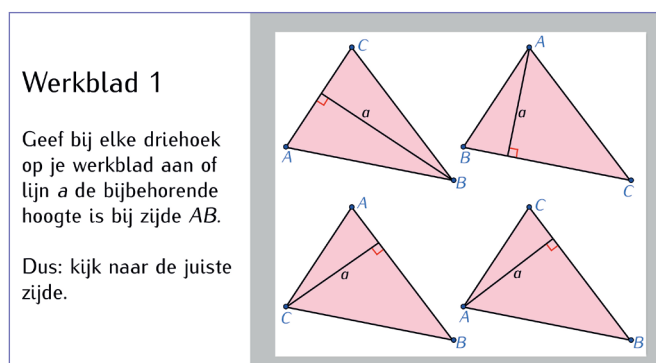
kennis van klas 2 vmbo kader/tl op hun scholen op dit gebied. Ze voerden een Learning Study uit: een Lesson Study waarbij gebruik gemaakt wordt van variatietheorie. Uit eigen ervaring, die van collega's en vanuit de literatuur wisten de leraren in opleiding inmiddels dat niet iedere leerling gemakkelijk de hoogte van een driehoek bij een bijbehorende zijde kan bepalen. Dit werd bevestigd door hun voorkennisonderzoek. Leerlingen hadden geleerd dat de hoogte van een driehoek bepaald werd door een lijn die vanuit een hoekpunt van de driehoek getrokken werd, en die loodrecht op de basis stond.



figuur 3

In de roze driehoek in figuur 3 is door een leerling een blauwe lijn getekend. Deze blauwe lijn staat loodrecht op zijde PQ , de basis. De blauwe lijn is tevens vanuit een hoekpunt van de driehoek getekend. De leerling heeft het idee dat hij de hoogte van de driehoek behorend bij basis PQ getekend heeft. Wij zien wel dat de blauwe lijn niet de hoogte van de driehoek die hoort bij basis PQ aangeeft, maar blijkbaar heeft de leerling de essentiële kenmerken van het bepalen van de hoogte bij een bepaalde basis nog niet helemaal in de vingers.

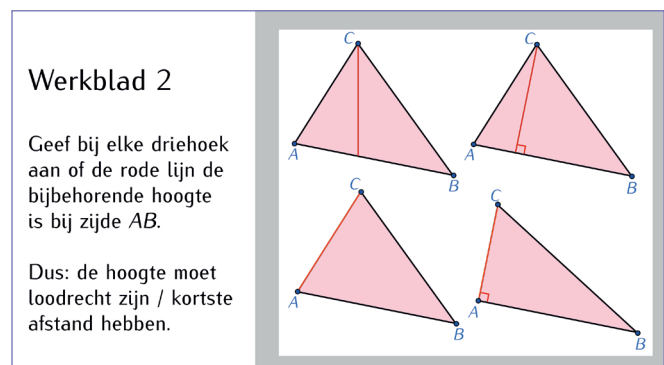
Variatietheorie is door de studenten ingezet om de verschillende essentiële kenmerken door leerlingen te laten ontdekken. Het eerste werkblad dat de leraren in opleiding voor hun onderzoeksles maakten was het werkblad in figuur 4.



figuur 4

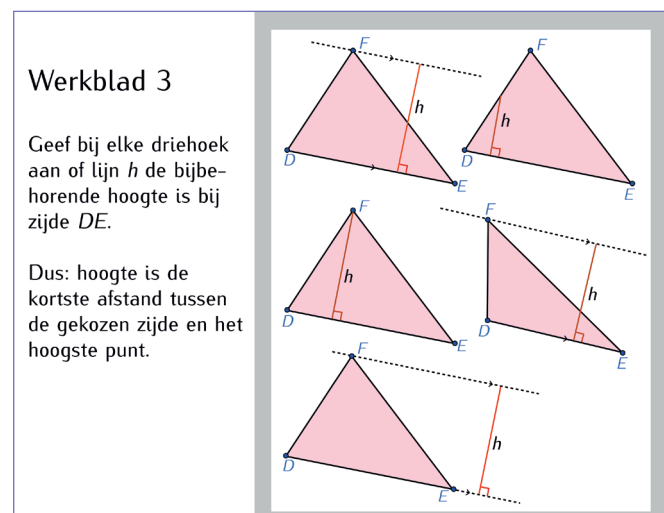
De vraag aan de leerlingen in klas 2 was om aan te geven of de getekende lijn a de bijbehorende hoogte is van zijde AB . Zoals te zien is in figuur 2 is driehoek ABC invariant, en hoogte a wordt ook steeds aangegeven. De variatie zit in de plek van zijde AB , en hoogte a staat niet steeds op AB . Het doel was om goed te controleren of hoogte en zijde bij elkaar horen.

Leerlingen mochten dit in tweetallen bespreken, daarna werd er nabesproken en werd de conclusie getrokken: 'elke zijde heeft een eigen bijbehorende hoogte'.



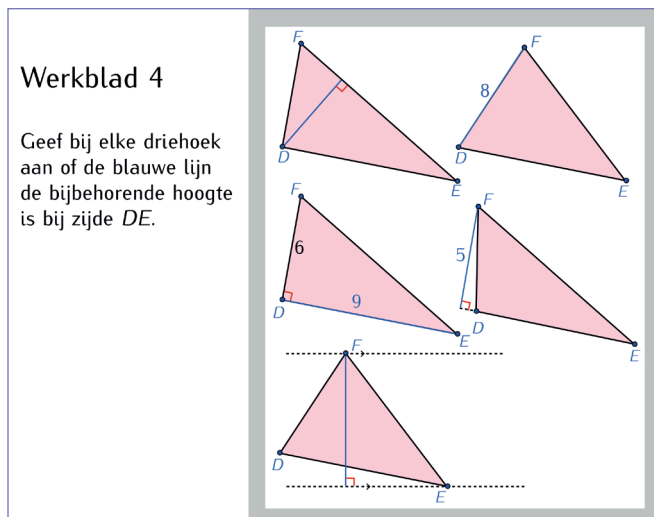
figuur 5

Het tweede werkblad, zie figuur 5, bevatte de vraag of de rode lijn de bijbehorende hoogte is van zijde AB . Op dit werkblad is de driehoek ABC (nagenoeg) invariant, en zitten A , B en C steeds op dezelfde plek. Steeds is er een lijn getekend van hoekpunt C naar basis AB . De variatie zit hier in de hoek die de lijn uit C maakt met AB . Het doel was om te herkennen dat de hoogte loodrecht staat op de bijbehorende zijde. Dus niet alleen heeft elke zijde een bijbehorende hoogte; deze hoogte staat loodrecht op de bijbehorende zijde.



figuur 6

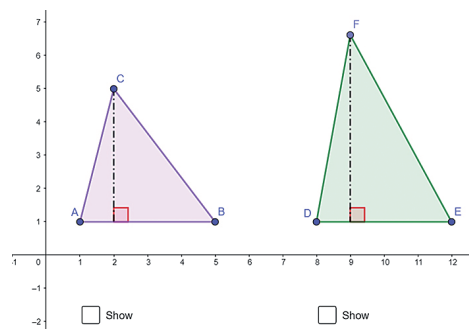
Het derde werkblad ging (weer) over het bepalen of een gegeven lijn de bijbehorende hoogte is van een zijde, in dit geval DE , die steeds op dezelfde plek zat, zie figuur 6. In dit geval is invariant dat er een willekeurige driehoek met vaste basis en loodrecht daarop een lijnstuk getekend is; de variatie zit in de hoogte en de locatie van de loodrecht getekende lijn. Oftewel: niet altijd geeft de getekende lijn de hoogte aan, en de loodrecht getekende lijn komt ook niet altijd uit een hoekpunt. Het doel was dat leerlingen herkennen dat de hoogte de kortste afstand is tussen de basis en het hoogste tegenoverliggende punt – maar tevens dat het niet noodzakelijk is dat deze afstand altijd weergegeven wordt door de hoogtelijn vanuit dat punt!



figuur 7

In het vierde werkblad, zie figuur 7, worden verschillende aspecten gecombineerd. Invariant is een driehoek met een blauw lijnstuk vanuit een hoekpunt; variatie zit erin dat het blauwe lijnstuk niet altijd de hoogte is behorend bij de gegeven basis DE . Het doel was dat leerlingen herkennen of een bepaald lijnstuk in de driehoek de hoogte ervan aangeeft bij een gegeven basis. In tabel 1 staan de verschillende kenmerken nog een keer op een rijtje.

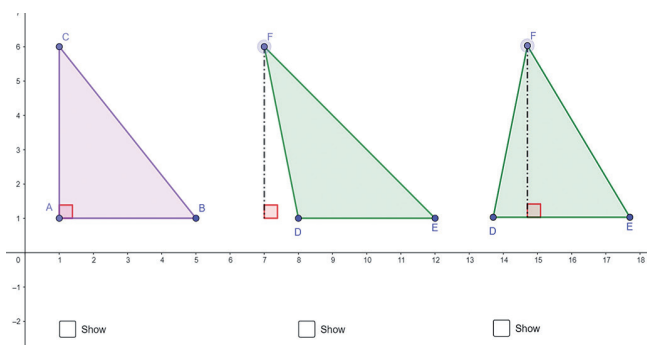
Hierna werd GeoGebra ingezet om dynamisch te laten zien wat er gebeurt met de oppervlakte als je de hoogte varieert en de rest gelijk houdt ^[4], zie ook figuur 8, en wat er gebeurt met de driehoek als je de hoogte en de basis gelijk houdt maar de plek van het hoogste hoekpunt varieert ^[5], zie figuur 9. De toegevoegde waarde van GeoGebra is hier duidelijk het dynamisch kunnen laten zien van het effect van de variatie op verder invariant gehouden kenmerken.



figuur 8

Invariant	Variatie	Kenmerkend aspect	Leerdoel
Driehoek ABC met een gegeven hoogtelijn a	Zijde AB zit niet steeds op dezelfde plek; hoogtelijn a staat niet steeds op AB	Hoort de gegeven hoogte a bij de gevraagde zijde AB ?	Het kunnen herkennen of een hoogte bij een zijde hoort
Driehoek met zijde AB als basis, waarop een lijnstuk is getekend van AB naar hoekpunt C	De hoek die het getekende lijnstuk maakt met AB	Staat het getekende lijnstuk loodrecht op AB ?	Herkennen dat de hoogte loodrecht staat op de bijbehorende zijde
Willekeurige driehoek met vaste basis en loodrecht daarop een lijnstuk	De hoogte van het loodrecht getekende lijnstuk	Is het loodrechte lijnstuk op de basis gelijk aan de hoogte van de driehoek?	Herkennen hoe je kunt aangeven wat de hoogte van de driehoek is
Willekeurige driehoek met vaste basis en een blauw lijnstuk vanuit een hoekpunt	Het blauwe lijnstuk is niet altijd de hoogte behorend bij de gegeven basis	Alle voorgaande aspecten samen	Herkennen of een bepaald lijnstuk in de driehoek de hoogte ervan aangeeft bij een gegeven basis

tabel 1



figuur 9

Resultaten en reflectie

We laten hierbij de leraren in opleiding aan het woord:

'Alledrie hebben wij ervaren dat onze eigen kennis van "de hoogte van een driehoek bepalen" werd verdiept en verbreed door de eerste, onderzoekende fase van de Learning Study: de pre-tests, het zelf vaststellen van de essentiële kenmerken van het onderwerp, en het ontwikkelen van de werkbladen. Veel termen en definities, nodig bij het aanleren van het concept "hoogte van een driehoek", bleken voor discussie vatbaar. Zo wordt er in verschillende methodes gesproken over "basis en hoogte", maar ook over "zijde en bijbehorende hoogte". Je kunt je zelfs gaan afvragen waarom bij een rechthoek altijd gesproken wordt van lengte en breedte: waarom hier niet van zijde en (bijbehorende) hoogte? Net als in een parallellogram? En als je het hebt over de oppervlakte van de driehoek: waarom omlijsten met een rechthoek? Waarom niet met een parallellogram? Doordat wij het betreffende onderwerp zelf beter doorgrondten en de verschillende kenmerkende aspecten stap voor stap aanboden aan de hand van de werkbladen konden we de ruimte nemen om de leerlingen vragen te stellen en ze met elkaar in discussie te laten gaan zonder dat we zelf de draad kwijtraakten van ons verhaal, omdat we het onderwerp zelf van alle kanten konden "vastpakken", wat er ook voorbijkwam. Hierdoor werd het denken van de leerlingen en daarmee de grote diversiteit aan voorkennis verrassend goed zichtbaar en werd het mogelijk om op vele verschillende misconcepties in te gaan. Wanneer de leerlingen naar aanleiding van de werkbladen aan elkaar gingen uitleggen (waar nodig aangevuld door de docent) werd erg duidelijk dat ze betrokken waren, van zich durfden te laten horen en dat er hoorbaar kwartjes vielen. De leerlingen gaven zelf achteraf ook aan de onderlinge discussies te waarderen!'

"Leerlingen gaven achteraf aan de onderlinge discussies te waarderen!"

'Het geven van meer inzicht aan leerlingen wordt in de opleiding erg gepromoot. Wat wij als prettig hebben ervaren is dat de variatietheorie concrete handvatten geeft om dit inzicht betreffende een onderwerp stap voor stap met leerlingen te kunnen opbouwen tot het plaatje compleet is door de essenties van een onderwerp duidelijk te maken en daarna te combineren.

Het inzicht dat bij ons als docenten ontstond is dat het zo kort mogelijk uitleggen van de regels omtrent een wiskundig concept vaak zijn doel voorbij schiet, omdat leerlingen niet aanhaken vanuit hun eigen kennis en een trucje aanleren dat bij een iets afwijkende opgave niet meer op dezelfde manier toe te passen is. Door de leerlingen te stimuleren om met elkaar na te denken over de essentiële kenmerken van het concept zagen we dat leerlingen daarna ook bij een denkvraag beter zelf nadachten.

Daarnaast werd voor ons de toegevoegde waarde van het gebruik van ICT zeer duidelijk. Zo gebruikten wij GeoGebra als middel om bepaalde, niet-essentiële kenmerken van de hoogte van een driehoek zichtbaar te variëren, zoals het verplaatsen van de lijn die de hoogte aangeeft van links naar rechts.'

Ter afsluiting

De komende jaren wordt in de lerarenopleiding wiskunde Learning Study door groepjes studenten toegepast in hun afsluitende praktijkonderzoek op school. Hierbij wordt de manier waarop de Learning Study wordt vormgegeven steeds aangepast aan de behoeften van de studenten. Het doel is dat de leraren in opleiding hierdoor diepere vak- en vakdidactische kennis opdoen, en daarmee betere leraren worden.

>

Computational thinking:

link tussen wiskunde en informatica



Laat je leerlingen zelf ervaren hoe Python en wiskunde samenwerken, met computational thinking als de verbindende schakel tussen de twee. Computational thinking – net als physical computing – stimuleren het probleemoplossend vermogen en het algoritmisch denken bij je leerlingen.

Inspiratie opdoen om aan de slag te gaan met computational thinking in je wiskundeles? We bieden je kant-en-klare lesactiviteiten, maar ook instructievideo's en leerzame webinars en trainingen.



Python op de handheld

Leerlingen programmeren zelf in Python met de TI-Nspire™ CX II-T-handhelds of -software en de TI-84 CE-T Plus Python Edition. Bekijk lesactiviteiten op:

» www.wil-depython.nl



Webinars leraren

De webinars van het T³-lerarennetwerk draaien om logisch redeneren, algoritmisch structureren en programmeren in de klas. Je schrijft je in voor nieuwe en kijkt opgenomen webinars terug op:

» resources.t3nederland.nl/webinars



Python-module Turtle

Laat je leerlingen zich creatief uitleven door bewegende illustraties te maken met Turtle Graphic. Deze Python-module is ideaal voor leerlingen die nog geen ervaring hebben met programmeren. En is beschikbaar voor de TI-84 Plus CE-T Python Edition- en TI-Nspire™ CX II-T-handhelds. Download de Turtle-module op onze website:

» education.ti.com/nl/NSTurtle

» education.ti.com/nl/84Turtle

Vanaf nu alles over computational thinking en physical computing overzichtelijk op één pagina.

Bezoek hem direct!



BBC micro:bit

Koppel de BBC micro:bit aan een TI-Nspire™ CX II-T-handheld en stuur het microcomputertje aan met Python-scripts. Een beknopte lesactiviteit met de BBC micro:bit vind je hier:



TEXAS INSTRUMENTS

Noten

- [1] Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- [2] Marton, F. (2015). *Necessary Conditions of Learning*. Taylor & Francis: New York.
- [3] Zie: <https://www.geogebra.org/m/ffS52xn3>
- [4] Zie: <https://www.geogebra.org/classic/qtkcs6xs>
- [5] <https://www.geogebra.org/classic/wkftfprc>

Over de auteurs

Dédé de Haan is lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool. Sinds januari 2021 is ze gestart met een promotieonderzoek bij het Freudenthal Instituut. In dit onderzoek wil ze nagaan hoe de implementatie van Learning Study (Lesson Study met gebruik van variatietheorie) kan leiden tot betere leraren wiskunde. E-mailadres: d.dehaan@uu.nl

Hella de Vries, Evelien van Aarem en Jildert Jellesma hebben als student in de lerarenopleiding wiskunde in het voorjaar van 2021 een Learning Study uitgevoerd o.l.v. Dédé de Haan.

Lerarenopleidingen |



Kennis in het kwadraat

Soms is het tijd voor iets nieuws. Een masteropleiding Leraar Wiskunde volgen aan de Hogeschool van Amsterdam biedt je de uitgelezen kans om meer uit jezelf en je carrière te halen. Je ontwikkelt je tot eerstegraadsleraar wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd door hooggekwalificeerde docenten die de praktijk kennen. Je vakkennis komt op academisch niveau en wordt breder, dieper en up-to-date. We bieden een flexibel deeltijdprogramma en wat je leert kun je direct in je werk toepassen.

Wil je meer weten?

Meld je direct aan voor onze online informatiebijeenkomst



hva.nl/mastereducation

Creating Tomorrow

Wat bedoelen ze toch met ... answer getting?

In elke aflevering van de rubriek Wat bedoelen ze toch met...? staat een spraakmakend begrip uit de wiskundendidactiek of de onderwijskunde centraal, waarover veel is geschreven, maar waarvan toepassing in de wiskundeles niet altijd meteen duidelijk is. In deze aflevering schrijft Irene van Stiphout over het begrip *answer getting*.

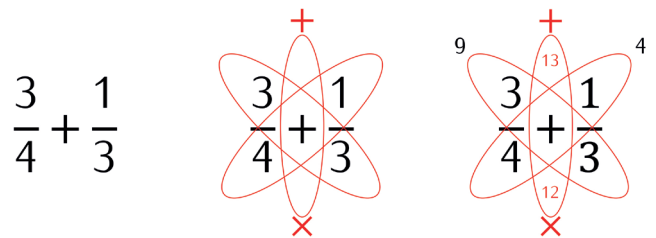
Inleiding

Het halen van hoge cijfers is fijn voor docenten, leerlingen, schoolleiding en ouders. Maar er zit ook een schaduwzijde aan: door die druk is het verleidelijk om eenzijdig te focussen op het leren vinden van antwoorden. De beheersing van wiskunde wordt hier niet altijd mee versterkt.

Voorbeeld

Op sommige rekensites wordt een vlinder gebruikt om uit te leggen hoe ongelijknamige breuken kunnen worden opgeteld, zie figuur 1. Om de breuken $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{3}$ op te tellen, worden diagonaal en verticaal door het '+'-teken heen ovalen getekend. Deze stellen respectievelijk de vleugels en het lijf van de vlinder voor. Vervolgens wordt de antenne op het hoofd van de vlinder gezet in de vorm van het '+ - teken' en het achterlijf wordt aangegeven met het 'x - teken'.

Daarna kan het rekenen beginnen: de getallen in de vleugelovalen worden met elkaar vermenigvuldigd. Dat geeft de 9 en de 4 die linksboven en rechtsboven staan weergegeven. Deze twee tussenuitkomsten worden opgeteld zoals is weergegeven in het '+ - teken' uit de antenne. De uitkomst wordt net onder de antenne ingevuld. Daarna moeten de noemers onderin worden vermenigvuldigd. Het 'x - teken' helpt hieraan herinneren. De uitkomst van deze vermenigvuldiging wordt onderin het lijf van de vlinder geschreven. Vervolgens kan de uitkomst worden afgelezen uit het lijfje van de vlinder: $\frac{13}{12}$. Het tekenen van de vlinder helpt om te onthouden wat er gedaan moet worden. Wat overblijft zijn relatief eenvoudige deelberekeningen. De vraag is echter wat leerlingen van deze aanpak leren. Want hoe moet dat nu bij $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$? Daro^[1] spreekt in dit verband van *answer getting*: leerlingen leren geen wiskunde, maar alleen het vinden van het antwoord.



figuur 1 De vlinder als manier om ongelijknamige breuken op te tellen

Answer getting

Op zoek naar een nieuw curriculum bestudeerde de Amerikaanse wetenschapper Phil Daro honderden uren videomateriaal van wiskundelessen in Japan en in de Verenigde Staten. Japan behoort in internationaal vergelijkende studies als TIMSS^[2] tot de top 5 van best presterende landen terwijl de Verenigde Staten een stuk lager scoren. Daro zag een verschil in hoe leraren over het algemeen tegen opgaven aankijken. Leraren in de VS zien een opgave en vragen zich af:

'How can I teach my kids to get the answer to this problem?'

In Japan zien leraren een opgave en vragen zich af:

'What is the mathematics they are supposed to learn, working on this problem?'

