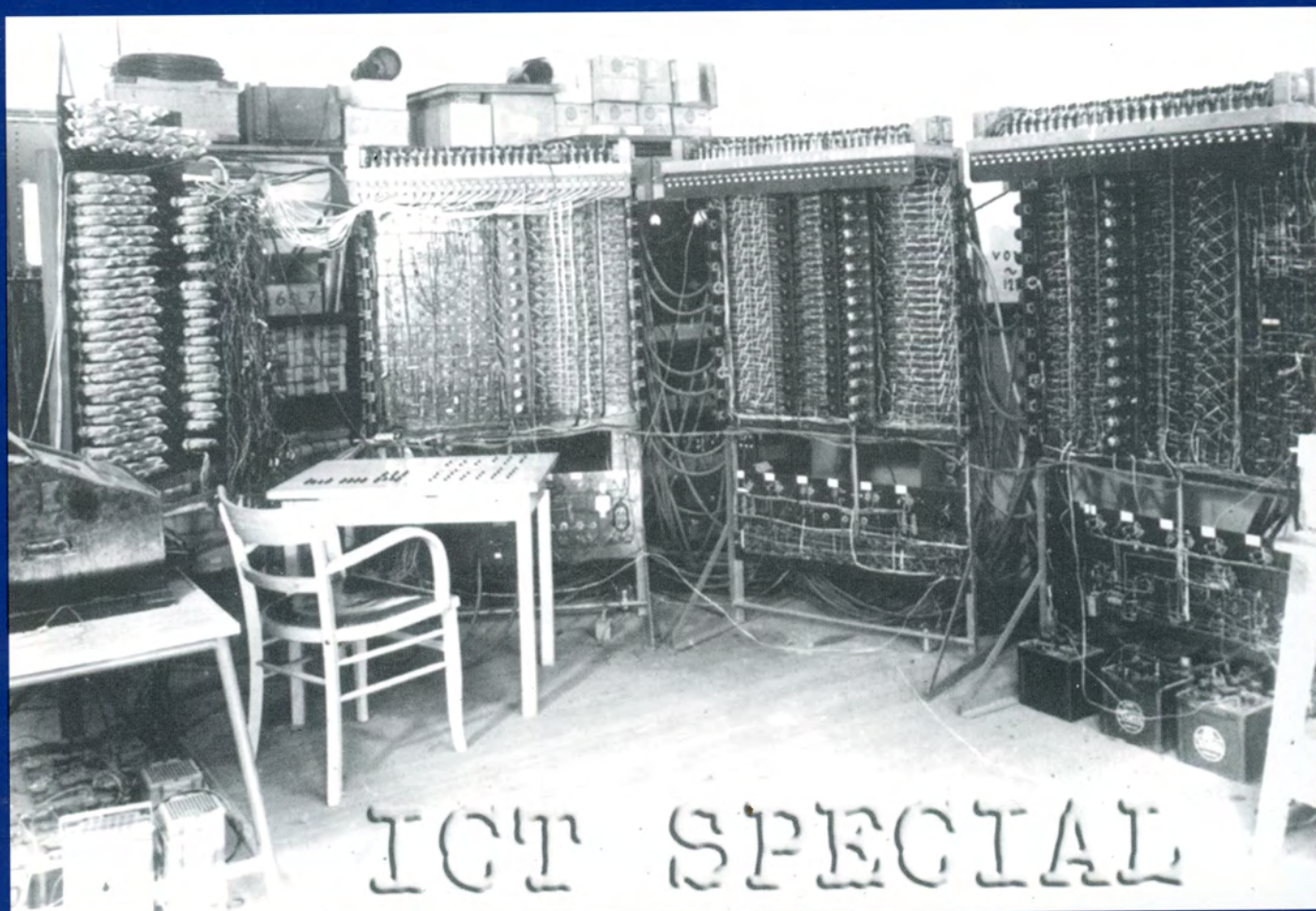


22e JAARGANG NR. 1

oktober 2002

# NNN



# NIEUWE WISKRANT



## **De Nieuwe Wiskrant**

### **Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs**

is een publicatie van het Freudenthal Instituut. Het bericht over ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, het zwaartepunt ligt bij het voortgezet onderwijs.

De Nieuwe Wiskrant verschijnt viermaal per schooljaar, in een omvang van minstens 40 pagina's.

#### **Artikelen**

Artikelen worden bij voorkeur digitaal ontvangen, vergezeld van een afdruk op papier en eventuele illustraties van een zo goed mogelijke kwaliteit.

Het redactieadres is:

Freudenthal Instituut, t.a.v. Marianne Moonen  
Postbus 9432, 3506 GK Utrecht, tel. 030-2635536  
fax. 030-2660430, e-mail: [wiskrant@fi.uu.nl](mailto:wiskrant@fi.uu.nl)

#### **Homepage Nieuwe Wiskrant**

<http://www.fi.uu.nl/wiskrant>

#### **Abonnementen**

De abonnementsprijs voor 2002/2003 bedraagt € 20,-. Studentenabonnementen € 14,- (onder overlegging kopie collegekaart).

Collectief abonnement € 12,50 per abonnement bij minimale afname van 20 stuks.

Losse nummers € 6,- excl. verzending.

Abonneren kan *uitsluitend* schriftelijk of via e-mail.

Betaling pas na ontvangst van de acceptgirokaart.

Abonnementen lopen van augustus tot augustus en worden zonder tegenbericht verlengd. Opzeggingen dienen vóór 1 juli schriftelijk te worden doorgegeven.

#### **Advertenties**

Het is mogelijk een advertentie in de Nieuwe Wiskrant te plaatsen. Tarieven op aanvraag bij het redactieadres.

#### **Bureauredactie**

Marianne Moonen

**ISSN: 0928-7167**

#### **Drukwerk**

Wilco, Amersfoort

#### **© 2002 Freudenthal Instituut**

Universiteit Utrecht – Faculteit Wiskunde & Informatica  
Niets in deze uitgave mag zonder schriftelijke toestemming van de uitgever worden overgenomen of vervoelvoudigd.

#### **Redactie**

Tom Goris en Lidy Wesker

#### **Leesredactie**

Klaske Blom, Jan van de Craats, Truus Dekker, Paul Drijvers, Wieke Engels, Aad Goddijn  
Frank van den Heuvel, Sieb Kemme, Anders Vink, Martha Witterholt, André Zegers

## **The 'Nieuwe Wiskrant' (‘New Mathpaper’)**

is published four times a year by the Freudenthal Institute.

It reports on developments in Mathematics Education, more in particular in secondary education.

#### **Articles**

Articles should be sent to:

Freudenthal Institute  
attn. Marianne Moonen  
P.O. Box 9432, 3506 GK Utrecht  
The Netherlands

#### **Subscriptions**

Subscriptions should be sent to the publisher.

Freudenthal Institute  
Utrecht University  
P.O. Box 9432  
3506 GK Utrecht  
The Netherlands

The annual subscription rate is US \$ 30.- or € 30.-.  
Subscriptions should be paid by international money order.

Voor de abonnees in België:

U kunt betalen op rekening nummer 035.3605504.55  
van Fortis Bank o.v.v. Michel Roelens, Freudenthal  
Instituut

# NIEUWE WISKRANT

TIJDSCHRIFT VOOR NEDERLANDS WISKUNDE ONDERWIJS

22e JAARGANG NUMMER 1

oktober 2002

## INHOUD

|                                        |                                                                     |    |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----|
|                                        | Inhoudsopgave                                                       | 2  |
|                                        | Over het laatste nieuws                                             | 3  |
| G. Alberts                             | Een halve eeuw computers in Nederland:                              |    |
|                                        | 1. Een willekeurig getal                                            | 6  |
| G. Koolstra                            | Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning                   | 9  |
| S. Palha / M. van Reeuwijk             | Zie je het verband?                                                 | 12 |
| F. Spijkers                            | Excel in de wiskundeles                                             | 16 |
| M. Doorman / A. Mooldijk               | Een discussie op internet                                           | 20 |
| C. van de Giessen                      | Computeralgebra in 4 vwo, verslag van een experiment                | 25 |
| J. van den Brink / P. Boon / V. Jonker | Basisvaardigheden ruimtemeetkunde op de computer                    | 30 |
| P. Drijvers                            | Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen | 36 |
| M. Kindt                               | Wat te bewijzen is                                                  | 42 |
| A. Heck                                | Stilstaan bij lopen                                                 | 44 |
| C. van den Boer / D. van Eerde         | Wisbaak: software voor taalzwakke leerlingen                        | 51 |



Freudenthal Instituut



# Inhoudsopgave

## Een halve eeuw computers in Nederland: 1. Een willekeurig getal 6

*Gerard Alberts*

21 juni 1952: de ARRA genereert een willekeurig getal en daarmee het startsein voor het digitale tijdperk in Nederland. Deze special geeft een tussenstand van vijftig jaar later. Maar staat ook even stil bij de pioniersdagen van wel-  
eer. Gerard Alberts schetst de geschiedenis van de ARRA.

## Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning 9

*Gerard Koolstra*

Zodra er gebruik van ICT gemaakt wordt duikt al vaak de term 'digitale leeromgeving' op. Maar een heldere definitie van dit begrip is nog niet ontstaan. Gerard Koolstra schetst een algemeen beeld van eigenschappen van digitale leeromgevingen.

## Zie je het verband? 12

*Sonia Palha en Martin van Reeuwijk*

Een formule opstellen voor het aantal stippen in een regelmatige rij van figuren. Als hulpmiddel hiervoor is het applet Stippel Algebra ontwikkeld. Sonia Palha en Martin van Reeuwijk experimenteerden met het applet in de klas. Zij vroegen zich af of Stippel Algebra een meerwaarde bood bij het onderzoeken van verbanden.

## Excel in de wiskundeles 16

*Frits Spijkers*

Bij het gebruik van ICT in de wiskundeles gaat de gedachte vaak allereerst uit naar het gebruik van programma's die speciaal voor dat doel, wiskunde, gemaakt zijn. Maar het is ook mogelijk een bestaand programma nuttig te maken voor gebruik in de wiskundeles. Die keuze is gemaakt door Frits Spijkers. Hij vertelt hoe Excel (XL) ingezet kan worden.

## Een discussie op internet 20

*Michiel Doorman en Ad Mooldijk*

Leerlingen over een wiskundeopgave laten discussieren op een kring. Dat is het doel van het project Actief en op Tijd Leren. Michiel Doorman en Ad Mooldijk laten u zien hoe zo'n discussie op een kring eruitziet en geven hun bevindingen.

## Computeralgebra in 4 vwo, verslag van een experiment 25

*Carel van de Giessen*

In het kader van het ADLO (Algebraonderzoek in een Digitale LeerOmgeving) project experimenteerde Carel van de Giessen met Scientific Notebook gecombineerd met VU-Grafiek. Scientific Notebook is een combinatie van

een tekstverwerker en een algebrapakket. Een verslag.

## Basisvaardigheden ruimtemeetkunde op de computer 30

*Jan van den Brink, Peter Boon en Vincent Jonker*

'Bouwen met blokken' is een programma dat ontwikkeld is om er ruimtemeetkunde mee te bedrijven. Delen ervan zijn als applets ook op het wisweb te vinden. Op de basis-school is er door Jan van den Brink, Peter Boon en Vincent Jonker ervaring mee opgedaan. In het project WINST wordt onderzocht welke applets voor het VMBO bruikbaar zijn.

## Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen 36

*Paul Drijvers*

Het leren van wiskunde in een computeralgebra omgeving verloopt vaak niet zonder problemen. In dit artikel brengt Paul Drijvers een aantal veel gesignaleerde obstakels in kaart, die allemaal een conceptueel en een technisch aspect hebben. De conclusie van deze inventarisatie is dat het aanbeveling verdient om dergelijke obstakels tot onderwerp van gesprek te maken en ze zo om te buigen tot kansen voor het leren.

## Wat te bewijzen is 42

*Martin Kindt*

Alle niet te vereenvoudigen breuken tussen 0 en 1 genereren door 'naïef optellen'. Het is mogelijk en Martin Kindt bewijst dat.

## Stilstaan bij lopen 44

*André Heck*

De softwareomgeving Coach maakt het mogelijk om op digitale videoclips metingen te verrichten. De filmpjes kunnen ook door leerlingen zelf met een webcam opgenomen zijn. André Heck, als onderzoeker bij het ontwerp van Coach voor wiskundeonderwijs betrokken, geeft in dit artikel een voorbeeld van een praktische opdracht die zonder dit gereedschap moeilijk, zo niet onmogelijk, te realiseren is.

## Wisbaak: software voor taalzwakke leerlingen 51

*Corine van den Boer en Dolly van Eerde*

Wanneer een leerling de taal van een opgave niet begrijpt, dan kan hij de opgave uiteraard niet maken. En is het vervolgens ook niet duidelijk of hij de wiskunde al dan niet begrijpt. Wisbaak is een project waarin aandacht besteed wordt aan de taal van de wiskunde. Corine van den Boer en Dolly van Eerde en laten voorbeelden uit Wisbaak zien.

# Over het laatste nieuws

Een halve eeuw geleden verrichtte de ARRA I zijn eerste berekeningen: de aanvang van het digitale tijdperk in Nederland. Een kwart eeuw later knutselen Steve Jobs en Steve Wozniak hun APPLE I in elkaar in een garage: de aanvang van het digitale tijdperk voor iedereen wereldwijd. Weer een kwart eeuw later verschijnt deze ICT-special van de *Nieuwe Wiskrant*. In deze special leest u over de ontwikkelingen en de ervaringen van digitale leeromgevingen. Ondertussen roerde het onderwijsveld zich, zich vooral niet storend aan het feit dat velen van u van een welverdiende vakantie genoten.

## Benieuwd vernieuwen

Elke vorm van vernieuwen krijgt te maken met voor- en tegenstanders, maar ook vooral met mensen die benieuwd zijn naar de afloop van de vernieuwingen. De voorstanders hoor je voornamelijk aan het begin van de vernieuwing, de 'benieuwden' hoor je eigenlijk niet en de tegenstanders schreeuwen om het hardst als ze eigenlijk nog niets weten. (De eerste complete lichting VWO'ers nieuwe stijl zijn nu eerstejaars studenten.)

Nu de tweede fase keer op keer vernieuwd en/of afgebroken wordt, hoor en lees je veel tegenstanders.

Die afbraak staat te lezen in de nota 'Continuïteit en Vernieuwing in de tweede fase HAVO/VWO' die de toenmalige staatssecretaris Adelmund in januari jl. naar de Tweede Kamer stuurde. Het Freudenthal Instituut protesteert krachtig tegen de ideeën in deze nota door middel van een brief aan Adelmund die hierna is opgenomen.

Eerst was het de opzet van de tweede fase die niet zou deugen, maar nu blijken de docenten het helemaal verkeerd te doen.

Prof. dr. Levelt, voorzitter van de KNAW, schrijft in *Natuur en Techniek* (7/8 2002) dat de docenten hun leerlingen niet meer kunnen uitdagen. Leerlingen weten meer dan hun leraren omdat ze meer informatie van internet plukken dan hun leraar zich in vier jaar vakopleiding eigen heeft kunnen maken. De docenten hebben verder geen onderzoekservaring en moeten eigenlijk worden vervangen door wetenschappers, die de middelbareschool-leerlingen weer enthousiast kunnen maken voor bèta-studies. Net als in Duitsland moeten de docenten allemaal een universitaire opleiding hebben genoten. Maar: in de *Nieuwe Wiskrant* van juni 2002 heeft u al kunnen lezen dat juist Duitsland niet zo best uit de PISA-studie is gekomen, ondanks alleen maar universitair geschoolde docenten.

In de *Volkskrant* (27-8-2002) beweert Ad Lagendijk dat de verplichte didactiek na de universitaire studie absoluut zonde van de tijd is. Didactici en pedagogen zijn niet op de inhoud van een vak gericht en willen alleen maar nieu-

we lesmethoden doorvoeren. We moeten het hebben van wetenschappers, die hun vak zuiver houden en daardoor meer studenten voor de bèta-studies warm maken.

De grafische rekenmachine en de computer moeten het in de ogen van de wetenschappers ook ontgelden; dr. Dap Hartman schrijft in de *NRC* van 26 januari 2002 'Schop de computer de klas uit'. Geen computers (en de bijbehorende software) spaart veel geld uit en daar kunnen dan handzame, duurzame, draagbare, ongevoelig voor storingen, niet verouderende boeken voor worden gekocht. Gelukkig komt er daags daarna een antwoord van een docent die in 1952 het onderwijs in is gegaan; ook vijftig jaar geleden draaide het in het onderwijs al om vernieuwing en dat is maar goed ook. De computers kunnen veel mooier, sneller en duidelijker uitleggen, mits de docent weet welke software en sites goed in het onderwijs bruikbaar zijn.

Het lijkt erop dat de wetenschappers volgens zichzelf beter onderwijs kunnen geven dan de docenten die daadwerkelijk op de middelbare school lesgeven. Als de wetenschappers echter echt onderzoek gaan doen naar de prestaties van studiehuis-leerlingen, blijkt al snel dat de vernieuwing niet zo slecht heeft uitgepakt. Onderwijsbureau De Praktijk heeft onderzoek gedaan naar de prestaties van studenten Biologie en Bio-medische wetenschappen. De conclusie van dat onderzoek is dat het gemiddelde modulecijfer van nieuwe stijl-studenten in alle modules van de propedeuse hoger is dan het gemiddelde modulecijfer van de oude-stijlers. Nu nog wachten op een wetenschappelijk onderzoek naar de resultaten van wiskundestudenten, of moeten docenten dat gaan doen?

Wetenschappers kunnen nog veel van docenten leren op didactisch gebied en docenten kunnen door deel te nemen aan bijvoorbeeld mastercourses en nascholingen weer hernieuwd kennismaken met de wetenschap.

Ook de hoofdredactie van de *Nieuwe Wiskrant* is vernieuwd. Sieb Kemme en Heleen Verhage besloten om na jarenlang een fantastische redactie te zijn geweest het stokje over te geven aan Tom Goris en Lidy Wesker. Beiden docent wiskunde en betrokken bij de lerarenopleiding wiskunde. Weer een vernieuwing en we zijn benieuwd naar nieuwe didactische ontwikkelingen op wiskundegebied. In deze special kunnen we u in ieder geval laten zien dat de computer, wat ons betreft, in de klas hoort.

Veel leesplezier en we zijn benieuwd naar uw reactie.

Tom Goris  
Lidy Wesker



Aan Mw. drs. K.Y.I.J. Adelmund,  
Staatssecretaris van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen,

In de nota 'Continuïteit en Vernieuwing in de tweede fase HAVO/VWO', die in januari 2002 door de Staatssecretaris naar de Tweede Kamer is gezonden, wordt gereageerd op de problemen die in het huidige stadium van invoering van de tweede fase zijn ontstaan. Terecht wordt gesteld dat scholen en leraren veel hebben geïnvesteerd in deze vernieuwingen. Deze inzet geldt uiteraard de praktische organisatie en de uitvoering van het onderwijs, maar ook de professionalisering van de docent. Niet onverwacht is dan ook de constatering dat de taakbelasting, ontstaan door de vernieuwing, als verzaamd wordt ervaren, terwijl dezelfde docent ook aan geeft meer behoefte te hebben aan het zelf vormgeven van het onderwijs. Uit de nota blijkt het streven om de docent en de schoolorganisatie in deze problematiek meer te ondersteunen. Verder wil men de grondgedachten van de nieuwe tweede fase handhaven. Resultaten van de vernieuwing op het gebied van bredere vorming, bewuste oriëntatie op vervolgstudies en samenhang van het vakkenpakket konden in de nota al gemeld worden.

In de nota wordt voorgesteld om het profieldeel van het vwo van 1840 uur terug te brengen naar 1440 uur door het tot drie vakken te beperken. Wij zijn van mening dat hiermee juist de beoogde breedte en samenhang van de profielen enerzijds maar ook de verdieping die tot werkelijke oriëntatie op de vervolgstudie kan leiden anderzijds ernstig in gevaar komen. We achten deze maatregelen dan ook in strijd met de intenties van de profielen van de tweede fase, zoals die worden geformuleerd op pagina 2 van de nota.

Het Freudenthal Instituut heeft zich beraden op de gevolgen van de voorstellen voor de positie van de exacte vakken in onderwijs en maatschappij en op de gevolgen van de maatregelen voor de leerling. De conclusie is dat de voorstellen een bedreiging vormen voor de positie van de exacte vakken op het vwo, terwijl van vele kanten op het gevaar wordt gewezen dat de bèta-belangstelling in Nederland tanende is. Het aantal goed opgeleide exacte wetenschappers en technici dreigt onder een maatschappelijk aanvaardbaar minimum te raken, en hier wordt juist gesneden in dat deel van het onderwijs, dat enthousiaste leerlingen op dergelijke loopbanen moet voorbereiden. Uiteindelijk zijn deze leerlingen de dupe; triest in maatschappelijk opzicht is dat het in de bovenbouw van het vwo aanwezige specifieke talent onvoldoende tot ontwikkeling kan komen. De te zware belasting van de leerling, die bij eerste invoering van het studiehuis bleek en waar met name bij wiskunde snel op gereageerd is door reductie van de programma's, wordt op dit moment al als minder zorgelijk ervaren door de betrokkenen. Bijzonder is dat het centraal schriftelijk examen wiskunde B vwo van 2002 alom te licht werd gevonden. Een verlichting van het profieldeel voor de exacte profielen leidt dus tot georganiseerde onderprestatie door vwo leerlingen; een ontwikkeling die juist tegengegaan moest worden door het invoeren van sa-

menhangende profielen en het laten verdwijnen van de zogeheten 'pretpakketten'.

In het vervolg van deze brief wordt aangegeven hoe de voorstellen ons inziens in concreto leiden tot een vergaande vershraling van de bèta-profielen:

- In het profiel N&G leidt de reductie van vier naar drie profielvakken tot een vergaande beperking van de breedte van het profiel en tot een verlies van samenhang binnen het profiel;
- In het profieldeel N&T, dat al uit drie vakken bestaat, komen de voorstellen neer op het feitelijk verdwijnen van de verdiepingsonderdelen.

#### *Gevolgen voor het profiel N&G*

In de huidige situatie bestaat het profieldeel N&G uit de vakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie. Daarmee is het een breed en aantrekkelijk profiel voor een grote groep leerlingen die opteren voor een studie met een brede bèta-oriëntatie, zoals biologie, medicijnen, aardwetenschappen en het (groei)vak medische biologie.

