# Olympiadepuzzel

## Euclides 97 nummer 2

# Toernooi

## Opgave

Aan een groot toernooi doet een aantal deelnemers mee. Iedere deelnemer speelt eenmaal tegen elke andere deelnemer. De winnaar van een wedstrijd krijgt 3 punten, de verliezer 0 punten en bij gelijkspel krijgen beide deelnemers 1 punt. Aan het einde van het toernooi wordt een ranglijst opgemaakt. Het blijkt dat er in totaal 2021 punten zijn behaald en dat de winnaar met grote voorsprong op de rest van het deelnemersveld is geëindigd.

Na afloop van het toernooi wordt bekend dat de winnaar doping heeft gebruikt. Hij wordt geschorst en uit de uitslag geschrapt. De punten die andere deelnemers in wedstrijden tegen hem hebben behaald, tellen nog wel mee (de score voor wedstrijden die in gelijkspel zijn geëindigd, blijft 1 punt).

Door de schorsing daalt de gemiddelde score per deelnemer (exclusief de geschorste deelnemer) met exact 1 punt. Hoeveel punten had de geschorste deelnemer behaald?

## Uitwerking

Noem het aantal deelnemers $n$ en de score van de geschorste deelnemer $S$. Voordat hij geschorst werd, was de gemiddelde score $\frac{2021}{n}$ punten. Door de schorsing daalt het totaal aantal punten met $S$ en het aantal deelnemers met 1, dus de gemiddelde score wordt $\frac{2021-S}{n-1}$ punten. Het gemiddelde is met exact 1 punt gedaald, dus

$$\frac{2021-S}{n-1} = \frac{2021}{n} - 1.$$

Hieruit volgt dat

$$2021 - S = \frac{2021 \cdot (n-1)}{n} - (n-1) = 2021 - \frac{2021}{n} - n + 1$$

dus

$$S = \frac{2021}{n} + n - 1.$$

Zowel het aantal behaalde punten $S$ als het aantal deelnemers $n$ is een positief geheel getal. Daarom moet $n$ een positieve deler zijn van 2021, dus gelijk aan 1, 43, 47 of 2021.

Bij een toernooi met $n$ deelnemers zijn er $\binom{n}{2}$ wedstrijden. Bij iedere wedstrijd worden 2 of 3 punten verdeeld, dus het totaal aantal behaalde punten is minimaal $2 \cdot \binom{n}{2}$ en maximaal $3 \cdot \binom{n}{2}$. Hieruit volgt dat

$$2 \cdot \binom{n}{2} \leqslant 2021 \leqslant 3 \cdot \binom{n}{2}$$

dus

$$\frac{2021}{3} \leqslant \binom{n}{2} \leqslant \frac{2021}{2}.$$

Van de mogelijke waarden 1, 43, 47 en 2021 voldoet alleen $n = 43$ hieraan.

De geschorste deelnemer had dus $S = \frac{2021}{n} + n - 1 = 89$ punten behaald.

Voor de volledigheid laten we nog zien dat er een toernooiverloop bestaat dat aan de voorwaarden voldoet. (Dit is niet nodig om een volledige oplossing te hebben, omdat het bestaan van zo'n toernooiverloop impliciet volgt uit de vraagstelling.)

Noem de geschorste deelnemer $W$ en de rest van de deelnemers $D_1, \ldots, D_{42}$. Laat $W$ winnen van $D_1, \ldots, D_{29}$, gelijkspelen tegen $D_{30}$ en $D_{31}$, en verliezen van $D_{32}, \ldots, D_{42}$. Iedere deelnemer $D_i$ wint van $D_{i+1}$, $D_{i+2}$, $D_{i+3}$ en $D_{i+4}$, waarbij we de indices cyclisch beschouwen (dus $D_{42}$ wint van $D_1$, $D_2$, $D_3$ en $D_4$). Daarnaast wint $D_1$ ook van $D_6, \ldots, D_{12}$. Alle andere wedstrijden eindigen in gelijkspel.

Dan heeft $W$ in totaal $29 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 11 \cdot 0 = 89$ punten behaald. De tweede plaats gaat naar $D_1$ met 11 keer winst, 5 keer verlies en 26 keer gelijkspel (59 punten). Op een gedeelde derde plaats eindigen $D_{32}, \ldots, D_{42}$ met 48 punten: 5 keer winst, 4 keer verlies en 33 keer gelijkspel. De deelnemers $D_{30}$ en $D_{31}$ hebben 1 keer meer gelijkgespeeld in plaats van gewonnen en hebben 46 punten behaald. Eenmaal vaker verloren in plaats van gelijkgespeeld hebben $D_2, \ldots, D_5$ en $D_{13}, \ldots, D_{29}$ (45 punten). Onderaan eindigen de deelnemers $D_6, \ldots, D_{12}$, die 4 keer hebben gewonnen, 6 keer verloren en 32 keer gelijkgespeeld (44 punten). In totaal hebben de spelers $1 \cdot 89 + 1 \cdot 59 + 11 \cdot 48 + 2 \cdot 46 + 21 \cdot 45 + 7 \cdot 44 = 2021$ punten behaald.

## Inzenders met de juiste oplossing

Han Baumer, Richard Both, Rini van Bruchem, Gé Groenewegen, Hessel de Haan, Hans Linders, Jack Schilder, Matthijs Schukking, Ruud Stolwijk, Eline Westerhout, Monica Woldinga en Sjoerd Zondervan

## Winnaar van de cadeaubon

Han Baumer