Dit verschil in aanpak lijkt misschien niet groot, maar is het wel. Daarnaast zag Daro een verschil in de manier waarop met fouten wordt omgegaan. In klassen in de VS wordt een fout antwoord van een leerling in het algemeen gezien als het probleem van die specifieke leerling. Bij die leerling zit het kennelijk nog niet goed in het hoofd, die leerling begrijpt iets misschien (nog) niet. In Japan, zag Daro, wordt een fout van een leerling niet zozeer gekoppeld aan die ene leerling, maar als een mogelijke

moeilijkheid in de leerstof. Daro spreekt over de kanarie in de mijn, een soort alarm omdat die foute aanpak of redenering kennelijk voor de hand ligt. Dat betekent dat meer leerlingen die fout zouden kunnen maken. Op die manier biedt een onjuiste aanpak van een leerling de mogelijkheid om met de klas te verkennen waarom die aanpak niet werkt. Wat is in die aanpak misgegaan en wat kan daarvan worden geleerd? Daro^[1] deed zijn onderzoek in de VS. De vraag is in hoeverre answer getting speelt in het Nederlandse onderwijs.

Rond 2010 zijn verschillende Nederlandse promotiestudies gedaan naar de prestaties van leerlingen in het basis-onderwijs^[3], het voortgezet onderwijs^{[4], [5]} en de overgang daartussen.^[6] Hoewel deze studies los van elkaar zijn uitgevoerd, geven ze het beeld dat leerlingen niet tot het gewenste niveau van beheersing en van begrijpen komen en daar ook last van hebben. Zo bleek onder meer dat leerlingen:

- standaardopgaven kunnen maken, maar vastlopen als er net iets anders wordt gevraagd
- dezelfde berekening bij verschillende vakken niet herkennen als dezelfde
- blijven hangen in eenvoudige, maar succesvolle strategieën die beperkend kunnen zijn in het verder generaliseren en abstraheren.

In een verdere analyse van deze studies introduceerden Gravemeijer et al.^[7] het begrip *task propensity* dat zij definiëren als ‘...the tendency to think of instruction in terms of individual tasks that have to be mastered by students.’ Zij betogen dat de manier van denken over wiskundeonderwijs als losse te beheersen taken ertoe leidt dat het onderwijs zich (onbewust) gaat richten op het aanleren van procedures om tot het juiste antwoord te komen. Het snel vinden van juiste antwoorden wordt daarbij gezien als doel van het wiskundeonderwijs, in plaats van dat het vinden van oplossingsmethoden een tussenopbrengst is op de weg naar wiskundig begrip. Dit verleidt docenten en methodemakers tot het inzetten op aanpakken die snelle antwoorden genereren in plaats van te focussen op en te investeren in de onderliggende wiskunde. Hierbij past de nuancering dat het vinden van antwoorden zeker relevant is. Het punt is dat dit niet het enige doel moet zijn.

Wat werkt answer getting in de hand?

Er zijn meerdere factoren die answer getting in de hand werken. Van Stiphout & Bruin-Muurling^[8] beschrijven er drie. Als eerste noemen ze het beeld dat docenten en leerlingen hebben van wat wiskunde is. Wiskunde kan worden gezien als een vak waarin het draait om sommen

maken en om het leren volgen van stappenplannen om het goede antwoord te vinden. In een bredere visie wordt wiskunde ook gezien als een manier van denken waarin het naast sommen kunnen maken ook gaat om het stellen van de juiste vragen, om modelleren, en om het flexibele gebruik van wiskundige manieren van denken en wiskundige technieken.

“Een onjuiste aanpak van een leerling biedt de mogelijkheid om met de klas te verkennen waarom die aanpak niet werkt.”

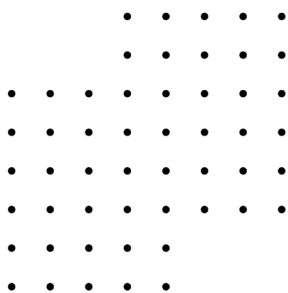
Met het oog op de toekomst, lijkt die bredere blik meer perspectief te bieden. Wereldwijd zien we een trend waarin juist de procedurele vaardigheden minder handmatig worden uitgevoerd, terwijl conceptuele vaardigheden steeds belangrijker worden om met de beschikbare technologie om te gaan.^[9] De introductie van wiskundige denkactiviteiten in de examenprogramma's havo en vwo en het pleidooi voor wiskundige denk- en werkwijzen van curriculum.nu zijn voorbeelden hiervan in Nederland. Hierin worden wiskundige domeinen als verbanden, statistiek en meetkunde gekoppeld aan overstijgende vaardigheden als probleem oplossen, modelleren en logisch redeneren.

Als tweede factor noemen ze de druk die vanuit de maatschappij op leerlingen, docenten en ouders wordt gelegd om te zorgen voor hoge cijfers. De belangen zijn groot: ouders willen een zo hoog mogelijk diploma voor hun kind, het functioneren van docenten wordt gekoppeld aan de cijfers van hun leerlingen en leerlingen willen hoog scoren om toegelaten te worden tot vervolgstudies. Dit versterkt de neiging te focussen op het snel aanleren van technieken om tot goede antwoorden te komen. Als derde factor noemen ze de behoefte van het onderwijs om leerlingen zo efficiënt mogelijk door het onderwijs heen te loodsen. Eventuele hobbels die leerlingen tegenkomen in het leerproces worden gezien als een verstoring van het leerproces die voorkomen moeten worden.^[10] Het leren moet zo comfortabel en prettig mogelijk verlopen. Een uiting daarvan is bijvoorbeeld het opdelen van een opgave door extra deelvragen toe te voegen. Het gevolg is dat inmiddels de meeste hobbels in het curriculum zijn glad-gestreeken, waardoor er eigenlijk nauwelijks meer sprake kan zijn van leren.^[11] Leerlingen zijn ongeduldige >

probleemoplossers geworden die verwachten dat de oplossing binnen een paar minuten te vinden is.^[12] Door vraagstukken op te splitsen in kleine deelproblemen (a , b , c etc.) is per deelprobleem weinig denkwerk meer nodig. Bovendien kan dit ervoor zorgen dat de kern van de opgave als geheel uit het zicht verdwijnt.^[8]

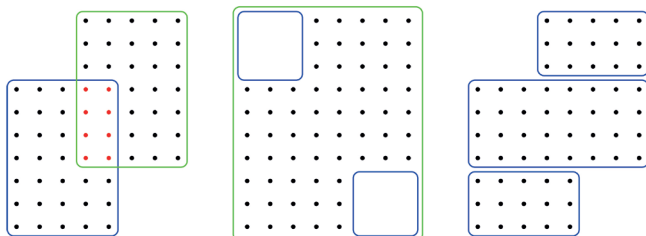
Wat te doen in de klas?

Aandacht voor standaardproblemen, oefenen en goede antwoorden horen ook bij het onderwijs. Hoe zorg je dan dat je wegblijft bij een eenzijdige focus daarop, weg bij het answer getting? Het helpt hierbij om bewust aandacht en tijd te nemen en te beseffen dat aandacht voor conceptuele kennis en functioneel gebruik van wiskunde, meer tijd mag lijken te kosten, maar dat het ook veel oplevert. Daarvoor zijn vele mogelijkheden. Een eenvoudige stap kan zijn om in plaats van een stappenplan aan te bieden, leerlingen dit zelf te laten maken.^[13]



figuur 2

Een andere manier is de focus verleggen van het vinden van het antwoord naar welke aanpak je kiest. Een voorbeeld van zo'n opgave staat in figuur 2.^[14] De vraag is niet hoeveel stippen er staan, maar hoe je het aantal stippen kunt tellen.



figuur 3

Ga je de figuur opsplitsen in kleine rechthoekjes? En zo ja, hoe dan? In figuur 3 staan drie verschillende manieren om te tellen: twee rechthoeken met een overlap die je dubbel telt dus eraf moet trekken, een grote rechthoek maken en daar twee vierkantjes vanaf halen, en opsplitsen in drie rechthoeken. Is de ene manier handiger dan de andere? En waarom dan? Wat hebben deze manieren gemeenschappelijk? En wat is het verschil? In zijn boek *Wiskunde is overal* laat Orlin^[15] zien hoe standaardopgaven interessanter gemaakt kunnen worden door hier nieuwe vragen aan toe te voegen. Hij doet dat met een voorbeeld over de omtrek en oppervlakte van rechthoeken. Een standaardopgave is: gegeven een rechthoek van bijvoorbeeld 3 bij 4, bereken de omtrek en de oppervlakte. Het kan spannender door een ander type vraag te stellen, betoogt hij. Als voorbeeld geeft hij de volgende vraag.

Kun je twee rechthoeken vormen waarvan de eerste een grotere omtrek heeft, en de tweede een grotere oppervlakte?

In deze vraag worden twee verschillende benaderingen van de grootte van de rechthoek (omtrek en oppervlakte) met elkaar vergeleken. Wat is het effect van de een op de ander? Hoe hangen ze samen? Deze vragen doen een beroep op de creativiteit van leerlingen die aan het tekenen zullen gaan. Na enig proberen zullen ze ontdekken dat een lange, dunne rechthoek een relatief grote omtrek heeft en dat een meer vierkante rechthoek een grotere oppervlakte heeft. Op deze manier kan het begrip van oppervlakte, omtrek en de relatie daartussen worden versterkt.

Tot slot een voorbeeld dat afkomstig is van de website van de Britse wiskundeleraar Craig Barton.^[16] Hij presenteert leerlingen vergelijkingen en een eerste stap naar een oplossing. De vraag is dan of deze eerste stap juist is.

Een voorbeeld hiervan is

$$2x - 6 = 10$$

$$2x = 16$$

Het zal duidelijk zijn dat dit een juiste eerste stap is.

Geldt dat ook voor deze?

$$2x - 6 = 10$$

$$x - 6 = 5$$

En hoe zit het bij deze?

$$6 - 2x = 10 + x$$

$$6 = 10 + 2x^2$$

Door dit type vragen wordt de aandacht expliciet afgeleid van het vinden van het antwoord en gestuurd naar wat er nu eigenlijk gebeurt. Interessant kan zijn om te ontdekken wat er goed gaat in bovenstaande voorbeelden en waar het misgaat. Bij de middelste valt op dat het delen door 2 goed is gegaan bij 2x en bij 10 en bij de 6 is misgegaan. Bij de laatste kan een goede stap zijn om alle x-en naar één kant te halen. Het probleem hier is dat er is vermenigvuldigd en niet opgeteld (en de vermenigvuldiging is dan ook alleen bij de x en niet bij de hele term). In dit soort vragen is er alle ruimte om veelgemaakte fouten van leerlingen in de voorbeelden te stoppen en deze vervolgens te bespreken.

Tot slot

Het vinden van antwoorden op vragen is een belangrijk onderdeel van het wiskundeonderwijs, maar niet het enige wat belangrijk is. De vlinder uit het begin van dit artikel mag er mooi uitzien en in bepaalde gevallen een antwoord opleveren, leren begrijpen hoe je breuken kunt optellen doet hij niet. Daarmee verliest hij helaas zijn schoonheid. Uiteindelijk gaat het in het wiskundeonderwijs niet om losse taken die beheerst moeten worden maar om de verbindingen en relaties. Of, in de geest van Daro^[1], het gaat juist om de wiskunde waaraan een bepaalde opgave geacht wordt bij te dragen. Die wiskunde zichtbaar maken voor leerlingen is de kunst.

Noten

- [1] Daro, P. (2011). Against answer getting. Retrieved at 21/01/2021 from <https://vimeo.com/79916037>.
- [2] Trends in International Mathematics and Science Study, zie bijvoorbeeld: <https://www.utwente.nl/nl/bms/timss/>
- [3] Kraemer, J.-M. (2011). Oplossingsmethoden voor aftrekken tot 100. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [4] Van Stiphout, I. (2011). The development of algebraic proficiency. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, <http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf>.
- [5] Roorda, G. (2012). Ontwikkeling in verandering: ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide. PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen.

- [6] Bruin-Muurling, G. (2010). The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, <http://alexandria.tue.nl/extra2/692951.pdf>.
- [7] Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J.-M., & Van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in the Netherlands, a paradigm case? *Mathematical Thinking and Learning*, 18(1), 25–44.
- [8] Van Stiphout, I. & Bruin-Muurling, G. (2016). De verleidingen van het kortste pad. Retrieved from <https://www.rekenenwiskunde21.nl/uploads/Verleidingen%20van%20het%20kortste%20pad,%20oktober%202016.pdf>.
- [9] Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 105–123.
- [10] Bruin-Muurling, G. & Verschoor, M. (2015). Op de toekomst voorbereid kritisch wiskundig leren denken. *Volgens Bartjens*, 34(5).
- [11] Skemp, R. R. (1979). Intelligence, Learning, and Action. New York: Wiley.
- [12] Meyer, D. (2010). Math class needs a makeover. TED: Ideas. Retrieved at 17/01/2021 from www.youtube.com/watch?v=NWUFjb8w9Ps.
- [13] Van Stiphout, I. & Bruin-Muurling, G. (2018). Stappenplannen: handig of toch niet? *Euclides*, 93(7), 4–6.
- [14] Met dank aan Saskia van Boven.
- [15] Orlin, B. (2019). *Wiskunde is overal*. Tiel: Uitgeverij Lannoo.
- [16] zie: variationtheory.com

Over de auteur

Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de HAN en als toetsdeskundige bij Cito. Emailadres: irene.vanstiphout@han.nl.

Examenwoorden wiskunde B onder de loep

Bij de examens wordt van de kandidaten verwacht dat zij hun antwoord duidelijk toelichten. Zo moet een redenering of algebraïsche berekening goed te volgen zijn en, als dat van toepassing is, hoe de GR is gebruikt. Cruciaal is dat zowel de examenmakers, correctoren als kandidaten helder hebben wat er van de kandidaten wordt verwacht. In dit artikel kijken we, aan de hand van ervaringen in 2021, nog eens naar enkele veelvoorkomende examenwoorden.

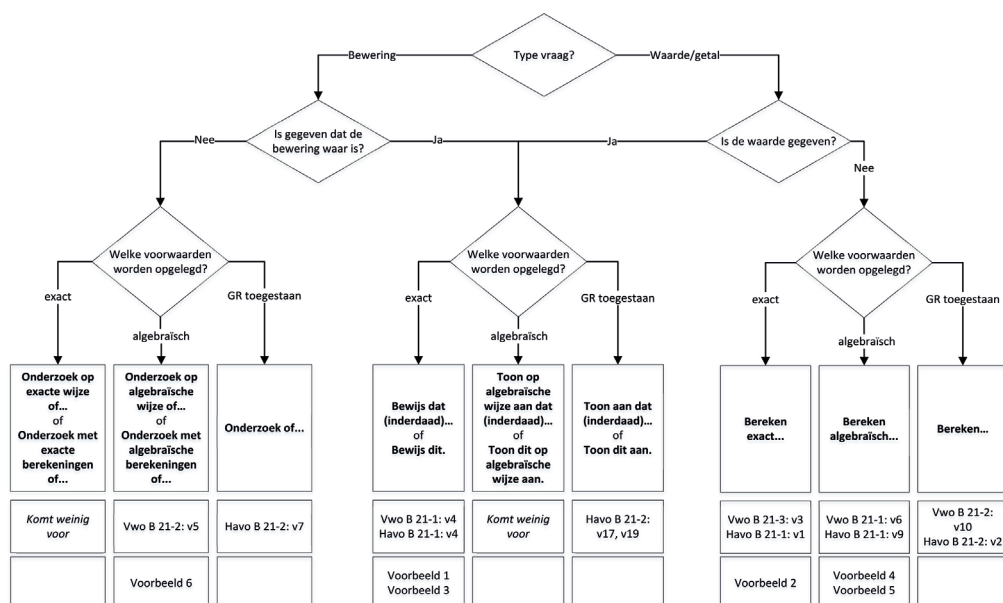
In de periode tussen de afname van een Centraal Examen wiskunde B en de normering hebben docenten de mogelijkheid om via de examenlijn van het CvTE vragen te stellen of de examenmakers op een vermeende fout te wijzen. Daarnaast leggen de examenmakers van Cito en CvTE hun oren te luister op verschillende plekken. Denk hierbij aan de examenbesprekingen, de examenfora van de NVvW en LAKS maar ook aan sociale media. Verder is WOLF (inclusief de quickscan^[1]) van Cito, een belangrijke bron voor de evaluatie en normering van het examen. In de examenperiode 2021 viel op dat er bij sommige correctoren onduidelijkheid lijkt te zijn over de betekenis van bepaalde termen uit de examenwoordenlijst van de syllabus.^[2] Het gaat dan met name om termen als *algebraïsch*, *exact* en *bewijzen*.

Aan de syllabus van 2014 is een lijst toegevoegd van veel gebruikte examenwoorden met hun betekenis. De examenwerkwoorden kregen daarmee een officiële status. Voor oud-voorzitters van de vaststellingscommissies wiskunde B respectievelijk wiskunde A/C Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoie was dit aanleiding om het artikel

‘(Werk)woorden in de centrale examens^[3] te schrijven. Zij bespreken daarin de wijzigingen met de tot dan toe gangbare praktijk en verhelderen aan de hand van enkele voorbeelden de betekenis van de examenwerkwoorden. Ook besteden zij in het artikel aandacht aan de twee zogenaamde begrippenparen, *aantonen & bewijzen* en *algebraïsch & exact*. Nu, acht jaar later, is het wellicht goed om de beschrijving van destijds nog een keer onder de aandacht te brengen. We leggen dit naast enkele voorbeelden uit de examens wiskunde B van 2021.

Examenvragen gecategoriseerd

Het merendeel van de vragen in de examens wiskunde B van 2021 start met de woorden *bereken exact*, *bereken algebraïsch*, *bereken of bewijs*. In de havo-examens komt *bereken* relatief veel vaker voor dan bij vwo. Voor *bewijzen* geldt het omgekeerde; niet geheel onverwacht. Een stuk minder voorkomend zijn formuleringen met bijvoorbeeld *stel op*, *onderzoek* of *toon aan*. De examenmakers gebruiken zulke examenwoorden bedachtzaam. In figuur 1 (niet-uitputtend) is dit in een stroomschema weergegeven. Op enkele



figuur 1 klik op de figuur of ga naar de Euclides-site voor een grote versie

van de keuzes die gemaakt worden, gaan we hieronder verder in. In het stroomschema is de eerste splitsing er een waar niet iedereen zich van bewust is. Sommige examen-vragen betreffen een te berekenen *getal/waarde*, andere betreffen een *bewering* die geverifieerd of onderzocht moet worden (of de bewering juist is of niet).

Bij *getal/waarde* kun je denken aan het berekenen van de x -coördinaat van een snijpunt of aan het berekenen van de waarde van een parameter. Bij *bewering* kun je denken aan 'Bewijs dat bovenstaande vergelijking juist is' of 'Onderzoek of de x -coördinaat van P gelijk is aan 3.' Het valt op dat voor deze twee typen er een analoge onderverdeling is voor wat betreft voorwaarden die aan het antwoord gesteld worden, zoals in het stroomschema ook te zien is. De kandidaat moet uit de vraagstelling begrijpen welke voorwaarden dat zijn.

Twee voorwaarden

In grote lijnen kun je zeggen dat er twee voorwaarden zijn: *exacte berekeningen* vereist en *algebraïsche berekeningen* vereist. Als een van deze twee voorwaarden gesteld is, dan mogen de 'specifieke opties van de grafische reken-machine (GR)' geen onderdeel zijn van de berekening of redenering. Staan *exact* of *algebraïsch* niet in de vraag, dan mogen de specifieke opties van de GR wél gebruikt worden in het antwoord. In tabel 1 is een niet-uitputtend lijstje van voorbeelden gegeven van deze specifieke opties. Bij vragen die een bewering betreffen, is het onderscheid vergelijkbaar. Als de specifieke opties van de GR niet gebruikt mogen worden, dan begint de vraag met bijvoorbeeld *Bewijs dat...* of *Toon op algebraïsche wijze aan dat...* Als de specifieke opties van de GR wél gebruikt mogen worden, dan begint de vraag met bijvoorbeeld *Toon aan dat...* of *Onderzoek of...*

In het stroomschema zijn de diverse mogelijkheden goed te onderscheiden. Zie ook voorbeeld 1 op pagina 16.

Een enkele keer wordt een 'mengvorm' in een vraagstelling gebruikt. Zoals bijvoorbeeld 'Bereken met behulp van

differentiëren de x -coördinaat van de top van de grafiek van f' . In zo'n geval mag dus de GR worden gebruikt, maar moet er wel gedifferentieerd worden. Het gebruiken van de numeriek benaderde hellingfunctie is dan niet toegestaan. Nadat de functie 'handmatig' door de kandidaat gedifferentieerd is, mag die afgeleide in de GR worden gezet en mag, met behulp van de specifieke opties van de GR, het nulpunt van de afgeleide worden berekend. Terzijde: in de praktijk kunnen we natuurlijk niet zien of de kandidaat, bij een voorwaarde *exact* of *algebraïsch*, de GR heeft gebruikt om het probleem te verkennen of om de berekeningen te controleren. Het gaat er hier dus vooral om welke redeneringen en berekeningen gebruikt mogen worden in het opgeschreven antwoord. Zie ook voorbeeld 2a.

Algebraïsch versus exact

In de examenwoordenlijst is te lezen dat het verschil tussen de termen *algebraïsch* en *exact* gelegen is in het al dan niet mogen opschrijven van *benaderde* (numerieke) tussenantwoorden en het eindantwoord. Benaderingen mogen overigens niet tot een ander eindantwoord leiden dan in het cv is genoemd, zie hiervoor vakspecifieke regel 3 van wiskunde B. Het gebruik van *algebraïsch* dan wel *exact* zegt niets over de uitvoerigheid van de berekening: de stappen die gezet moeten worden bij een *algebraïsche* berekening moeten evengoed worden gezet bij een *exacte* berekening en andersom. Zie voorbeeld 2b.

Wanneer de vraag een bewering betreft, kan er door de examenmakers evengoed een onderscheid gemaakt worden tussen een algebraïsche en een exacte rekenwijze. Als de juistheid van een bewering moet worden aangetoond en er mogen alleen exacte berekeningen plaatsvinden (of redeneringen), dan wordt *bewijs* gebruikt. Mogen de berekeningen algebraïsch, dan zal de formulering *toon op algebraïsche wijze aan* gebruikt worden. Hieraan zie je goed dat *bewijs* eigenlijk hetzelfde betekent als *toon op exacte wijze aan*. Zie ook voorbeeld 3.

specifieke opties van de GR (in examenstand)	opties van de wetenschappelijke rekenmachine ^[4]
• gebruik van formules/functies • numeriek benaderde ○ snijpunten van twee grafieken ○ hellinggrafiek ○ oppervlakte onder een grafiek ○ extreme waarden - et cetera	• eenvoudige rekenkundige bewerkingen (zoals optellen en vermenigvuldigen) • machtsverheffen (ook met negatieve of gebroken exponenten) • logaritme • sin, cos, tan - et cetera

tabel 1

Waarom bestaat algebraïsch?