In de uitwerkingen die thans circuleren, dreigt natuurkunde als profielvak in het profiel N&G te worden geschrapt. Deze versmalling heeft ernstige consequenties, die in strijd zijn met het oorspronkelijke beoogde maatschappelijk belang van het profiel. Dit geldt evenzeer als scheikunde het slachtoffer van de versmalling van het profieldeel zou worden. De voornaamste argumenten tegen deze versmalling zijn:

- Een peiler onder het profiel N&G was beoogde brede samenhang van de exacte vakken. De nieuwe Nota onderschrijft dat, maar breekt toch de samenhang af. Verbanden tussen de vakken natuurkunde en scheikunde en tussen natuurkunde en wiskunde kunnen in de voorgestelde situatie namelijk niet meer benut worden. Bijvoorbeeld kunnen natuurkundige situaties en contexten, die nu bij wiskunde een rol van betekenis spelen, niet langer als zodanig functioneren. Het vervallen van natuurkunde betekent een verlies voor het onderwijs in scheikunde, biologie en wiskunde.
- Een grote groep leerlingen kiest voor een breed en samenhangend vakkenpakket om toekomstmogelijkheden open te houden. Ook in het hoger onderwijs genieten brede opleidingen momenteel de voorkeur van de studenten boven de traditionele monodisciplinaire studierichtingen. De voorstellen om brede Bachelor-opleidingen voor de exacte vakken te creëren spelen daarop in. De nieuwe voorstellen voor de profielen staan haaks op deze ontwikkelingen.
- Natuurkunde is van toenemend belang in de levenswetenschappen; men denke bijvoorbeeld aan medische fysica en aan de vertechnologisering van de gezondheidszorg. Verwijderen van natuurkunde uit het profieldeel is in strijd met deze ontwikkeling.
- Het profiel N&G is aantrekkelijk gebleken voor meisjes. Daardoor komt nu ongeveer 40% van de meisjes van het vwo in aanraking met een waardevol stuk natuurkunde; als de huidige voorstellen worden doorgezet, is het gevolg dat dit ongeveer 7% gaat worden, hetgeen uit emancipatoir oogpunt te betreuren valt.

21 juni 1952: de ARRA genereert een willekeurig getal en daarmee het startsein voor het digitale tijdperk in Nederland. Deze special geeft een tussenstand van vijftig jaar later. Maar staat ook even stil bij de pioniersdagen van weleer. **Gerard Alberts** schetst de geschiedenis van de ARRA.

## Een halve eeuw computers in Nederland: 1. Een willekeurig getal

Het maken van rekensommen is alleen voor zonderlingen een ontspanning. (W.F. Hermans, 1953)

Precies vijftig jaar geleden stelde minister Rutten van Economische Zaken de eerste computer in Nederland in gebruik. Het was de Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam, ARRA, van het Mathematisch Centrum. Ten overstaan van de minister en de burgemeester produceerden de tikkende, klikkende relais ... een willekeurig getal. Deze unieke prestatie van de machine bleek niet voor herhaling vatbaar. In een volgend artikel gaan we nader in op het geluid van dergelijk rekentuig. Nu beperken we ons tot die onnavolgbare openingszet.

Zelfs in het kleine Nederland waren er meerdere centra waar rond 1950 computers ontwikkeld werden, in Delft, Den Haag, Eindhoven en Amsterdam. De ARRA werd gebouwd aan het Mathematisch Centrum, tegenwoordig Centrum voor Wiskunde en Informatica, en daarom is de aandacht in dit artikel even eenzijdig op Amsterdam gericht. De computers waar het hier over gaat zijn software-programmeerbare rekenautomaten. In de Moore School of Electrical Engineering van de University of Pennsylvania in Philadelphia bouwde tijdens de Tweede Wereldoorlog een team onder leiding van Eckert en Mauchly een grote rekenautomaat, de ENIAC. Nog voordat die machine gereedkwam schreven Von Neumann en Goldstine, die zijdelings bij het project betrokken waren geraakt, een rapport over een volgende machine, EDVAC. Dit rapport van 30 juni 1945, *A First Draft of a Report on the EDVAC*, schetste de structuur van een stored-program computer. De instructies worden in een stored-program computer op dezelfde manier ingevoerd en opgeslagen als de te bewerken gegevens. Het bouwen van de ENIAC, nog geen stored-program computer, was dus aanleiding te bedenken hoe het nog beter zou moeten. Hier lag het nieuwe concept dat in de daaropvolgende jaren gerealiseerd zou worden, wonderlijk genoeg het eerst in Engeland, begin 1949, en pas kort daarop in de Verenigde Staten<sup>1</sup>. In de meeste Europese landen waren wel een paar groepen bezig een computer te ontwikkelen en vrijwel allemaal lieten die zich direct of indirect inspireren door dat rapport uit 1945. Het is in het licht van dit concept van computer

dat de ingebruikname van de ARRA op 21 juni 1952 voor Nederland een nieuw tijdperk inluidde.

### Rekenafdeling

De wiskundige D. van Dantzig maakte in Delft carrière in de jaren dertig van assistent tot hoogleraar. De mate waarin de wiskundigen met hun propaedeutisch onderwijs bijdroegen aan de technische wetenschappen stelde hem teleur. 'Geef een aantal mensen rekenmachines, laat ze rekenen, opdrachten uitvoeren', was een van de ideeën waar hij in 1940 mee speelde.

Het idee dat wiskunde meer maatschappelijk dienstbaar moest worden, werkte hij na de Tweede Wereldoorlog uit in Amsterdam samen met J.G. van der Corput en anderen. Vanuit die gedachte richtten zij het Mathematisch Centrum op, 11 februari 1946, en dit centrum zou een 'computing department' moeten hebben. Het was de bezielen- de Van der Corput die in het voorjaar van 1946 Aad van Wijngaarden wist over te halen de leiding op zich te nemen van wat gewoon Rekenafdeling ging heten.

Dr. ir. A. van Wijngaarden had ook een Delftse achtergrond. Hij had van 1934 tot 1939 werktuigbouwkunde gestudeerd en werkte gedurende de oorlogsjaren als onderzoeksassistent. Bij de hoogleraren Burgers in de stromingsleer en Biezeno in de toegepaste mechanica leerde hij rekenen als geen ander. Dat wil zeggen wetenschappelijk rekenen; hij leerde zelf rekenschema's te ontwikkelen voor het getalsmatig bestuderen van ingewikkelde technische vraagstukken. Omdat het in de laatste oorlogswinters te koud was op het laboratorium mocht hij de elektrische rekenmachine, een kapitaal bezit van het lab, mee naar huis nemen, 'draaien, draaien, doordraaien en na een dag of veertien had je weer een gedeelte af'. Hij promoveerde bij Biezeno in december 1945.

Burgers, zijn andere leermeester, had na de bevrijding het initiatief genomen om voor het Delfts Hoogschoolfonds jonge ingenieurs uit te zenden naar Engeland om zich op korte termijn op de hoogte te stellen van de nieuwste ontwikkelingen in de verschillende technische wetenschappen en zoveel mogelijk overdrukken mee naar huis te brengen. In dit kader werd Van Wijngaarden uitgezonden

voor de Toegepaste Mechanica, het vak van Biezeno. Hij maakte in de eerste maanden van 1946, van 9 januari tot 6 maart, een studiereis naar Engeland. Eenmaal onderweg breidde Van Wijngaarden op eigen initiatief de oriëntatie uit tot wiskundige instituten en stelde zich op de hoogte van machines en methoden. Daar op dat moment verzelfstandigde zich de aandacht voor het wetenschappelijk rekenen tot een autonome activiteit. Daar ligt voor Nederland een van de beginpunten van de informatica.<sup>2</sup> Van Wijngaarden bezocht onder meer de Mathematics Division van het National Physics Laboratory in Teddington, het Physical Laboratory van de University of Manchester, het Mathematical Laboratory van Cambridge University en de Scientific Computing Service van Comrie in London, allemaal plaatsen waar geavanceerd rekenwerk werd verricht en aan de bouw van computers werd gewerkt. Het was precies deze verzelfstandigde activiteit die hij even later, 1 januari 1947, aan het intussen opgerichte Mathematisch Centrum in Amsterdam mocht voortzetten. Hij gaf er een goede baan bij het Nationaal Luchtvaartlaboratorium voor op. 'Hoe ik zo gek kwam om op dat aanbod in te gaan? Het was het bod van de vrijheid. Ik mocht reizen en iets nieuws ontwikkelen.'

### **Constante van Hartree**

Van Wijngaarden koerste vanaf het allereerste moment aan op een bredere ontwikkeling dan degenen die hem binnengehaald hadden. Hij zette twee natuurkundestudenten, Carel Scholten en Bram Loopstra, aan het werk om een rekenapparaat te bouwen.

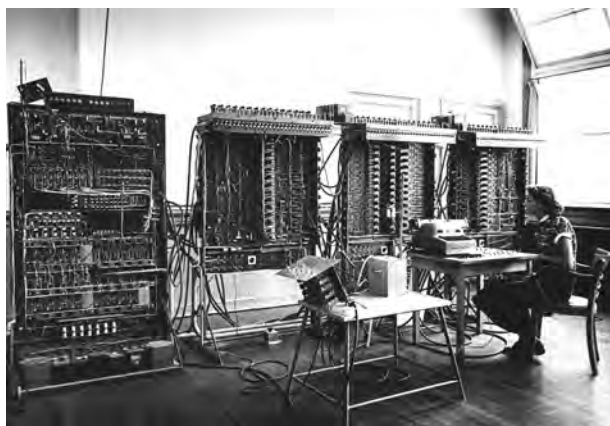


fig. 1 De ARR A I ten tijde van de opening 21 juni 1952

Zijn plannen behelsden van meet af aan zowel een relais-machine als een elektronisch apparaat. Hij formeerde een team van rekenaarsters en trok numeriek wiskundigen aan voor de voorbereiding van het rekenwerk en voor de wiskundige studie van rekenprocedures. De rekenafdeling vormde een drie-eenheid van rekenopdrachten, wiskundig onderzoek en machinebouw.

Het bouwen van de rekenmachine verliep volgens de 'constante van Hartree'. Douglas R. Hartree was een gezaghebbend Engels geleerde op het gebied van rekenmachines en numerieke analyse, iemand die veel werd ge-

vraagd voor voordrachten en werkbezoeken, ook op het Mathematisch Centrum. Natuurlijk toonde men hem overal vol trots de plaatselijke rekenautomaat in aanbouw. Op zijn vraag hoeveel tijd men nog nodig dacht te hebben eer de machine zou werken, was het antwoord steevast 'een maand of drie', de constante van Hartree. Het Mathematisch Centrum vormde hierop geen uitzondering. Zo was er in 1950 een prototype van de ARR A gereed, een versie die hardware programmeerbaar was en ook ingezet werd voor het rekenwerk. Deze proto-ARR A was ook niet de enige machine. De rekenaarsters hadden elektrische rekenmachines, Marchants en een Friden, en er was een National boekhoudmachine voor het printen van tabellen.



fig. 2 Bram Loopstra en de rekenaarsters

In het voorjaar van 1952 was er uiteindelijk een automatische rekenmachine die men als compleet en werkend beschouwde. Het Mathematisch Centrum betrok een nieuw gebouw en dit was een mooie aanleiding om ook de ARR A officieel in gebruik te stellen. Prins Bernhard was niet beschikbaar. Minister Rutten en burgemeester d'Ailly zouden er wel zijn op 21 juni 1952.

### **Programmeren**

Van Wijngaarden begon aan zijn opdracht voor het Mathematisch Centrum als geverseerd rekenaar en het was dan ook begrijpelijk dat er onder zijn leiding tegelijk met het uitvoeren van rekenopdrachten en met de bouw van de machine nagedacht werd over rekenen, rekenprocedures en het overdragen van deze taken aan de machine. Sprak men bij het rekenen met de hand van rekenschema's, procedures en algorithmes. Aan programmeerbare rekenmachines voerde men instructies toe, 'code' of 'programma'. Een uitgewerkt stuk programma dat bij gelegenheid opnieuw werd gebruikt noemde men een 'subroutine'. Het voorbereiden van het rekenwerk voor de machine ging met een nieuwe term 'programmeren' heten. In 1951, terwijl de machine op een constante van Hartree na gereed was, schreef Van Wijngaarden vooruitlopend op het werken ermee het rapport 'Programmeren voor de ARR A'. Hij ging nog een stap verder. Een briljan-



te natuurkundestudent uit Leiden vervoegde zich, op aanraden van de docent van een computercursus in Cambridge<sup>3</sup>, op het Mathematisch Centrum. Aad van Wijngaarden stelde de student Edsger Dijkstra<sup>4</sup> per 1 maart 1952 aan als ‘programmeur voor de ARRA’. Dijkstra was een van de eersten in de wereld, in ieder geval de eerste in Nederland, die expliciet het beroep programmeur had.

### Monte Carlo

De machine was klaar. Hij werkte, maar erg betrouwbaar was hij niet. De relais waren nogal gevoelig voor vocht. De rekenaarsters werden soms ingeschakeld voor ‘pootjes poetsen’, corrosie van de contactpuntjes verwijderen. Wellicht gestimuleerd door die onzekerheid en zeker geïnspireerd door de actualiteit van nucleair en ander fysisch onderzoek besloot Van Wijngaarden de ARRA bij de opening iets bijzonders te laten verrichten: het genereren van een willekeurig getal. Voor nucleair onderzoek, voor landbouwkundige proefopzetten, voor militair onderzoek, overall bestond behoefte aan ‘willekeurige getallen’, dat wil zeggen tabellen van willekeurig voortgebrachte getallen. In de mode waren verschillende varianten van de Monte-Carlo-Methode<sup>5</sup>. Het was geen gemakkelijke opgave hiervoor een geschikt programma te schrijven.

Aan de ene kant was het een technisch hoogstandje een random number generator te programmeren en de ARRA als elektronische roulette, of elektronische dobbelsteen te zien. Aan de andere kant: komt de minister een keer naar het Centrum en dan trakteert men hem op een willekeurig getal. Het heeft iets brutaals de minister voor een willekeurig getal naar Amsterdam te laten komen. De ironie zal Van Wijngaarden zeker niet ontgaan zijn; hij zal er op aangestuurd hebben. Ongetwijfeld heeft hij ter inleiding iets uitgelegd over simulatie van dobbelstenen.

De gok was te groot. De minister verrichtte de openingshandeling door een druk op de knop en na een kort tijdje werd het stil, te stil. Van Wijngaarden nam het woord en merkte op dat ‘de dobbelsteen nu op zijn punt’ stond. En met een flinke klap tegen het frame van de centrale processor wist hij de zaak weer in beweging te brengen. Daarna heeft de ARRA nooit meer naar behoren gewerkt.

### ARRA II

Opnieuw kwam er spontaan hulp. Gerrit Blaauw had zijn Delftse opleiding Elektrotechniek voortgezet in de Verenigde Staten en was gepromoveerd bij Howard Aiken op het ontwerp van diens Mark IV computer. Terug uit Amerika diende hij zich in oktober 1952 bij het Centrum aan. De ARRA was op dat moment al opgegeven. Met Blaauws aanwijzingen bouwde de Rekenafdeling in een jaar tijd een geheel nieuwe machine, de ARRA ... Op 29 mei 1954 sprak hij in het Colloquium Moderne Rekenmachines over ‘De A.R.R.A.’: ‘De A.R.R.A. is ontworpen en geconstrueerd tussen 1 januari 1953 en 1 februari

1954’. Achteraf is men de eerste machine ARRA I gaan noemen en die van Blaauw de ARRA II, voor het eerst in een overzichtsrapport in 1967.<sup>6</sup> In de pioniersjaren hield het Mathematisch Centrum het rookgordijn over de naamgeving van de twee computers in stand. Van Wijngaardens verklaring voor het opereren onder dezelfde naam, ARRA, was omzichtigheid en schaamte tegenover de geldschiet, ZWO, voor het falen van die eerste machine waar aanzienlijke bedragen in geïnvesteerd waren. De ARRA II heeft een aantal jaren tot volle tevredenheid gefunctioneerd en werd in 1956 vervangen door de ARMAC, Automatische Rekenmachine Mathematisch Centrum. Wiskundigen zijn misschien zonderling, maar toch niet zo zonderling dat ze graag zelf hun rekensommen zouden maken. Dat liet men liever over aan machines.<sup>7</sup> Het had echter in die pionierstijd heel wat voeten in aarde eer men het rekenwerk op computers kon overdragen.

Gerard Alberts, KUN, Nijmegen en CWI, Amsterdam.

### Noten

- [1] Campbell-Kelly, M. & W. Aspray (1996). *Computer – A History of the Information Machine* New York: BasicsBooks.
- [2] Pas in 1964 introduceerde Zoutendijk het woord ‘informatica’. Als het vak al een naam had in 1946, dan was dat ‘numerieke analyse’ of ‘moderne rekenmachines’.
- [3] Onder leiding van Maurice Wilkes was in 1949 de eerste stored-program computer, de EDSAC, gereedgekomen in het Mathematical Laboratory van de University of Cambridge. Wilkes en Van Wijngaarden hadden elkaar intussen goed leren kennen. Edsger Dijkstra volgde een cursus in Cambridge.
- [4] Edsger W. Dijkstra was de meest vermaarde Nederlandse informaticus, winnaar van de ACM Turing Award, beroemd om zijn idee van ‘structured programming’. Hij overleed in augustus 2002.
- [5] Householder, A.S. (1951). *Monte Carlo Method*. Washington: National Bureau of Standards.
- [6] Donselaar, P.J. van (1967). *De ontwikkeling van elektronische rekenmachines in Nederland*. Amsterdam: SSAA.
- [7] In het onderzoek naar Van Wijngaarden en terwille van de tentoonstelling Nederlandse computerpioniers 1945-1965 (TechniekMuseum Delft) heb ik in 1999 historisch onderzoek verricht in aanvulling op [6]: Alberts, G., F. van der Blij & J. Nuis (red.) (1987). *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarloozen*. Amsterdam: CWI.  
Kranakis, E. (1988). Early Computers in The Netherlands, *CWI Quarterly*, I(4), 61-84.  
Oost, E.C.J. van, G. Alberts, J. van den Ende & H.W. Lintsen (red.) (1998). *De opkomst van de informatietechnologie in Nederland*. Den Haag: Alberts, G. (1998). *Jaren van berekening*. Amsterdam: University Press.

Zodra er gebruik van ICT gemaakt wordt duikt al vaak de term ‘digitale leeromgeving’ op. Maar een heldere definitie van dit begrip is nog niet ontstaan. **Gerard Koolstra** schetst een algemeen beeld van eigenschappen van digitale leeromgevingen. De auteurs van de artikelen in deze special is verzocht deze verkenning als leidraad te gebruiken.

## Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning

### Wat?

De uitdrukking ‘digitale leeromgeving’ is betrekkelijk nieuw. Van Dale kent het hele begrip ‘leeromgeving’ niet en geeft voor digitaal ‘cijferverwerkend’. Toch wordt de uitdrukking veel, en steeds meer, gebruikt, vooral bij opleidingen in het hoger en wetenschappelijk onderwijs. Speurend naar de betekenis van digitale leeromgeving (en verwante termen zoals elektronische leeromgeving, virtuele leeromgeving) zijn drie soorten omschrijvingen te onderscheiden: theoretische, praktische en instrumentele.

In de *theoretische* beschrijving wordt vaak – en terecht – eerst omschreven wat een leeromgeving is. De uitkomst is vaak wat teleurstellend: iets als het totaal van middelen, factoren en dergelijke dat *leren mogelijk maakt*. Zo beschouwd is bijna alles een leeromgeving: de kamer, de straat, de werkplek en noem maar op, en kun je het gsm-netwerk een ‘digitale leeromgeving’ noemen. In zekere zin is dit ook zo, maar je komt er niet veel verder mee. Gelukkig zijn er ook omschrijvingen waar je wat meer aan hebt, zoals *een door middel van ICT geïntegreerde context van inhoud, didactische methoden en organisatorische voorzieningen, die de leerling ondersteunt in het leerproces*.<sup>1</sup> Een sterk punt in deze omschrijving vind ik het expliciet noemen van didactiek, en – in het verlengde daarvan – het criterium van het ondersteunen van het leerproces. Daarentegen leidt de nadruk op het door middel van ICT geïntegreerd zijn van inhoud, methoden en voorzieningen makkelijk tot onevenredig veel aandacht voor zaken die gezien vanuit het onderwijs/leerproces van secundair belang zijn.

In de praktijk<sup>2</sup> wordt vaak over een digitale leeromgeving gesproken wanneer er

- lesmateriaal via internet of intranet beschikbaar gesteld is
- communicatiemogelijkheden zijn via internet of intranet (onder andere e-mail, chatten, ...)
- een of andere vorm van registratie is van activiteiten en/of resultaten
- een regeling is van rechten en plichten.

Het beschikbaar stellen van lesmateriaal kan betekenen dat er een planning ingekeken kan worden, een tekst kan worden gedownload, maar kan ook multimediapresentaties met film en geluid impliceren of interactieve simulaties. Naast het presenteren van eigen producten wordt soms ook – via hyperlinks – het werk van anderen onder de aandacht gebracht. Nog afgezien van de onderwijskundige betekenis van het gebodene hebben we hier te maken met een onvoorstelbare diversiteit.

De mogelijkheid om via internet met medeleerlingen of de docent te communiceren lijkt een *must*, ook in situaties waarin de betrokkenen elkaar regelmatig op andere wijze spreken of ontmoeten. De wijze van communicatie varieert van heel geavanceerd (de mogelijkheid bijvoorbeeld om samen aan een probleem te werken als ware het samen aan tafel) tot heel basaal, de mogelijkheid e-mail te sturen of te lezen.

Ook de registratie kan variëren van een simpele inlogboekhouding tot geavanceerde systemen waarbij de vorderingen per leerling op allerlei manieren worden bijgehouden, en op basis daarvan ook acties worden ondernomen – bijvoorbeeld eisen of adviseren een bepaald gedeelte nog een keer te doen.

Digitale leeromgevingen zijn in de praktijk vaak alleen toegankelijk voor leerlingen van een bepaalde instelling, of deelnemers aan een bepaalde cursus. Hoewel begrijpelijk, betekent dit dat veel waardevol materiaal voor bijna niemand toegankelijk is, er veel werk tien- honderd- of duizendvoudig wordt gedaan en er weinig mogelijkheden zijn om te leren van ervaringen. Digitale Leeromgevingen zijn voor niet-deelnemers vaak Dichte Leeromgevingen. Soms is uit een oogpunt van beheersbaarheid en veiligheid de zaak zo georganiseerd, dat ook docenten en ontwerpers een dergelijke indruk krijgen.

Niet zelden wordt de term ‘digitale leeromgeving’ gebruikt voor *software* (met enkele aanvullende voorzieningen) die pretendeert het maken van een digitale leeromgeving te vergemakkelijken – zoals Blackboard, of WebCT. Het komt op mij enigszins over alsof het programma MS-Word een ‘digitaal boek’ wordt genoemd. Als gereedschap bekeken is het ontbreken van (gebruiksvriendelijk-

ke) mogelijkheden om met formules, grafieken en tabellen te werken een gemis. Wat dat betreft zijn de programma's interessanter die computeralgebra (vaak afgeleid van Maple, Mathematica of Derive) combineren met tekstverwerking, rekenblad en internetfaciliteiten en soms ook met aansluitmogelijkheden op andere apparaten (zoals grafische rekenmachines). Enkele interessante pakketten in dit verband zijn Scientific Notebook, Studyworks en TI-Interactive.

In zekere zin kunnen deze programma's gezien vanuit het wiskundeonderwijs meer aanspraak maken op het etiket 'digitale leeromgeving' dan 'lege hulzen' als Blackboard. Ze bieden in ieder geval de mogelijkheid van een dialoog met de gebruiker met een wiskundige inhoud.

## Waarom?

Motieven om digitale leeromgevingen in te richten worden niet altijd even duidelijk verwoord. Soms wordt er over gezwegen, soms worden er alleen reclamekreten geuit. Toch kan er wel wat gezegd worden over mogelijke motieven voor digitale leeromgevingen, waarbij we de ongetwijfeld belangrijke reden 'Je moet toch met je tijd meegaan' even overslaan.

In de eerste plaats kan in sommige situaties een digitale leeromgeving een poging zijn tot betere communicatie en interactie van de betrokkenen (leerlingen en docent). Dat geldt met name voor vormen van onderwijs waarbij het contact vooral schriftelijk was, of (grotendeels) bestond uit niet altijd even boeiende presentaties voor een groot 'gehoor'. Vanuit dit motief is een deel van de populariteit van digitale leeromgevingen bij afstandsonderwijs en wetenschappelijk onderwijs te verklaren.

In het verlengde hiervan liggen reacties van docenten in het voortgezet onderwijs, die geconfronteerd worden met een vermindering van het aantal contacturen, hetzij door overmacht, hetzij beleidsmatig ('studiehuis'). Als noodoplossing wordt iets op internet gemaakt.<sup>3</sup> In feite liggen dit soort activiteiten in het verlengde van het werk van de betrokken docent die bij tijdnood samenvattende stencils en uitwerkingen voor de leerlingen maakt en zijn leerlingen toegezegd dat ze altijd mogen bellen.

Op managementniveau lijkt soms een motief voor het toepassen van digitale leeromgeving de verwachting met minder mensen meer onderwijs te kunnen geven. Mogelijk wordt dit motief de komende jaren door het lerarentekort sterker.

Niet zelden lijkt een belangrijk motief het overzichtelijk bij elkaar zetten van allerlei soorten lesmateriaal. Vooral sinds de invoering van de tweede fase worden leerlingen overstelpt (althans voor hun gevoel) met een grote hoeveelheid papier: studiewijzers, examenroosters, uittreksels, aanvullingen op boeken, proeftoetsen, uitwerkingen, antwoorden en correcties daarop, beoordelingscriteria, enzovoort, enzovoort. Niet zelden raakt iets kwijt of ligt 'ergens'. Steeds meer docenten zetten het materiaal ook op internet, soms onder het mom van 'digitale

leeromgeving', maar – gelukkig – vaak ook 'gewoon' op hun website of die van de school.

Veel verder reikt de aspiratie om door middel van digitale leeromgevingen alle voordelen die de inzet van ICT kan hebben in het onderwijs (breed opgevat, inclusief het administratieve en financiële randgebeuren) als het ware te integreren. De bijbehorende motieven zijn – daarom – zeer divers: onderwijs interessanter maken, bevordering van actief en leerlinggestuurd leren, wereldwijd en levenslang leren mogelijk maken, bevordering van interactief leren, maar ook: meer zicht op rendement, studievoortgang en kosten, betere planning, advisering, enzovoort.

## Wat nu?

Begrippen als digitale leeromgevingen worden blijkbaar niet alleen op diverse manieren omschreven en gebruikt, de motieven en doelstellingen lopen ook sterk uiteen.

De vraag wat is wat we moeten met al deze omschrijvingen, doelstellingen, verwachtingen en plannen.

In eerste instantie de verscheidenheid – en soms ook de verwarring – als gegeven accepteren. Het is niet onze pretentie om met deze special het begrip 'digitale leeromgeving' te ontdoen van zijn veelkoppig karakter.

Wel willen we nagaan wat de invloed van 'dit alles' (zowel het gebruik van, als het praten over digitale leeromgevingen en aanverwante zaken) kan hebben en/of zou moeten hebben op het wiskundeonderwijs in Nederland. Ook deze doelstelling is vermoedelijk te ambitieus. Laten we het houden op een aanzet tot.

## Waarheen?

Sommige 'onderwijsvernieuwingen' blijken na verloop van tijd weinig of niets te betekenen, andere zijn na verloop van tijd zo vanzelfsprekend geworden dat je je nauwelijks kunt voorstellen dat het ooit anders was. Voor het terrein van ICT geldt iets dergelijks, sommige 'veelbelovende' toepassingen verdwijnen binnen de kortste keren geruisloos, andere veroveren in korte tijd de wereld. Op het snijvlak van ICT en onderwijs is het (dus) van het allergrootste belang – en tevens ontzettend moeilijk – om goed te onderscheiden wat van werkelijke betekenis is, en wat wel weer voorbij gaat.

Zonder visionaire pretenties te hebben is er wel een aantal aspecten te noemen die veel potentie hebben:

- interactief 'lesmateriaal'
- wereldwijde toegang tot 'kennis'
- verbreding van contacten.

*Interactief lesmateriaal* lijkt – onder bepaalde voorwaarden – een positief effect te hebben op de wiskundige activiteit van leerlingen, meer recht te doen aan verschillen tussen leerlingen en begripsvorming te ondersteunen.<sup>4</sup>

Enkele interessante vragen in dit verband zijn:



- Welke positieve effecten zijn waarneembaar?
- Welke randvoorwaarden zijn van belang?
- Welke negatieve effecten zijn mogelijk, en hoe zijn die te bestrijden?
- In hoeverre zijn leereffecten te verklaren en te voorstellen?
- Welke mogelijke gevolgen zijn er voor de inhoud en didactiek van het wiskundeonderwijs?

Hoewel ‘alle kennis toegankelijk voor iedereen’ om tal van redenen een illusie is, kunnen we wel zien dat veel bronnen van kennis en informatie de afgelopen jaren veel *toegankelijker* zijn geworden. Dit biedt voor zowel docenten als leerlingen enorm veel mogelijkheden.<sup>5</sup> Er zijn ook waarschuwend geluiden: oppervlakkigheid en vluchtigheid lijken ruim baan te krijgen.

De *verbreding* van contacten is al heel normaal geworden. Collega’s die elkaar nooit ontmoet hebben discussiëren of overleggen met elkaar en wisselen materiaal uit, leerlingen vragen hulp aan mensen die ze waarschijnlijk nooit zullen zien.<sup>6</sup> Sociaal of geografisch isolement lijkt van minder belang te zijn.

Bij verder denken hierover komen vragen op als:

- Hoe zit het met de kwaliteit van ‘digitale’ contacten vergeleken met ‘normale’?
- In hoeverre heeft de vorm (chat-box, prikbord, e-mail, sms, video-conferentie) invloed op de inhoud?
- In hoeverre is ‘monitoring van’ of ‘toezicht op’ mogelijk en wenselijk?

## Hoe?

Bij ‘nieuwe’ ontwikkelingen of nieuwe formuleringen van al langer bestaande processen zie je vaak een tweedeling: fans en sceptici. Fans schilderen vaak in prachtige bewoordingen de nieuwe mogelijkheden en hebben de neiging zich wat meewarig uit te laten over degenen die ‘nog niet zo ver zijn’. Sceptici houden zich vaak gedeisd totdat er berichten komen waarmee ze hun gelijk kunnen halen: ‘Zie je wel, ik heb altijd al gezegd ...’ Een dergelijke tweedeling lijkt ook enigszins te bestaan wanneer het gaat om onderwijs en ICT of afgeleiden daarvan. Hoewel begrijpelijk, is een versimpeling van een houding tot ‘voor of tegen’ ook hier niet erg vruchtbaar.

Juist bij het zien en beschrijven van – vaak indrukwekkende – mogelijkheden op dit terrein is het zaak voldoende oog te hebben voor uitglijers, dwaallichten, drijfzand en nog wat van dat soort zaken.

Overtuigd van de mogelijkheden van interactief lesmateriaal is het zaak oog te hebben voor te veel en te oppervlakkige aandacht voor de vorm van het materiaal, en een

te simpel concept van leereffecten, die mogelijk ontwikkelingen een verkeerde kant op sturen.

Om een voorbeeld te noemen. Het is denkbaar dat er een prachtige ‘digitale leeromgeving’ wordt gemaakt rond, zeg, autoracen. Het ziet er perfect uit, de geluidseffecten zijn levensecht, en getoonde grafieken, formules en tabellen suggereren dat er echt aan wiskunde wordt gedaan. Of deze ‘leeromgeving’ het ‘denken bevordert’ om met Anne van Steun te spreken, is nog maar de vraag. Mischien leer je alleen sneller reageren.

Met andere woorden, het zien van interessante mogelijkheden op het gebied van ICT en Wiskunde betekent niet het klakkeloos omarmen van niet zelden onduidelijke modieuze concepten. Integendeel.

Het serieus nemen van nieuwe mogelijkheden die samenhangen met technologische en maatschappelijke ontwikkelingen betekent vooral ook aandacht voor die factoren die belemmerend of stimulerend werken op de gewenste leerprocessen. Op dit gebied zijn er al waardevolle ervaringen.<sup>7</sup>

Ook betekent het – dit is vooral zichtbaar bij het gebruik van computeralgebra – een herbezinning op doelstellingen van het wiskundeonderwijs.

Het wiskundeonderwijs – en het Nederlandse in het bijzonder – heeft een rijke traditie ten aanzien van het ontwikkelen van waardevolle didactische concepten. Die concepten – zoals ‘wiskunde als menselijke activiteit’ en het ‘herontdekkingsprincipe’ zijn actueler dan ooit.

Het zou jammer zijn wanneer ze ingeruild zouden worden voor een vaag concept van ‘new learning’.

Gerard Koolstra, [g.koolstra@chello.nl](mailto:g.koolstra@chello.nl)

## Noten

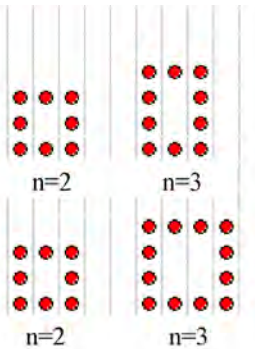
- [1] Vries, C.A. de (red) (januari 2002). *Virtueel leren in de digitale leeromgeving: vooronderzoek in het voortgezet onderwijs*. Stichting ICT op School.
- [2] Zie bijvoorbeeld het artikel van Jos Tolboom (2002). Een digitale leeromgeving voor het vak wiskunde. *Nieuwe Wiskrant*, 21(3), 19-22.
- [3] Zie noot 2.
- [4] Zie onder andere het artikel van Martin van Reeuwijk (2001). Bollen schieten. *Nieuwe Wiskrant*, 20(3), 4-7 en de ervaringen met dynamische meetkunde programma’s zoals Cabri.
- [5] Zie onder andere Wurlis 10, 11 en 12 (*Nieuwe Wiskrant*, 20(4), 46-49, 21(1), 51-52 en 21(3), 50-51).
- [6] In dit verband kan onder andere gewezen worden op de WiskundE-brief, WisFaq en WisBase.
- [7] Onder andere in het kader projecten als WisWeb, Calculus en Kinematica, Computeralgebra.

Een formule opstellen voor het aantal stippen in een regelmatige rij van figuren. Als hulpmiddel hiervoor is het applet *Stippel Algebra* ontwikkeld. **Sonia Palha** en **Martin van Reeuwijk** experimenteerden met het applet in de klas. Zij vroegen zich af of *Stippel Algebra* een meerwaarde bood bij het onderzoeken van verbanden.

## Zie je het verband?

**Herken het patroon**

Hiernaast zie je twee rijen van figuren waarvan de eerste figuur ( $n=1$ ) ontbreekt. Open het applet *Stippel Algebra*, en teken de figuren die hiernaast staan.



$n=2$

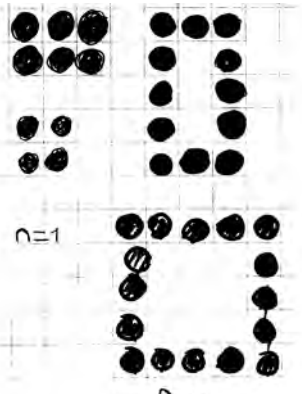
$n=3$

a. Teken ook de vierde ( $n=4$ ) en de eerste ( $n=1$ ) figuur voor deze twee rijen.

b. Geef een expressie met  $n$  voor de twee rijen van figuren hiernaast.

fig. 1 Voorbeeld 1: Herken het patroon

Majori was een van de leerlingen die met het WisWeb-applet *Stippel algebra* aan deze opdracht had gewerkt. Hieronder staan haar antwoorden op de vragen a en b.



$n=1$

$n=4$

vraag a

1ste Rg:

2de Rg:

vraag b

fig. 2 Majori's antwoord op de vragen a en b

Een patroon beschrijven met woorden, ontbrekende figuren tekenen of zelf een regelmatig patroon maken wordt in het algemeen door de meeste leerlingen goed en enthousiast gedaan. Majori's antwoord op vraag a is daar heel typerend voor. Leerlingen tekenen de volgende of vorige figuur moeiteloos en de meerderheid van de leerlingen kan vragen beantwoorden als: 'hoeveel stippen heeft de tiende figuur?' en 'is er een figuur met 123 stippen?'

Wanneer er naar een expressie wordt gevraagd zoals in vraag b, dan hebben de leerlingen daar meer moeite mee. Majori geeft niet eens antwoord op die vraag. Een 'leeg' antwoord kan van alles betekenen: begrijpt de leerling de vraag niet? Is zij naar het verband tussen de figuren aan het kijken? Of zit zij naar het verband tussen het figuurnummer en de figuur te kijken? Weet zij het antwoord, maar kan zij het niet in formele taal opschrijven?

Wat precies de moeilijkheid is voor Majori en andere leerlingen is moeilijk in te schatten. Maar als je met de leerling wilt communiceren is het van belang dat je een idee hebt van de manier waarop hij of zij redeneert.

### Verbanden in stippenfiguren

Dit artikel verhaalt over een wiskundeles waarin de leerlingen bezig zijn met het beschrijven van *verbanden* in de context van rijen van stippenfiguren. We doen verslag van de ervaringen in een eerste klas en daarbij richten we ons op de volgende vragen:

- Hoe kijken leerlingen naar rijen van stippenfiguren?
- Wat is de meerwaarde van het applet *Stippel algebra* bij het leren van wiskunde en hoe kan het gebruikt worden om leerlingen te stimuleren tot wiskundige activiteiten?

Het idee om getallen voor te stellen door stippenpatronen is al heel oud en komt uit de school van Pythagoras. Tweeduizend jaar later is dit wiskundige onderwerp weer tot leven gebracht door bijvoorbeeld Martin Kindt en anderen in modules voor de Amerikaanse methode *Mathematics in Context*<sup>1</sup>.

Een aantal WisWeb-applets ([www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl)) is op deze

modules geïnspireerd en in het WisWeb-project (Van Reeuwijk, 2001, 2002) is lesmateriaal ontwikkeld rond de applets. Het applet *Stippel algebra* is een van die applets die uitgebreid in de klas (zowel in de eerste en tweede als in 4 vwo) gebruikt zijn.

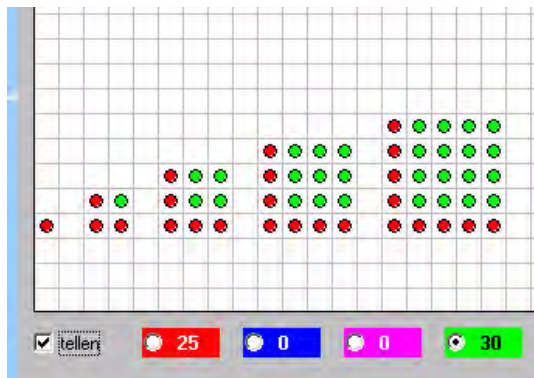


fig. 3 Het applet 'Stippel algebra'

Met het applet kunnen stippelpatronen worden getekend met stippen van verschillende kleuren. Het aantal stippen (per kleur) kan door het applet worden geteld (in het voorbeeld hierboven 25 zwarte en 30 grijze).

## Applets in de les

In klas 1E van het Herman Jordan Lyceum, een Montessori school te Zeist, is in het schooljaar 2001-2002 met de applets *Bollen schieten*, *Profielen draaien*, *Aanzichten raden*, *Grafieken*, *Algebra pijlen* en *Stroken* in de les gewerkt. De ervaringen met deze applets waren positief: ze sloten goed aan bij de leerstof die in de les was behandeld en de leerlingen waren goed bezig (sommigen meer dan anderen, maar iedereen deed wiskunde op zijn eigen niveau).

Bovenstaande applets werden als aanvulling bij bestaande hoofdstukken uit het boek gebruikt. In het voorjaar van 2002 werd een stap verdergegaan. Toen is lesmateriaal ontwikkeld rond applets waarmee een heel hoofdstuk is vervangen: hoofdstuk 12 uit *Moderne Wiskunde 1hv, deel 1b, 7<sup>e</sup> editie*, dat gaat over verbanden. Het lesmateriaal is georganiseerd rond drie hoofdthema's: grafieken en (dubbel)tabellen, getalpatronen en (lineaire) verbanden vergelijken. Die drie thema's zijn gekoppeld aan de applets: *Grafieken*, *Stippel algebra* en *Algebra pijlen*. Deze drie thema's en de applets bieden verschillende situaties en contexten waarin verbanden kunnen worden bestudeerd.

Gedurende twee weken hebben tien van de 24 leerlingen uit klas 1E gewerkt met werkbladen, waarbij ze gebruik konden maken van de computer. Niet voor alle opgaven was de computer nodig.

Omdat de leerlingen het heel prettig vinden om zelfstandig te werken, is afgesproken dat ze zelf aan de slag konden gaan. Verder werden klassikale momenten afgesproken waar het verrichte werk samen werd besproken.

Uitgebreide beschrijvingen van de ervaringen in de lessen en ook het lesmateriaal zijn te vinden op de wisweb site.

## Twee soorten verbanden

We gaan terug naar de opgave over de patronen aan het begin van dit artikel. Sonia besprak dit met Majori. De leerling wist dat een expressie zo iets als een formule is, maar zij kon echt geen formule bedenken die bij de rij figuren past. Sonia en Majori zaten samen aan de computer en Sonia vroeg nog een keer de vier figuren van de twee rijen met het applet te tekenen.

Sonia: Hoe kom je aan de volgende figuur?

Majori: Er komt steeds twee bij.

Sonia: Dus ...

Majori: ... dat moet *iets plus 2* zijn, want er komt steeds 2 bij.

Vervolgens kwam Majori met de formule *iets + 2*. Heel herkenbaar ... maar hoe ga je als docent nu verder? Hieronder beschrijven we drie mogelijkheden.

Een eerste manier is kijken naar het aantal stippen dat *erbij* komt: 'van figuur 1 naar figuur 4 komen er drie keer twee stippen bij, van figuur 1 naar figuur 5 komen er vier keer twee stippen bij, enzovoort ...' Dit gebeurde bij Majori.

Een tweede manier is het tellen van het totaal aantal stippen in elke figuur. Hierbij biedt het gebruik van het applet een voordeel omdat het de stippen voor je telt.

Een derde manier is het visueel benaderen door te kijken naar het verband tussen 'het patroon' en 'het figuurnummer'. Figuur 4 heeft  $6 + 3 \times 2$  stippen, want er zitten drie stippen boven plus drie stippen onder, dus zes; plus drie stippen in beide zijden, dus  $3 \times 2$  stippen; zo zal figuur 10  $6 + 9 \times 2$  stippen hebben, enzovoort ...

Het grote verschil tussen de eerste manier en de andere twee is dat er twee verschillende verbanden worden beschreven. In de eerste uitleg kijk je naar *het verband tussen de figuren*; de coëfficiënten (hier 4 en 2 voor de eerste rij) zijn respectievelijk startgetal en spronggetal, de variabele  $n$  staat hier voor het aantal sprongen vanaf het startgetal. In de andere twee manieren wordt gevraagd om *het verband tussen het aantal stippen van de figuur en het figuurnummer* te beschrijven. De variabele  $n$  staat hier dan voor het figuurnummer.

In de formele wereld van de algebra is er geen verschil, je krijgt dezelfde expressie. Maar dat weten de leerlingen nog niet! Ze redeneren in de context van de vraag en niet in de abstracte wereld van de wiskunde. Misschien is het nooit duidelijk geworden voor de leerlingen welke van de twee verbanden is bedoeld bij het vragen naar een expressie. Net als in de uitleg van Sonia aan Majori gaan we er snel vanuit dat leerlingen concepten als startgetal en spronggetal kunnen gebruiken om een patroon te beschrijven met een formule. Maar is dat zo? Hoe kijkt de



leerling naar het figuurpatroon en naar de regelmaat die daarin zit? Het volgende voorbeeld geeft een paar mogelijke antwoorden op die vraag.

## Wat zien de leerlingen?

Aan de hand van een tweede voorbeeld laten we zien wat leerlingen doen en kunnen.