Waarom is er eigenlijk een verschil gemaakt tussen *algebraïsch* en *exact*? Daar zijn verschillende redenen voor:

- Wanneer een vergelijking opgelost moet worden, waarvoor veel stappen gezet moeten worden, dan kan dit resulteren in complexe vormen, zowel in tussenantwoorden als in het eindantwoord. Probeer maar eens exact de vergelijking $3\ln(3x^2 - 8x + 2) - 2 = 0$ op te lossen. Bij zulke vragen zijn we er meer in geïnteresseerd of de kandidaat de juiste oplossingsstappen zet, dan dat hij de uitdijende wiskundige uitdrukkingen blijft beheersen.
- Niet alle vergelijkingen zijn exact oplosbaar, zeker niet binnen het gedefinieerde examenprogramma. Bijvoorbeeld $7\sin(x - 3) + 5 = 8$. Tot aan de stap $\sin(x - 3) = \frac{3}{7}$ kan de berekening exact, maar dan moet de knop $\sin^{-1}$ op de rekenmachine gebruikt worden (wat $x - 3 = 0,422\dots$ geeft). Dat is géén specifieke optie van de GR en dus is dit nog wel een algebraïsche berekening (maar niet exact). Door te vragen deze vergelijking algebraïsch op te lossen, is nog steeds na te gaan of de kandidaat begrijpt welke stappen gezet moeten worden om tot een (zij het afgerond) eindantwoord te komen.
- Exacte berekeningen worden niet vaak gevraagd binnen opgaven in een context, omdat in een toepassing het vaak niet realistisch is om met exacte antwoorden te werken. Meestal mag daar de grafische rekenmachine gebruikt worden en een enkele keer dient er iets algebraïsch berekend te worden. Voorbeeld 4 is niet zozeer een opgave in context, maar toch is daar eenzelfde redenering geldig voor de keuze voor de voorwaarde *algebraïsch*.
- Soms willen we de kandidaten de ruimte bieden voor andere (maar wel algebraïsche) oplosmethoden dan een exacte. Zie voorbeelden 5 en 6.

Merk op dat de voorwaarde *algebraïsch* niet wil zeggen dat de berekening niet *exact* mag. Maar let wel: soms kan het, soms is het een gedoe en soms kan het niet. En: als er een afrondinstructie wordt gegeven, dan zal die exacte waarde aan het eind toch nog even afgerond moeten worden.

Tot slot

Een kandidaat kan niet snel te veel toelichting geven. Het is aan de kandidaten om de corrector aan de hand te nemen bij het beantwoorden van de vraag. Helaas vergeten zij zich geregeld de vraag te stellen 'Heb ik het nu zo opgeschreven dat iedereen begrijpt wat ik bedoel?' Het valt ook niet mee wanneer je als leerling een mooie

strategie hebt bedacht om dan nog even los van je enthousiasme aandacht te besteden aan de notatie. Maar het blijft jammer als kandidaten hierdoor niet de waardering krijgen die ze verdienen. Wij hopen met de bespreking van enkele voorbeelden een bijdrage te leveren aan de verheldering van veelvoorkomende examenwoorden en het belang te onderstrepen van een zorgvuldige redenering binnen de wiskunde.

Voorbeeld 1

Vraag 2 uit vwo wiskunde B (2021, 3e tijdvak), zie figuur 2.

Spookje

Op het domein $[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi]$ worden de functies f en g gegeven door:

$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$

$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

figuur 2

Bewezen moet worden dat $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$ de afgeleide is van $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$. Om te voorkomen dat een leerling laat zien dat de plots van $Y2 = 6(\cos(X))^3 - 5\cos(X)$ en van $Y3 = dY1/dX$ met $Y1 = \sin(X)\cos(2X)$ mooi over elkaar heen vallen, wordt niet *aantonen* gebruikt, maar *bewijzen*.

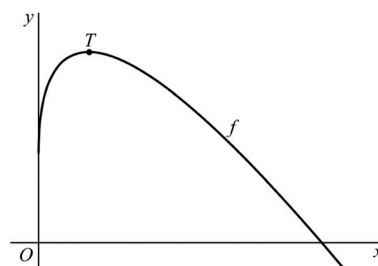
Voorbeeld 2a

Vraag 14 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 3.

Driehoek met maximale oppervlakte

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1$. Het punt T is de top van de grafiek van f . Zie figuur 1.

figuur 1



Bereken exact de coördinaten van T .

figuur 3

Gevraagd wordt exact de coördinaten van de top te berekenen van de grafiek van de functie f . Hiervoor moet 'met de hand' de afgeleide van f worden bepaald, waarna de vergelijking $f'(x) = 0$ met algebra moet worden opgelost. Het gebruik van de optie van de GR om maxima/minima te bepalen is hier dus niet toegestaan in de beantwoording van de vraag. De leerling mag ook niet met die optie $x = 0,5625$ vinden en die in de wel 'met de hand' gevonden afgeleide invullen. Deze waarde moet namelijk stap voor stap worden afgeleid.

In het cv is bij het vierde bolletje te lezen: $x = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}$. Bij de examenbespreking merkte een docent op dat hij het vreemd vond dat die laatste stap door de leerling niet met

tussentapen als $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16}$ verklaard

moest worden. De reden dat dit niet hoeft: het uitrekenen van een macht, ook al is de exponent negatief, valt niet onder de specifieke opties van de GR. Zulk rekenwerk mag dus gewoon overgelaten worden aan de GR, wanneer een exacte berekening wordt gevraagd; een toelichting is niet nodig. Dit alles wil niet zeggen dat het kennen van een definitie als $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ niet in een examen getoetst kan worden. Dit kan bijvoorbeeld met een vraag waarin de afgeleide van $\frac{1}{x^7}$ nodig is.

Voorbeeld 2b

Vraag 14 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak)

Stel dat een leerling bij het vierde bolletje in het cv begint met ' $x^{-2} = 1,33$ ' in plaats van ' $x^{-2} = \frac{4}{3}$ ', dan heeft hij niet exact gewerkt en dient het scorepunt niet te worden toegekend. Als de leerling aan het eind van het vierde bolletje 0,5625 opschrijft in plaats van $\frac{9}{16}$, dan is dat prima, omdat er dan geen sprake is van afronding. Wellicht vinden we het minder mooi, maar het zijn twee getallen met dezelfde waarde. Vanuit de natuurkunde kijk je op een verschillende manier tegen deze twee getallen aan, maar omdat significantie geen onderdeel is van het examenprogramma wiskunde B, mogen kandidaten dit als gelijke getallen hanteren.

Voorbeeld 3

Vraag 11 uit vwo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 4.

We kennen waarschijnlijk allemaal de ervaring dat een wiskundig bewijs moeilijker blijkt dan het in eerste oogopslag lijkt. De zinsnede 'hieruit volgt eenvoudig...' kost uren lange hoofdbrekens, waarmee het probleem wordt verschoven van de auteur naar de lezer. Echter, wanneer een kandidaat in het examen een bewijs moet geven, is

het van belang dat de kandidaat de beoordelaar overtuigt van de bewering die bewezen moet worden. Dat betekent dat de leerling nauwgezet laat zien en dat hij de afzonderlijke stappen in de bewijsvoering begrijpt en verwoordt en daarmee dus niets aan de lezer/beoordelaar overlaat.

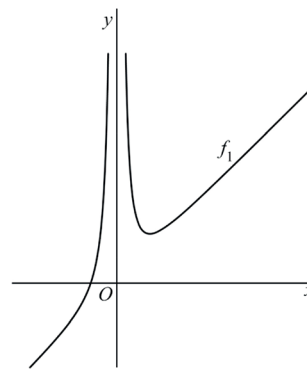
Gebroken functie met een parameter

Voor $p > 0$ wordt de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van f_1 weergegeven.

figuur



De grafiek van f_1 heeft een scheve asymptoot.

Bewijs dat de grafiek van f_1 boven deze scheve asymptoot ligt.

figuur 4

11

maximumscore 3

- $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$ 1
- (Als x onbegrensd toeneemt, nadert $\frac{4}{x^2}$ tot 0, dus) de vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 1
- Omdat $(4 > 0 \text{ en } x^2 > 0)$, geldt $x + \frac{4}{x^2} > x$ (dus ligt de grafiek van f_1 boven de scheve asymptoot) 1

figuur 5

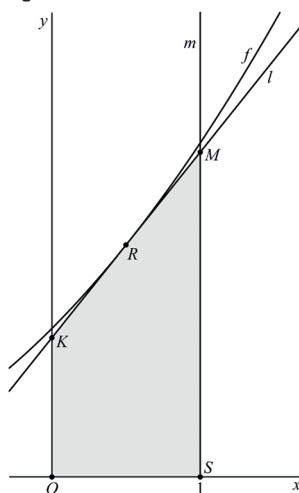
Redeneringen (onderdeel van de syllabus) in een centraal examen zijn een uitdaging voor de examenmakers. Was het een mondelinge toets, dan kon je de kandidaat altijd verdere 'waarom'-vragen stellen: het is voor de kandidaat immers moeilijk te bedenken wanneer een bewijs 'diep' genoeg is. Dat het een landelijke (en *high stakes*) toets is, maakt dat we voor het correctievoorschrift, zie figuur 5, >

goed nadenken en bediscussiëren wat de minimale eis is die wij aan alle kandidaten in het land stellen. Zo wordt in dit voorbeeld wél geëist dat de kandidaat benoemt dat $x^2 > 0$ en $x + \frac{4}{x^2} > x$, maar er hoeft niet te worden vermeld dat 4 een positief getal is. Ergens moet een grens worden getrokken. Correctoren weten hiermee waar zij aan toe zijn, en de verschillen tussen de beoordelingen van de correctoren in het land, bij dezelfde antwoorden, zijn hierdoor kleiner.

Voorbeeld 4

Vraag 9 uit havo wiskunde B (2021, 1e tijdvak), zie figuur 6.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{16}$.
De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

figuur 6

Het eindantwoord $\frac{100}{76}$ (%) geeft de afwijking die we zoeken niet zo helder weer, 1,3% doet dat wel. Vervolgens heeft het weinig zin te eisen dat tussenantwoorden niet afgerond mogen worden. Daarom is er bij deze vraag bewust voor gekozen de afwijking in de oppervlakten algebraïsch te laten berekenen.

Voorbeeld 5

Vraag 6 uit vwo wiskunde B (2021, eerste tijdvak), zie figuur 7.

Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee mogelijke plaatsen van het epicentrum in kilometers. Geef de coördinaten in je eindantwoord als gehele getallen.

figuur 7

6 maximumscore 6

- Voor de coördinaten van het epicentrum geldt $x^2 + y^2 = 240^2$ en $(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$ 1
- Uit het verschil van beide vergelijkingen volgt $384x - 192^2 + 256y - 128^2 = 240^2 - 80^2$ 1
- Herleiden tot $y = -1,5x + 408$ 1
- Invullen (bijvoorbeeld in de vergelijking van de cirkel om S) en herleiden geeft $3,25x^2 - 1224x + 108864 = 0$ 1
- De oplossingen van deze vergelijking zijn $x = 144$ en $x = 232,6...$ 1
- De gevraagde coördinaten zijn $(144, 192)$ en $(233, 59)$ 1

of

- $ST = \sqrt{192^2 + 128^2} = 230,75...$ 1
- Voor de hellingshoek α van ST geldt $\tan(\alpha) = \frac{128}{192}$, waaruit volgt $\alpha = 33,69...(^\circ)$ 1
- Toepassen van de cosinusregel in driehoek STE (met E de plaats van het epicentrum) geeft $80^2 = 240^2 + 230,75...^2 - 2 \cdot 240 \cdot 230,75... \cdot \cos(\angle EST)$ 1
- Algebraïsch oplossen geeft $\angle EST = 19,44...(^\circ)$ 1
- De hellingshoek van SE is dus gelijk aan $33,69... + 19,44... = 53,13...(^\circ)$ of gelijk aan $33,69... - 19,44... = 14,25...(^\circ)$ 1
- Dit geeft voor E $(240 \cdot \cos(53,13...), 240 \cdot \sin(53,13...))$ en $(240 \cdot \cos(14,25...), 240 \cdot \sin(14,25...))$, dus de gevraagde coördinaten zijn $(144, 192)$ en $(233, 59)$ 1

figuur 8

Het eerste alternatief van het cv, zie figuur 8, is zeker niet volledig exact, maar wel bijna: in het vijfde antwoord-element wordt niet meer exact gerekend, maar dat had wel eenvoudig gekund door wortelvormen te gebruiken die uit de abc -formule volgen. Aan het tweede alternatief is te zien dat er ook een heel andere benadering is, waarbij de kandidaat ook goed laat zien hoe meetkundige problemen opgelost kunnen worden. Dit was een extra reden om deze vraag niet exact te stellen. Dit laatste voorbeeld laat overigens meteen zien dat er *niet* een regel is als 'wanneer de vraag exact opgelost kan worden, dan stellen we de vraag ook exact'.

Voorbeeld 6

Vraag 5 uit vwo wiskunde B (2021, tweede tijdvak), zie figuur 9

Gegeven is punt $F(7, 2)$ en vector $\overrightarrow{OF}$.

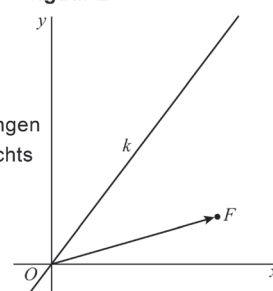
Ook is gegeven de lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zie figuur 2.

Vector $\overrightarrow{OF}$ wordt gespiegeld in lijn k .

Onderzoek met algebraïsche berekeningen of het spiegelbeeld van $\overrightarrow{OF}$ links of rechts van de y -as ligt.

figuur 2



figuur 9



WiTje: Krassen in december

In het correctievoorschrift is aan de eerste twee antwoord-alternatieven te zien dat deze vraag op exacte wijze beantwoord kan worden. De laatste drie antwoord-alternatieven zijn algebraïsch van aard, er zijn afgeronde (decimale) tussenantwoorden. Door de vraag algebraïsch te stellen, bieden we de kandidaten meer oplossingsstrategieën. Merk op dat het in deze vraag goed past: wanneer je wilt weten of het spiegelbeeld van $\overrightarrow{OF}$ links of rechts van de y -as ligt, dan geven de benaderingen zoals die in de antwoordalternatieven te zien zijn, daarover al voldoende duidelijkheid.

Het schema van figuur 1 is te downloaden van de site.

 vakbladeuclides.nl/975examenwoorden

Noten

- [1] <https://www2.cito.nl/vo/examenverslag/waardering2021/pdf/21115.pdf>
- [2] Syllabus 2022 wiskunde B havo en syllabus 2022 wiskunde B vwo, College voor Toetsen en Examen vwo, havo, vmbo, Utrecht.
- [3] Paul Drijvers en Kenneth Tjon Soei Sjoie, '(Werk) woorden in de centrale examens', *Euclides* 92-7.
- [4] Hiermee bedoelen we een rekenmachine met basisbewerkingen, zoals omschreven in bijvoorbeeld paragraaf 3.2.2. van bijlage 1B van het document 'Hulpmiddelen Havo en Vwo 2022', zie https://www.examenblad.nl/hulpmiddel/toegestane-hulpmiddelen-vwo-havo-13/2022/f=/bijlage_1b_bij_cvte-21.00581_wijzigingsregeling_hulpmiddelen_ce_vo_2022_vs_def.pdf

Over de auteurs

Ivo Claus is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.

E-mailadres: Ivo.Claus@cito.nl

Joke Daemen is universitair docent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en voorzitter van de vaststellingscommissie wiskunde B (h/v) van het CvTE.

E-mailadres: J.W.M.J.Daemen@uu.nl

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksoopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Op een december-kraslot is het de bedoeling dat je elke dag in december een vakje openkrast, en dan verschijnt er een symbool. Er zijn negen verschillende symbolen. Aan het eind van december heb je 31 vakjes opengekrast en misschien wel een prijs gewonnen. Of zelfs meer prijzen! Als je, bijvoorbeeld, uiteindelijk drie kerstmannen hebt gekrast, win je € 3,00. De verdere verdeling van de prijzen zie je in figuur 1.

Aantal symbolen	Prijs
3 × 	€ 3
4 × 	€ 5
5 × 	€ 10
6 × 	€ 20
7 × 	€ 50
8 × 	€ 100
9 × 	€ 200
10 × 	€ 5 000
11 × 	€ 100 000

figuur 1 de negen symbolen met de bijbehorende prijs

Het is nooit zo dat er meer symbolen op de kaart staan dan nodig is om een prijs te winnen. Zo komt bijvoorbeeld een kraslot met vier (of meer) kerstmannen niet voor!

- 1 Geef een voorbeeld van een kraslot waarop geen enkele prijs valt en die wel alle negen verschillende symbolen bevat.
- 2 Onderzoek wat het maximale bedrag is dat je met één enkel kraslot zou kunnen winnen.
- 3 Onderzoek of het mogelijk is dat alle twee miljoen exemplaren van de krasloten verschillend zijn.

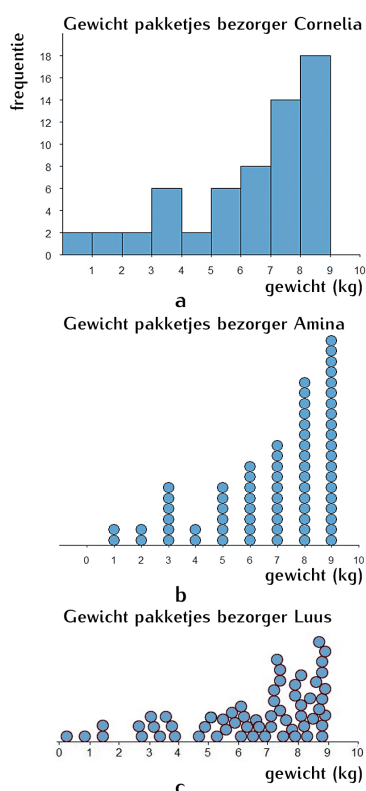
Bron: A-lympiade voorronde 2011, zie <https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28690/>

Interpreteren van histogrammen en stippengrafieken

Interpreteren van grafieken

Het onderzoek dat ik heb gedaan naar oogbewegingen van leerlingen tijdens het interpreteren van statistische grafieken heeft verschillende misinterpretaties aan het licht gebracht. Hier licht ik er één uit over de gemeten waarden in de drie grafieken in figuur 1: een histogram (a), een gestapelde stippengrafiek (b) en een (rommelige) stippengrafiek (c), alle drie één variabele weergevend, namelijk het gewicht van pakketjes. De stippengrafiek is iets anders dan een spreidingsplot, waarin immers twee statistische variabelen al dan niet gecorreleerd zijn. Vragen die aan leerlingen over de drie grafieken gesteld kunnen worden:

- Welke meetwaarden komen in de drie grafieken hieronder voor?
- Kunnen deze drie grafieken alle drie dezelfde meetwaarden weergeven?
- Waarom (niet)?



figuur 1 Een histogram (a), gestapelde stippengrafiek (b) en stippengrafiek (c)

Vragen over de grafieken

Tijdens het onderzoek stelden leerlingen de eerste vraag over de meetwaarden vaak op een andere manier: welke waarde heeft de meest linkse staaf in het histogram?

Mijn antwoord was daarop dat ze dit zelf mochten bedenken. Vaak rekenen we met het midden van het interval (hier dus 0,5) maar in feite kunnen het alle waarden tussen 0 en 1 zijn. Sommige leerlingen gebruikten hier 1 als (de) gemeten waarde. Voor het beantwoorden van de tweede vraag – kunnen de drie grafieken dezelfde meetwaarden weergeven – kunnen we bijvoorbeeld eerst afspreken dat de linkergrens steeds niet meedoet.^[1] Dan is het interval $<0, 1]$ en kunnen alle meetwaarden dus óók 1 zijn. Dat betekent dat zowel het histogram als de gestapelde stippengrafiek dezelfde meetwaarden (data) kunnen bevatten – maar zeker weten we dat niet. Sterker nog, in de gestapelde stippengrafiek zijn mogelijk andere intervallen gekozen, namelijk $<0,5; 1,5]$ voor de eerste staaf, óf worden discrete waarden (hier zelfs hele getallen) weergegeven. Dus het kunnen nog steeds hetzelfde data zijn maar zeker is dat niet.

Aanbeveling

Van de derde grafiek – een rommelige stippengrafiek – kunnen we wel beter bepalen of deze overeenkomt met het histogram (ja) en met de gestapelde stippengrafiek (dat laat ik aan de lezer over). De misinterpretatie hier is dus dat bij het histogram (en de gestapelde stippengrafiek) de middelste waarde de enige gemeten waarde is in plaats van een handige schatting om mee te rekenen. De gestapelde stippengrafiek creëert meer problemen of misinterpretaties dan deze oplost en wordt daarom *afgeraden* om te gebruiken zowel in schoolboeken als in journalistieke artikelen. De ‘rommelige’ stippengrafiek lijkt juist wel een goede voorbereiding op het leren interpreteren van histogrammen.^[2] Hopelijk nemen schoolboeken deze vorm binnenkort wel in hun curriculum op.

Noten

- [1] Alternatief is om de klassengrenzen op één decimaal meer af te ronden dan de meetwaarden (die in de praktijk altijd afgerond zijn door de meetonnauwkeurigheid), zoals Bert Nijdam ooit heeft voorgesteld. Ik ben daar geen voorstander van.
- [2] Boels, L., Lyford, A., Bakker, A., & Drijvers, P. (2021). Students Learning to Interpret Histograms: A Gaze-Based Machine Learning Analysis. [submitted] Freudenthal Institute, Utrecht University.