**Geef een expressie**  
Hieronder zie je een rij figuren die gemaakt zijn met zwarte en grijze stippen.

Geef een expressie (etiket of formule) die het verband tussen het figuurnummer ( $n$ ) en het aantal zwarte stippen beschrijft; doe hetzelfde voor het aantal grijze stippen.

fig. 4 Voorbeeld 2: Geef een expressie

fig. 5 Het werk van Anouk

fig. 6 Het werk van Manon

fig. 7 Het werk van Majori

Door alleen naar antwoorden van leerlingen te kijken kun je niet achterhalen hoe ze tot het antwoord gekomen zijn. Maar op basis van gesprekken met leerlingen tijdens de les kun je hun gedachtengang nagaan. We hebben de antwoorden van Anouk, Majori en Manon gekozen omdat zij representatief zijn voor het aantal verschillende gegeven antwoorden.

Wat betreft de rij van zwarte stippen heeft Anouk gereedeneerd vanuit het verband tussen het nummer van de figuur en het aantal stippen in de figuur. Er is geen sprake van recursief denken. Zij heeft het aantal horizontale stippen ( $n$ ) plus het aantal verticale stippen dat resteert ( $n-1$ ) geteld. Manon geeft een uitleg die recursief is, maar vervolgens schrijft zij  $n - 1 + n$ . Dus het lijkt dat zij bij de opdracht met de twee mogelijkheden bezig is geweest. Uiteindelijk heeft zij de verticale stippen zonder de horizontale ( $n-1$ ) geteld en vervolgens de horizontale ( $n$ ). Majori gebruikt de letter  $f$  van 'figuur', zij telt twee rijen van stippen (een verticaal en de andere horizontaal) die gelijk zijn en trekt de hoekstip die in beide rijen zit er vanaf.

Bij het rekenen aan de rij van grijze stippen blijkt dat leerlingen zien dat er een vierkant is waarvan de zijde een stip minder heeft dan het nummer van de figuur.

We vonden het opmerkelijk dat leerlingen veel meer moeite hebben met het geven van een expressie bij voorbeeld 1 dan bij voorbeeld 2. Hoe komt dat? De expressies die bij voorbeeld 2 horen zijn lineair en kwadratisch. Zou je juist niet verwachten dat leerlingen daarmee meer moeite hebben dan wanneer beide expressies lineair zijn? Het lijkt erop dat leerlingen bij voorbeeld 2 veel meer redeneren vanuit de figuur zelf: de manier waarop de stippen gerangschikt zijn. Dit zou dan kunnen verklaren waarom de leerling bij het bouwen van een expressie niet wordt geholpen met de vraag: 'Wat komt erbij?' Als laatste opdracht over stippelalgebra is aan de leerlingen gevraagd om zelf een patroon te bedenken en de formule die erbij hoort te geven.

**Maak zelf een patroon**  
Bedenk zelf (of in een groepje) een rij van figuren. Je kunt een figuur van hiernaast gebruiken of zelf een figuur verzinnen.  
Teken tenminste de eerste 4 figuren ( $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$ ,  $n=4$ ) en bedenk welke formule bij die rij hoort.  
Schrijf jouw antwoord op een apart papier en lever het bij je docent in. We zullen het dan met de hele klas bespreken.

fig. 8 Voorbeeld 3: Maak zelf een patroon

Op de volgende pagina staan enkele rijen van figuren die door een leerling zijn gemaakt. Leerlingen hebben deze vraag op verschillende niveaus beantwoord. Het lijkt dat leerlingen die sprong- en startgetallen gebruikten bij het opstellen van hun formules

meer en vooral creatievere patronen bedacht hebben. Heleen bijvoorbeeld gaf vijf verschillende figuurpatronen en de bijbehorende expressies. Alle expressies zijn correct behalve de laatste, waar zij  $n \times 2 + 5 \times 2$  schreef in plaats van  $(n \times 2 + 5) \times 2$ . Andere leerlingen hebben maar één letterpatroon gegeven, soms zonder expressie erbij (zoals Manon).

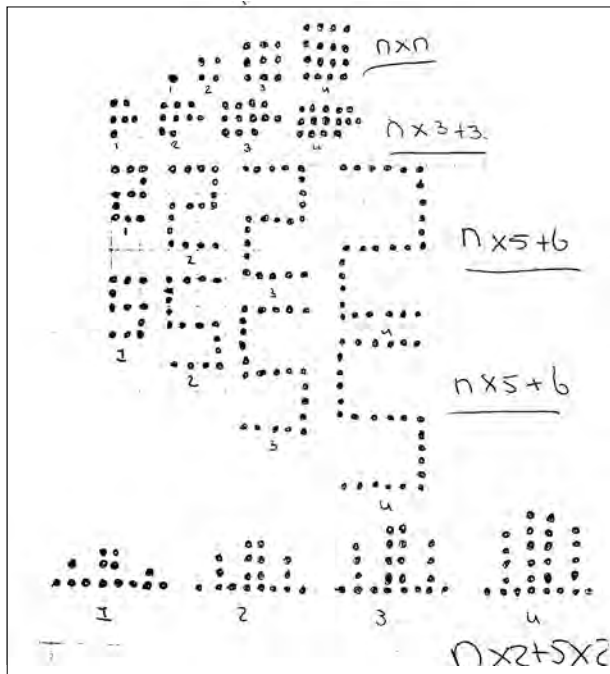


fig. 9 Het werk van Heleen bij voorbeeld 3

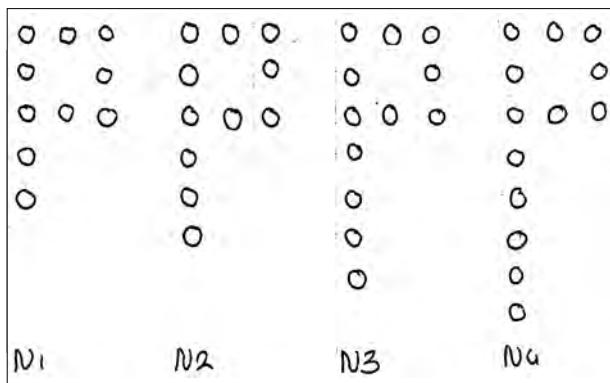


fig. 10 Het werk van Manon bij voorbeeld 3

## Terugkijken

In het WisWeb-project is het applet *Stippel algebra* vooral gebruikt in de eerste en vierde klas. De ervaringen in beide groepen zijn positief: leerlingen pakten het makkelijk op; de opdrachten zijn uitdagend en motiverend; leerlingen zijn actief en geconcentreerd bezig en kunnen op eigen niveau werken.

We hebben gezien dat bij het gebruik van figuurpatronen de leerlingen moeite hebben met het geven van een expressie die het patroon beschrijft (dit bleek ook een pro-

bleem toen we het applet in een vierde klas uitprobeerden). Uit het experiment bij Sonia in de klas bleek dat de volgende factoren bijdragen aan de verwarring:

- Er zijn twee soorten verbanden die een rol spelen: *het verband tussen de figuren* en *het verband tussen figuur en figuurnummer*.

Het is voor de leerlingen niet altijd duidelijk naar welk van de twee verbanden gevraagd wordt.

- Sommige leerlingen hebben veel meer moeite met het visualiseren van een patroon dan anderen.
- De uitleg in het materiaal of door de docent sluit niet altijd aan bij de denkwijze van de leerling.

Het verband dat de docent ziet is niet hetzelfde als het verband dat de leerling ziet.

Wat betreft de organisatie van het werk en de uitvoering in de les: dat zouden we nu op een andere manier doen. Het splitsen van de klas in een deel dat met het applet werkte en een deel dat met het boek werkte was geen goed idee. Sonia kreeg weinig tijd voor de leerlingen die met het lesmateriaal bezig waren en vooral niet genoeg rust om met de leerlingen hun werk te bespreken. Beter is het om leerlingen in groepjes van twee te laten werken en daarna de bespreking in een combinatie van twee of drie groepjes te houden. In plaats van alle vragen te corrigeren is het beter om een aantal kernvragen te selecteren die klassikaal besproken worden. Het zelfstandig werken van de leerlingen – zoals dat in Montessori-onderwijs heel gebruikelijk is – heeft ook nadelen: het is moeilijk om de leerlingen bij elkaar te brengen om de opdrachten te bespreken. Voor de docent is het moeilijk te observeren waar de leerlingen mee bezig zijn.

We vroegen ons af of het applet *Stippel algebra* een meerwaarde heeft bij het onderzoeken van verbanden. Daar hebben we in het experiment bij Sonia op school geen duidelijk antwoord op gekregen. We hebben wel bevestigd gekregen dat stippenfiguren een geschikte en aansprekende context is om met verbanden bezig te zijn. Bovendien werden door het gebruik van de applets en de bijbehorende opdrachten problemen met het leren zichtbaar, die in de sommen van het boek niet (of minder) expliciet naar voren komen.

Sonia Palha en Martin van Reeuwijk, Freudenthal Instituut

## Literatuur

- [1] Wisconsin Center for Educational Research en Freudenthal Institute (Eds) (1998). *Mathematics in Context*. Chicago: Encyclopedia Britannica.
- [2] Reeuwijk, M. van (2001). Bollen schieten. *Nieuwe Wiskrant*, 20(3), 4-7.
- [3] Reeuwijk, M. van (2002). Studiedag WisWeb. *Nieuwe Wiskrant*, 21(3), 27-28.
- [4] Wisweb team. Lesverslagen en lesmateriaal gepubliceerd op de site [www.wisweb.nl](http://www.wisweb.nl)

Bij het gebruik van ICT in de wiskundeles gaat de gedachte vaak allereerst uit naar het gebruik van programma's die speciaal voor dat doel, wiskunde, gemaakt zijn. Maar het is ook mogelijk een bestaand programma nuttig te maken voor gebruik in de wiskundeles. Die keuze is gemaakt door **Frits Spijkers**. Hij vertelt hoe Excel (XL) ingezet kan worden.

## Excel in de wiskundeles

### Inleiding

Onlangs stelde de sectie wiskunde van RSG Wiringherlant (waar ik deel van uitmaak) zichzelf de vraag: Wat doen wij structureel aan ICT in de wiskundeles en waarom doen we wat we doen? Eigenlijk twee vragen ineen. En merkwaardig genoeg konden we de eerste (wat we aan ICT doen) gemakkelijker beantwoorden dan de tweede (het waarom). Er bleek eigenlijk niet veel structureels te gebeuren en wat er gebeurde had vooral te maken met het uitvoeren van opdrachten met de computer uit de lesmethode. Vaak werden ook die opgeofferd aan het altijd aanwezige 'tijdgebrek'. Hoog tijd om eens op een rijtje te zetten wat je als sectie nou eigenlijk wilt met ICT in de wiskundeles.

### Overwegingen vooraf

Als het gaat om ICT, dan denk ik niet aan het inzetten van allerlei voor één doel ontworpen programmaatjes. Dan denk ik aan het leren van het goed werken met:

- een tekstverwerker met formule-editor
- een rekenblad
- het internet
- enkele specifiek wiskundige toepassingen.

Dat komt omdat ik vind dat:

- het vak wiskunde moet bijdragen aan de totale ontwikkeling van een leerling en dus ook aan het goed leren omgaan met ICT
- er in een rekenblad veel wiskundige vaardigheden zijn te integreren (denk maar aan het invoeren van formules, het ordenen van gegevens in tabellen, diagrammen en grafieken, het uitvoeren van logische operaties, en dergelijke)
- een rekenblad een goede, breed toepasbare werkomgeving voor een leerling is (die niet alleen bij wiskunde is te gebruiken, maar ook bij andere vakken waar wordt gerekend)
- internet een bron van informatie is die te weinig, maar vooral te ongestructureerd, wordt aangeboden
- door middel van goede werkbladen in een rekenblad en goede applets veel wiskunde levendiger kan wor-

den gebracht en veel duidelijker kan worden uitgelegd dan alleen door mondelinge overdracht.

Mijns inziens blijft wiskunde altijd een vak waarbij het potloodje en het gummetje samen met de grijze cellen een grote rol spelen. Lang niet altijd is het inzetten van de computer nodig of wenselijk. Maar in sommige gevallen wel. En dan gaat het erom dat die inzet meerwaarde heeft. Dat kan meerwaarde zijn voor de totale ontwikkeling van de leerling of meerwaarde voor het vak en het liefst beide.

### Een fundamentele keuze

Op grond van deze overwegingen heb ik de sectie voorgesteld om ons te concentreren op het werken met het voor wiskunde bruikbare deel van het 'centrale werksysteem' van de school. In ons geval was dat de combinatie: Windows NT en het MSOffice-pakket: Word, Excel, PowerPoint en Internet Explorer. Daarnaast worden voor specifieke onderwerpen applets gezocht die direct via het internet kunnen worden uitgevoerd op basis van bijpassend lesmateriaal.

De directe *voordelen* van het je beperken tot één werksysteem zijn:

- de school heeft al een licentie voor het Office-pakket, dus extra aanschaf is niet nodig
- veel leerlingen beschikken thuis over dit pakket en hebben er al kennis mee gemaakt, zodat de instap laagdrempelig is als je kiest voor een rustige opbouw van lesmateriaal
- alles wat bij andere vakken gebeurt met dit pakket ondersteunt de inspanningen bij wiskunde
- de meeste leraren zijn met het pakket bekend en hebben vaak al enige kennis van het werken ermee (hoewel de vaardigheid heel verschillend is)
- zowel door leerlingen als leraren wordt het werken met dit pakket als echt zinvol ervaren, je hebt er iets aan zowel binnen als buiten de wiskunde
- als je er mee hebt leren werken is het software die je heel goed kunt gebruiken om van alles mee te doen, ook bijvoorbeeld als leraar om eigen lesmateriaal mee te maken.

Verder blijkt er op het gebied van functies en grafieken, statistiek en diagrammen vrijwel alles mogelijk wat je op het niveau van het voortgezet onderwijs zou willen. Bijvoorbeeld kun je met behulp van de Oplosser (een invoegtoepassing) lineair programmeren en is het werken met dynamische modellen heel goed mogelijk. Zaken die niet mogelijk zijn binnen het Office-pakket en met name Excel worden opgelost door een geschikte applet te zoeken.

Natuurlijk zijn er ook nadelen en onmogelijkheden:

- je moet tijd investeren in het leren werken met Excel, ook in de wiskundelessen, en meer tijd dan bij de meer specifiek wiskundige programma's als VU-grafiek en VU-statistiek
  - er zijn conversiemoeilijkheden omdat leerlingen verschillende versies van Excel gebruiken (bijvoorbeeld thuis een oudere versie dan op school of omgekeerd)
  - het is de vraag of leerlingen die thuis niet over Excel beschikken in staat zijn om binnen de beperkte tijd die in de wiskundeles beschikbaar is voldoende vaardigheid met het programma op te doen
  - meetkundige mogelijkheden zijn er binnen Excel niet
  - algebraïsche operaties zijn binnen Excel niet mogelijk.
- Deze nadelen zijn echter overkomelijk, zo blijkt uit de (beperkte) praktijkervaringen die we met het werken met Excel hebben. Het investeren van tijd valt mee omdat het pakket vaak wel enigszins bekend is en omdat de huidige leerlingen al over een redelijke computervaardigheid op het gebied van Windows-programma's beschikken. De conversiemoeilijkheden zijn op te lossen door af te spreken steeds in hetzelfde bestandsformaat (bijvoorbeeld Excel2000) op te slaan.

De meetkundige mogelijkheden worden eigenlijk niet gemist, daarvoor bestaan andere pakketten en/of mooie applets. Bovendien is bij meetkunde het handwerk (omgaan met concrete materialen en tekenen met de hand) nog heel belangrijk.

Het niet kunnen werken met algebraïsche operaties wordt niet als een bezwaar ervaren, omdat dit (voorlopig?) in het voortgezet onderwijs door de leerlingen zelf moet worden gedaan, zonder de helpende hand van computer-algebrapakketten.

En ten slotte de vraag of leerlingen binnen de beperkte beschikbare tijd voldoende vaardigheid kunnen opbouwen. Daarop kan het antwoord bevestigend zijn als je maar regelmatig met Excel blijft werken en niet steeds weer andere programma's tussendoor gebruikt. En dat betekent dat je het werken ermee systematisch in je lesprogramma moet opnemen.

## Excel in het lesprogramma: de basis

Om met Excel te kunnen werken in de wiskundelessen heb je toegang tot computerapparatuur nodig. Op de RSG Wiringherlant hebben we als wiskundesectie daarvoor twee mogelijkheden:

- we hebben twee grotere lokalen waarin achterin zes tot acht computers staan opgesteld voor computergebruik door een deel van de klas tijdens de reguliere lessen
  - we kunnen inschrijven in een computerlokaal voor computergebruik door een gehele klas ineens.
- Meestal werken we met twee leerlingen per computer, zeker bij praktische opdrachten.

Bij het werken met Excel onderscheid ik voor het gemak drie categorieën:

1. leren werken met het pakket zelf
2. Excel gebruiken als werkomgeving
3. Excel gebruiken als leeromgeving.

### Ad. 1

Voor het *leren werken met het pakket* hebben we een aantal kleinere 'practica' ontwikkeld die elk bedoeld zijn voor één of twee lesuren. Voor de eerste twee leerjaren zijn dat de practica:

- 'Tafels in XL' (twee lessen) waarin de leerlingen de basistechnieken als kopiëren (relatief en absoluut) van cellen en een eenvoudig gebruik van formules in cellen leren
- 'Tabellen en grafieken in XL' (één à twee lessen) waarin de leerlingen leren bij wiskundige formules van twee variabelen tabellen en grafieken te maken
- 'Lengte en gewicht' (één à twee lessen) waarin de leerlingen leren statistische gegevens te verwerken in Excel.

Omdat deze drie basispractica over twee jaren worden verspreid, kun je er niet van uitgaan dat ze daarna vlot in Excel kunnen werken. Maar ze hebben de eerste beginnende gezien en bovendien gebeurt er meer.



fig. 1 Excel practicum 'Lengte en gewicht'

### Ad. 2

Excel gebruiken *als werkomgeving* slaat op het uitvoeren van een praktische opdracht waarin het werken met Excel is opgenomen. De leerling gebruikt dan dit programma (vaak in combinatie met Word) om de uitwerking van een



praktische opdracht te maken. Dergelijke praktische opdrachten zijn eenvoudig te ontwerpen. Wij hebben bijvoorbeeld opdrachten gemaakt als ‘Rapportcijfers berekenen in XL’ waarin wordt bekeken hoe leraren en leerlingen Excel kunnen gebruiken om rapportcijfers uit te rekenen, en ‘Zakgeld in XL’ waarin een statistisch onderzoekje wordt uitgevoerd rond het thema zakgeld en kleding.

### Ad. 3

Excel gebruiken *als leeromgeving* slaat op het gebruiken van Excel bij het aanleren van een wiskundige vaardigheid. Een goed voorbeeld is het gebruiken van Excel bij het bestuderen van hellingsgetal en begingetal van een lineaire functie. Daarbij hebben we (mede naar aanleiding van het artikel van Pauline Vos in *Euclides* over schuifbalken in Excel) een werkblad gemaakt waarin leerlingen de invloed van het wijzigen van deze getallen op de grafiek kunnen bekijken.

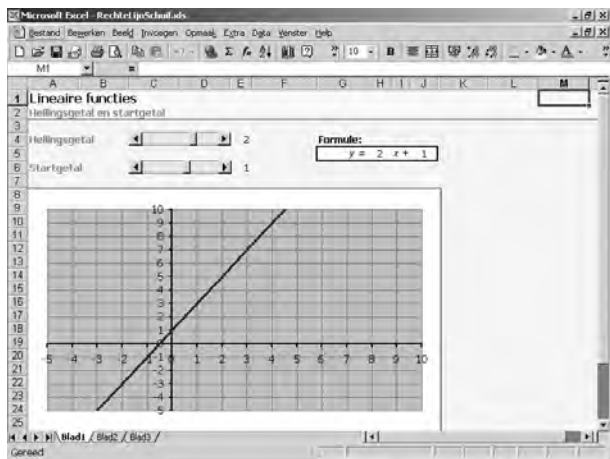


fig. 2 Excel practicum ‘Lineaire functies’

Dergelijke werkbladen om bepaalde stukjes wiskunde voor leerlingen levend en interactief te maken zijn eenvoudig zelf te ontwerpen in Excel. Veel specifieke vaardigheid is daar niet voor nodig, zeker niet als je het eenvoudig houdt.

Op onze school kunnen we dit gemakkelijk in een les inbedden omdat we beschikken over twee lokalen met een aantal computers achterin. Leerlingen kunnen dan even een kwartiertje met het werkblad werken en vervolgens weer doorgaan op hun gewone werkplek met het maken van andere opgaven. Als zo’n werkblad in het computerlokaal in een les van vijftig minuten moet worden aangestuurd, dan moet er echt lesmateriaal omheen worden gemaakt met gerichte opdrachten.

## Excel in hogere leerjaren

Tot nu toe is alleen het leggen van de basisvaardigheid aan orde geweest. In de hogere leerjaren moet daarop natuurlijk worden doorgebouwd.

Voor het VMBO hoeft er weinig meer te worden gedaan aan het leren van nieuwe aspecten van Excel: de basis is voldoende om mee te werken. Daar zullen we ons gaan richten op het uitvoeren van praktische opdrachten met behulp van Excel en het ontwerpen van werkbladen die het leren van enkele wiskundige begrippen (denk aan groeifactor en exponentiële groei, aan het geschuif met parabolen, en dergelijke) ondersteunen.

Voor HAVO en vooral VWO ligt dat iets anders. Daar zal in de bovenbouw ook nog aandacht moeten worden besteed aan:

- veel statistische functies van Excel, bijvoorbeeld ook standaarddeviatie, kansverdelingen, wellicht de correlatiecoëfficiënt, enzovoort.
- het werken met de invoegtoepassing ‘Oplosser’ voor lineair programmeren
- het ontwerpen van een dynamisch model in Excel
- en wellicht het gebruik van de logische functies van Excel.

Verder zullen we er daar naar streven dat het gebruiken van Excel bij praktische opdrachten, maar ook bij het bekijken van grafieken, het maken van diagrammen een natuurlijke handeling wordt voor leerlingen.

Uiteraard is daar de grafische rekenmachine een zeer handzame concurrent, zeker omdat die gemakkelijker grafieken maakt, maar de grafieken in Excel zijn vaak van een betere kwaliteit, en beslist eenvoudiger in werkstukken in te voegen.