Bryan

Je hebt in een school altijd leerlingen die iedereen kent. Meestal is dat geen goed teken. Bij ons op school weet iedereen wie Bryan is. Dat is niet omdat hij zo vervelend is, maar omdat hij tegen elke docent begint te praten. Ik kwam hem een keer 's ochtends vroeg tegen midden in een woonwijk. 'HÉ MEVROUW! GOEDEMORGEN! HOE IS HET MET U?' 'Nou het gaat goed hoor Bryan, maar het is nog best wel vroeg, dus misschien moet je iets minder hard praten. Er liggen nog veel mensen te slapen.' 'IK HEB NIET VOOR MIJN TOETS WISKUNDE KUNNEN LEREN HOOR WANT IK ZAT DE HELE TIJD OP DE PLAYSTATION GISTEREN.' 'Nou dat is niet zo best, Bryan, maar gelukkig heb je goed gewerkt in de les en steeds je huiswerk gemaakt, dus je gaat straks gewoon knallen op die toets.' 'KNALLEN DOE IK WEL OP DE WC MEVROUW! HAAAA.' Zo'n jongen.

“Knallen doe ik wel op de wc mevrouw! Hahaha.”

Een collega verzuchtte een keer dat ze er niet aan moest denken hem in de les te hebben. Maar in de les hoorde je Bryan niet en was hij meestal heel hard aan het werk. Zijn moeder vertelde me dat dat kwam door de combinatie van adhd en autisme die hij met zich meedraagt. Als hij een duidelijke taak heeft, stort hij er zich met al zijn energie op. Bryan kwam van vmbo basis en deed het zo goed in mijn kaderklas dat hij wiskunde op TL niveau mocht doen. Ik had met hem de afspraak dat hij zodra hij binnenkwam oortjes mocht indoen, niet naar de uitleg hoefde te luisteren en zelfstandig aan het werk mocht. Dat deed hij heel erg goed. Hele schriften heeft hij volgeschreven in de twee jaar dat ik hem in de les had. Zijn

enthousiasme en werklust gingen soms heel ver. Op een toets had hij een lastige optelling onder elkaar gezet en helemaal uit het hoofd zitten uitrekenen. Ik vertelde hem dat hij een volgende keer beter zijn rekenmachine hiervoor kon gebruiken. Dat scheelt veel tijd en zo kon hij rekenfoutjes voorkomen. Maar hij was zo trots op zijn optelvaardigheden dat hij dat eigenlijk helemaal niet wilde. En een zijaanzicht tekenen van een wiskundig figuur vond hij niet leuk, want hij vond het zo mooi om het in 3D na te tekenen. Dat ik hem daar geen punten voor kon geven, leek hem niet te deren.

Zolang het lukte om de energie van Bryan te kanaliseren ging het goed. Maar juist in de examentijd werd dat lastig. Zijn opa en oma lagen allebei in het ziekenhuis met corona en zijn hoofd zat vol met zorgen over hen. Toch worstelde hij zich moedig door de examens heen. Bij het examen wiskunde zat hij vooraan in de gymzaal. Met alles wat hij in zich had maakte hij het examen. Maar hij wist zich geen raad met die grote vellen papier die opengeklapt voor hem lagen op het kleine tafeltje. Zijn tafeltje leek op wat er op dat moment in zijn hoofd afspeelde: chaos. Te laat realiseerde ik me dat ik ook dit met hem had moeten oefenen: ik had hem moeten voordoen hoe hij die A3-vellen kon dubbelklappen om zo het overzicht te houden. Mijn opluchting was groot toen Bryan desondanks aan het einde van de rit geslaagd bleek te zijn. Al mis ik de ochtendgesprekjes wel.

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en toetsdeskundige bij Cito in Arnhem. E-mail: m.steentjes@hifertsheem.nl.

Wiskunde Olympiade

Op 11 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats, dit keer weer gewoon op de twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn na afloop gepubliceerd op www.wiskundeolympiade.nl. Ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen worden uitgenodigd voor de finale in september. Wie de winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekend gemaakt.



Zebra 60: Verdwijnpunt opgelost



Titel: Verdwijnpunt opgelost

Auteur: Rick Vooy's

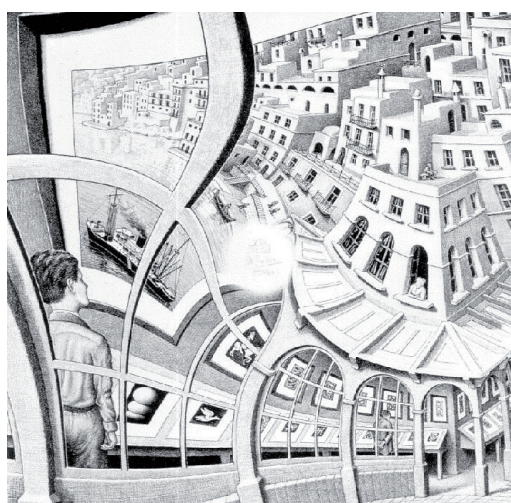
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2020

Zebra-reeks, deel 60, 62 pagina's, paperback

Prijs: € 10,00

Leidse wiskundigen sluiten de blinde vlek van Escher

Dit was de kop van een artikel in *de Volkskrant* van 24 augustus 2002. In het begin van het artikel stond het volgende: 'Leidse wiskundigen hebben de blinde vlek opgevuld die de Nederlandse graficus M.C. Escher in 1956 midden in zijn wereldberoemde prent(litho) "De prentententoonstelling" overliet.' Ik werd in 2002 zeer enthousiast bij het lezen van het artikel en nam me meteen voor om dat actuele nieuws aan al mijn leerlingen door te geven. Ik maakte de volgende dag een sheet van de prentententoonstelling voor mijn overheadprojector (ken je dit apparaat nog?) en liet de conciërge een stel afdrukken maken. Echter welke informatie kon ik aan de leerlingen geven? Dat bleek toch wel lastig te zijn. Natuurlijk kenden de meeste leerlingen werk van de kunstenaar. Maar welke wiskunde zat er nu achter de 'De prentententoonstelling'? En was de wiskunde niet te hoog gegrepen voor de leerlingen? Je kunt iets vertellen over het Droste-effect maar hoe is dat in deze prent te zien? Want het gaat hier om een bijzondere variant. Mijn presentatie bleef beperkt tot samen heel goed kijken.



figuur 1 De prentententoonstelling. MC Escher (1956)

Ik ben dus nu heel blij met het verschijnen van dit Zebraboekje – was het maar eerder gepubliceerd – dat de

bijbehorende wiskunde van de litho toegankelijker maakt. Niet alles wordt zichtbaar maar een aardig deel van de sluier wordt door Rick Vooy's opgelicht. Het boekje is een afgeleid product van zijn masterscriptie. Zijn scriptie gaat op een aantal onderdelen veel verder, maar ook hier moet hij grenzen stellen. Zoals bij het begrip *conformiteit*. Daarover later meer.

Structuur van het boekje

Het boekje bestaat uit 59 pagina's waarvan 44 de inhoud van negen hoofdstukken weergeven. Het is de auteur gelukt om de uitwerkingen, appendix en bronvermeldingen ook in het boek op te nemen. Er zijn in totaal 17 opdrachten en daarnaast één eindopdracht.

Dit boekje begint met een hele sympathieke inleiding van Mechtilde de Rijk. Zij is de dochter van wiskundeleraar Hans de Rijk – beter bekend onder zijn pseudoniem Bruno Ernst – die op dertigjarige leeftijd kennismakte met Maurits Escher en daarna het contact bleef onderhouden. Zo krijgen we informatie over de persoon Escher en het ontstaan van de litho 'De Prentententoonstelling'. Dan krijgen we de inleiding in hoofdstuk 1 van de auteur Rik Vooy's. Hij vertelt waarom hij dit boekje heeft geschreven en wat de belangrijkste onderdelen zijn. In hoofdstuk 2 beginnen we met het oriënteren op de litho. Wat zie je allemaal? Wat is er bijzonder aan?

Verplaats je linksonder in die jongeman die naar een afbeelding kijkt van een stad met een haven waar een schip te zien is. Laat je blik gaan van linksboven naar rechtsboven dan zie je steeds groter wordende huizen die uit de afbeelding dreigen te vallen en vervolgens kom je uit in een galerij waar een jongeman naar een prent staat te kijken.

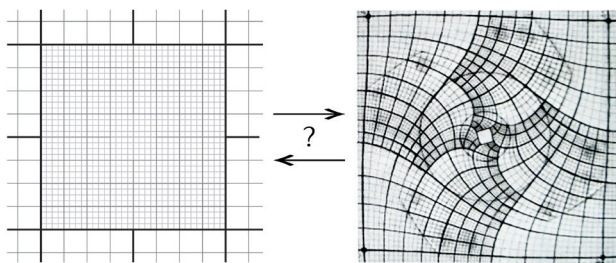
Kijk je nogmaals en let je beter op de details dan zie je objecten die in werkelijkheid recht zijn en nu krom worden afgebeeld. En er lijkt in het midden sprake te zijn van een draaikolk rond de witte vlek, die gesigneerd is. Vervolgens wordt er ingezoomd op de begrippen Droste-effect en *conformiteit* (hoek-getrouw). Dat Droste-effect is wel even anders weergegeven dan we gewend zijn bij de verpleegster die ons een pak cacao presenteert. De verpleegster laat ons niet met rust, keert steeds terug maar wel in een kleiner formaat. Daarentegen is de observerende jongen in de litho maar één keer getekend.

De kern van het boekje is: Hoe is de litho tot stand gekomen? Hoe kun je een normaal plaatje met Droste-effect omzetten in 'De Prentententoonstelling'?

Hoe het gat wordt ingevuld, wordt verteld in hoofdstuk 8, in precies drie bladzijden met behulp van zeven afbeeldingen. De benodigde wiskunde was al ontwikkeld vóór 2000 maar de praktische uitvoering ervan met de hulp van tekenaars en een softwareontwikkelaar nam nog twee jaar in beslag. Hoofdstuk 9 is bedoeld als introductie op de eindopdracht. De wiskundige kern zit in de hoofdstukken 4 tot en met 7.

De totstandkoming

Escher ontwikkelde een speciaal rooster met kromme lijnen. De auteur duidt dit aan met het Escherrooster. Hoe dit is gegaan zie je in figuur 2.

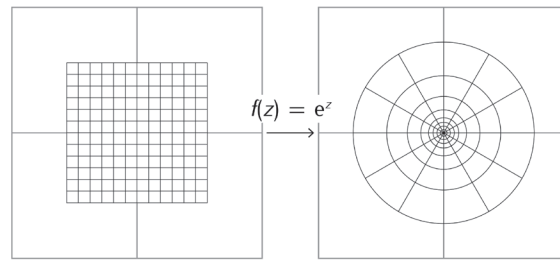


figuur 2 Rechthoekig rooster → Droste rooster → Escherrooster

Er komen twee zaken om de hoek kijken: een vergrotingsfactor die ongeveer 20 blijkt te zijn en een draaihoek van ongeveer 160° . Via oprollen van papier worden de leerlingen gestuurd naar het wiskundige gereedschap van complexe transformaties. De leerling moet nu echt aan de slag. De wiskunde-D-leerling heeft hier een voordeel. Die heeft kennis van complexe getallen en poolcoördinaten en is bekend met de formule van Euler:

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. In het boekje wordt het allemaal goed uitgelegd maar het zal voor de B-leerling zonder wiskunde D toch even wennen zijn. Het gaat erom wat complexe functies daadwerkelijk doen. Er worden een paar voorbeelden gegeven zoals $f(z) = z(1 + i)$ dat zorgt voor een rotatie van 45° tegen de wijzers van de klok in én een vergroting met factor $\sqrt{2}$. Zo worden ook de functies $g(z) = z + 1 + i$ en $h(z) = z^2$ onderzocht.

Maar welke complexe functie zorgt voor het fysieke oprollen? De heilige graal blijkt de complexe exponentiële functie $f(z) = e^z$ te zijn. Deze functie zorgt ervoor dat een rechthoekig rooster wordt getransformeerd in een cirkelvormig rooster. Verticale lijnen worden afgebeeld op cirkels en horizontale lijnen op halve lijnen vanuit de oorsprong, zie figuur 3.



figuur 3

Met duidelijke afbeeldingen wordt het aan de leerling uitgelegd. En misschien raad je het al wat voor het fysieke ontrollen gaat zorgen: beide functies zijn nodig. Hoofdstuk 7 is een pittig hoofdstuk met opgave 14 als hoogtepunt. In deze opgave gaat de leerling exact de grootten van draaihoek en vergrotingsfactor uitrekenen. Hier zal, ondanks de gegeven tips, hulp van de docent nodig zijn. Aan de orde komt ook de belangrijke eigenschap dat $f(z) = e^z$ hoekgetrouw is. Bijvoorbeeld: hoe zit het met snijdende lijnen die een willekeurige hoek maken? Om dat uit te leggen, heeft de auteur onder andere een appendix gemaakt. Maar ook die heeft zijn grenzen. Voor de hoek van willekeurige krommen wordt naar zijn master-scriptie verwezen. Hier heeft de auteur een duidelijke grens getrokken en zich niet laten verleiden om de ruimte die het boekje nog had, ook in te vullen.

Tot slot

Het boekje is heel overzichtelijk en zorgvuldig geschreven. Het draait om één object, de litho 'De Prentententoonstelling'. Er is sprake van een goede opbouw. Het wapengekletter vindt pas plaats in hoofdstuk 7 en er wordt op een intuïtieve en fysieke manier langzaam naartoe gewerkt. De leerling zal de grote lijn echt niet uit het oog verliezen. Nog eens samengevat: ambachtelijk kunst van Maurits Escher mét een fraai stukje wiskunde dat zichtbaar gemaakt wordt. Zichtbaar maken is ook een kunst en dat is heel goed gelukt. De gehele Zebrareeks hoort op elke middelbare school thuis en zeker dit boekje. De documentaire 'Het oneindige zoeken' uit 2018, geregisseerd door Robin Lutz, had best vermeld mogen worden. Lenstra en zijn medewerkers hebben het oneindige bij deze litho gevonden.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: jacques.jansen@wx.nl

Absoluut van waarde

Het begrip absolute waarde stond en staat bekend als lastig voor de leerling. Koppeling aan het meetkundig concept afstand kan helpen en het begrip een extra dimensie geven.

Met afstand de beste (definitie)

Ik vond een definitie van het begrip absolute waarde in een oud algebraboek:

Onder de absolute waarde van een getal verstaan we het getal zonder zijn teken.

Het was in die tijd wel usance om bij invoering van negatieve getallen de positieve met een plusteken te tooien, vandaar dat de auteurs de definitie op deze wijze illustreerden:

de absolute waarde van $+2 = 2$

de absolute waarde van $-2 = 2$

Daarna werd de notatie met absoluutstrepen verklaard en volgde er een 'algemeen':

$$|-a| = |a| = a \text{ als } a \geq 0$$

$$|-b| = |b| = -b \text{ als } b \leq 0$$

Blijkbaar waren de auteurs toch benauwd voor onbegrip, want er volgde nog de alinea:

Als we de definitie lezen, lijkt het alsof de absolute waarde van een getal een nieuwe getalsoort is, niet positief, niet negatief, niet nul. Dat is niet waar. We rekenen de absolute waarde van een getal tot de positieve getallen of het getal nul.

Tja... dat moet beter kunnen, denk je dan.

Een formele definitie die goed paste in de tijd van de opkomst van de New Math, rond het jaar 1970, is:

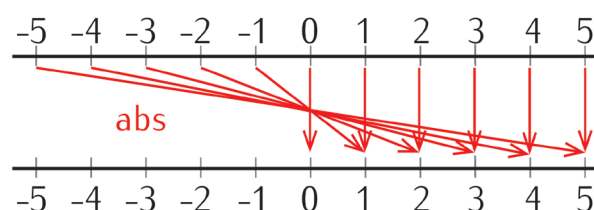
De absolute waarde (afkorting 'abs') is een functie op de reële getallen, gedefinieerd door:

$$\text{abs}(x) = x \text{ als } x \geq 0$$

$$\text{abs}(x) = -x \text{ als } x < 0$$

In plaats van $\text{abs}(x)$ schrijven we wel $|x|$.

Met als illustratie een pijlendiagram, zie figuur 1:



figuur 1

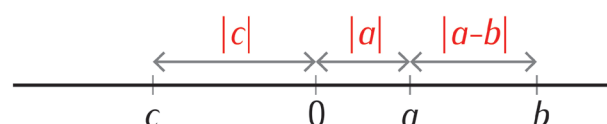
Ging hier destijds mijn voorkeur naar uit? Als dat zo was, dan heb ik dit nu verdrongen. Ooit bedacht ik dat het een goed idee kon zijn om te beginnen met het *absolute verschil* van twee getallen. Zo van:

Vannacht vroor het 6° in Groningen, terwijl in Maastricht het kwik bleef steken op 4° boven nul. Wat was het verschil in temperatuur tussen Groningen en Maastricht? Hoewel ik Groningen voorop heb gezet, zou ik een beetje raar opkijken van het antwoord 'min tien'. Tijd voor de afspraak: het absolute verschil tussen -6 en $(+)4$ is 10. Algemeen en in formele taal:

$$|a - b| = a - b \text{ als } a \geq b$$

$$|a - b| = b - a \text{ als } a < b$$

Nu gaat mijn voorkeur toch duidelijk uit naar een meetkundige definitie, die ik ook wel in sommige leerboeken vond, zie figuur 2.



figuur 2

Zó: de absolute waarde van een getal is de afstand op de getallenlijn van dat getal tot het getal 0. Of: het absolute verschil van twee getallen is de afstand tussen de bijpassende punten op de getallenlijn. Uiteraard gemeten met de eenheid (= afstand van 0 tot 1). Dat het tweede in overeenstemming is met het eerste, kan via translatie worden gesnapt.

Functies met absolute waarde

Het is een poosje in de mode geweest om het begrip absolute waarde te gebruiken in combinatie met algebraïsche vormen om zo wat minder eenvoudige functies en grafieken te creëren en het 'opgavenpark' uit te breiden. Daarbij lag overdrijving en gekunsteldheid op de loer. Een wat meer natuurlijke manier om absolute waarde een rol te laten spelen bij functies en grafieken is via de volgende context. Ik citeer uit een oud Hewetboekje (laatste editie jaar van Orwell): ^[1]

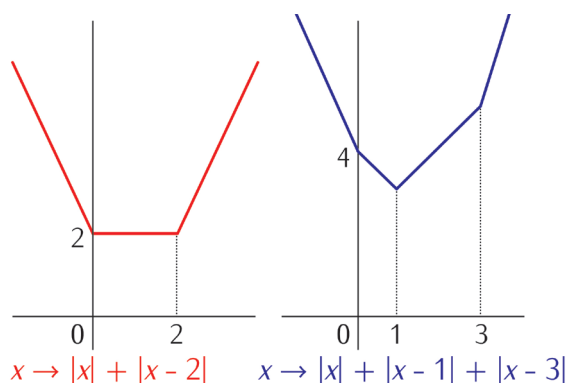
Langs een rechte weg bevindt zich een aantal torenflats (A, B, ...). Andere bebouwing ontbreekt. Men wil een bushalte langs die weg plaatsen zó dat de som van de afstanden tot die flatgebouwen minimaal is.

De eerste opdracht was om in drie situaties (met twee, drie, vier plaatsen van flats) aan te geven waar de bushalte geplaatst kan (of moet) worden. Vervolgens werd de algebraïsche vertaling gemaakt. De weg als getallenlijn en de flat-locaties als coördinaten daarop ...

Het probleem leidt dan tot het bepalen van minima van functies van het type:

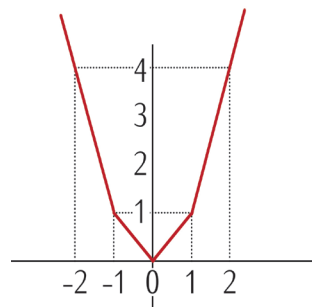
$$f(x) = |x - a| + |x - b| + \dots$$

Als het aantal flats even is, leert meetkundig inzicht dat de halte op een willekeurige plaats tussen de twee middelste flats kan worden gesitueerd. Bij een oneven aantal flats is de optimale plaats bij de 'middelste' flat. Dit inzicht kan dan met grafieken worden ondersteund, zoals in figuur 3:



figuur 3

Een belangrijk wiskunde-didactisch principe is 'draai de zaak eens om'. In dit geval bedoel ik daar natuurlijk mee: geef een polygoongrafiek en vraag naar het bijpassende voorschrift. Zoals dit plaatje, zie figuur 4, dat lijkt op een 'beginnerspoging-tot-parabool'.



figuur 4

Oplossing:

$$x \rightarrow |x| + |x - 1| + |x + 1| - 2$$

Het bushalteprobleem kan als volgt worden gegeneraliseerd. Neem een *oneven* aantal reële getallen, opklimmend naar grootte, zeg

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{2n-1}$$

Dan wordt het minimum van

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2n-1}|$$

bereikt bij de mediaan van die getallen dus bij $x = a_n$.

Bij een opklimmend rijtje van een *even* aantal getallen a_j is er een interval van optimale waarden van x . Als

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$$

dan is

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_{2n}|$$

minimaal voor elke x met $a_{n-1} \leq x \leq a_n$.

Die uitspraken steunen als gezegd op meetkundig inzicht en zou door leerlingen in woorden kunnen worden uitgedrukt. Aan de vertaling naar formele taal zou eventueel achteraf aandacht kunnen worden besteed.

Manhattan-cirkels

Het begrip absolute waarde is uit te breiden naar ruimten van meer dan één dimensie. Neem om te beginnen het *complexe vlak*. De bekende definitie van de absolute waarde van het getal $z = x + yi$ is:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Meetkundige duiding; de afstand van het punt z in het complexe vlak tot het punt 0.

Naast deze 'meetkundige analogie' met de absolute waarde van een reëel getal is er ook een algebraïsche analogie, want:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

>

Een ander 2-dimensionaal analogon van de absolute waarde van een reëel getal berust op wat wel de *Manhattan-afstand* in het vlak wordt genoemd. Beschouw een stratenplan in de vorm van een vierkantjesrooster. De (kortste) afstand tussen de roosterpunten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) is dan gelijk aan

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Zo kom ik tot deze definitie van de absolute waarde van een reëel getallenpaar (x, y) :

$$|(x, y)| = |x| + |y|$$

Ook bij niet-roosterpunten wil ik nu spreken over de Manhattan-afstand. Bij een nette definitie van afstand in een ruimte moet de driehoeksongelijkheid gelden:

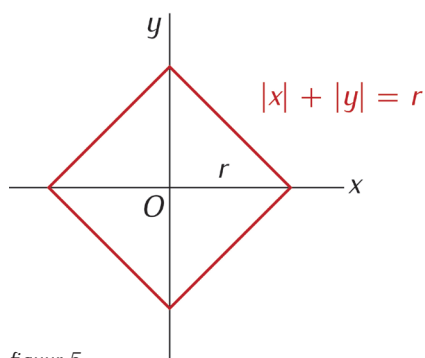
$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C).$$

Dat de Manhattan-afstand hieraan voldoet is een direct gevolg van de regel:

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

die algebraïsch bewezen kan worden via kwadratering van beide leden.

De punten in het Oxy -vlak die op Manhattanafstand r van de oorsprong liggen, vormen een vierkant met vergelijking $|x| + |y| = r$, zie figuur 5.



figuur 5

Manhattan-cirkels zijn vierkant van vorm! Ik herinner me dat leerlingen – zeg klas 2 of 3 vwo/havo – het wel spannend vonden om met vierkante cirkels te spelen. Voorbeeld: construeer de punten die op zekere Manhattan-afstanden van twee gegeven punten liggen.

Octaëder

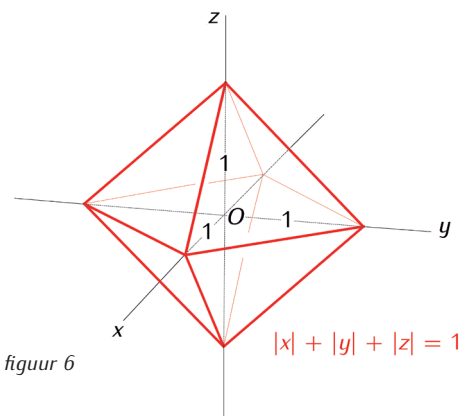
Ik maak een dimensie-stapje hoger op en spreek af: de Manhattan-absolute waarde van het tripel (x, y, z) is gelijk aan de som van de absolute waarden van x, y en z . De 'Manhattan-bol' met straal 1 om $(0, 0, 0)$ is nu de verzameling punten die voldoet aan

$$|x| + |y| + |z| = 1$$

Dit is een bijzonder en bekend veelvlak.

Het snijdt de drie vlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ volgens vierkanten, waarvan de diagonalen worden gedragen door coördinaatassen. Die drie vierkanten spannen een regel-

matig veelvlak op, de zogeheten octaëder (ofwel het regelmatige achthoekvlak), zie figuur 6. De hoekpunten van de vierkanten (en het achthoekvlak) zijn $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Die vierkanten zijn *niet* de randvlakken van de octaëder. Die randen liggen namelijk in de vlakken: $\pm x \pm y \pm z = 1$ en zijn gelijkzijdige driehoeken.



figuur 6

Het feit dat de octaëder zich met één enkele vergelijking laat beschrijven, is toch mooi!

Zelf had ik daar nooit aan gedacht totdat ik dit als opgave vond in misschien wel het mooiste meetkundeboek dat ooit geschreven is.^[2] Ook opmerkelijk: doorgaans wordt de kubus gezien als het 3-dimensionaal analogon van het vierkant, maar het blijkt nu dat het regelmatig achthoekvlak evenveel recht kan doen gelden op die betiteling.

De 16-cel

Hoe zit het nu in dimensie 4?

Ik kijk naar de vergelijking:

$$|x| + |y| + |z| + |t| = 1$$

Dit is de vergelijking van een 4-dimensionaal object dat vier octaëders omvat, namelijk de doorsnijdingen met de vier *hypervlakken*: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $t = 0$.

Die octaëders zijn niet de randruimten van deze 'veelcel' of *polytoop*; dat zijn tetraëders in de acht 'hypervlakken' met vergelijking

$$\pm x \pm y \pm z \pm t = 1$$

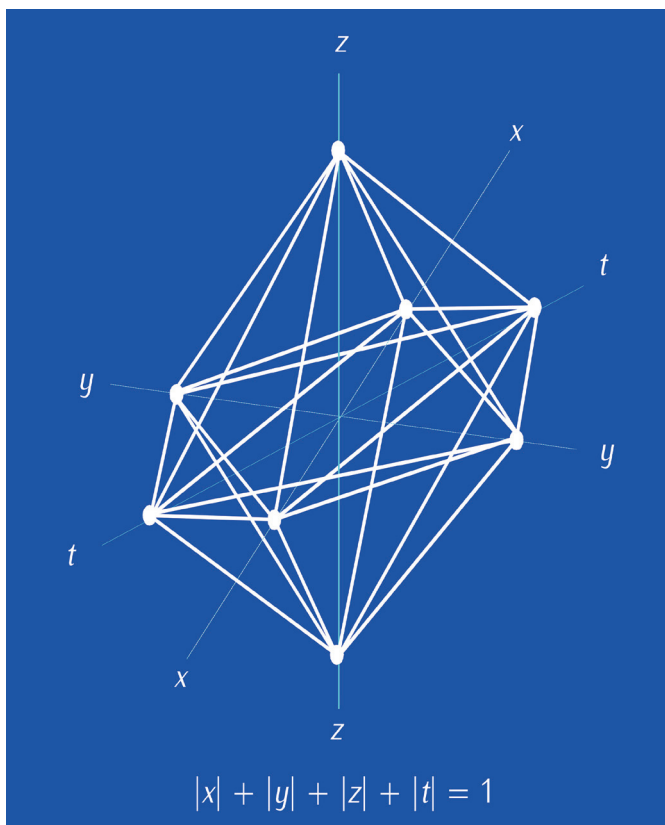
Welgeteld $2^4 = 16$ exemplaren. Vandaar dat dit polytoop de naam 16-cel draagt.

De acht hoekpunten $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$ geef ik in volgorde de namen $X_+, X_-, Y_+, Y_-, Z_+, Z_-, T_+, T_-$.

De ribben van het polytoop zijn dan: $X_+Y_+, X_+Y_-, X_-Y_+, X_-Y_-, \dots, Z_+T_+, Z_+T_-, \dots$. Hun aantal is $\binom{4}{2} \times 4 = 24$.

De *zijvlakken* zijn de driehoeken $X_+Y_+Z_+, X_+Y_+Z_-, \dots, X_-Y_-Z_-$. Hun aantal is $\binom{4}{3} \times 8 = 32$.

De 16-cel is één van de zes regelmatige veelcellen in de 4-dimensionale ruimte. In figuur 7 is een projectie van de 16-cel getekend.



figuur 7

Euler in hoger sferen

Bekijk tabel 1:

n		H	R	V	C
1	puntenpaar	2			
2	vierkant	4	4		
3	octaëder	6	12	8	
4	16-cel	8	24	32	16

tabel 1

De n staat hier voor dimensie.

Bekend is Eulers formule voor 'bolachtige' veelvlakken in de driedimensionale ruimte: $H - R + V = 2$. Dat dit klopt voor de octaëder wekt dus allerminst verbazing.

Hoe zit het in de andere dimensies?

In de tabel geldt achtereenvolgens:

$$H = 2$$

$$H - R = 0$$

$$H - R + V = 2$$

$$H - R + V - C = 0$$

Zou die afwisseling van 2 en 0 zo doorgaan in hogere dimensies?

Ik kijk eerst naar het geval $n = 5$, dus naar het polytoop met vergelijking:

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| = 1$$

Dit 5-dimensionale 'kruispolytoop' bevat elementen van dimensie 0 tot en met 4:

$E_0 (= H)$	$E_1 (= R)$	$E_2 (= V)$	$E_3 (= C)$	E_4
↓	↓	↓	↓	↓
5×2	$\binom{5}{2} \times 2^2$	$\binom{5}{3} \times 2^3$	$\binom{5}{4} \times 2^4$	2^5
↓	↓	↓	↓	↓
10	40	80	80	32

Zoals de 'randelementen' van de 16-cel viervlakken (tetraëders) zijn, zo is elk van de 32 randelementen van het 5-dimensionale kruispolytoop een *simplex* (4-dimensionaal analogon van de tetraëder).

En zie: $10 - 40 + 80 - 80 + 32 = 2$.

Natuurlijk wordt een mens dan nieuwsgierig: gaat dit zo door en is bij de 'Manhattan-sfeer' $\sum_{i=1}^n |x_i| = 1$ de alternerende som

$$A(n) = E_0 - E_1 + E_2 - \dots + (-1)^{n-1} E_n$$

gelijk aan 0 voor n is even en gelijk aan 2 voor n is oneven?

Een beetje combinatoriek leert dat het aantal elementen van dimensie k van de n -dimensionale Manhattan-sfeer (of kruispolytoop) gelijk is aan

$$\binom{n}{k+1} \times 2^{k+1}$$

Als ik dit invul in $A(n)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$ krijg ik een expressie die sterk doet denken aan het binomium van Newton.

Vanwege de afwisseling van + en - en vanwege de machten van 2 kijk ik daarom naar:

$$(x - 2)^n = x^n - n \cdot 2x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 2^2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \cdot 2^n$$

>

Substitutie van $x = 1$ levert op:

$$(-1)^n = 1 - 2n + \binom{n}{2} \cdot 2^2 - \dots + (-1)^n \cdot 2^n$$

Voor n is even komt er:

$$2n - \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2^n = 0$$

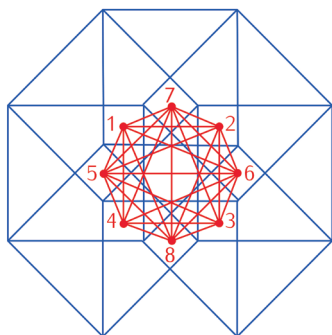
En voor oneven n volgt:

$$2n - \binom{n}{2} \cdot 2^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2^n = 2$$

Het vermoeden was dus gegrond!^[3]

16-cel en hyperkubus^[4]

Tot slot: een mooie activiteit in de meetkunde op school is het tekenen van een octaëder in een kubus door verbinding van de middelpunten van buur-zijvlakken. Octaëder en kubus zijn *duale* veelvlakken. Dat zoiets ook opgaat in dimensie 4 toont figuur 8!



figuur 8 16-cel dual met hyperkubus

Noten

- [1] Hewet (= herverkaveling wiskunde één en twee) was een project waarbij het vak wiskunde A in het vwo werd ingevoerd. In *Euclides* 97-2 bespreekt Jacques Jansen in het artikel 'Afstandsonderwijs?' deze casus ook.
- [2] Coxeter, H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*
- [3] Sterker nog: voor alle 'sfeerachtige' polytopen in de n -dimensionale ruimte R_n geldt dat $A(n)$ de waarden 0 en 2 heeft al naar gelang n even of oneven is.
- [4] Een hyperkubus in R_n kan zó met absolute waarden worden gedefinieerd:
 $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = 1$

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

VIJFTIG

Ik berijm vaak mooie dingen,
vijftig is een prachtig iets,
vijftig wil ik graag bezingen,
maar op vijftig rijmt er niets.

Was ik als Romein geboren,
ja, dan had ik vast al snel
met een versje kunnen scoren,
want er rijmt heel veel op L.

Als je vijftig jaar wordt, vrienden,
en je Abraham dus ziet,
kun je wél de mosterd vinden,
maar een vijftig-rijmklank niet.

Toch kan ik het maar niet laten.
Als ik vijftig nou eens schrijf,
als de som van twee kwadraten:
een en zeven; vijf en vijf?

Of als ik eens tweedemachtig
drie, vier, vijf tezamen boek?
Dat is vijftig. Ja, waarachtig,
maar het brengt niet wat ik zoek.

Het atoomnummer van tin en
halve eeuw en gouden paar.
Scheur nooit ruig een dorpskern binnen,
rem en rijd max. vijftig daar.

Fifty ways to leave your lover,
vijftig plaatsen in een bus,
korrel vijftig schuurt wat grover,
fiftyfifty, vijftig-plus.

Wespentaille, grote voeten,
statental van de VS,
rijden-zonder-fietslichtboete,
de minuten van een les.

Dit is balen, want ik schrijf tig
varianten na elkaar,
maar er rijmt echt niets op vijftig.
Ik haak af, bekijk het maar!

Marjolein Kool



De dichtbundel *Wis- en natuurlyriek* van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid.

Formules, vergelijkingen en identiteiten: gelijk of niet?!

oor de meesten van ons is het verschil tussen een formule, een vergelijking of een identiteit al lastig onder woorden te brengen. Sjef van Dongen doet een poging de verschillen op een rijtje te zetten. Of we de ‘ $\equiv$ ’ en de ‘?’ als vervanger van de ‘=’ ook gaan gebruiken? Het zet ons in ieder geval zélf aan het denken en daar heeft onze leerling áltijd voordeel van.

Inleiding

Terecht constateert Johan Leurgans (*Euclides* 96-5) dat leerlingen door het aparte taalgebruik in wiskundeboeken in de problemen kunnen komen. Wiskundeleerboeken bevatten naast bekende alledaagse begrippen voor brugklassers ook nieuwe karakteristieke wiskundige woorden en symbolen. Een goede communicatie tussen boek, leraar en leerling is slechts mogelijk als de gebruikte uitdrukkingen, woorden en symbolen duidelijk gedefinieerd zijn. Het belang van een duidelijke omschrijving van nieuwe woorden en symbolen in de wiskundeboeken mag niet worden onderschat. Naar mijn idee is dat een kenmerk van een exact vak. Met name de woorden ‘formule’^[1] en ‘vergelijking’ worden nogal ruim geïnterpreteerd. Ook het ‘= - teken’ wordt in diverse uitdrukkingen gebruikt, met verschillende betekenissen. In dit artikel wil ik een poging doen de woorden ‘formule’, ‘vergelijking’ en ‘identiteit’ in een wiskundig kader nader te omschrijven.

Wat is een formule?

Het *Van Dale Groot Woordenboek der Nederlandse Taal* (*Van Dale*)^[2] geeft zes definities van het woord ‘formule’:

- een geheel van woorden en zinnen in vaste vorm bij bepaalde (ambtelijke) handelingen gebruikt of uitgesproken
- korte vorm waarin beginsel, een standpunt, een overeenkomst, enz. wordt neergelegd
- te volgen aanpak
- (wiskunde) in tekens (letters) uitgedrukte waarden of samengestelde grootheid
- (chemie) letter- en cijfervorm die de samenstelling van een stof uit elementen aanduidt
- een omschrijving van vastgestelde eisen voor motoren en motorraces

‘Formule’ blijkt steeds in verband gebracht te worden met redelijk nauwkeurig omschreven omstandigheden: de *context*.^[3] In de exacte vakken worden meer of minder complexe situaties gemodelleerd. De kern van modelleren is het maken van benaderingen. Dit komt in opgaven regelmatig terug. Denk in het vak natuurkunde bijvoorbeeld aan een zin als ‘in deze situatie kun je de luchtweerstand verwaarlozen’. Het *model*.^[4] dat ontworpen wordt, is een meer of minder nauwkeurige afspiegeling van de werkelijkheid. Bij het te ontwerpen model spelen over het algemeen minder *grootheden*^[5] een rol dan in de reële context. De wijze waarop de grootheden in het model samenhangen kan worden beschreven met woorden of met symbolen. In het laatste geval moet nauwkeurig omschreven worden wat met de symbolen wordt bedoeld. Wordt het verband tussen samenhangende grootheden in een model met woorden weergegeven dan spreekt men van een *wet* of een *stelling*. Men spreekt van een formule als het verband wordt beschreven met behulp van wiskundige symbolen en letters. Een formule hoort bij een *model*.^[4] Is het model ideaal dan *voldoen*^[6] de meetresultaten in de reële context aan de formule (de voorwaarde). Zo komen we tot een mogelijke definitie van het begrip formule in de vakken natuurkunde en wiskunde.

Een natuurkundige formule

Een natuurkundige formule is een *voorwaarde* waaraan de waarden^[7] van in het model^[4] samenhangende grootheden voldoen^[6] en is bondig opgeschreven met wiskundige symbolen en letters voor (de waarden van) die grootheden.^[8]

>

Voorbeelden

De wet van Archimedes luidt:

De opwaartse kracht die een lichaam in een vloeistof of gas (het model) ondervindt is even groot als het gewicht van de verplaatste hoeveelheid vloeistof of gas.

De formule van Archimedes luidt:

$$F_A = \rho \cdot V_v \cdot g$$

de samenhangende grootheden zijn:

F_A : de opwaartse kracht in Newton

ρ : de soortelijke massa van de vloeistof in kilogram per m³

V_v : het volume van de verplaatste vloeistof in m³

g : de valversnelling op aarde in Newton per kilogram.

De algemene gaswet:

Bij een afgesloten hoeveelheid ideaal gas zijn de volgende vijf grootheden samenhangend: de druk (p in Newton per m²), de temperatuur (T in Kelvin), het volume (V in kubieke meter), het aantal moleculen (n in mol) en de gasconstante (R in Joule per Kelvin per mol). Het verband tussen de vijf grootheden is lastig met woorden te omschrijven.

Voor een formulevorm van de algemene gaswet kan gekozen worden uit een serie gelijkwaardige formules.

$$\frac{pV}{T} = nR, \quad pV = nRT, \quad \frac{pV}{nT} = R, \quad n = \frac{pV}{RT}, \quad T = \frac{pV}{nR} \text{ enz.}$$

Een wiskundige formule

Een wiskundige formule is een *voorwaarde* waaraan samenhangende variabelen in een gegeven wiskundig model ^[4] voldoen ^[6], en is opgeschreven met wiskundige symbolen en letters voor de variabelen.

Voorbeelden

De stelling van Pythagoras:

Bij een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de twee korte zijden gelijk aan het kwadraat van de lange zijde.

De formule van Pythagoras luidt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

a : de lengte van de eerste rechthoekszijde

b : de lengte van de tweede rechthoekszijde

c : de lengte van de schuine zijde

De formule van Euler voor veelvlakken luidt:

$$H - R + Z = 2$$

H : het aantal hoekpunten

R : het aantal ribben

Z : het aantal zijden

Eigenschappen van een formule

- Een formule is altijd waar, omdat
 - het een definitie betreft: bijv.
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
 - de ervaring dit heeft uitgewezen (tweede wet van Newton: $F = m \cdot a$),
 - de formule voortkomt uit al bestaande formules.
- Na het in de formule opnemen van de waarden van in het model samenhangende variabelen ontstaat altijd een ware bewering.
- Is de waarde van slechts één van de samenhangende variabelen onbekend dan is de waarde daarvan met de formule te achterhalen.

Voorbeelden van toepassingen van formules in de onderbouw

- In de wiskunde worden de coördinaten van punten, afgeleide waarden, richtingscoëfficiënten, vectoren enzovoort als variabelen aangemerkt. De x - en y -coördinaat van een punt $P(x, y)$ dat tot een rechte lijn behoort moeten aan een eis voldoen, anders gezegd: er hoort een formule bij de lijn. De formule bij een rechte lijn door de punten $A(4, 12)$ en $B(6, 16)$ kan zijn: $2x - y = -4$ of $y = 2x + 4$
Conclusie:
 - Een punt $P(x, y)$ waarvan de x - en y -coördinaten voldoen aan deze formule hoort bij de lijn en omgekeerd.
 - Is van een punt $P(x, y)$ bekend dat het tot de lijn behoort dan kan met de formule de y -coördinaat berekend worden als de x -coördinaat bekend is en omgekeerd.
- Gaat de rechte lijn door de punten $C(4, 10)$ en $D(4, 25)$ dan is $x = 4$ een formule bij deze lijn.
- Omvat het model de snijpunten $S(x, y)$ van een parabool en de x -as, dan voldoen de variabelen x en y aan de formules: $ax^2 + bx + c = y$ én $y = 0$ ofwel $ax^2 + bx + c = 0$.
De abc -formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ is gelijkwaardig aan de formule $ax^2 + bx + c = 0$.

uitdrukking	gedaante	te lezen als
formule	 =	 is altijd gelijk aan
vergelijking	... =? ... of ... ? ^[15] ...	 vergeleken met
identiteit	 $\equiv$	 is te vervangen door

tabel 1

Wat is een vergelijking?

Volgens Van Dale^[2] is een 'vergelijking' een bepaling van de overeenkomsten en verschillen. En 'vergelijken' is het naast elkaar plaatsen om te kunnen oordelen over overeenkomst en verschil. In een wiskundige vergelijking worden de uitkomsten^[9] van rekenrecepten^[10] met elkaar vergeleken.

De algemene vorm van een wiskundige vergelijking is: Linkerlid = rechterlid, waarbij zowel het linker- als het rechterlid bestaat uit getallen of rekenrecepten met één variabele.

In tegenstelling tot een formule, die altijd waar is, is een vergelijking een bewering die soms, altijd of nooit waar kan zijn.

$$2x^2 - 3x = x(x + 6): \quad \text{soms waar}$$

$$(a + 3)(a - 3) = a^2 - 7: \quad \text{nooit waar}$$

$$2(a + 5) = 2a + 10: \quad \text{altijd waar}$$

Bij een vergelijking hoort de opdracht: Los op!^[11] Hiermee wordt bedoeld: zoek naar alle waarde(n)^[7] van de variabele die na invullen leid(t)(en) tot dezelfde uitkomsten in beide leden. De waarde(n) die aan deze eis voldoe(t)(n) noemt men de oplossing(en) van de vergelijking.

Vergelijkingen worden meestal opgelost door ze te vervangen door equivalenten vergelijkingen^[12] die steeds eenvoudigere vormen aannemen. Equivalenten vergelijkingen worden bijvoorbeeld verkregen met de 'balans-methode', en/of via het herleiden^[13] van linker- en/of rechterlid.