## De uitvoering

Om het beschreven programma te kunnen uitvoeren is veel materiaal nodig, zowel Excel-werkbladen als ondersteunend lesmateriaal. Een deel daarvan bestaat al en is te bekijken via onze website [www.wiskundeweb.nl](http://www.wiskundeweb.nl) onder ‘Practica’. Maar veel zal nog moeten worden gemaakt. Gelukkig zijn er de nodige bronnen waaruit kan worden geput. De belangrijkste voor ons zijn:

- de website van Pascal: [www.pascal-online.nl](http://www.pascal-online.nl), waar steeds meer Excel-materiaal komt te staan van een goede kwaliteit
- de website van de SLO: [www.slo.nl](http://www.slo.nl), waar Excel-materiaal voor de Tweede Fase HAVO/VWO is te vinden via ‘Voortgezet onderwijs’ en ‘Tweede Fase’.

En er is via het internet nog veel meer te vinden. Het meeste is echter niet onmiddellijk geschikt voor gebruik in de les, maar moet worden bewerkt.

Vervolgens moet het gemaakte materiaal nog in een tijdschema worden gezet. Komend cursusjaar willen wij gaan starten volgens het schema op de bladzijde hiernaast.

Voor het eerst betekent dit een integrale aanpak van de inzet van ICT in onze lessen. Er is een duidelijke keuze gemaakt en we zullen van elkaars ervaringen gebruik kunnen maken, omdat de aanpak sectiebreed is.

| Leerjaar | Practicum/praktische opdracht | Doel                                              | Periode |
|----------|-------------------------------|---------------------------------------------------|---------|
| 1        | Tafels in XL                  | Leren werken met cellen en XL-formules            | II      |
|          | Rapportcijfers                | PO*: XL als werkomgeving                          | III     |
| 2        | Tabellen en grafieken in XL   | Leren werken met grafieken van functies           | II      |
|          | Lineaire verbanden            | XL als leeromgeving: hellingsgetal/startgetal (1) | I       |
|          | Lengte en gewicht             | Leren werken met statistiek en diagrammen         | IV      |
| 3        | Lineaire functies             | XL als leeromgeving: hellingsgetal/startgetal (2) | I       |
|          | Zakgeld en kleedgeld          | PO: XL als werkomgeving bij statistisch onderzoek | II      |
|          | Kwadratische functies         | XL als leeromgeving: parabolen                    | III     |
| 4VMBO    |                               |                                                   |         |
| 4H-A     | Statistiek met XL             | Leren werken met statistische functies            | III     |
| 4H-B     | Transformaties                | XL als leeromgeving: transformatie van functies   | I       |
| 4V       | Transformaties                | XL als leeromgeving: transformatie van functies   | I       |
| 5V-A     | Statistiek met XL             | Leren werken met statistische functies            | III     |
|          | Lineair programmeren          | Leren werken met de Oplosser in XL                | IV      |
| 6V-A     | Lengte en gewicht             | PO: Correlatie en regressie                       | III     |
|          | Modelleren in XL              | PO: Discrete dynamische modellen nabouwen         | I       |
| 6V-B1    | Lengte en gewicht             | PO: Correlatie en regressie                       | III     |
| 6V-B     | Modelleren in XL              | PO: Dynamische modellen nabouwen/ontwerpen        | II      |

\* PO = praktische opdracht

De leerlingen werken met het materiaal via onze website. De opdrachten staan daar (meestal in HTML-formaat) en de Excel-werkbladen zijn aan te klikken en te downloaden. De leerlingen kunnen er daarom heel gemakkelijk zowel op school als thuis mee werken. Via eigen e-mail adressen sturen ze de bestanden waaraan ze werken heen en weer. Met name de onderdelen waarin de leerlingen moeten leren werken met Excel moeten ze individueel doorwerken. De overige opdrachten gaan in tweetallen.

## Tot slot

Vooralsnog denken we met deze opzet uit de voeten te kunnen. Maar misschien zijn er wel scholen (of individuen) die nog heel waardevolle ervaringen met Excel met

ons willen delen, of die allang zo'n totaalplaatje (of een veel beter totaalplaatje) hebben gemaakt. Mogelijk zijn er ook scholen die de beschreven opzet willen uitproberen. Via het e-mailadres van ondergetekende of via [www.wiskundeweb.nl](http://www.wiskundeweb.nl) zijn op- of aanmerkingen en goede ideeën door te geven.

Wij gaan op ICT-gebied een boeiend jaar tegemoet, dat is wel zeker. Of alles zo zal lukken als we het tot nu toe in ons hoofd hebben is natuurlijk nog maar de vraag. Een evaluatie aan het einde van het schooljaar zal dat moeten uitwijzen. Tussentijds houden we via onze sectievergaderingen de vaart erin.

*Frits Spijkers, gajes@planet.nl*

## Announcement ICME-10

The 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10) will be held July 4-11, 2004 in Copenhagen, Denmark. The 1st announcement as well as other programme information is now available at our web site <http://www.icme-10.dk>



Leerlingen over een wiskundeopgave laten discussieren *op een kring*. Dat is het doel van het project Actief en op Tijd Leren. **Michiel Doorman** en **Ad Mooldijk** laten u zien hoe zo'n discussie op een kring eruit ziet en geven hun bevindingen.

## Een discussie op internet

### Inleiding

De invulling van het studiehuis in de tweede fase gaat vaak gepaard met een vermindering van het aantal contacturen voor de vakken. Er wordt zelfstudietijd voor leerlingen gecreëerd waarin zij zelfstandiger moeten studeren. Binnen de natuurwetenschappelijke vakken is echter discussiëren over en actief en gezamenlijk werken aan een onderwerp belangrijk voor het ontwikkelen van de vaktaal en een goede begripsvorming (Genseberger, 1997). Die afname van de contacttijd en de voorwaarden voor begripsvorming bij de bètavakken staan zo op gespannen voet met elkaar.

### Discussie voor begripsvorming

Een van de werkvormen in het onderwijs is het klassengesprek. Tijdens zo'n gesprek wordt een actieve instelling van leerlingen verwacht. Echter, niet elke leerling weet in een discussie direct aan te geven wat hij of zij bedoelt. Sommigen uiten zich moeilijk in een groep of hebben meer tijd nodig om tot een uitspraak te komen. Meestal is er dan wel iemand die intussen het woord overneemt. Anderen kunnen beter nadenken als ze iets moeten noteren.

Met behulp van ICT kan een andere dimensie aan discussiëren gegeven worden. Communicatie via ICT hoeft niet noodzakelijk tegelijkertijd te gebeuren en bovendien hoeft niet iedereen zich op dezelfde plaats te bevinden. Dit kan als voordeel hebben dat ook degenen die een wat grotere responstijd nodig hebben aan de discussie kunnen deelnemen (Linn, 2000). Daarnaast is bij de huidige technologie, e-mail of een discussieplatform, de leerling gedwongen op te schrijven wat zij of hij denkt. Dat zorgt ervoor dat de respons beter doordacht is (Hammond, 2000).

### Start van het project

Tijdens de invoering van het studiehuis bleek al snel dat de schaarse contacttijd een probleem is in alle vier bètavakken. Men had behoefte aan ideeën om die contacttijd zo goed mogelijk te benutten. Een initiatief daartoe is het

ICT-project Actief en op Tijd Leren (het ATL-project). Dit project is begin september 2000 gestart op scholengemeenschap Brokdele te Breukelen en scholengemeenschap de Breul in Zeist. Deze scholen werken in het project samen met het Centrum voor Didactiek van de Wiskunde en Natuurwetenschappen (CD- $\beta$ ) van de Universiteit Utrecht.

Een van de doelen van het ATL-project is het vinden van vormen voor communicatie tussen docenten en leerlingen over kernbegrippen uit de vakken, ter verhoging van de kwaliteit van de voorbereiding, de uitvoering en de afronding van de contactlessen in de tweede fase. Een middel daartoe is het gebruik van opdrachten op een kring van kennisnet waarop leerlingen buiten de les om reageren (Novak, 1999).

Zo'n kring faciliteert deze werkwijze doordat er een plek is waar je opdrachten kunt neerzetten en er een zogenaamd prikbord is waar leerlingen en docenten vragen kunnen stellen, opmerkingen kunnen plaatsen en op elkaar kunnen reageren (zie Tolboom (2002) voor een beschrijving van zo'n leeromgeving). Het is hierbij de bedoeling om het gebruik van de opdrachten te verweven in de contactlessen.

### De eerste opdrachten

In het voorjaar van 2001 zijn voor de verschillende bètavakken de eerste opdrachten uitgevoerd. Deze opdrachten varieerden van het beantwoorden van korte vragen over een experiment (welke effecten zie je als een lamp op een CD schijnt?) tot een discussie over hoogovens (waarom zijn ze hoog?). Centraal staat telkens dat de activiteit rond de kring als gevolg heeft dat leerlingen goed voorbereid de lessen binnenkomen. In veel gevallen is het een alternatieve vorm van huiswerk ten behoeve van de voortgang met het boek.

De respons en het enthousiasme bij deze eerste serie zijn nogal uiteenlopend. Uit de evaluatie blijkt dat het gebruik van de kring stimulerend kan werken voor leerlingen en leraar. De leerlingen vinden het leuk als anderen reageren op hun antwoorden. Bij enkele opdrachten wordt zelfs opgemerkt dat het een persoonlijk contact mogelijk

### Konijnenjacht

In een natuurgebied in de duinen wordt op konijnen gejaagd om de populatie in stand te houden. Een aantal biologen volgt de konijnen al een paar jaar. Ze onderscheiden vier leeftijdscategorieën en tellen ieder jaar het aantal konijnen in iedere leeftijdscategorie. Met deze cijfers hebben ze de volgende overlevingscijfers en een geboortecijfer bepaald.

Bovendien hebben ze gemerkt dat de omvang van de konijnenpopulatie aan het afnemen is. Stel dat op een zeker moment de populatievoorspellingsmatrix en de omvang van de populatie als volgt zijn:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

De biologen willen dat er minder op de volwassen dieren mag worden gejaagd. Door minder te jagen zal het overlevingscijfer (0,7) voor de volwassen konijnen toenemen.

De jagers zeggen dat je ook één keer bijvoorbeeld 500 jonge konijnen kunt uitzetten. Dan zal de populatie zich wel stabiliseren. Zij kunnen bovendien gewoon doorgaan met jagen.

De gemeente wil een beslissing nemen en zoekt een expert. Jij bent die expert.

1. Ga na dat in de huidige situatie inderdaad de omvang van de populatie afneemt volgens de cijfers van de biologen.
2. Onderzoek wat de gevolgen zijn van het plan van de biologen en van het plan van de jagers.
3. Schrijf een brief aan de gemeente met je resultaten. Schets de huidige situatie en de gevolgen als er niets verandert.
4. Geef aan welke maatregelen nodig zijn om de konijnenpopulatie te stabiliseren (geïllustreerd met tabellen en/of grafieken).

Je kunt je onderzoek laten testen of eventuele vragen stellen voordat je de getallen verwerkt in je brief. Plaats daartoe een vraag op het Discussion board (via Communication).

maakt, persoonlijker dan tijdens een lessituatie. Bij een andere opdracht is de uitvoering echter veel moeizamer verlopen. De betreffende docent geeft aan dat de leerlingen veel aan hun hoofd hebben in de tweede fase, waardoor iets als de kring een lage prioriteit krijgt. Er staat niet direct een beloning tegenover.

Een probleem bij zo'n discussieplatform is de niet te voorziene tijdsinvestering. Als je de leerlingen een wat langere discussie wilt laten opzetten, dan moet je eigenlijk meteen aan het begin van het hoofdstuk met de discussievraag beginnen en deze pas een paar weken later afsluiten. Dit zorgt echter wel voor beperkingen in de vragen die je kunt stellen. Voor de docent is het lastig om

de leerlingen niet te veel te sturen en toch de leerlingen te helpen als ze vastzitten.

Een duidelijke les uit deze periode is in elk geval dat er goede en tijdige communicatie moet zijn tussen leerlingen en docenten. Leerlingen moeten de tijd krijgen om op de kring rond te kijken en de activiteiten moeten een wezenlijk onderdeel van de lessen zijn.

### De konijnenjacht

De opdrachten zijn bijgesteld na de ervaringen van het eerste schooljaar. Voor wiskunde is er een nieuwe opdracht ontwikkeld rond het onderwerp matrices. Deze opdracht is dit voorjaar uitgevoerd op KSG De Breul in samenwerking met docent Albert Dorresteyn. De opdracht en de ervaringen worden hieronder beschreven. Ze geven een beeld van de mogelijkheden en de beperkingen van kringgebruik.

#### Opzet en doel

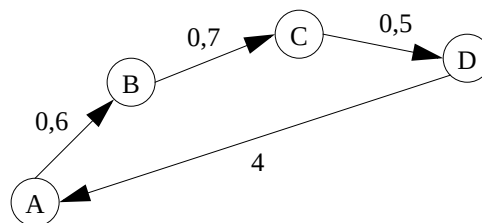
In vwo 6 wordt het onderwerp matrices in een korte periode als keuzeonderwerp wiskunde B behandeld. De docent heeft voor dit onderwerp zes lessen gereserveerd. Op de kring is een opgave rond een voorspellingsmatrix van een populatie konijnen geplaatst.

Tijdens de serie van zes lessen komen alle technische aspecten van matrices aan de orde. Direct na de lessenserie krijgen de leerlingen een PTA-toets. In de eerste van de zes lessen is aangekondigd dat de toets zou bestaan uit een opdracht die lijkt op het konijnenprobleem van de kring. Leerlingen kunnen op de kring over de opdracht discussiëren en de docent zal – indien nodig – ook af en toe een bijdrage aan die discussie leveren. Het konijnenprobleem zelf komt niet tijdens de lessen aan de orde.

#### Wat is er gebeurd?

Al snel ontstaat op de site een aardige discussie tussen enkele leerlingen. Er zijn vragen en leerlingen geven elkaar antwoord.

Jos is een slimme leerling. Hij plaatst het eerste bericht met een berekening bij de huidige situatie van de konijnenpopulatie. Wat hij er niet bij zegt is dat je zijn berekening met een graaf van de situatie kunt begrijpen door de levenscyclus van een groep te volgen:



Het voordeel van zijn aanpak is dat je de factor die door de jacht wordt beïnvloed als variabele in een formule kunt krijgen. Zo kan hij precies de kritieke waarden achterhalen. Hieronder is zijn eerste bericht en een deel van de volgende discussie te zien.



Date: 13-Mar-2002 20:54:37

Subject: Re: Konijnenjacht

*Ik denk inderdaad dat als je niet ingrijpt de populatie afneemt. Aan de cijfers kun je dit volgens mij zien, omdat  $4 * 0,6 * 0,5 = 0,84$ .*

*Van een generatie jonge konijnen hou je er dan maar 84% procent over. Dit is dus na een cyclus, dus na 4 berekeningen, oftewel  $[A]^4 * [B]$ . Hierin zijn  $[A]$  en  $[B]$  de matrices uit de opdracht. Als je deze berekening uitvoert zie je dat er ook nog maar 84 procent van de oorspronkelijke populatie over is. Als je dus nog een keer een cyclus doorloopt kom je weer tot een percentage van 84% dat leeft.*

*Hiermee is het eerste punt van de vraag volgens mij beantwoord, vragen over onduidelijkheden zie ik graag tegemoet.*

*Jos*

---

Date: 18-Mar-2002 16:54:18

Subject: Re: Konijnenjacht

*Jos (of iemand anders),*

*Ik snap niet wat in de eerste matrix de rij voorstelt en wat de kolom. (Zoals bij het voorbeeld van mr. Dorrestein van/naar.) Hierdoor begrijp ik ook niet helemaal wat er staat. Wil je het even uitleggen?*

*Bedankt, Caroline*

---

Date: 18-Mar-2002 17:11:39

Subject: Re: Konijnenjacht

*De eerste matrix betekent de kolom van en de rij naar. Dat houdt in dat het gaat over de kans om van het ene jaar naar het andere jaar over te gaan. Dus de kans om als klein konijntje een stap verder te gaan is 0,6. Het getal 4 staat voor het aantal kinderen dat de laatste groep konijnen krijgt.*

*Als je het nog niet geheel begrijpt, stel dan een iets specifiekere vraag.*

*Jos*

---

Date: 19-Mar-2002 19:52:34

Subject: Re: Konijnenjacht

*Waarom neem je 0,7 (de kans dat een tweejarige drie wordt) niet mee in je berekening? Is dat omdat je de driejarigen tot de oudere konijnen rekent? Ik heb gewoon in de rekenmachine beide matrices ingevoerd en dan  $(A)^{20} * (B)$  gedaan, om de populatie over twintig jaar te berekenen. Dan zie je dat de totale populatie 2091 is geworden en de populatie dus is afgenomen.*

*Is dit ook goed of moet het op de manier van Jos?*

*Caroline*

Caroline reageert in eerste instantie niet op Jos' werkwijze. Ze wil eerst begrijpen hoe de opgave in elkaar zit. Vervolgens kijkt ze terug naar Jos' eerste bericht en mist ze daar de 0,7 (die Jos vergeten is in te tikken). Ze vraagt zich af welke methode gewenst is. Even later blijkt dat ze niet op een antwoord wacht, maar haar eigen weg volgt. Hierop reageert Andrea, die nu niet precies begrijpt hoe Caroline het heeft aangepakt en wat de relatie is met de uitleg tijdens de les:

---

Date: 19-Mar-2002 20:05:51

Subject: Re: Konijnenjacht

*Bij het plan van de biologen zal inderdaad het overlevingscijfer toenemen. Ik ben voor het gemak even uitgegaan van een overlevingscijfer van 0,8. Als je dan uitrekent wat de populatie is over twintig jaar, zie je dat deze in totaal 4077 is. En daarmee is de populatie dus nog steeds afgenomen, alleen minder snel. Echt effectief is het plan dus uiteindelijk nog steeds niet.*

*Als je naar het plan van de jagers kijkt en onder jonge konijnen nuljarigen verstaat en weer uitrekent wat de grootte van de populatie is over twintig jaar, kom ik uit op 4484. De populatie is nog steeds afgenomen. Maar veel minder snel dan wanneer je het overlevingscijfer van de oudere konijnen verhoogt.*

*Mee eens?*

*Caroline*

---

Date: 19-Mar-2002 20:16:32

Subject: Re: Konijnenjacht

*Hoi Caroline,*

*Hoe heb je dat dan uitgerekend, kun je dit probleem niet oplossen met behulp van je rekenmachine, zoals we het vandaag ook in de les deden met die vogeltjes...?*

*Andrea*

---

Date: 19-Mar-2002 20:19:58

Subject: Re: Konijnenjacht

*Ik zal hem eens proberen uit te rekenen met de rekenmachine, en dan kijken wat ik voor een antwoord eruit krijg.*

*Andrea*

---

Date: 19-Mar-2002 21:15:15

Subject: Re: Konijnenjacht

*Als je naar het plan van de jagers kijkt en onder jonge konijnen nuljarigen verstaat en weer uitrekent wat de grootte van de populatie is over twintig jaar, kom ik uit op 4200. (Ik neem dan de tweede matrix.) De populatie is dus inderdaad nog steeds afgenomen.*

*Het plan van de biologen en de 0.7 verandert in 0.8 in de tweede matrix krijg ik 6612, dus dat zou betekenen dat de populatie dan juist groeit...*

*Andrea*

Jos wijst tijdens dit gesprek nog eens op zijn berekening. Hij laat zien hoe je kunt beredeneren dat er een stabiele situatie ontstaat als de overlevingskans 0,83333 is. Daar reageert verder niemand op. Meike stapt dan in de discussie en vraagt zich af hoe Andrea aan haar getallen komt:

---

Date: 20-Mar-2002 09:51:37

Subject: Re: Konijnenjacht

*Je zegt dat waarom je het niet gewoon zou uitrekenen, het is ook wel goed, maar ik denk dat het beter is als je het ook op een bepaalde manier kunt bewijzen. Op je rekenmachine is er geen kunst aan, maar het uitzoeken van het probleem op papier is net iets moeilijker en nuttiger.*

*Jos*

---

Date: 20-Mar-2002 15:13:51

Subject: Re: Konijnenjacht

*Hé Andrea,  
Hoe heb je dit berekend? Ik krijg namelijk, ook met de rekenmachine, hele andere uitkomsten (dezelfde als Caroline)...  
Meike*

---

Date: 21-Mar-2002 21:32:36

Subject: Re: Konijnenjacht

*Hoi Meike  
Maar heb jij dan de eerste of de tweede matrix gebruikt, dat is namelijk wel een groot verschil, het kan zijn dat ik natuurlijk een fout heb gemaakt. Je hoort nog van me.  
Andrea*

---

Date: 20-Mar-2002 10:01:19

Subject: Re: Konijnenjacht

*Carolien als je mijn verhaal leest staat er:  
Bij een overlevingskans van 0,83333 blijft de konijnenpopulatie stabiel. 0,8 is lager, dus de populatie neemt af  
Je hebt het ook maar voor 20 jaar gekeken, wat is 20 jaar nou, je moet gaan kijken wat er na 150, 200 jaar gebeurt, dan zie je pas dat die konijntjes toch al redelijk dood beginnen te gaan.*

---

Thijs stelt een dag later een technische vraag over een programmaatje voor de grafische rekenmachine dat bij de opdracht stond. Hij is al zeker dat Jos zal reageren:

---

Date: 21-Mar-2002 21:03:30

*Tijdens de les van vandaag miste ik een gedeelte, nl het volgende. Het omzetten van een matrix naar een lijst (list) was geen probleem, vervolgens dit weer naar  $Y=$  brengen leverde problemen op. Hoe doe ik dit?  
En als dit gelukt is wat dan, plotten, helling, maar wat*

*kan ik daar mee?*

*Een ander puntje, van matrixen naar List, er worden dan 2 listen gecreëerd met getallen, wat houden deze 2 lijsten in?*

*(dank je Jos voor het antwoord dat je gaat geven)*

*Thijs*

---

Date: 21-Mar-2002 21:12:04

*Ten eerste Thijs ik heb voor de lichtelijk minder begaafde programmeurs, als jij, een update gemaakt van mr. Dorresteijn zijn programma. Deze is iets gebruiksvriendelijker, je hebt geen gekloot met mismatches en ook vult hij zelf*

*$L1$  en  $Y=$ .*

*Thijs je zet de lijst in  $Y=$  door*

*ExpReg  $L1,L3,Y1$*

*Als je het nu nog niet begrijpt, vraag je het morgen maar.  
Jos*

---

Date: 25-Mar-2002 20:41:50

*de Nederlandse taal wordt gekenmerkt door logica, het is NIET logisch om te beginnen met Ten eerste en vervolgens geen Ten tweede te noemen.*

*Maar nu nog een vraag: wat is het doel van het plaatsen in  $Y=$  (daarmee helling berekenen?)*

*Een andere vraag: waarom staan er in LIST 2 rijen, wat houden deze twee rijen in?*

*Thijs*

---

Deze berichten geven een beeld van de discussie zoals hij uiteindelijk in zijn geheel op de kring stond. Verder kwam bijvoorbeeld nog de vraag naar voren hoeveel jaren doorgerekend moest worden. Jos vond 200, Caroline was met 20 tevreden. Natuurlijk is in deze context 20 meer dan voldoende. Dan is het voorstel van de jagers om jonge konijnen uit te zetten zo gek nog niet. Maar om het model te begrijpen, en om de gevolgen van een ingreep – als er verder niets verandert – te onderzoeken, is vaker doorrekenen, of een redenering als die van Jos, heel mooi.