Wat is een identiteit?

Volgens Van Dale^[2] wordt met een identiteit onder andere een 'volkomen overeenkomst' bedoeld.

Een identiteit in de wiskunde is een altijd ware bewering.

Een identiteit is altijd waar omdat:

— er sprake is van een definitie bijvoorbeeld:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ of } a + a = 2a$$

— de identiteit via een herleiding^[13] is ontstaan:

$$(ab)^2 = (ab)(ab), \quad (ab)(ab) = a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b, \quad a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2 b^2 \text{ dus } (ab)^2 = a^2 b^2.$$

Formules en identiteiten zijn beide altijd ware beweringen, de uitkomsten^[9] in linker- en rechterlid zijn altijd gelijk.

Bij formules worden echter voorwaarden getoond waaraan genoemde grootheden (variabelen) moeten voldoen, identiteiten tonen vervangende bewerkingen. Een identiteit is te onderscheiden van een formule door het '='-teken' te vervangen door een *triple bar*.^[14] De bovengenoemde identiteit zou op de volgende manier te onderscheiden zijn van een formule: $(ab)^2 \equiv a^2 b^2$ en wordt gelezen als $(ab)^2$ is te vervangen door $a^2 b^2$.

Conclusie

Voor onervaren leerlingen die met wiskundige teksten worden geconfronteerd is het lastig om de uitdrukkingen 'formule', 'vergelijking' en 'identiteit' van elkaar te onderscheiden. Het zou al helpen het '='-teken' niet in alle drie de uitdrukkingen te gebruiken. Tabel 1 geeft een mogelijke oplossing.

Voor de voetnoten bij dit artikel:

 vakbladeuclides.nl/975formule

Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna was hij 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent. E-mailadres: jjacvandongen@hotmail.com

Tentoonstelling 'Kunst en Wiskunde' in virtueel Musée Tesseract



Stichting Ars et Mathesis organiseert een tentoonstelling 'Kunst en Wiskunde' in haar virtuele Museum Tesseract. Het museum is 24/7 open. De toegang is gratis. Ga naar <https://www.arsetmathesis.nl/virtueel-museum-tesseract/>. Open daar de handleiding met korte uitleg over hoe je door het museum kunt bewegen. In die handleiding vind je ook twee links naar de toegang van het museum. Naast 2D-werk aan de wanden zijn er 3D objecten die je van alle kanten, van onder en boven en soms van binnen kunt bekijken. Hier en daar kun je voor extra informatie over het getoonde werk op een info-button klikken. Het bestuur van Ars et Mathesis wenst je veel kijkplezier. Bron: *Ars et Mathesis*

Hans de Rijk (Bruno Ernst) overleden



Hans de Rijk, beter bekend onder het pseudoniem Bruno Ernst, is 23 november op 95-jarige leeftijd overleden. Zijn leven stond in het teken van het wekken van belangstelling voor wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde.

Hans de Rijk was leraar wiskunde, natuurkunde en kosmografie. Hij stond in 1961 onder meer aan de wieg van het wiskundetijdschrift *Pythagoras* en richtte samen met professor Van der Blij in 1983 de stichting *Ars et Mathesis* op. Van zijn hand verschenen ook tal van boeken, waarvan *De toverspiegel van M.C. Escher* vermoedelijk het bekendste is. Tien jaar geleden verscheen de derde druk van *De interessantste*

bewijzen voor de stelling van Pythagoras, waarin Hans de Rijk 29 bewijzen van de stelling van Pythagoras op een verrassende manier besprak. In 2008 verscheen *Zebra-27 Kunst en wiskunde* dat hij samen met Ton Konings schreef. In datzelfde jaar ontving hij de Eurekaprijs van de NWO voor zijn werk op het gebied van wetenschapscommunicatie. Wiskunde was slechts een van de terreinen waarop Hans de Rijk zich bewoog. Hij heeft ook veel betekend voor de popularisering van de natuurkunde en de sterrenkunde. Zijn lijfspreuk was 'Nescius omnium curiosus sum' ('Ik weet niets maar ben nieuwsgierig naar alles'). In *Euclides* 76-0 is een interview met Bruno Ernst gepubliceerd. Dit interview geeft een mooi beeld van deze markante persoonlijkheid.

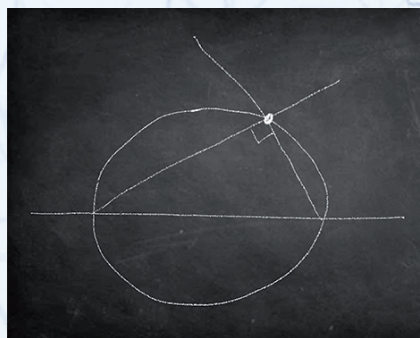
Bron: <https://www.vvw.be/nederlander-hans-de-rijk-op-95-jarige-leeftijd-overleden/>

Meetkundevraagstuk van Russische minister

De stelling van Napoleon, het bewijs van Multatuli van de stelling van Pythagoras: voorbeelden van wiskundig werk van bekende niet-wiskundigen. In *The Guardian* van 20 september 2021 voegde Alex Bellos hier nog een naam aan toe. Mikhail Mishustin, premier van Rusland, bezocht een wiskundeles op een school in Dolgoprudny (20 km ten noorden van Moskou). Tijdens dat bezoek presenteerde hij het volgende meetkundevraagstuk:

Gegeven een cirkel, een middellijn en een punt op de cirkel. Construeer met enkel een liniaal door dat punt een loodlijn op de diameter.

Bellos laat in *The Guardian* een foto zien van een tekening op het bord waarin Mishustin de lijnen tekent die het gegeven punt verbindt met de eindpunten van de middellijn en de rechte hoek daartussen.

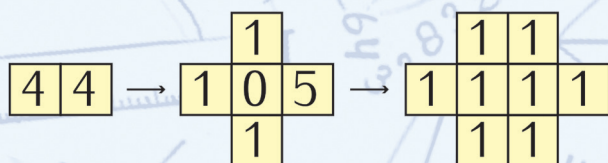


Ook geeft Bellos nog een hint: de drie hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt. Als je na wat puzzelen de

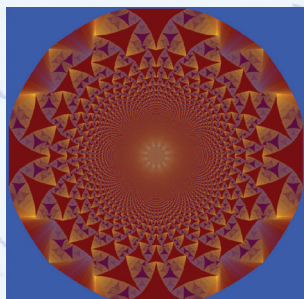
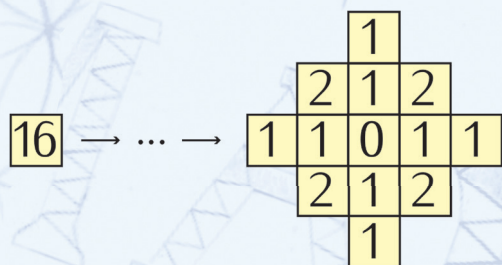
oplossing niet kunt vinden, kijk dan in onderstaande bron.
Bron: blogs.ams.org/mathmedia/tonys-take-october-2021/

Hopen graankorrels geven kunstwerk

Stel je voor dat je op een ruitjesblad een hoop graankorrels hebt liggen. Op elk ruitje kunnen maximaal drie korrels liggen. Komt er een vierde bij, dan worden de vier korrels verdeeld over de vier buurruitjes. Als we bijvoorbeeld beginnen met twee buurruitjes met vier graankorrels op een verder leeg blad, dan krijgen we het volgende:



Het linkerruitje verliest zijn vier korrels aan zijn buurruitjes, waarna ook het rechterruitje vier van zijn korrels verliest. Overigens maakt de volgorde waarin de ruitjes het teveel aan korrels verliezen niet uit. Als we beginnen met zestien korrels op een enkel ruitje, dan gebeurt het volgende:



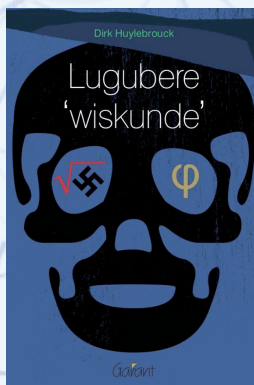
En als we beginnen met ongeveer een miljoen korrels?

Dan krijgen we een plaatje als hiernaast, gemaakt door Wes Pegden, professor wiskunde op de Carnegie Mellon Universiteit van Pittsburgh. Hierbij wordt

een ruitje zonder korrels blauw gekleurd, met een korrel lichtblauw, met drie korrels geel en met vier korrels bruin. Pegden heeft op zijn website (<https://www.math.cmu.edu/~wes/sandgallery.html>) meer van dit soort interactieve plaatjes.

Bron: blogs.ams.org/mathmedia/tonys-take-october-2021/

Lugubere wiskunde



In het boek met als titel *Lugubere wiskunde* beschrijft Dirk Huylebrouck hoe wiskunde werd misbruikt onder meer door de nazi's en zelfs door Le Corbusier. De nazi's misbruikten wiskunde in de lessen door bijvoorbeeld de volgende vraagstukken in de schoolboeken op te nemen: 'Duitsland besteedt 300.000 Reichsmark aan ziekenhuiskamers voor psychiatrische patiënten.

Hoeveel leningen zijn dat aan gezinnen om een huis te kopen? Le Corbusier beschouwde 'de gulden snede' als dé verhouding van schoonheid. Een gebouw moest daaraan voldoen om mooi te zijn. Zo kun je ook meten of een persoon 'mooi' is. Le Corbusier vond deze verhouding niet terug bij joden en zwarten uit Equatoriaal Afrika. Zo staan er nog meer voorbeelden in het boek over hoe wiskunde in kunst wordt gebruikt en misbruikt.

Bron: www.vwvl.be/lugubere-wiskunde-met-dirk-huylebroeck/

Algoritme van 14-jarige voor vinden anti-priemgetallen



De 14-jarige Akilan Sankaran (Albuquerque, New Mexico) heeft een algoritme ontwikkeld waarmee hij snel anti-priemgetallen (getallen met veel priemfactoren) kan vinden. Hij gebruikt een functie waarvan het beeld van een getal afhangt van de priemfactorontbinding van dat getal. Het programma dat Sankaran schreef produceerde verbijsterend grote anti-priemgetallen in korte tijd. Sankaran won hiermee een prijs van \$25.000 in de Broadcam Masters, een Amerikaanse wedstrijd voor middelbare scholieren.

Bron: <https://blogs.ams.org/mathmedia/math-digests-november-2021/>

Van taxicab-getallen en algebraïsche raaklijnen

In *Euclides* 96-3 beschrijft Martin Kindt een klassieke meetkundige methode om pythagoreïsche drietallen te maken. In dit artikel kijkt Rogier Bos of deze methode verder kan worden gevoerd.

Dit levert een verrassende weg op langs getaltheorie, meetkunde, algebra en analyse!

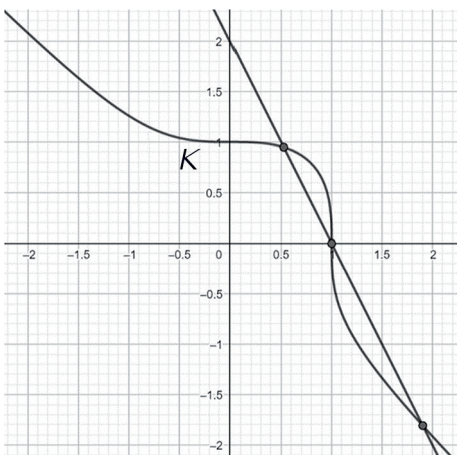
Inleiding

De methode die Martin Kindt beschreef, is kort samengevat: rationale oplossingen $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{m}{n}$ van de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ geven gehele oplossingen $a = pn$, $b = qm$ en $c = qn$ van $a^2 + b^2 = c^2$.

Die rationale oplossingen kun je maken door een waaier van lijnen door $(0, -1)$, geparametriseerd door een rationale richtingscoëfficiënt, te snijden met de eenheidscirkel. Het andere snijpunt heeft dan ook rationale coördinaten.

Hogere machten

Laten we deze strategie ook eens proberen voor de vergelijking $a^3 + b^3 = c^3$. Zoals hierboven geeft een rationale oplossing van $x^3 + y^3 = 1$ een gehele oplossing voor $a^3 + b^3 = c^3$. De kromme K bij $x^3 + y^3 = 1$ bevat het punt $(1, 0)$, waardoor we net als zojuist een waaier van lijnen kunnen maken, geparametriseerd door een rationale richtingscoëfficiënt t : $y = t(x - 1)$.



figuur 1

Substitutie geeft $x^3 + t^3(x - 1)^3 - 1 = 0$, een derdegraads vergelijking in x , waarvan we één oplossing al

kennen, namelijk $x = 1$. Je zit nu vast te popelen om beide zijden te delen door $x - 1$ en de verkregen tweede-graads vergelijking op te lossen. Ik houd je niet tegen; het oogstrelende antwoord is:

$$x = \frac{-(1-2t^3) \pm \sqrt{(1-2t^3)^2 + 4(1+t^3)^2}}{2(1+t^3)}$$

Om dit, vanwege het wortelteken, direct af te serveren als irrationaal gaat te ver, maar het belooft voor de meeste waarden van t niet veel goeds.

Bij de eenheidscirkel had het andere snijpunt gegarandeerd rationale coördinaten. Dit is het gevolg van een mooie eigenschap van kwadratische vergelijkingen met rationale coëfficiënten: als één nulpunt rationaal is, dan is het andere dat ook. Bewijs: stel de oplossingen zijn x_1 en x_2 .

Schrijf de vergelijking als

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) =$$

$$ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1x_2$$

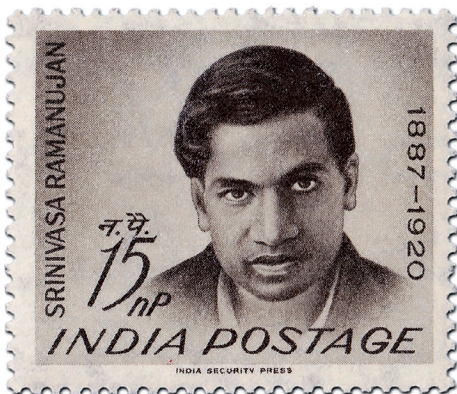
Dan zie je dat $c = ax_1x_2$. Zijn a , c en x_1 rationaal, dan is x_2 het ook. In feite volstaat het dus als de eerste en laatste coëfficiënt rationaal zijn.

Op dezelfde wijze geldt voor een derdegraads vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ met oplossingen x_1, x_2 en x_3 , dat $d = -ax_1x_2x_3$. Nu is de rationaliteit van a , d en één nulpunt niet voldoende. Pas bij rationaliteit van twee nulpunten is de derde ook rationaal. Helaas zijn de enige twee rationale nulpunten die we a priori hebben $(1, 0)$ en $(0, 1)$, en de lijn hierdoor levert helaas geen derde snijpunt op.

Deze methode lijkt voor de vergelijking $a^3 + b^3 = c^3$ dus geen vruchten af te werpen. Voor degenen die bekend zijn met de laatste stelling van Fermat is dat geen verrassing. Euler bewees al in 1760 dat deze vergelijking geen niet-triviale oplossingen heeft (en Andrew Wiles enkele eeuwen later voor alle gehele exponenten groter dan 2). Kunnen we deze meetkundige aanpak voor derdemachten bij het grofvuil zetten? Natuurlijk niet, anders was dit artikel er niet.

Taxicab-getallen

Het favoriete getal van Ionica Smeets schijnt 1729 te zijn. Dat heeft te maken met een anekdote over Srinivasa Ramanujan (1887-1920), een beroemde Indiase, autodidactische wiskundige van de buitenklasse.



figuur 2 Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

In 1913 zocht Ramanujan contact met de gezaghebbende Engelse wiskundige Godfrey Hardy. Deze was flabbergasted door de resultaten die Ramanujan hem per brief toestuurde en nodigde hem uit voor een samenwerking in Engeland. In deze periode vond het volgende voorval plaats. Ramanujan was ziek en Hardy kwam bij hem op bezoek. In Engeland waren de taxi's in die tijd genummerd en de taxi van Hardy had het getal 1729. Bij binnenkomst toonde Hardy zich teleurgesteld dat dit zo'n saai getal was. Hierop sprak Ramanujan: "No, it is a very interesting number; it is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways."



figuur 3 Een oud-Engelse taxi met nummer 1729
(uit de film *The man who knew infinity*)

Dat klopt natuurlijk, anders was het geen sterke anekdote: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Het is de kleinste gehele oplossing van de vergelijking $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. Deze werd al in 1657 beschreven door Bernard Frénicle de

Bessy. Sta je ook negatieve gehele getallen toe, dan kun je nog kleiner gaan: $3^3 + 4^3 = 6^3 + (-5)^3$, of heel flauw, $(-2)^3 + 2^3 = (-1)^3 + 1^3$.

Kun jij, lezer, het kleinste getal vinden dat op twee manieren als som van twee kwadraten geschreven kan worden? Het is onder de 60. Getallen die op twee manieren als som van twee kwadraten geschreven kunnen worden, kun je vinden door rationale punten op de hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ te construeren met de methode uit het artikel van Martin Kindt. Als we deze meetkundige methode ook voor het kubische geval willen gebruiken moeten we hem enigszins aanpassen. Daartoe kijken we eerst met algebraïsche blik naar raaklijnen.

Algebraïsche raaklijnen

De gangbare manier om vergelijkingen voor raaklijnen te fabriceren is, à la Newton en Leibniz, middels de afgeleide. Maar hun wiskundige voorgangers, waaronder Fermat, Descartes en Hudde, konden dat ook al, maar dan op algebraïsche wijze. Laten we bijvoorbeeld kijken wat er algebraïsch gebeurt, als de lijn bij $y = 3x - 2$ de grafiek bij $y = x^3$ raakt in $(1, 1)$. De vergelijking $x^3 = 3x - 2$ kun je herschrijven als $(x - 1)^2(x + 2) = 0$. Oftewel, $x = 1$ is een oplossing, met multipliciteit 2. Het is misschien geen verrassing: de raaklijn maak je uit een tweemaal snijdende lijn door het ene snijpunt naar het andere toe te schuiven tot ze op elkaar vallen: dan is een 'raakpunt' dus een dubbel snijpunt. Dit werkt algebraïsch prima als definitie van raken: de lijn beschreven door $y = ax + b$ raakt de grafiek van de veelterm p in (x_0, y_0) als x_0 een oplossing met multipliciteit van tenminste 2 is van de vergelijking $p(x) = ax + b$, zie het kader hieronder. Eigenlijk vormt deze invalshoek een veel toegankelijker toegang tot afgeleiden voor leerlingen dan via limieten, aangezien zij in de onderbouw uitgebreid stilstaan bij het oplossen van veeltermvergelijkingen.^[1] Helaas werkt dit dus niet voor transcendente functies...

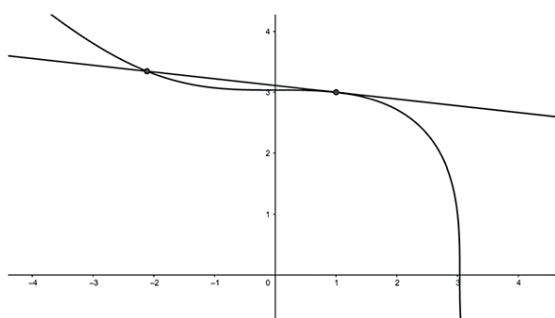
Bepaal de afgeleide van $y = x^3$ in het punt (a, a^3) .

Een lijn door dit punt wordt beschreven door de vergelijking $y - a^3 = m(x - a)$.

De vergelijking $x^3 - a^3 = m(x - a)$ is om te schrijven tot $(x - a)(x^2 + ax + a^2 - m) = 0$. De oplossing $x = a$ heeft multipliciteit 2, als de rechterfactor nog een factor $(x - a)$ heeft; oftewel als die gelijk aan nul is als $x = a$. Dit is precies het geval als $m = 3a^2$. Dus de helling in (a, a^3) is $3a^2$. Uitdaging voor de lezer: doe dit ook zo voor $y = x^n$, met n positief geheel.

>

En dan nu aan de slag. De raaklijnen aan de kromme $K: x^3 + y^3 = 1$ in de triviale rationale punten $(1, 0)$ en $(0, 1)$ snijden K niet nogmaals. Daarom wijken we uit naar een willekeurig geheel punt $(1, 3)$. Dat ligt niet op K , maar op een kromme waar we wel verder mee kunnen: $x^3 + y^3 = 28$ (dus het punt bepaalt hier de kromme waarmee we verder gaan). Dit kunnen we herschrijven als $y = \sqrt[3]{28 - x^3}$, met afgeleide $\frac{dy}{dx} = -x^2(28 - x^3)^{-\frac{2}{3}}$. De helling in $(1, 3)$ is dus $-\frac{1}{9}$ en de raaklijn $y = -\frac{1}{9}(x - 1) + 3$.



figuur 4

Nu berekenen we het andere snijpunt, zie figuur 4. Substitueren geeft $x^3 + (-\frac{1}{9}(x - 1) + 3)^3$. Maar: bezint eer je begint! Voordat we dit uitwerken en de derdegraads vergelijking oplossen, herinneren we ons wat we net gelezen hebben over de situatie dat je twee oplossingen al kent. We hebben dus slechts de eerste en de laatste coëfficiënt nodig. Dat zijn $\frac{728}{729}$ en $\frac{1540}{729}$; met $x_1 = 1 = x_2$ vinden we $\frac{1540}{729} = -\frac{728}{729} \cdot 1 \cdot x_3$. Conclusie: $x_3 = -\frac{1540}{728} = -\frac{55}{26}$, met bijbehorende $y_3 = \frac{87}{26}$.

En, olé, inderdaad $(-\frac{55}{26})^3 + (\frac{87}{26})^3 = 28 = 1^3 + 3^3$,

waaruit volgt: $(-55)^3 + 87^3 = 26^3 + 78^3$.

Natuurlijk heb je nu de smaak te pakken. Niets houdt je tegen vanuit $(-\frac{55}{26}, \frac{87}{26})$ met een nieuwe raaklijn hetzelfde procedé te doorlopen. Dat leidt tot het imponerende $21446828^3 + 64340484^3 = 63284705^3 + 28340511^3$.