Het feit dat de hele discussie op internet plaatsvindt biedt nieuwe mogelijkheden. Leerlingen kunnen op diverse momenten en op verschillende niveaus inhaken. Zo krijgt iedere leerling een kans om op het gewenste moment op de juiste plek een opmerking te plaatsen of nog eens een bericht te lezen. Dit aspect van deze discussie noemen leerlingen tijdens de evaluatie ook zelf en wordt door hun gewaardeerd.

Uiteindelijk levert echter niet meer dan de helft van de klas een wezenlijke bijdrage en weet je niet zeker in hoeverre ze werkelijke begrippen wat ze opschrijven. Maar in hoeverre weet je dat na een bespreking tijdens de les? In ieder geval is deze discussie als uitwerking van de opga-

ve meer eigendom van de leerlingen dan een antwoordvel van de docent. Tot slot een opmerking van Mariette:

---

Date: 27-Mar-2002 16:20:50

Subject: Re: bedankt!!

Hi

*Ik heb de discussie gevolgd en ben blij dat het zo wordt uitgelegd. Zelf heb ik het idee dat alles wel duidelijk is!! Ik ben alleen benieuwd, als ik dit allemaal begrijp, moet ik verder nog meer dingen doen voor morgen??? het konijnenprobleem is op te lossen! ben benieuwd of er nog tips zijn voor mij en voor de rest???*

Bedankt!

Mariette

---

Tijdens de zes lessen op school zijn de leerlingen geïnteresseerd en goed geconcentreerd. De docent is echter onzeker over het niveau van alle leerlingen. Hij besluit om de laatste les nog een variant van de konijnenopdracht te behandelen over een populatiematrix voor mezen in een volière. Aan de orde komen populatieberekening met verschillende overlevingskansen voor de kuikens, een programma voor de grafische rekenmachine om de totalen in een lijst te plaatsen, het plotten van de populatieomvang in vijftig jaar en exponentiële regressie. Ook is de overlevingskans bepaald van de kuikens die een stabiele populatie oplevert. Tijdens die les komt Jos weer met zijn berekeningen die hij afleidde uit een graaf. Prachtig was dat zijn maat Gerard in staat was uit te leggen waarom die berekening met de graaf mogelijk was: 'Je kunt rustig het aantal kuikens dat van elke leeftijdsgroep afkomt optellen en afleiden uit de hoeveelheid kuikens van verschillende jaren. Want als de populatie stabiel is, dan is de hoeveelheid kuikens gelijk.' Het probleem met de konijnen wordt weer helemaal doorgespit, zonder dat het woord konijn valt.

## Conclusies

Dit voorbeeld laat zien hoe een discussie op internet kan worden gevoerd. De docent had deze opgave natuurlijk ook uit kunnen delen en een keer met de klas kunnen bespreken, maar dan was die bespreking waarschijnlijk anders verlopen. Een nadeel van de discussie op internet is dat er geen directe interactie is. Voordelen zijn dat leerlingen elkaars vragen en opmerkingen kunnen nalezen en op een gekozen plek en op het gewenste moment een bijdrage kunnen leveren.

Uit de ervaringen met de opdrachten bij de diverse vakken blijkt dat vooral die zaken die discussie uitlokken of waarbij een duidelijk en eenduidig antwoord ontbreekt, op de kring worden gewaardeerd. Onderwerpen die zowel discussie vereisen als strak binnen een schema van lessen passen, zijn minder geschikt, doordat de leerlingen meestal laat reageren en er dan weinig tijd voor hoor en wederhoor overblijft. Niet alle leerlingen zien dan de voordelen van het kringgebruik.

Bovendien blijkt dat leerlingen een motief moeten hebben om aan de discussie deel te nemen. Het is voor hen een tijdsinvestering waarvan het nut duidelijk moet zijn. De opdracht over de konijnenjacht was een voorbeeld voor de uiteindelijke toets. Waarschijnlijk heeft vooral dat aspect voor de leerlingen stimulerend gewerkt.

De vraag blijft of het op deze manier lukt om lessen beter voor te bereiden. In ieder geval laat de discussie over de konijnenjacht zien dat het mogelijk is om een lessenserie zo op te zetten, dat leerlingen elkaar ondersteunen en dat andere leerlingen daar ook weer profijt van hebben.

Michiel Doorman, Freudenthal Instituut

Ad Mooldijk, Vakgroep Natuurkundedidactiek, Universiteit Utrecht

## Literatuur

- Genseberger, R.J. (1997). *Interesse-georiënteerd natuur- en scheikundeonderwijs, een studie naar onderwijsontwikkeling op de Open Scholengemeenschap Bijlmer*. Utrecht: CD-β Press.
- Hammond, M. (2000). Communication within on-line forums: the opportunities, the constraints and the value of a communicative approach. *Computers & Education*, 35, 251-262.
- Linn M.C. & S. Hsi (2000). *Computers, Teachers, Peers, Science learning partners*. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.
- Novak G., A. Gavrín, W. Christian & E. Patterson (1999). *Just-In-Time Teaching: Blending Active Learning with Web Technology*, 1/e. New Jersey: Prentice Hall.
- Tolboom J. (2002). Een digitale leeromgeving voor het vak wiskunde, *Nieuwe Wiskrant* 21(3), 19-22.

Materialen en discussies van het ATL project zijn te zien op: <http://kringen.kennisnet.nl/courses/ATL/index.html> (inloggen met 'atl' en 'atl') zolang kennisnet de 'oude' kringen toegankelijk houdt. Informatie is ook te vinden op [www.cdbeta.uu.nl](http://www.cdbeta.uu.nl)

In het kader van het ADLO (Algebraonderzoek in een Digitale LeerOmgeving) project experimenteerde **Carel van de Giessen** met Scientific Notebook gecombineerd met VU-Grafiek. Scientific Notebook is een combinatie van een tekstverwerker en een algebrapakket. Een verslag.

## Computeralgebra in 4 vwo, verslag van een experiment

### Inleiding

In het onderwijs gaat het om leerprocessen. Binnen die leerprocessen leert de leerling nieuwe begrippen en leert vervolgens deze nieuwe kennis toe te passen in nieuwe situaties. Dat kost tijd, iedere docent ervaart dat dagelijks. Is het mogelijk voor beide aspecten van het leerproces (het aanleren van het nieuwe begrip en het leren toepassen) ICT in te zetten? Binnen het vakgebied van de schoolwiskunde is er veel ICT-materiaal beschikbaar. De vraag is wat daarvan zinvol en haalbaar is in een bepaald leerjaar en op een bepaald niveau. Daar kun je eigenlijk alleen maar achterkomen door te experimenteren. Een van de interessante mogelijkheden is computeralgebra. Op zich niet nieuw; al vele jaren hield een clubje docenten zich bezig met Derive, voornamelijk in vwo 5 en 6 wiskunde B, en produceerde een aardig boekje met opdrachten.<sup>1</sup>

Dit artikel is het verslag van een experiment met een computeralgebra-omgeving in een 4 vwo B-klas, gehouden in de schooljaren 2000-2001 en 2001-2002. Het experiment vond plaats in het kader van het project ADLO, wat staat voor Algebraonderzoek in een Digitale LeerOmgeving. ADLO is een ICT-ontwikkelingsproject van het Oosterlicht College (Nieuwegein), het Almende College (Silvolde) en het Freudenthal Instituut (Utrecht). De nadruk ligt op algebra, een domein dat vanwege de ontwikkelingen in basisvorming en tweede fase minder ruimte heeft gekregen dan vroeger, maar waarvan het belang onmiskenbaar is.

Op de website van ADLO<sup>2</sup> is al het materiaal van dit experiment, zoals lesmateriaal en verslagen, te vinden.

### Digitale leeromgeving

In dit artikel bedoelen we met 'digitale leeromgeving' de combinatie van een tekstverwerker en een computeralgebrapakket. Een digitale leeromgeving is dan een omgeving waarin je tekst en wiskunde naast en door elkaar kunt behandelen. Op het computerscherm kun je lezen, typen en wiskundige bewerkingen uitvoeren. Een DLO is als het ware een digitaal boek, digitaal werkschrift en re-

kenapparaat tegelijk.

Op het ogenblik is een aantal pakketten op de markt dat onder deze begripsomschrijving valt, zoals onder andere Studyworks, TI-Interactive, Scientific Notebook en Maple. Het eerste pakket is in Nederland al iets langer bekend en lijkt inmiddels enigszins verouderd. Met TI-Interactive en Scientific Notebook is binnen het ADLO-project ervaring opgedaan. Dit artikel gaat met name in op de ervaring met Scientific Notebook.

Een belangrijk aspect van elk computerprogramma, zeker een programma voor educatieve doelen, is de interface. Het mooiste is een programma dat de leerling/gebruiker intuïtief kan bedienen, niet gehinderd door notaties die van het gangbare afwijken of door complexe menustructuren.

TI-Interactive is sterk venstergestuurd. Hiermee is bedoeld dat voor allerlei handelingen vensters en subvensters op het scherm komen, hetgeen naar mijn idee de navigatie en het overzicht soms in de weg kan staan. Wiskundige commando's hebben een eigen syntax, die aangeleerd moet worden. Om bijvoorbeeld de vergelijking  $x^2 = 4$  op te lossen moet ingevoerd worden:

$\text{solve}(x^2 = 4, x).$

De computing engine, het wiskundig hart van TI-Interactive, is Derive. De interface van Scientific Notebook is buttongestuurd; dat wil zeggen dat veel voorkomende wiskundige commando's door middel van een button kunnen worden uitgevoerd. Om de vergelijking  $x^2 = 4$  op te lossen volstaat een klik op de oplosbutton. De computing engine van Scientific Notebook is Maple of MuPad. Bij gebruik van buttons heb je niet met buitenlandse begrippen te maken, omdat een icoon de boodschap overbrengt. Toch gaat het ook dan wel eens mis. De button voor 'uitwerken' is een ballonnetje, het Engelse inflate betekent namelijk zowel 'opblazen' als 'uitwerken'. Bij het gebruik van een verkeerde button is dat direct uit het resultaat duidelijk. Niet zo prettig werkt de grafische mode van Scientific Notebook. Via een buttonklik staat de grafiek er snel, maar de mogelijkheden om de grafieken te manipuleren zijn matig. In het experiment is daarom voor het grafische werk gebruikgemaakt van VU-Grafiek<sup>3</sup>. Het werken met twee pakketten tegelijk was

voor leerlingen geen enkel probleem, eerder een voordeel. De algebra en de grafische representaties zijn duidelijk gescheiden. Wil je een grafiek in je digitale schrift, dan kun je die er snel inplakken.

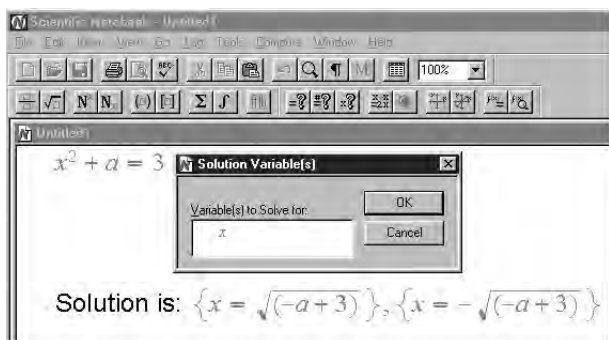


fig. 1 Werkblad in Scientific Notebook met venster

### Wat kun je met computeralgebra?

Klussen als  $(a + b)^{10}$  uitwerken, een veelterm in factoren ontbinden, een limiet, een afgeleide, een primitieve uitrekenen, een vergelijking of stelsel oplossen zijn allemaal in een handomdraai of minder geklaard. En dat is dan nog maar een kleine greep uit de mogelijkheden van Scientific Notebook. De huidige schoolanalyse en algebra zijn een fluitje van een cent voor dit pakket. Vanuit het oogpunt van het middelbaar onderwijs lijken de wiskundige mogelijkheden grenzenloos. De wiskundige mogelijkheden van dit pakket laten echter hier en daar te wensen over en roepen soms zelfs verbazing op. Zo krijg je bijvoorbeeld bij een exacte mode voor de oplossing van een tweedegraads vergelijking twee antwoorden, terwijl de benaderingsmode slechts één antwoord geeft. Scientific Notebook kan in dit opzicht soms verrassend uit de hoek komen.

Voor een docent op HBO of universiteit is dat misschien niet zo'n punt, voor een docent (en vooral ook voor leerlingen) op een middelbare school is het dat echter wel. De grenzen van het wiskundig curriculum en het wiskundige opneemvermogen van de leerlingen zijn snel bereikt. Het gebruik van computeralgebra lijkt me niet zozeer een wiskundige, als wel een didactische kwestie. Mij lijkt de centrale vraag niet 'Wat kun je met computeralgebra?' maar 'Wat wil je met computeralgebra?'

### Lesmateriaal

Het adagium 'Eerst denken en dan doen' is nog steeds van toepassing. Vroeger was er vooral veel aandacht voor algebraïsche vaardigheden, zoals het oplossen van een vergelijking of het maken van een herleiding. Iedere docent kent wel de goedwillende maar slechtsnappende leerling: 'Vertel maar hoe het moet, dan doe ik het wel', en dan lekker werken. Maar of dat het denken bevorderde? Bij veel leerlingen werd er wel het imago van het vak wiskunde door bepaald.

De verhouding tussen denktijd en doettijd zou er door computeralgebra anders uit kunnen gaan zien. Door het

algebraïsche werk uit te besteden zou je verwachten dat je meer ruimte voor denktijd krijgt. Leerlingen moeten tijd krijgen om aangeleerde begrippen ook te gebruiken. Een belangrijk aandachtspunt bij het ontwerpen van lesmateriaal voor de leerlingen was om voldoende doettijd en bezinktijd in te bouwen en niet te snel nieuwe begrippen te introduceren.

Het lesmateriaal omvat verschillende pakketjes, waarvan er hier twee worden besproken. Een introductiepracticum Scientific Notebook met aandacht voor bij leerlingen bekende wiskunde en een lespakket 'Wiskunde raakt je' over het raken van lijnen en parabolen.

### Introductiepracticum

Bij het introductiepracticum beschikten de leerlingen over een digitale en een papieren versie van het lesmateriaal. Vanuit de digitale versie konden ze via een hyperlink een werkblad openen waarop ze hun werk moesten maken. Ongeveer de helft werkte vanaf het scherm, omdat de wiskundige opgaven dan snel via knippen en plakken konden worden overgebracht. De andere helft vond het prettiger vanaf papier te werken en typte vervolgens de wiskunde in op het digitale werkblad of knipte dat uit de digitale versie.

Het introductiepracticum bevat allereerst wat algemene zaken rond Scientific Notebook en een oefening met de commandobuttons.

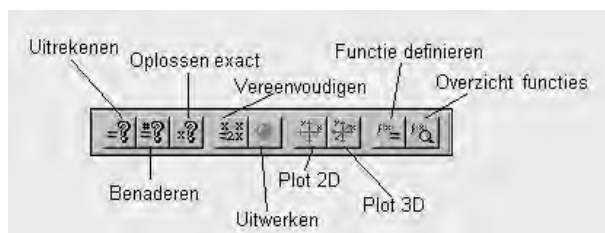


fig. 2 De wiskundige commandobuttons in Scientific Notebook

Daarna volgt wat rekenwerk. In leerlingentekst moet je helder en duidelijk formuleren, daar horen duidelijke begrippen bij. Daarom werd meteen het benoemen van wiskundige bewerkingen meegenomen. Voorbeelden van rekenwerk: nagaan of  $2^{67} - 1$  priem is of reflecteren op het verschil in het antwoord op  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$  en  $\frac{1}{3} + 0,2$ . Vervolgens het rekenen met letters.

Het nut van algebra bleek de leerlingen goed aan te spreken bij een rekenspel om achter iemands leeftijd te komen. Je laat een proefpersoon enkele berekeningen maken en geeft op grond van het eindantwoord de juiste leeftijd van die persoon. Deze rekenspelletjes geven altijd het goede antwoord. Hoe komt dat? Met algebra kun je dat laten zien. Je hebt dan een variabele nodig, je moet de rekenregels goed volgen en ten slotte moet je het antwoord, dat een antwoord in letters is, interpreteren.

In kort bestek is aan dit voorbeeld het verschil met de oude situatie te zien.



Het opstellen van het model en de interpretatie van het antwoord staan centraal en vereisen denkwerk. Het algebraïsch rekenwerk doet de software en dat kost nauwelijks tijd. Natuurlijk zouden de leerlingen in dit geval ook een handmatige oplossing moeten kunnen produceren, maar dat is hier niet het punt.

In het volgende onderdeel wordt duidelijk gemaakt hoe ingewikkelde vormen soms snel veel eenvoudiger kunnen worden.

Bij het oplossen van vergelijkingen met parameters, zoals bij  $x^2 + a = 3$ , is het de vraag welke letter de variabele en welke de parameter is. Leerlingen vinden dat lastig of onderkennen het probleem niet.

Scientific Notebook vraagt naar welke variabele opgelost moet worden (zie figuur 1) en dat is een mooie aanleiding om te reflecteren op het verschil tussen een variabele en een parameter.

Het introductiepracticum wordt besloten met een paragraaf over functies en grafieken. Voor de grafieken werd VU-Grafiek ingezet. Expliciet werd gemaakt dat je een vergelijking zowel algebraïsch als grafisch kunt interpreteren en dat langs beide wegen oplossingen te vinden zijn, maar wel oplossingen met verschillende kwaliteit. Voor exacte antwoorden heb je algebra nodig.

## Lespakket 'Wiskunde raakt je'

Een onderwerp dat je in VWO 4 met computeralgebra aan wilt pakken moet wel aan enkele voorwaarden voldoen. Het onderwerp moet geschikt zijn voor VWO 4, aansluiten bij bekende wiskunde en het onderwerp mag zonder computeralgebra niet toegankelijk zijn.

Als uitgangspunt voor dit pakket is het volgende probleem genomen: zoek een lijn die aan twee gegeven parabolen, een berg- en een dalparabool, raakt. Je kunt daarbij denken aan een context van een scheepsroute tussen twee eilanden.

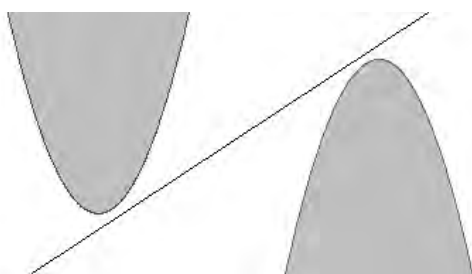


fig. 3 Scheepsroute tussen twee eilanden

Voor 4 VWO-B is dit een heel pittig probleem. Vooral omdat leerlingen niet erg vaardig zijn met algebra, maar daar is de computeralgebra nu voor.

Het lijkt wellicht vreemd dat in dit pakket de parabola van stal gehaald wordt. Dat gebeurt echter niet om lekker ouderwets met  $abc$ -formule en discriminant aan de slag te gaan, maar omdat bij parabolen raakproblemen zonder te differentiëren – waar de leerlingen nog niet aan toe zijn –

behandeld kunnen worden.

In het pakket worden twee parallelle sporen bewandeld, een grafisch spoor en een algebraïsch spoor. Een probleem/context wordt als een grafisch probleem geformuleerd. Met behulp van grafieken wordt het probleem onderzocht en een eerste benaderde oplossing gevonden. Maar voor een meer precieze en exacte oplossing is een algebraïsche bewerking nodig.

Een eenvoudig voorbeeld om deze opzet toe te lichten.

Opdracht: Onderzoek welke lijn met hellingsgetal  $\frac{1}{2}$  raakt aan de parabool  $y = x^2 + 4$ .

De parabool heeft een vaste ligging, maar de lijn niet. Er is dus een parameter nodig, de lijn krijgt de formule  $y = \frac{1}{2}x + b$ .

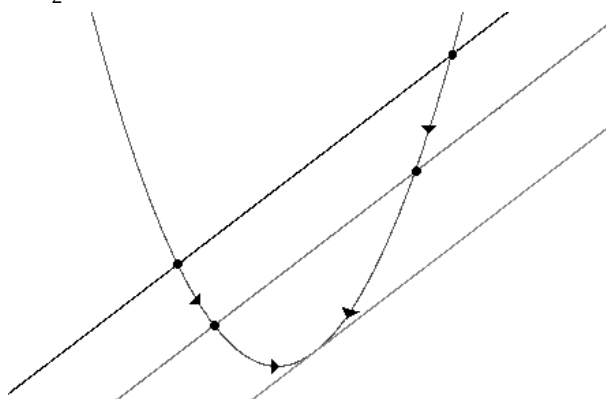


fig. 4 Bij raken vallen de snijpunten samen

Met de dynamiek van een bewegende lijn zie je dat de snijpunten steeds dichterbij elkaar komen tot ze samenvallen. Raakpunt zo ongeveer als  $b = 3,9$ .

De raakwaarde van de parameter kun je met zoomen vrij aardig benaderen, maar je loopt op een gegeven moment tegen de pixelgrenzen aan. Om een exacte waarde te vinden heb je (computer)algebra nodig.

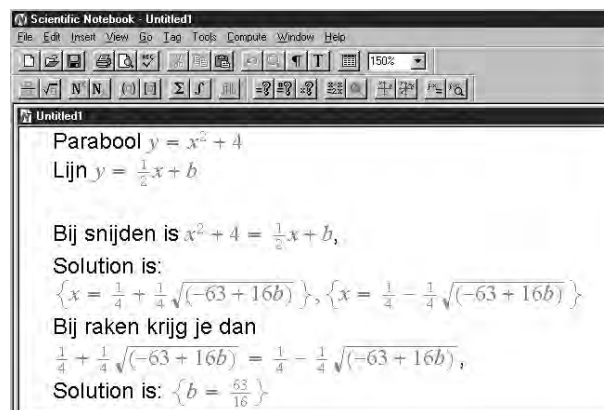


fig. 5 Berekening in Scientific Notebook

De vergelijking  $x^2 + 4 = 0,5x + b$  moet naar  $x$  worden opgelost, Scientific Notebook vraagt ook naar de variabele. Omdat bij raken de snijpunten samenvallen, moeten de  $x$ -waarden dus gelijk zijn. Daaruit volgt de gezochte waar-

de van  $b$ . Ter controle nog even naar de grafiek met deze  $b$  kijken.

Als een probleem complexer is, bijvoorbeeld als er twee of meer parameters zijn, is de oriëntatie op het probleem met behulp van grafieken vooral van belang om een oplossingsstrategie te bedenken. Het vinden van een goede oplossing met behulp van grafieken wordt wat lastiger. De ene parameter aanpassen, dan de andere en dan de eerste weer ... Het gebruik van de algebraïsche hulpmiddelen ligt nu eerder voor de hand dan bij één parameter.

Het tweesporenbeleid komt algemeen gesteld dus op het volgende neer:

- Met behulp van grafieken wordt een algebraïsch model opgesteld (formules, parameter).
- Met behulp van dynamische grafieken wordt een strategie ontworpen en een grove benadering van de oplossing gezocht.
- Met behulp van algebra wordt de strategie uitgevoerd en de (exacte) oplossing gevonden.
- De gevonden oplossingen worden in de grafische situatie gecontroleerd.

Voordat leerlingen met de bovengenoemde werkwijze aan de slag kunnen moet er nog wel iets worden gedaan, aan parameters met name. VU-Grafiek kent naast de klassieke familieparameter ook een zogenaamde schuifparameter. Deze schuifparameter kun je handmatig of automatisch een interval laten doorlopen en je ziet tegelijk wat er met de grafiek gebeurt.<sup>4</sup> Leerlingen hebben snel door wat een parameter is en wat het effect van een parameter op de grafiek is.

In het pakketje wordt eerst gekeken naar de onderlinge ligging van grafieken en het verband met via algebra verkregen oplossingen van de bijhorende vergelijking  $f(x) = g(x)$ . Vervolgens worden parameters bij lijnen geïntroduceerd, zo ontstaan de schuiflijn en de draailijn. De leerlingen kunnen dan aan de slag met bewegende lijnen die parabolen doorsnijden en raken, bewegende parabolen die lijnen doorsnijden en raken en bewegende parabolen die parabolen doorsnijden en raken. Een dynamische samenwerking tussen grafieken en algebra met de parameter in de hoofdrol.

Bij het vinden van de raaksituatie was het opvallend dat de leerlingen erg vasthouden aan het gelijkstellen van nulpunten en geen gebruikmaken van het iets snellere  $D = 0$  (zie figuur 5). Als je de leerlingen daarop wijst komt er een frons, een 'oh ja?', een 'jaa, maar zo snap ik het beter'.

Het eigenlijke probleem kan dan aangepakt gaan worden: de lijn die twee parabolen raakt. Als een lijn  $y = ax + b$  aan twee parabolen raakt, ontstaan er twee vergelijkingen in de parameters  $a$  en  $b$ , een stelsel dus. De computeralgebra lost dat voor je op. En, oh wonder, er blijken twee oplossingen te zijn. Eén waarvan je met de tekening ook wel het bestaan had gezien, maar er is nog een geval.

Sterk punt van computeralgebra.

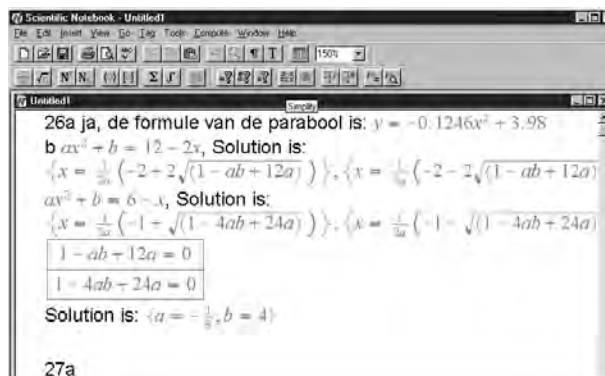


fig. 6 Gedeelte werkblad van een leerling

## Ervaringen

Het pakketje bleek niet te makkelijk, niet te moeilijk en tegen het eind behoorlijk pittig. Met hulp van medeleerlingen of docent konden ook de zwakkere leerlingen er goed mee uit de voeten. Er was behoefte aan enkele korte klassengesprekken om bepaalde problemen nader toe te lichten.

Het werken met dynamische grafieken sprak de leerlingen erg aan. Met behulp van de grafische software konden ze ook in algemene zin vlot met de problemen omgaan. Als ze de computeralgebra gingen gebruiken bleek echter dat een aantal leerlingen een tamelijk beperkt idee had van wat ze aan het doen waren. Bij deze leerlingen bestond er de neiging om zijn/haar toevlucht te zoeken tot een aanpak die eerder ook tot een oplossing had geleid, ook al sloeg het antwoord nergens op.

## Terugblik

Is wiskunde in een omgeving met computeralgebra anders?

Leerlingen zijn bezig met het opstellen van formules en vergelijkingen. Ze maken ook heel doelbewust een formule met een parameter. De oplossingen worden door computeralgebra geleverd. Leerlingen moeten goed in de gaten hebben wat ze willen en hoe ze dat moeten vormgeven. Ze zijn op een andere manier bezig dan vroeger, de nadruk ligt meer op de modellering, de organisatie, de manipulatie en de interpretatie, veel minder op de mechanische vaardigheden. De algebra is niet meer de hinderpaal of hinderlaag die het vroeger voor velen was. Ze werken in ieder geval enthousiast en zijn betrokken bij het werk.

Kunnen we dus nu de algebra uitbesteden? Neen, ik denk stellig van niet. Het gevaar van een doe-dit-doe-dat didactiek, waar leerlingen niet mee geholpen zijn, ligt op de loer. Naar mijn mening moeten leerlingen eerst heel wat algebraïsche basiskennis onder de knie en algebraïsch gevoel ontwikkeld hebben, voordat ze zinvol een geavanceerde tool als computeralgebra kunnen inzetten.

## Conclusies

Op grond van een klein en beperkt experiment is het moeilijk algemene conclusies te trekken, er is eerder sprake van meer of minder sterke indicaties.

- Het is duidelijk dat leerlingen geen problemen hebben om meerdere pakketten tegelijk te gebruiken en in een dynamische omgeving goed uit de voeten kunnen met (schuif)parameters.
- De koppeling Grafieken en Algebra lijkt een insteek waar leerlingen het nut van algebra zien.
- Als het algebraïsch manipuleren is uitbesteed kan de aandacht van de leerlingen beter gericht blijven op het wiskundig denken.
- De wiskundige mogelijkheden van computeralgebra-pakketten laten vanuit didactisch oogpunt soms te wensen over. In ieder geval vereist het inzetten van computeralgebra bij het leren van wiskunde een zorgvuldig nadenken over de te gebruiken didactiek.

- Voor vwo 4 is computeralgebra erg vroeg, leerlingen hebben nog te weinig algebra-achtergrond, ze moeten eerst een algebragevoel ontwikkelen.

*Carel van de Giessen, Almende College, locatie Isala, Silvolde*

## Noten

- [1] Werkgroep CAVO (1995). *Wiskundelessen met Derive, 15 practica voor de bovenbouw*. Amsterdam: Expertisecentrum CAN.
- [2] [www.fi.uu.nl/adlo](http://www.fi.uu.nl/adlo)
- [3] Blokland, P. van & C. van de Giessen. *VU-Grafiek voor windows*. Groningen: Wolters-Noordhoff (versie 2 verschijnt in 2003).
- [4] Giessen, C. van de (2002). Parameters in beeld. *Euclides*, 77(7), 302-308.

## Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag 2002/2003

In het schooljaar 2002/2003 vindt voor de veertiende keer de Wiskunde A-lympiade plaats. De voorronde wordt gehouden op vrijdag 29 november 2002. Deze wedstrijd is bedoeld voor leerlingen uit HAVO 5 of vwo 5/6 met wiskunde A1 of A12 in hun profiel. De wedstrijd bestaat uit een voorronde op de scholen en een finaleweekend op de Veluwe.

Op dezelfde dag (vrijdag 29 november) vindt ook de Wiskunde B-dag plaats. Deze wedstrijd, die voor de derde keer wordt gehouden, is bedoeld voor leerlingen uit HAVO 5 of vwo 5/6 met wiskunde B1 of B12 in hun profiel. Er is slechts één ronde.

Beide wedstrijden zijn bedoeld voor leerlingen die het leuk vinden om in teamverband (drie of vier leerlingen) een uitdagend probleem aan te pakken. De vaardigheden die bij de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag getest worden, spelen een essentiële rol in de tweede fase, met name bij de praktische opdrachten en de profielwerkstukken.

Op 29 november wordt op de eigen school 's ochtends

om 9.00 uur de opdracht uitgereikt, waarna de teams tot 16.00 uur de tijd hebben om het werkstuk te voltooien. Door de beste werkstukken in te zenden, kan een school meedingen naar een van de prijzen.

Meer informatie over de Wiskunde A-lympiade kunt u vinden op <http://www.fi.uu.nl/Alympiade>

Over de Wiskunde B-dag kunt u informatie vinden op <http://www.fi.uu.nl/wisbdag>

Aan het begin van het nieuwe schooljaar hebben alle scholen voor voortgezet onderwijs informatie en aanmeldingsformulieren ontvangen.

De Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde en mede mogelijk gemaakt door een bijdrage van Texas Instruments.

De netwerkbijeenkomst voor deelnemende docenten vindt plaats op 8 november 2002.

### *Gevolgen voor het profiel N&T*

In de huidige situatie bestaat het profieldeel van dit profiel ook uit drie vakken: wiskunde, natuurkunde en scheikunde. In de nieuwe voorstellen blijft dat zo, maar gaat de omvang van het profieldeel van 1840 uur terug naar 1440 uur. De profielvakken worden teruggebracht tot dezelfde omvang als die van profiel N&G. De invulling van wiskunde en scheikunde in het N&T profieldeel wordt dan precies dezelfde als in het N&G profieldeel. Natuurkunde zal een invulling krijgen die qua omvang niet veel meer is dan in het huidige N&G profiel. Dit is strijdig met de oorspronkelijke opzet van dit profiel en spoort niet met andere beleidslijnen aangaande techniek en exacte vakken om de volgende redenen:

- Het eigen karakter van dit profiel wordt geheel teniet gedaan. De aantrekkelijkheid van dit profiel zit juist in de verdiepingsmogelijkheden. Voor de echte bètaleerling, waaraan in onze technologisch georiënteerde samenleving grote behoefte bestaat, is er geen exact profiel meer dat voor haar/hem uitdagend is, omdat het zich nauwelijks meer onderscheidt van N&G. Hierdoor blijven talenten onbenut.
- De verdiepingsonderdelen van profiel N&T bieden zicht op actuele en geavanceerde onderdelen van de moderne natuurkunde, scheikunde en wiskunde en de bijbehorende denkwijze van deze vakken. Dat geeft een reële en gefundeerde mogelijkheid bij de betrokken leerlingen interesse te wekken voor een van de 'hardere' bètastudies.
- De voorgestelde veranderingen vallen niet te rijmen met andere, door de politiek ondersteunde acties die juist belangstelling voor natuur en techniek moeten bevorderen, zoals bijvoorbeeld onder de Axis-koepel met veel inzet worden uitgevoerd.

### *Conclusie*

De reductie van het profieldeel tot 1440 uur en drie profielvakken is in strijd met de intenties van de bètaprofielen, namelijk die van een inhoudelijk samenhangende exacte opleiding. Opmerkelijk is overigens dat in het profiel C&M wél gekozen wordt voor profielspecifieke invulling van wiskunde, terwijl dat uitgangspunt voor de bètaprofielen verlaten wordt.

De huidige voorstellen versterken de zorgelijke ontwikkeling dat steeds minder leerlingen kiezen voor een loopbaan in de exacte en technische sfeer. Om deze ontwikkeling tegen te gaan – en dat is nodig in Nederland als kennisland – moet de leerling in het voortgezet onderwijs een helder, samenhangend en uitdagend beeld van de wereld van techniek en wetenschap worden aangeboden.

De conclusie is dat het profieldeel gehandhaafd moet blijven op de oude omvang van 1840 uur in plaats van de voorgestelde 1440. Dat betekent handhaving van:

- Een voldoende breed bètaprofiel N&G met vier basisvakken wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie;
- Een uitdagend bètaprofiel N&T waarbij wiskunde, natuurkunde en scheikunde met voldoende inhoudelijke diepgang zijn ingevuld.

Dit alles hoeft niet te betekenen dat binnen het profieldeel geen ruimte is voor eigen keuzes door leerling en docent binnen het kader van keuzes die de school maakt. We zijn van mening dat de afkalving van de belangstelling voor de bètavakken bij de leerlingen tegengegaan kan worden door de leerlingen rijkere keuzes te bieden, en niet door het onderwijsaanbod op dit gebied te reduceren. De docent moet ook in het verdiepingsdeel van het profieldeel N&T een eigen keuze kunnen maken, die bij zijn/haar specifieke kennis en belangstelling aansluit; dat levert onderwijsmomenten op die goud waard zijn. Als de omvang van de profielvakken niet verkleind wordt, zijn er juist al goede mogelijkheden om binnen het profieldeel keuzeonderwerpen aan te bieden. Men bedenke dat er voor wiskunde aanvankelijk meer onderwerpen zijn ontwikkeld. Daarvan zijn er enkele geschrapt met het oog op overladenheid. Regelmatig verschijnen er publikaties (de zogenaamde Zebra-series) die nieuwe onderwerpen toegankelijk maken. Indien het tot nader overleg komt naar aanleiding van onze en andere reacties op de nota, wil het Freudenthal Instituut graag mede vormgeven aan een nadere invulling van een en ander.

Zoals bekend wil het Freudenthal Instituut bijdragen aan waardevol reken- en wiskundeonderwijs voor iedereen; het is er ook van overtuigd dat de leerlingen, die het meest geschikt zijn om zich te ontwikkelen tot professionals in een van de vele bèta- of techniek-richtingen, recht hebben op onderwijs dat aansluit op hun behoeften en mogelijkheden. Dat dit ook maatschappelijk van groot belang is, spreekt vanzelf. Onlangs (NOT Zomer seminar, 6 juni 2002) heeft de voormalig secretaris-generaal van het Ministerie van Economische Zaken, Prof. Dr. Sweder van Wijnbergen, nog gewezen op het belang van 'Menselijk kapitaal' voor de economie. Ook daarom protesteren wij tegen de afbreuk die de nota 'Continuïteit en Vernieuwing in de tweede fase HAVO/VWO' voor de tweede fase gaat betekenen, tenzij fundamentele bijstellingen gedaan worden.

Hoogachtend,



Prof.dr. J. de Lange  
Hoogleraar-Directeur Freudenthal Instituut  
Universiteit Utrecht

c.c.:

Vaste Kamercommissie Onderwijs  
Dr. L.S.J.M. Henkens, directeur Voortgezet Onderwijs  
OCW  
Prof.dr. W.J.M. Levelt, voorzitter KNAW  
Mr. E.N.M. d'Hondt, voorzitter VSNU  
Drs. J.G.F. Veldhuis, voorzitter STOA  
Prof.dr. E.J.N. Looijenga, voorzitter Wiskundig Genootschap

‘Bouwen met blokken’ is een programma dat ontwikkeld is om er ruimtemeetkunde mee te bedrijven. Delen ervan zijn als applets ook op het wisweb te vinden. Op de basisschool is er door **Jan van den Brink**, **Peter Boon** en **Vincent Jonker** ervaring mee opgedaan. In het project WINST wordt onderzocht welke applets voor het vmbo bruikbaar zijn.

## Basisvaardigheden ruimtemeetkunde op de computer

### Inleiding

We willen met dit artikel enkele nieuwe mogelijkheden onder de aandacht brengen voor het computergebruik bij het ruimtemeetkundeonderwijs, en we willen dit doen aan de hand van enkele ervaringen met het programma ‘Bouwen met blokken’ voor de basisschool, een programma waarvan sommige onderdelen ook binnen het voortgezet onderwijs op een zinvolle wijze zijn ingezet. Daarbij proberen we te formuleren en te illustreren wat de meerwaarde is van de computer als leermiddel bij het ruimtemeetkundeonderwijs, als ook de voorwaarden waaronder die meerwaarde daadwerkelijk bereikt wordt. De indeling van het artikel is als volgt.

Eerst maken we een plaatsbepaling van de ruimtemeetkunde die hier bedoeld is en welke vaardigheden van leerlingen we daarbij nastreven. Daarna schetsen we de mogelijkheden (en de beperkingen) van het programma ‘Bouwen met blokken’ aan de hand van enkele ervaringen in de klas. Wellicht is het goed hier vast te stellen dat de keuze voor dit specifieke programma arbitrair is. Het gaat ons echter veel meer om de nagestreefde vaardigheden bij leerlingen en in hoeverre de computer daarbij een meerwaarde zou kunnen hebben. ‘Bouwen met blokken’ is dan slechts een van de vele programma’s die ons daarbij een ‘leeromgeving’ kan bieden.

Tot slot proberen we in te schatten hoe een dergelijk programma ook in de basisvorming zou kunnen worden ingepast.

Het artikel komt voort uit enkele projectactiviteiten die momenteel binnen het Freudenthal Instituut worden uitgevoerd. Het gaat dan onder andere om de inzet van de computer op diverse plaatsen in het reken-wiskundecurriculum. Voor het basisonderwijs wordt binnen het project TAL (Tussendoelen Annex Leerlijnen) gewerkt aan een meetkundeaanpak waarbij de computer ook een rol kan spelen. Binnen het vmbo, derde en vierde leerjaar, wordt in het project WINST (wiskunde en natuur-scheikunde in de sector techniek) onderzocht of het curriculum ruimtemeetkunde dat in de wiskundelessen wordt gegeven, wellicht beter kan aansluiten op bijvoorbeeld het curriculum tekeninglezen dat voor met name bouw en metaal buitengewoon belangrijk is.

### *Over welk onderdeel van de meetkunde hebben we het hier?*

Ruimtemeetkunde kent een vroege start in het basisonderwijs. De volgende kerndoelen zijn hiervoor relevant even aan te halen:

1. De leerlingen beschikken over eenvoudige noties en begrippen, waarmee zij ruimte meetkundig kunnen ordenen en beschrijven.
2. De leerlingen kunnen ruimtelijk redeneren. Ze bedienen zich daarbij van bouwsels, plattegronden, kaarten en foto’s, en gegevens over plaats, richting, afstand en schaal.
3. De leerlingen kunnen schaduwbeelden verklaren, figuren samenstellen en bouwplaten van regelmatige objecten ontwerpen en verkennen.

Het zal duidelijk zijn dat deze doelen niet voor iedere leerling op hetzelfde niveau haalbaar zijn. Dit betekent dat in het vervolgonderwijs leerlingen met vaardigheden op verschillend niveau instromen.

Ten overvloed, deze doelen kunnen uitstekend zonder de inzet van de computer nagestreefd worden.

### *Waarom zou de computer ingezet moeten worden?*

In de meetkunde (het meetkundig onderzoek) zelf is de computer niet meer weg te denken. De computer heeft nieuwe onderwerpen en toepassingen gebracht (fractals, cabri), maar ook een nieuwe wereld geopend: de virtuele werkelijkheid.

Deze laatstgenoemde mogelijkheid die de computer biedt is van groot belang voor het meetkundeonderwijs, omdat daarin een meerwaarde schuilt die de computer heeft boven andere leermiddelen. Met deze bijzondere context kan de computer bijdragen leveren op essentiële punten van het realistisch meetkundeonderwijs. Niet apart en los, maar geïntegreerd met de leerstof levert de computer een ‘geheel dat meer is dan de som van de afzonderlijke delen’.

Met name twee momenten in de leerlijn meetkunde (waarbij de computer wordt ingezet) zijn belangrijk:

1. Wat realiseren de leerlingen zich bij de beelden die ze op het scherm zien?
2. Hoe is die beeldvorming te beïnvloeden?



Dat hangt enerzijds af van het soort computerprogramma en anderzijds van het onderwijs dat men beoogt.

Mogelijkheden van de computer zijn:

- weergeven van statische plaatjes
  - weergeven van bewegende plaatjes (animaties)
  - manipuleren van objecten in de computerruimte
  - construeren van objecten in de computerruimte.
- Zelf met computerbeelden en -gebouwen aan de slag gaan, ze ronddraaien, ze bouwen of afbreken, de 'directe feedback' daarop en vooral het 'spel-element' daarin zijn van onschatbare waarde. Het geeft zelfs de mogelijkheid om een 'eigen' virtuele werkelijkheid op te bouwen.

Cruciaal bij het werken met ruimtemeetkunde (3D-voorstellingen) op de computer (2D-schermbild) is het leggen van een goed verband tussen deze twee werelden die vaak ook letterlijk gepaard gaat met een 'blikwisseling'. Deze blikwisseling is een belangrijke wiskundige activiteit.

### Voor- en nadelen van het gebruik van de computer

Het heeft voordelen om de computer in te zetten bij ruimtemeetkundeonderwijs. We noemen:

- aanzichten van oneindig veel kanten
- gebruik van verschillende soorten perspectief
- nader onderzoek naar verschijnselen als 'ooghoogte' en 'horizon'
- op eenvoudige wijze kan een spelelement worden toegevoegd, waarin bijvoorbeeld 'bouwregels' worden gehanteerd voor ruimtelijke objecten
- bouwwerken en maquettes kunnen worden opgeslagen, zodat deze later verbeterd of uitgebreid kunnen worden.