Als je in bent voor wat algebraïsch vertier, dan doe je het met een algemeen punt (p, q) – in plaats van $(1, 3)$ – op de kromme $x^3 + y^3 = p^3 + q^3$. Je vindt dan als tweede snijpunt:

$$\left(\frac{p(p^3 + 2q^3)}{p^3 - q^3}, \frac{-q(2p^3 + q^3)}{p^3 - q^3} \right)$$

en de gelijkheid wordt dan $(p(p^3 + 2q^3))^3 + (-q(2p^3 + q^3))^3 = (p(p^3 - q^3))^3 + (q(p^3 - q^3))^3$ waarin, na substitutie van getallen, eventueel de grootste gemene deler van de getallen uitgedeeld kan worden. Een korte inspectie leert dat in deze gelijkheid altijd ten minste één van de termen negatief is.

Zodra je twee rationale punten A en B hebt gevonden op een kromme bij $x^3 + y^3 = n$ zo dat AB niet raakt, maar driemaal snijdt, dan is dit derde snijpunt C opnieuw rationaal. Het gespiegelde punt van C in de lijn $y = x$ ligt ook op de kromme en kan genoteerd worden als $A + B$, want de rationale punten blijken onder deze bewerking een Abelse groep te vormen.^[2] Volgens de stelling van Mordell (over elliptische krommen over $\mathbb{Q}$) is deze groep eindig voorgebracht – dus met een goedgekozen eindig aantal rationale punten (x, y) kun je, al rekenend met deze plus, de rest vinden. En hiermee staat de deur naar de moderne algebraïsche meetkunde op een uitnodigend kiertje. Voor de leerlingen nemen we mee: een toegankelijke algebraïsche insteek bij afgeleiden en raaklijnen, en een mooie anekdote over een mysterieuze wiskundige.

Met dank aan Martin Kindt en Theo van den Bogaart.

Noten

- [1] Zie: Michael Range, R. (2018). Using high school algebra for a natural approach to derivatives and continuity. *The Mathematical Gazette*, 102(555), 435-446. <https://doi.org/10.1017/mag.2018.110>
- [2] Zie: Silverman, J. (1993). Taxicabs and Sums of Two Cubes. *The American Mathematical Monthly*, 100(4), 331-340. <https://doi.org/10.2307/2324954>

Over de auteur

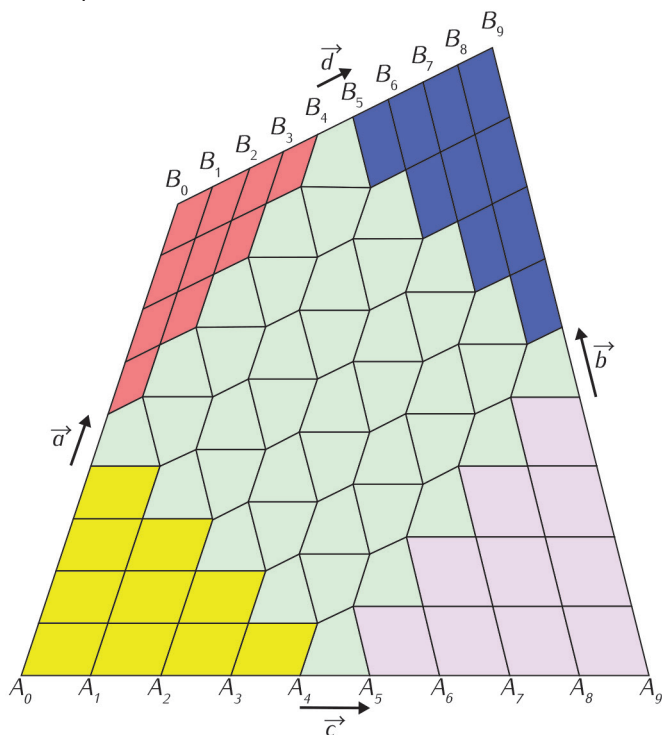
Rogier Bos werkt als universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en is redactielid van de *Euclides*. E-mailadres: r.d.bos@uu.nl

Regelmaat in een onregelmatige vierhoek

Vroeger was een vierhoek in het meetkundeonderwijs meestal een vierkant, ruit, rechthoek, parallellogram, vlieger of trapezium. Het schoolbord leende zich niet voor meer ingewikkelde figuren. De computer is daar wel geschikt voor. In alle vierhoeken zijn parallellogrammen te construeren. Waarom zijn er steeds evenveel gele als blauwe?

Parallellogramverdeling

In de vierhoek van figuur 1 zijn elk van de zijden verdeeld in negen gelijke delen. Beschouw deze figuur als een stratenplan.



figuur 1^[1]

De kortste wandeling van A_0 naar B_0 is $9\vec{a}$. De kortste wandeling van A_1 naar B_1 is $4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{a} = 8\vec{a} + \vec{b}$. De kortste weg van A_2 naar B_2 is $3\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{a} = 7\vec{a} + 2\vec{b}$. Steeds wordt een $\vec{a}$ ingeruild voor een $\vec{b}$. Deze regelmaat is met vectorrekening te berekenen, zie daarvoor deze toelichting.^[2]

De vierhoek in figuur 1 is een $(2n + 1) \times (2n + 1)$ verdeling waarbij $n = 4$. Er zijn meer dan 360 000 verschillende

9×9 -verdelingen, maar die van figuur 1 is uniek. Het is de enige uit de 9×9 verzameling die meer groene vlakken heeft dan alle anders gekleurde vlakken bij elkaar. Stel namelijk dat er een verdeling was met vijf in plaats van drie groene vlakken in de tweede kolom (het aantal groene vakken per kolom is oneven), dan zou het aantal $\vec{b}$'s van A_2 naar B_2 meer dan twee zijn, en dat klopt niet met de eerder gemaakte berekening. Eenzelfde argument geldt voor alle andere kolommen.

Het aantal groene vlakken in de figuur is $(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + (7 + 5 + 3 + 1) = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$.

Het aantal niet-groene stukjes is $4(1 + 2 + 3 + 4) = 4 \times 10 = 40$.

Dus $41 + 40 = 81 = 9^2$. In het algemeen geldt:

$$(2n + 1)^2 = [(n + 1) + n]^2 = (n + 1)^2 + n^2 + 2n(n + 1).$$

In een $(2n + 1) \times (2n + 1)$ verdeling is het maximale aantal groene vlakken gelijk aan $(n + 1)^2 + n^2$. Het aantal overige vlakken is gelijk aan $4[\frac{1}{2}n(n+1)] = 2n(n + 1)$.

Het verschil tussen het aantal groene vlakken en de overige vlakken is

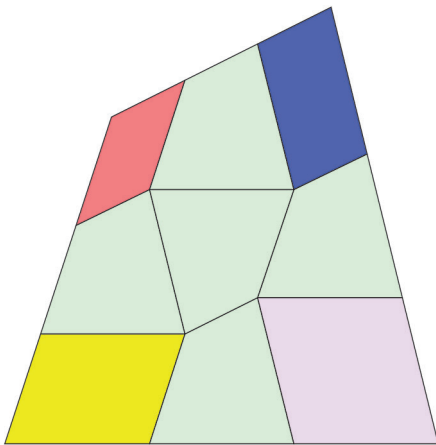
$$(n + 1)^2 + n^2 - 2n(n + 1) = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n^2 - 2n = 1,$$

dus onafhankelijk van n .

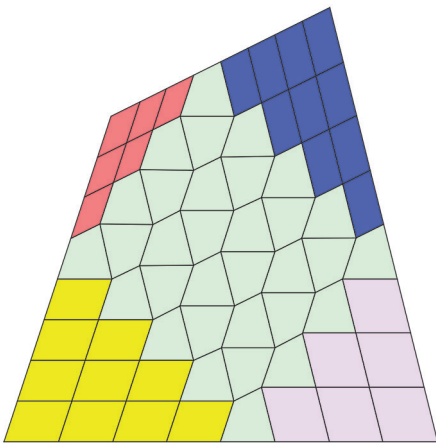
In de (3×3) verdeling in figuur 2 is het aantal groene vlakken ook maximaal, namelijk $1^2 + 2^2 = 5$.

Bij een $(2n \times 2n)$ verdeling kan op een analoge manier worden nagegaan dat nu het maximale aantal groene vlakken gelijk is aan $2n^2$, de helft van het totaal. Ook hier is gebruik gemaakt van het feit dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n^2 .

>

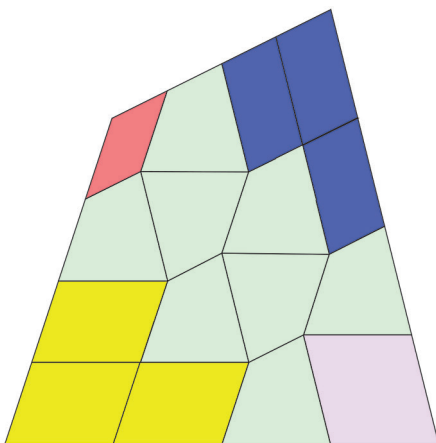


figuur 2



figuur 3

De (8×8) verdeling in figuur 3 met $n = 4$ heeft $2(1 + 3 + 5 + 7) = 2(4^2) = 32$ groene vlakken, de helft van $8 \times 8 = 64$.

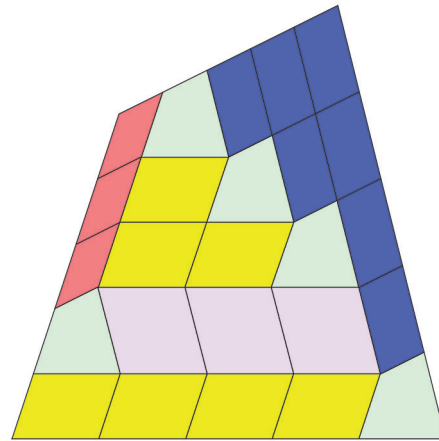


figuur 4

Ook de (4×4) verdeling in figuur 4 heeft het maximale aantal groene vlakken: $2^2 + 2^2 = 8$.

Onregelmatige verdelingen

De meeste verdelingen zijn erg onregelmatig, zoals de (5×5) verdeling in figuur 5.



figuur 5

Deze verdeling heeft het minimum aan groene vlakken en dat is vijf, in elke kolom en rij precies één. In tegenstelling tot het maximum aantal groene vlakken is het minimum daarvan niet gebonden aan een specifieke figuur.

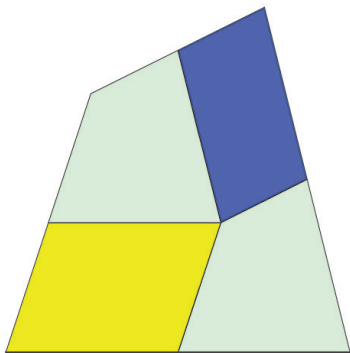
Er zijn minstens 120 (5×5) verdelingen met minimum vijf. Op vijf manieren kun je een groen vlak plaatsen in de eerste kolom. Op vier manieren in de tweede. Op 5×4 manieren in de eerste twee en zo op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ manieren in totaal.

Bij elk daarvan hoort minstens één verdeling.

Ook in deze onregelmatige (5×5) verdeling zit regelmaat. Het aantal gele vlakken is gelijk aan het aantal blauwe vlakken en het aantal rode vlakken is gelijk aan het aantal violette vlakken.

Trek, in gedachten, een diagonaal van rechtsonder naar linksboven in een groen vlak, een geel vlak en een blauw vlak. Het bovenste deel van het groene vlak is gelijk aan het bovenste deel van het blauwe vlak. Het onderste deel van het groene vlak is gelijk aan het onderste deel van het gele vlak. Omdat de diagonaal in een geel vlak twee gelijke oppervlakten geeft en zo eveneens in het blauwe vlak, kunnen we concluderen dat twee groene vlakken dezelfde oppervlakte hebben als een geel en een blauw vlak samen. Hetzelfde geldt voor een rood en een violet vlak. De gele en de blauwe vlakken hebben samen een oppervlakte van $2 \times 7 = 14$ groene vlakken. De rode en de violette vlakken hebben samen

een oppervlakte van $2 \times 3 = 6$ groene vlakken. De totale oppervlakte is $14 + 6 + 5 = 25$ groene vlakken. Dit komt overeen met het oppervlak van de grote vierhoek, die (5×5) keer zo groot als een groen vlak.

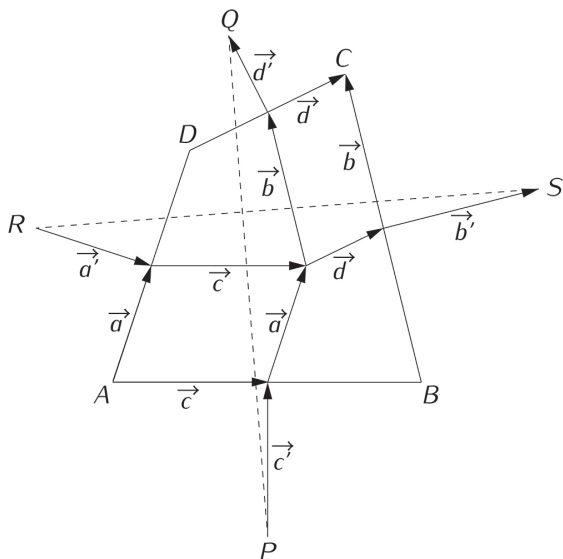


figuur 6

De stelling van Aubel

De (2×2) verdeling in figuur 6 kan worden toegepast om een bekende stelling van Aubel te bewijzen.

Zie figuur 7 waarbij vierhoek $ABCD$ de bekende vierhoek is van de bovenstaande figuren.



figuur 7

P , Q , R en S zijn de middens van vierkanten met zijden resp. AB , CD , AD en BC .

Vector $\overrightarrow{PQ} = \vec{c}' + \vec{a}' + \vec{b}' + \vec{d}'$ en vector

$\overrightarrow{RS} = \vec{a}' + \vec{c}' + \vec{d}' + \vec{b}'$. Stel dat ten opzichte van een assenstelsel, waarbij AB op de x -as ligt, geldt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

En vervolgens:

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \vec{b}' = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}, \vec{c}' = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{d}' = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}.$$

Dan geldt voor de vectoren $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{RS}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 + a_1 + b_1 - d_2 \\ c_1 + a_2 + b_2 + d_1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} a_2 + c_1 + d_1 + b_2 \\ -a_1 + 0 + d_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

Stel $u = a_1 + b_1 - d_2$ en $v = c_1 + a_2 + b_2 + d_1$,

dan volgt daaruit dat vector $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ en

vector $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$, waaruit volgt dat $\overrightarrow{PQ}$ en $\overrightarrow{RS}$ even lang zijn en loodrecht op elkaar staan.

Tegelzetters hebben geen interesse voor deze patronen, ook al worden zij vaak geconfronteerd met onregelmatige vloeren. De extreem hoge kosten zouden resulteren in onbetaalbare prijzen. Je hebt maar vijf groene, drie rode, drie gele, drie violette en drie blauwe stukjes nodig om op zeven manieren een (3×3) figuur te maken. Misschien is er een fabrikant van puzzels die de mogelijkheden ziet.

Noten

[1] De afbeeldingen zijn met het programma *Mathematica* gemaakt door Enno Diekema.

[2] $9\vec{a} + 9\vec{d} = 9\vec{c} + 9\vec{b}$. Dan volgt:
 $9(\vec{a} - \vec{b}) = 9(\vec{c} - \vec{d})$ en $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} - \vec{d}$.

$$\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_k} = \overrightarrow{A_0A_k} + \overrightarrow{A_kB_k}$$

Stel: $\overrightarrow{A_kB_k} = p \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ met $k = 1, 2, \dots, 9$.

$$9\vec{a} + k \cdot \vec{d} = k \cdot \vec{c} + p \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}.$$

Daaruit volgt:

$$9\vec{a} - p\vec{a} - r\vec{b} = k(\vec{c} - \vec{d}) = k(\vec{a} - \vec{b})$$

met $k = 1, 2, \dots, 9$.

$$(9 - p - k)\vec{a} + (k - r)\vec{b} = 0.$$

$\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben een verschillende richting, dus $9 - p - k = 0$ en $k - r = 0$.

Dan volgt: $p = 9 - k$ en $r = k$.

Over de auteur

Herman Zunneberg, ex-leraar en inmiddels 84 jaar, is nog steeds te verblijden met een uitdagend wiskundevraagstuk.
 E-mailadres: h.zunneberg@kpnmail.nl

Nederland ontwikkelingsland?

Op de jaarvergadering van de NVvW is er de laatste jaren altijd een boekenstand van het Wereldwiskunde Fonds. De doelstelling van het WwF is 'Ondersteuning van wiskunde-onderwijs dat direct of indirect ten goede komt aan leerlingen op middelbare schoolniveau in ontwikkelingslanden door middel van financiële bijdragen aan projecten.' En daarom worden er boeken verkocht.

Weet, dat er juweeltjes tussen zitten die voor weinig te koop zijn. Zo keek ik in een boekje (uit 1961 en toen was het de zesde druk) over analytische meetkunde van Dr. P.G.J. Vredenduin.

Daarin zag ik iets wat ik niet wist: de hoek tussen twee lijnen kunnen we uitrekenen met behulp van de formule in figuur 1.

Voor de hoek φ , waarover we l_2 moeten draaien om l_1 te krijgen, geldt dus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

figuur 1

Nog nooit gezien, want ik gebruik de formule

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m|}{|\vec{r}_l| |\vec{r}_m|}$$

of het verschil van de richtingshoeken. De hedendaagse formule met de $\cos(\varphi)$ is niet makkelijk om te schrijven naar een tangens.

Met de gonioformules is het gestelde makkelijk te bewijzen:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Deel nu teller en noemer door $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ en je krijgt

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

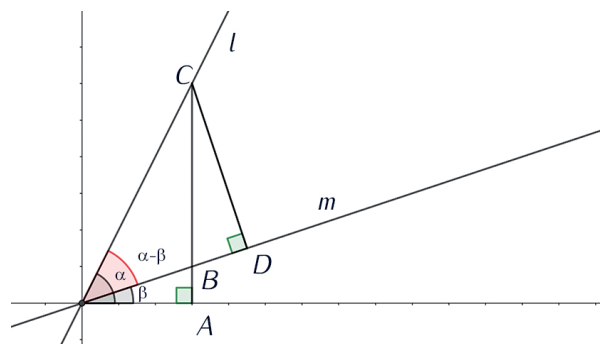
Gebruik nu dat de richtingscoëfficiënt gelijk is aan de tangens van richtingshoek en de formule is bewezen.

Maar in een meetkundeboek verwacht je een meer meetkundig bewijs. Dat ging niet vanzelf, maar gelukkig is het toetsweek en tijdens het surveilleren is er tijd genoeg om schetsjes en krabbels te maken. Het woordje *dus* triggerde me heel erg. In het boek staat het bewijs niet. Het is dus makkelijk of het wordt tot de algemene kennis gerekend. Ik moest het dus zelf doen en het lukte!

Het kan en als je het zelf wilt ontdekken, moet je nu stoppen met lezen.

Zonder het algemene geval geweld aan te doen kunnen we de lijnen door O tekenen, zie figuur 2.

De richtingshoeken zijn respectievelijk α en β en de richtingscoëfficiënten a en b .



figuur 2

We nemen $OA = 1$ en daarom is $AC = a$ en $AB = b$

$$\text{In figuur 2 kun je zien dat } \tan(\alpha - \beta) = \frac{CD}{OD} \quad (1)$$

$$\text{De stelling van Pythagoras in } \triangle ODC \text{ geeft } OD^2 = OC^2 - CD^2 = 1 + a^2 - CD^2 \quad (2)$$

Verder zien we: $\triangle BDC \sim \triangle BAO$ en dat geeft de volgende evenredigheid:

$$\frac{DC}{AO} = \frac{BC}{BO} \text{ waaruit volgt dat } DC = \frac{a-b}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Vervolgens substitueren we CD in formule (2):

$$OD^2 = 1 + a^2 - CD^2 =$$

$$1 + a^2 - \frac{(a-b)^2}{1+b^2} = \frac{(ab+1)^2}{1+b^2}$$

Nu vullen we dit in, in formule (1):

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{CD}{OD} = \frac{\frac{a-b}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{ab+1}{\sqrt{1+b^2}}} = \frac{a-b}{ab+1},$$

waarmee de formule bewezen is. Omdat de hoek tussen twee lijnen een niet-stompe hoek is, komen er nog absoluutstrepren omheen.

Eén van de doelstellingen van het Wereldwiskunde Fonds is het stimuleren van het wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Door de boekenverkoop werd ik gestimuleerd om een bewijs te geven. Op zeker moment zal ik dit ook een keer in de klas behandelen. En zo merk je maar, Nederland kunnen we ook tot de ontwikkelingslanden rekenen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

Henk Rozenhart

Dodecaëders in Amsterdam Zuid-Oost



Soms kom je in de openbare ruimte verrassende dingen tegen. Bijvoorbeeld in Amsterdam Zuid-Oost. Daar hangen aan het plafond voor de ingang van winkelcentrum Amsterdamse Poort een groot aantal dodecaëders. Het gaat hier om een kunstwerk van Karin van Dam. Zij laat zich inspireren door de verzameling zaden en planten uit de 17^e en 18^e eeuw in de

Hortus Botanicus. Het roept ook associaties op met het honingraatmotief van de oude Bijlmerflats. Daarom verkoos Van Dam de dodecaëder als basisvorm voor City Cells. De kartelrandjes zijn een beveiliging tegen duiven.

Meer over Karin van Dam: <https://www.karinvandam.com>

Benadering van een natuurlijk logaritme

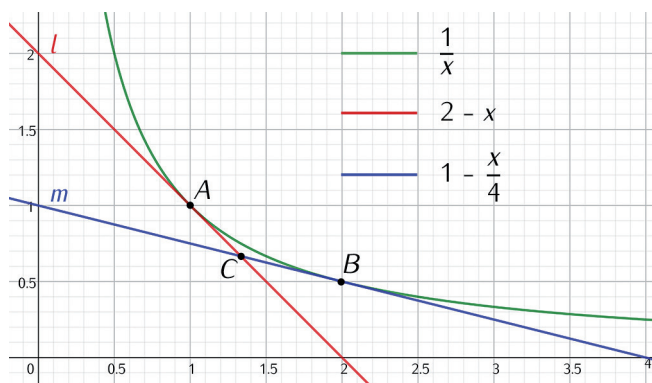
Een soort Riemann-som maar dan helemaal anders. Jack van der Elsen benadert de oppervlakte onder de grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ met behulp van oppervlakten die door raaklijnen zijn afgesneden en vindt daarmee verrassende resultaten.

Inleiding

Om een begin te maken kijken we naar de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ voor $x \geq 1$. Een primitieve van f is $F(x) = \ln(x) + c$, waar $c \in \mathbb{R}$. Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\int_n^{n+1} f(x) dx = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Nu gaan we kijken naar de grafiek van f op het interval $[n, n+1]$. Voor alle volgende figuren kiezen we steeds gemakshalve $n = 1$. Het punt $(n, \frac{1}{n})$ op f noemen we A en het punt $(n+1, \frac{1}{n+1})$ noemen we B .



figuur 1

Om de oppervlakte onder de functie f op het interval $[n, n+1]$ te benaderen, kunnen we een onderschatting maken door een raaklijn l in $x = n$ aan f te snijden met een raaklijn m in $x = n+1$ aan f , zie figuur 1.

De vergelijking van de raaklijn l in $x = n$ is:

$$y = -\frac{1}{n^2}x + \frac{2}{n}.$$

$$x = n+1$$

is:

$$y = -\frac{1}{(n+1)^2}x + \frac{2}{n+1}.$$

Het snijpunt van l en m is:

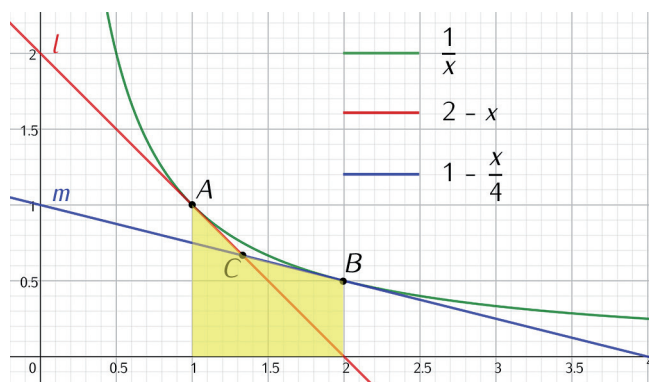
$$\left(n + \frac{n}{2n+1}, \frac{2}{2n+1}\right) \text{ en dit snijpunt noemen we } C.$$

Als we nu de punten A , B en C verbinden en de oppervlakte daaronder uitrekenen komen we tot:

$$O_1 = \frac{\left(n + \frac{n}{2n+1} - n\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}\right)}{2} + \frac{\left(n+1 - \left(n + \frac{n}{2n+1}\right)\right)\left(\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n+1}\right)}{2}$$

Vereenvoudiging leidt tot: $O_1 = \frac{2}{2n+1}$.

We hebben de twee raaklijnen l en m gebruikt om de oppervlakte O_1 te berekenen. In figuur 2 is de oppervlakte O_1 geel ingekleurd.

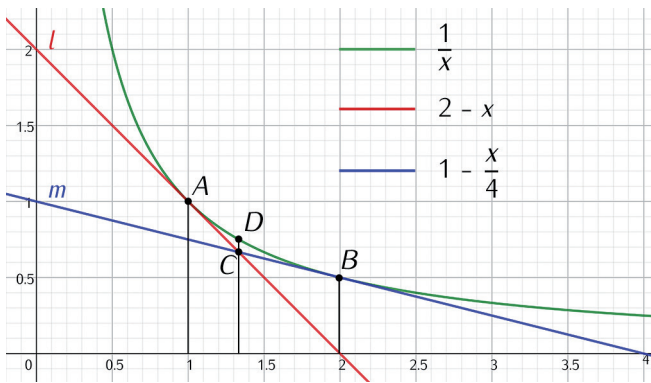


figuur 2

Een derde raaklijn

Nu kunnen we de benadering O_1 van de oppervlakte onder f nog beter maken door gebruik te maken van meer dan twee raaklijnen. Eerst kijken we naar het snijpunt D van f met een verticale lijn door C . Punt D is

$$\left(n + \frac{n}{2n+1}, \frac{1}{n + \frac{n}{2n+1}}\right) = \left(n + \frac{n}{2n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right), \text{ zie figuur 3.}$$



figuur 3

Nu kunnen we een vergelijking van de raaklijn k aan f in D opstellen:

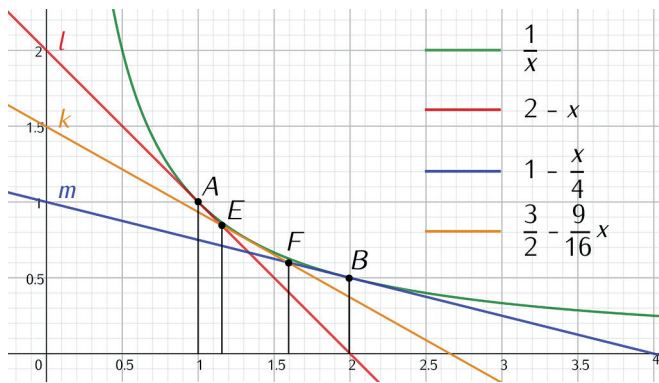
$$y = -\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)^2 x + \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Het snijpunt van l en k is:

$$\left(\frac{4n(n+1)}{4n+3}, \frac{4n+2}{n(4n+3)}\right) \text{ en dit noemen we } E.$$

Het snijpunt van m en k is:

$$\left(\frac{4n(n+1)}{4n+1}, \frac{4n+2}{(4n+1)(n+1)}\right) \text{ en dit noemen we } F, \text{ zie figuur 4.}$$



figuur 4

Als we nu de punten A , E , F en B verbinden en de oppervlakte daaronder uitrekenen komen we tot:

$$O_2 = \frac{\left(\frac{4n(n+1)}{4n+3} - n\right)\left(\frac{4n+2}{n(4n+3)} + \frac{1}{n}\right)}{2} +$$

$$\frac{\left(\frac{4n(n+1)}{4n+1} - \frac{4n(n+1)}{4n+3}\right)\left(\frac{4n+2}{(4n+1)(n+1)} + \frac{4n+2}{n(4n+3)}\right)}{2} +$$

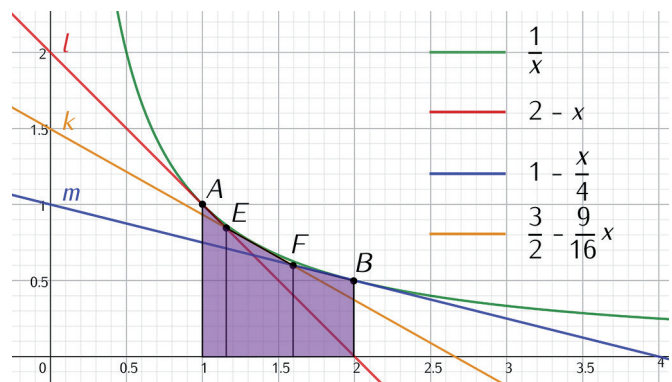
$$\frac{\left(n+1 - \frac{4n(n+1)}{4n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{4n+2}{(4n+1)(n+1)}\right)}{2}$$

Vereenvoudiging leidt tot:

We hebben de drie raaklijnen l , m en k gebruikt om de oppervlakte O_2 te berekenen. In de figuur 5 is de oppervlakte O_2 paars ingekleurd.

$$O_2 = \frac{8n+5}{2(4n+3)^2} + \frac{8(2n+1)(8n^2+8n+1)}{(4n+1)^2(4n+3)^2} + \frac{8n+3}{2(4n+1)^2} =$$

$$\frac{2}{4n+3} + \frac{2}{4n+1}$$

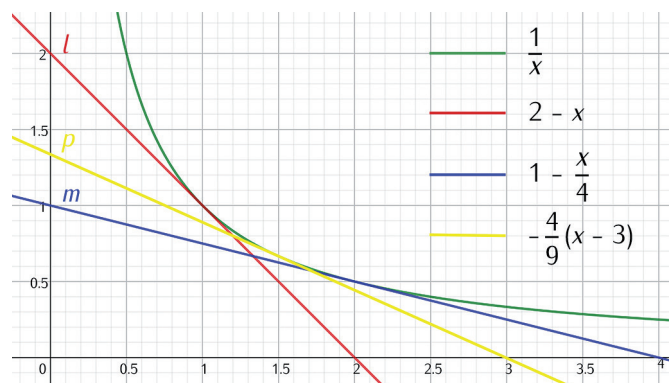


figuur 5

Een alternatieve derde raaklijn

We kunnen de derde raaklijn ook anders kiezen. De raaklijn aan f die het meeste afsnijdt van de oppervlakte onder f op het segment $[n, n+1]$ is de raaklijn voor $x = n + \frac{1}{2}$. Dat kun je gemakkelijk nagaan door een oppervlakte $A(z)$ onder een willekeurig punt z in het segment $[n, n+1]$ uit te drukken in een vergelijking met z . Daarna kun je de afgeleide $A'(z)$ nemen en gelijk aan 0 stellen. De vergelijking van de raaklijn p aan f in $x = n + \frac{1}{2}$ is:

$$y = -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}x + \frac{2}{n+\frac{1}{2}}, \text{ zie figuur 6.}$$



figuur 6

Als we nu een soortgelijke procedure toepassen op de raaklijnen l , m en p als die we hebben toegepast op de drie raaklijnen l , m en k , dan krijgen we, na een hele rekenpartij, een oppervlakte van:

$$O_3 = \frac{2}{4n+3} + \frac{2}{4n+1}$$

Maar dan is dus $O_3 = O_2$. Dat is wel frappant en niet door mij van te voren bedacht en/of verwacht. Omdat we vinden dat $O_3 = O_2$, lijkt het erop dat we nog geen maximum oppervlakte bereikt hebben met behulp van drie raaklijnen.

In het algemeen

Het wordt tijd dat we een algemene vergelijking voor de oppervlakte opstellen die door middel van drie raaklijnen uitgerekend kan worden. Door de derde raaklijn door een punt $Z(z, \frac{1}{z})$ te laten gaan waarbij $z \in \langle n, n+1 \rangle$, komen we (na weer een hele rekenpartij) tot een oppervlakte van:

$$O(z) = \frac{4z}{(n+z)(n+z+1)}$$

We kunnen dit controleren voor O_2 en O_3 :

$$\begin{aligned} O_2 &= O\left(n + \frac{n}{2n+1}\right) = \\ &4 \cdot \frac{\left(n + \frac{n}{2n+1}\right)}{\left(n + n + \frac{n}{2n+1}\right)\left(n + n + \frac{n}{2n+1} + 1\right)} = \\ &4 \cdot \left(n + \frac{n}{2n+1}\right) \cdot \frac{(2n+1)^2}{n(4n+3)(4n+1)(n+1)} = \end{aligned}$$

$$\frac{16n+8}{(4n+3)(4n+1)} = \frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+3}$$

We kunnen nu ook uitrekenen voor welke $z \in \langle n, n+1 \rangle$ de oppervlakte

$$O(z) = \frac{4z}{(n+z)(n+z+1)}$$
 maximaal is. Wederom kunnen we

een afgeleide $O'(z)$ bepalen en gelijk aan 0 stellen:

$$O'(z) = \frac{4n^2 + 4n - 4z^2}{((n+z)(n+z+1))^2} = 0 \rightarrow$$

$$4n^2 + 4n - 4z^2 = 0 \rightarrow z = \sqrt{n(n+1)}.$$

En de daarbij behorende oppervlakte is:

$$\begin{aligned} O(\sqrt{n(n+1)}) &= \frac{4\sqrt{n(n+1)}}{(n + \sqrt{n(n+1)}) \cdot (n + 1 + \sqrt{n(n+1)})} = \\ &8n + 4 - 8\sqrt{n(n+1)} \end{aligned}$$

Ga na dat dit hetzelfde is als:

$$O(\sqrt{n(n+1)}) = 4(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2.$$

Tot slot: een benadering en een limiet

Nu zul je je afvragen wat we hier nu verder nog mee kunnen. Bovenstaande kan gebruikt worden om een benadering van $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ te geven. Zo is voor $n = 1$:

$$0,6931471806... = \ln(2) = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) \approx$$

$$O(\sqrt{1(1+1)}) = 4(\sqrt{1+1} - \sqrt{1})^2 =$$

$$4(\sqrt{2} - 1)^2 = 0,686291501...$$

Ook kunnen we nog een limiet uitrekenen omdat voor $n \geq 1$ geldt:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > O(\sqrt{n(n+1)}) > \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

En dus:

$$n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > n O(\sqrt{n(n+1)}) > n \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \rightarrow$$

$$\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) > 4n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 > \ln\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right)$$

De volgende limiet is zeer bekend: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

Daaruit kun je ook afleiden dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = e$.

Vanwege de continuïteit van de natuurlijke logaritme-functie $\ln(x)$ en de insluitstelling voor limieten volgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \ln(e) = 1.$$

Op de rekenmachine vinden we bijvoorbeeld voor $n = 1000000$:

$$4 \times 1000000 \times (\sqrt{1000001} - \sqrt{1000000})^2 = 0,9999995.$$

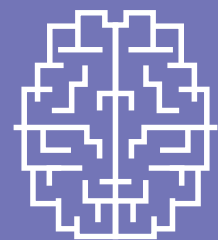
Al met al zou het kunnen dat door meer raaklijnen te gebruiken je nog betere afschattingen van de oppervlakte krijgt en ook andere limieten afleidt. Dat heb ik niet geverifieerd en laat ik als uitdaging voor de lezer.

Over de auteur

Jack van der Elsen is werkzaam als octrooigemachtigde bij Canon Production Printing B.V. te Venlo (maar schrijft dit artikel op persoonlijke titel). Hij studeerde wiskunde aan de Radboud Universiteit te Nijmegen.
E-mailadres: jjvdddee@hotmail.com.

Puzzel 97-5

Het bijzondere getal 3



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Behalve het getal van deze maand maart (3) zijn er op internet heel veel bijzonderheden over het getal 3 te vinden. Zie bijvoorbeeld deze Wikipedia-pagina.^[1] Bij deze puzzel speelt het getal 3 een bijzondere rol met eigenschappen die niet op bovengenoemde site staan. En een tip voor alle vragen: denk aan de titel van deze puzzel. Het gaat om rekenkundige rijtjes van lengte 3. Eerst bekijken we drie priemgetallen op onderling gelijke afstanden en noemen dat een *priem-trio*. Die vormen dus een rekenkundig rijtje. Bijvoorbeeld 5, 11, 17 met onderlinge afstand 6. (Alleen 3, 5, 7 wordt wel een priem-drieling genoemd).

Opgave 1a: Welke priem-trio's zijn er die beginnen met 3 en eindigen met een getal kleiner of gelijk aan het nummer van deze jaargang van *Euclides*?

Het lijkt erop dat alle priemgetallen (>2) de eerste, maar ook de middelste (>3) van een priem-trio kunnen zijn. Een bewijs kennen we echter niet. Wel hebben we onderzocht dat het klopt tot 2 000 000 000.

Opgave 1b: Onderzoek of er priemgetallen zijn ($p > 5$) die niet het grootste getal van de drie van een priem-trio kunnen zijn. Geef daarvan alle voorbeelden voor $p \leq 61$, of laat zien dat alle priemgetallen tot en met 61 wel de laatste van een priem-trio kunnen zijn.

Voor opgave 2 beperken we ons niet tot priemgetallen, maar tot alle positieve gehele getallen van 1 tot en met n . Daaruit kiezen we een geordende verzameling, zodanig dat er geen drie getallen in voorkomen die een rekenkundige rij vormen van lengte ≥ 3 . Dus bijvoorbeeld niet 1, 2, 7, 9, 12 want 2, 7, 12 is een rekenkundige rij met verschil 5. Een verzameling die hieraan voldoet noemen we een R -vrije verzameling. We kunnen zo'n R -vrije verzameling kiezen met een 'gretig' algoritme: kies steeds het kleinste toegestane getal, dus start met 1. Voor $n = 10$ krijg je zo bijvoorbeeld een R -vrije verzameling van vijf getallen: 1, 2, 4, 5 en 10. Hier is al veel onderzoek naar gedaan, ook met andere voorwaarden. Met name is gezocht naar formules voor een bovengrens van het aantal toegestane getallen bij een gegeven waarde van n . Dat is meestal groter dan het aantal dat je vindt met het 'gretige' algoritme.

Opgave 2a: Bepaal met het 'gretige' algoritme de kleinste n waarbij er meer dan acht getallen in de verzameling zitten.

Er zijn R -vrije verzamelingen met meer dan acht getallen met een kleinere n dan de n die je hebt gevonden bij opgave 2a (Dus niet met het 'gretige' algoritme).

Opgave 2b: Geef een voorbeeld van zo'n verzameling (hoe groter je verzameling en/of hoe kleiner n , hoe meer punten je krijgt voor de ladder).

We zien dat als je wel het 'gretige' algoritme gebruikt de R -vrije verzameling begint met paartjes van twee opvolgende getallen: 1, 2, 4, 5, De vraag is of dat zo doorgaat.

Opgave 2c: Bewijs (of geef een tegenvoorbeeld) dat de getallen in een R -vrije verzameling, verkregen met het 'gretige' algoritme altijd in paartjes van twee voorkomen.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 3 mei 2022 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 97-3:

 vakbladeuclides.nl/975puzzel. Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: <https://nvw.nl/euclides/puzzel/>

We feliciteren Monica Woldinga van harte met de ladderprijs.

Top 10 ladderstand t/m puzzel 97-3

1	M. Woldinga	144
2	H. Bakker	144
3	J. Meerhof	123
4	H. Huisman	117
5	F. van Hoeve	114
6	H. Linders	97
7	J. van Doorn	91
8	B. Dopheide	73
9	L. Cizkova	61
10	J. Remijn	57

Noot

[1] <https://en.wikipedia.org/wiki/3>

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2018

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2022

LANDELIJK

Do
17/03

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Vr
08/04
Za
09/04

NOORDEWIJKWERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr
10/06

UTRECHT

Onderwijs meets onderzoek
Organisatie: NVvW en Freudenthal Instituut

Vr
26/08
Za
27/08
Vr
02/09
Za
03/09

AMSTERDAM en EINDHOVEN

Vakantiecursus wiskunde voor leraren
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 97

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	03 mei 2022	28 februari 2022
7	21 juni 2022	25 april 2022

Op Casio kunt u rekenen



- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



De perfecte rekenmachine met emulator!

Casio fx-CG50

fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.



MODERNE WISKUNDE

Wiskunde zien en begrijpen

NIEUW!

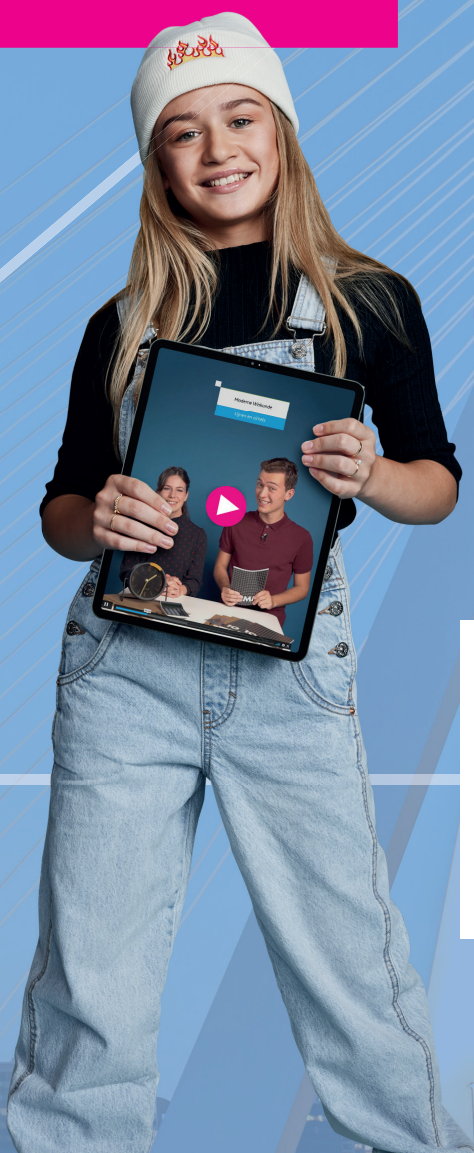
Introductievideo's bij ieder hoofdstuk

In de nieuwe 13e editie van Moderne Wiskunde onderbouw vinden jij en je leerlingen introductievideo's bij de hoofdstukopeningen. Deze video's laten leerlingen kort kennismaken met het onderwerp van een hoofdstuk. Daarnaast maken ze duidelijk hoe het onderwerp in het dagelijkse leven speelt. De video's zijn te benaderen via de online omgeving én via de QR-codes die bij iedere hoofdstukopening staan. Zo kunnen leerlingen eenvoudig de introductievideo's bekijken en aan de slag.

Scannen, kijken, aan de slag!

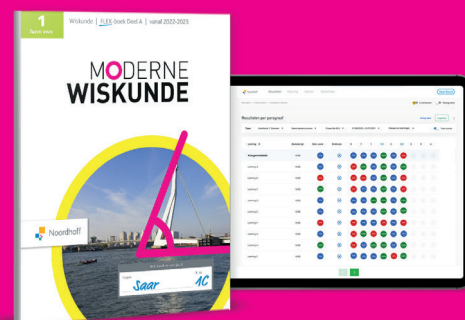
Nieuwsgierig?

Scan de QR-code
& ervaar het zelf



Benieuwd naar alle vernieuwingen? Bestel
vandaag nog een gratis beoordelingspakket op
modernewiskunde.noordhoff.nl

Noordhoff



Brengt je verder