Er kleven ook nadelen aan de computer voor het meetkundeonderwijs. Op de computer is het virtuele bouwen niet te 'voelen' als vrij bouwen met echte blokjes, schots en scheef neergezet. De rigide aard van het computerprogramma kan deze speelsheid in het echte bouwen beperken. Anderzijds is het een nieuwe wereld.

### Het programma 'Bouwen met blokken'

Het computerprogramma 'Bouwen met blokken' is bedoeld voor leerlingen van de onderbouw van de basisschool. Het programma bestaat uit diverse onderdelen, zoals 'vrij bouwen', 'nabouwen' en 'spelen' op het computerscherm. Leerlingen leren hiermee construeren, oriënteren en opereren.

Het programma sluit aan op de reguliere meetkundige activiteiten die thans al in het curriculum van de basisschool voorkomen, zoals op het bouwen volgens mondelinge instructies en de bouw van een maquette van de woonwijk. Anderzijds introduceert het computerprogramma verschillende manieren van bouwen: bouwen volgens hoogtegetallen, bouwen naar verschillende aanzichten van een gebouw, bouwen volgens bouwregels. Het programma heeft zeven onderdelen waaruit op de

eerste pagina van het programma kan worden gekozen.



fig. 1 Het programma 'Bouwen met blokken'

*Vrij bouwen* geeft de kinderen een rooster en de mogelijkheid om daarop te 'beeldhouwen', het computerbouwsel is namelijk rond te draaien en van alle kanten bij te schaven. Dit geldt overigens voor alle zeven computeronderdelen.

*Nabouwen* levert lijsten van staande, zwevende of in serie staande bouwsels die als voorbeelden op het computerscherm zijn na te bouwen.

*Nachtbouw* toont computergebouwen alleen in de nacht en met deze handicap moet de leerling het voorbeeld nabouwen. Alleen de buitenste contour is te zien, maar door het gebouw rond te draaien is een idee te krijgen van hoe het in elkaar steekt.

In *Hoogtekaart* wordt op de computer een gebouw nagebouwd dat in hoogtegetallen gegeven is en in *Hoogtebouw* wordt, omgekeerd, een driedimensionaal gebouw gegeven (zie figuur 2), dat door middel van een hoogtekaart wordt nagebouwd. De bouw is te volgen in driedimensionaal formaat.

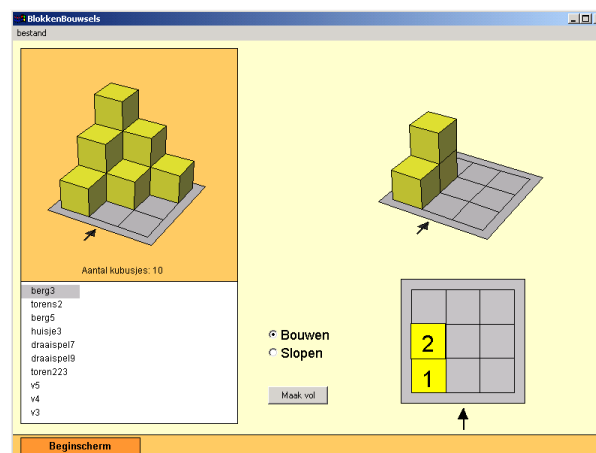


fig. 2 Uit: Hoogtebouw

In het onderdeel *Draaispel* wordt de leerling gevraagd een bepaalde kant van een computergebouw voor te draaien (zie figuur 3).

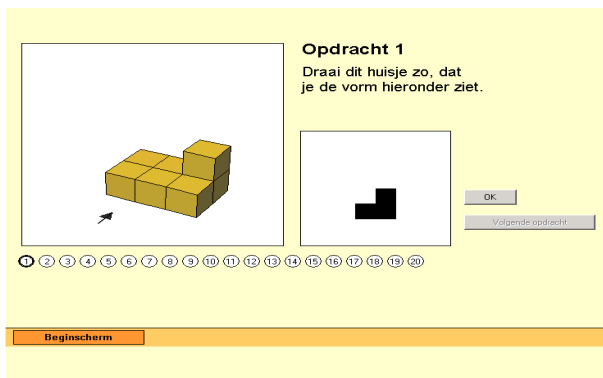


fig. 3 Draaispel, eerste blad

Op deze wijze worden twintig gebouwen gegeven en verdienen de leerlingen punten voor hun prestaties. Het onderdeel *Bouwen met drie kanten* laat een gebouw nabouwen op de computer waarvan drie aanzichten gegeven zijn (figuur 4).

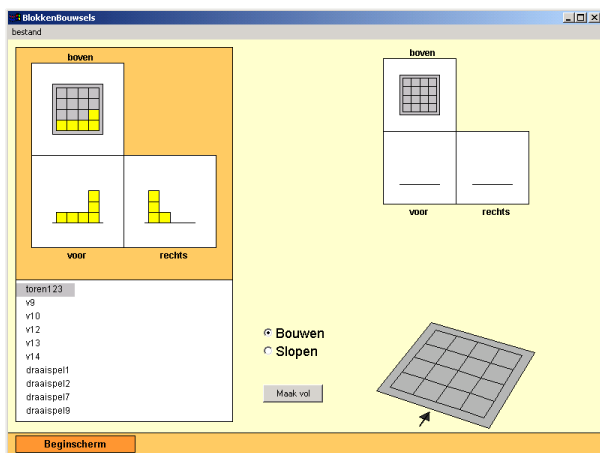


fig. 4 Bouwen met drie kanten. Bouwen: echt en virtueel

De bedoeling van het bouwen op de computer is het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht in de platte plaatjes van het scherm. In concreto gaat het om de vraag: Herkennen de kinderen in de 2D-plaatjes van het computerscherm de bedoelde 3D-gebouwen?

Het 'werkelijke' bouwen van huisjes op tafel gaat vooraf aan dit 'virtuele' bouwen met kubusjes op de computer. Beide activiteiten kunnen goed met elkaar gekoppeld worden. Ofschoon, wat in de werkelijkheid kan niet altijd in de virtuele realiteit kan. En omgekeerd (zie figuur 5).

### Meebouwen vanaf de computer, een impressie

De laptop van de leerkracht wordt voor de klas op een stoel gezet. Iedereen kan het scherm zien. Iedereen heeft vier houten blokjes gekregen.

De leerkracht toont het scherm van het onderdeel 'Vrij bouwen' van het computerprogramma.

Ze legt uit: 'Kijk, dit rooster op het scherm is de tafel. Daar kan ik een blokje op zetten.'

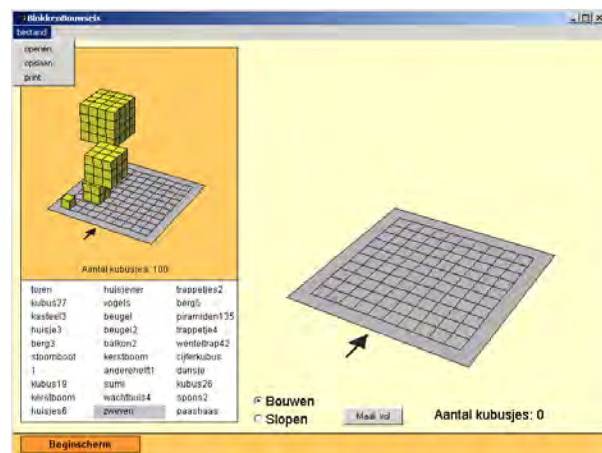


fig. 5 Zwevende gebouwen

Nu ga ik op de computer een gebouw maken en jullie bouwen meteen mee.'

Meer zegt ze niet.

Ze bouwt dit gebouw van vier blokjes (figuur 6).

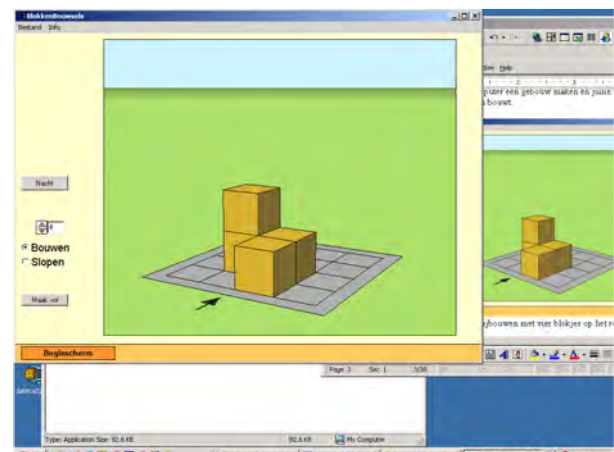


fig. 6 Scherm van 'Vrij bouwen' met vier blokjes op het rooster

De kinderen doen het direct na en controleren elkaar. Dan laat de leerkracht het computergebouw op het scherm draaien en zegt: 'Jullie mogen afkijken.' Ze laat het gebouw ook in vogelvlucht perspectief zien. De kinderen volgen haar en kijken eveneens vanuit verschillende posities naar hun eigen gebouwtje.

Dan haalt de leerkracht een blokje weg. De leerlingen doen dat ook in hun eigen gebouwtje.

'Welk blokje zullen we nu weghalen, slopen?', vraagt de leerkracht. Een leerling doet een voorstel: 'Dat blokje links; nee, daarvoor.' De leerlingen zijn al bedreven in het 'vertellend bouwen' en blijken dit ook in deze computerruimte te kunnen. Ze gaan door het nabouwen steeds beter de driedimensionale bouwsels onderscheiden die op het platte computerscherm staan geprojecteerd.

Dan zet de leerkracht een computergebouw van zes blokjes neer. Er ontstaat enige consternatie in de klas: 'Zoveel blokjes heb ik niet', zegt een leerling. Maar de klas vindt

snel een oplossing door twee aan twee samen te werken. Even later geeft de leerkracht de beurt aan een leerling. Hij mag de computer besturen en voorbeelden op het scherm bouwen.

Het ene kind doet dat wat handiger dan het andere, maar het blijkt dat dit klassikale meebouwen en nabouwen een probaat middel is om de computer te leren hanteren en om 'ruimte' te zien in het platte computerscherm. Want dat is niet bij iedere leerling vanzelfsprekend.

### Plat of ruimtelijk zien?

Sommige leerlingen hebben moeite met plat of ruimtelijk zien; ze zien bijvoorbeeld in een 'dakpan' een kubusje of het bouwrooster als een verticale vlieger (figuur 7).

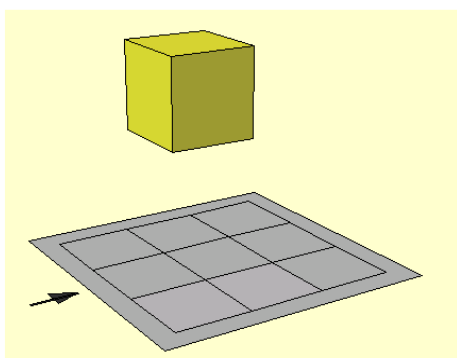


fig. 7 Een blokje zwevend boven een rooster van 3x3

'Boven welk hokje vliegt dit blokje?'

'Daarboven', zegt een jongen van acht jaar en wijst op het bovenste puntje van het rooster. Voor hem is alles plat en 'boven' is aan de bovenkant van het scherm. Hij let niet op de ruimtelijke suggestie in het plaatje dat de kubus flink groter maakt dan de roostercel bij het hoekpunt dat hij koos.

'Bouw eens een toren vanaf dat hokje naar het blokje.' Samen met zijn buurmeisje maakt hij de toren en de kinderen zijn erg verbaasd als die achter het zwevende blokje uitkomt (figuur 8).

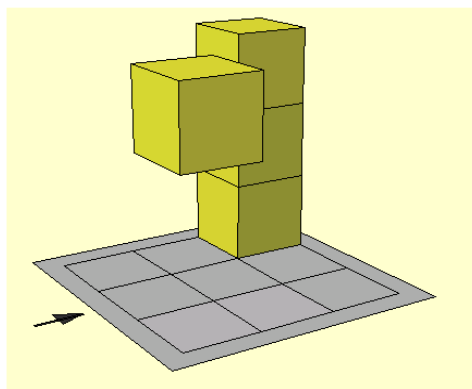


fig. 8 Een kubus en een toren van 3

Nu pas merken ze dat er 'ruimte' in het scherm zit, en dat

het blokje boven een andere plek hangt en ook nog: hoe hoog. Het ruimtelijk inzicht komt tot stand door hun 'platte' interpretaties al bouwend te *confronteren* met de ruimtelijke.

### Bouwen in een andere ruimte – met andere beperkingen of uitbreidingen

Het bouwen van huisjes met echte kubusjes op tafel is essentieel als onderdeel bij het werken met de computer, zeker in het beginstadium. Beide activiteiten zijn goed met elkaar te koppelen, zoals eerder in 'Meebouwen vanaf de computer' werd geschetst.

Maar er zijn ook 'storende' verschillen tussen het echte bouwen en bouwen op de computer. Wat in de virtuele realiteit kan, kan niet altijd in de werkelijkheid. Gebouwen met een balkonnetje bijvoorbeeld, zijn niet van losse blokken te maken zonder te lijmen. Om over bouwsels die in de ruimte zweven maar te zwijgen. De werkelijkheid legt andere beperkingen aan het bouwen op dan de computerruimte en dat geeft soms verrassende computerbouwsels.

### Nabouwen op de computer

De leerlingen in groepjes van twee krijgen in het onderdeel 'nabouwen' van het computerprogramma bijvoorbeeld dit voorbeeld om te kopiëren (figuur 9).

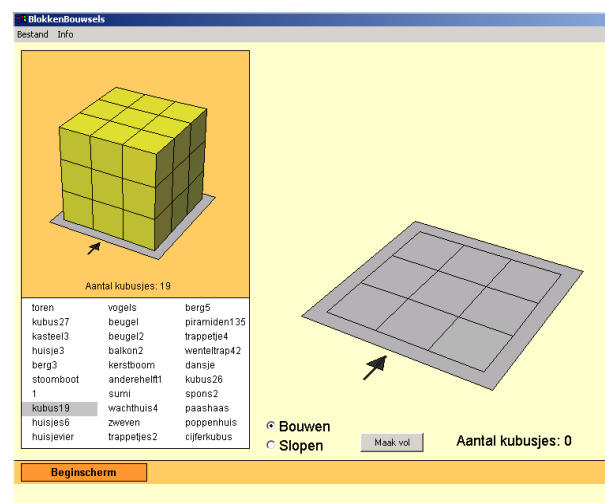


fig. 9 Een kubus van 19 blokjes

'Het is een kubus', zegt een leerling. Hij bestaat echter uit 19 blokjes. Dat aantal staat onder het bouwsel vermeld, maar geen kind let daarop. De leerlingen maken bij het zien van het voorbeeld direct een kubus van 3x3x3 op het bouwrooster, rechts op het scherm. Als ze daarmee klaar zijn, verschijnt er echter geen groene stip, ten teken dat het voorbeeld goed is nagebouwd.

'Hoe kan dat?', roept een meisje verbaasd. En nieuwsgierig draait ze het voorbeeld rond en komt tot een verrassende ontdekking (figuur 10).

'We moeten er blokjes uit halen', lacht ze en de kinderen slopen de blokjes die te veel zijn uit hun eigen kubus.

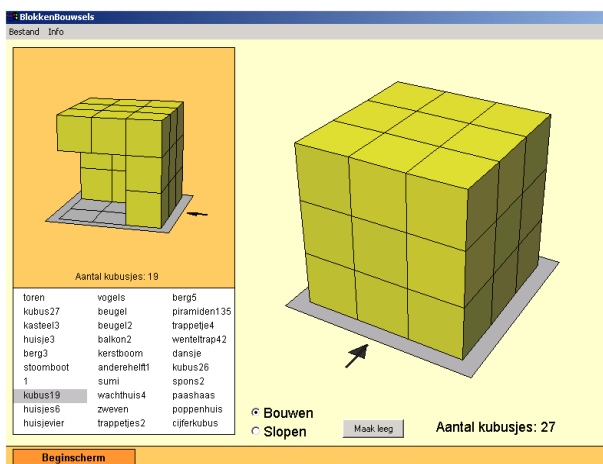


fig. 10 Kubus19 gedraaid

### Een ruimte met andere bouw eigenschappen

Het lijkt een flauwe grap, maar het berust op een belangrijk principe in de meetkunde om vraagstukken te scheppen door beperkingen of uitbreidingen aan de bouwactiviteiten op te leggen. Leerlingen moeten bijvoorbeeld gewoonlijk rekening houden met de zwaartekracht, maar op de computer is dat niet nodig. Bouwen met blokken vindt daar plaats in een ruimte met andere eigenschappen. Daardoor zijn fantasiegebouwen mogelijk, geheel of gedeeltelijk zwevend. En daardoor zijn allerlei opgaven te bedenken, die het slaafse nabouwen doorbreken.

### De 'computermaquette', een wereld apart

De computermaquette is een wereld die de leerlingen zelf kunnen bouwen. De huisjes die in de computerruimte worden gebouwd kunnen tezamen een stad of dorpje vormen, maar ook de woonwijk van de kinderen. Bij de maquette van de woonwijk dienen zich drie 'werelden' aan. Allereerst de *woonwijk* waarin de kinderen leven en die ze natuurlijk op hun duimpje kennen. Daarna de *blokjesmaquette* van de wijk waarin ze wonen, en die dus niet een zomaar vrij bedacht miniatuurwereldje is; hij heeft immers de woonwijk als basis. En als derde wereld: de *virtuele wereld* die 'computermaquette' heet.

De drie werelden hebben grote verschillen. In de wijk loopt het kind rond, op de computer bekijkt het de wijk van buitenaf; op de computer bouwt en beweegt de leerling anders dan in de blokjesmaquette. Toch gaat het de leerling vooral om de overeenkomsten.

### Werkelijkheidsgetrouw

In de klas spelen de echte woonwijk en de computermaquette ervan afwisselend de hoofdrol. De maquette moet volgens de kinderen een werkelijkheidsgetrouwe afbeelding worden van de woonwijk en ze sleutelen er daarom lang aan. De kinderen bekijken elkaars computermaquette, bespreken of verbeteren hem. Ze slaan hun maquette op in het programma om hem later verder uit te breiden. Nu eens zijn de richtingen tussen de huisjes belangrijk,

dan weer de afstanden en ten slotte staan de hoogtes en de vormen van de gebouwen centraal.

### Uitzoomen en inzoomen

De computermaquette van de woonwijk is gebouwd op een rooster van  $8 \times 8$ . De leerkracht maakt het rooster tot een rooster van  $16 \times 16$ . De blokjes blijven staan, zij het verkleind (figuur 11).

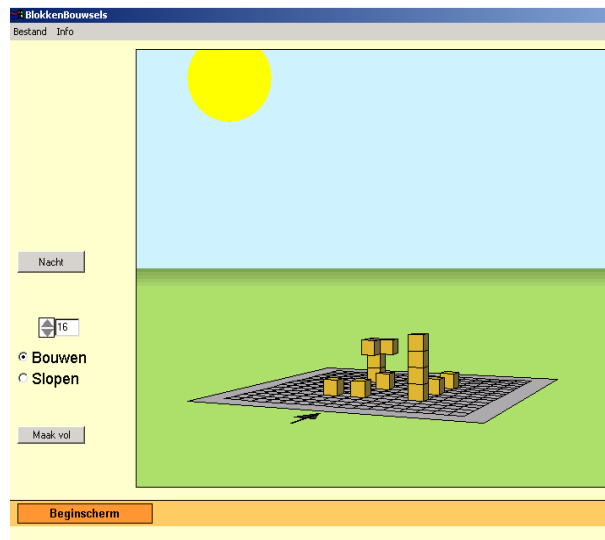


fig. 11 De computermaquette van de woonwijk

'O, kleiner', roept een meisje verschrikt. Het wordt door de leerlingen spannend gevonden om het bouwen nu preciezer uit te moeten voeren; maar het past bij de precisie die de leerlingen bij de computer aan de dag leggen. De leerkracht vraagt naar de plaats van het 'station' dat buiten de directe schoolwijk ligt op circa twee kilometer van school. Dat wordt niet gekend door de leerlingen. De supermarkt (circa één kilometer van de school) kennen ze wel. Het valt altijd tegen hoe klein de omgeving is die deze leerlingen (van zeven en acht jaar oud) kennen en hoe moeizaam ze de wijk tot onderdeel van de stad maken.

### Doorwerking van een dergelijke aanpak in de basisvorming

De huidige wiskundemethoden zijn momenteel druk bezig om additioneel ICT-materiaal te leveren bij de boeken. Daarbij wordt gedacht aan ondersteuning van de ruimtemeetkunde door middel van reeds bestaande software (zoals 'Doorzien' van Doorman en 'Ruimtemeetkunde' van Lecluse), maar ook door software zoals in dit artikel is beschreven.

De omstandigheden op school zijn verbeterd om gebruik te maken van deze software en de verwachting is dan ook dat het gebruik zal toenemen. Een bijkomend effect van de nieuwe wiskundemethoden die CD-ROMs mee (gaan) leveren met het boek is dat leerlingen ook thuis met de

software kunnen oefenen en experimenteren. Dit geeft een extra 'leerdimensie', omdat ervaringen thuis aan de computer kunnen bijdragen tot een beter begrip tijdens de wiskundelessen.

Het hier beschreven materiaal is waarschijnlijk goed bruikbaar in de basisvorming, als interactieve aanvulling op de huidige hoofdstukken die over ruimtemeetkunde gaan. Ook binnen het derde en vierde leerjaar van het VMBO, met name in die sectoren waar ruimtelijk inzicht een belangrijke rol speelt, kan deze software een belangrijke aanvulling zijn (zie bijvoorbeeld Abels, 2001).

## Tot slot

Ruimtemeetkunde is bij uitstek iets wat je moet ervaren in de 'echte' werkelijkheid. Niets is zo verhelderend als het leren begrijpen van de architectuur van een gebouw

of een ander 3D-object door er omheen te lopen. Als aanvulling op deze 'echte' ervaringen levert de nieuwe generatie software voor ruimtemeetkunde inmiddels verrassende mogelijkheden en aanvullingen op ontdekkings- tochten door de ruimte.

*Jan van den Brink, Peter Boon en Vincent Jonker, Freudenthal Instituut*

## Literatuur

Abels, M. (2001). Kijken om te leren zien. *Nieuwe Wiskrant*, 20(4), 4-8.

Boon, P. (2001). JavaLogo en praktische opdrachten wiskunde. *Nieuwe Wiskrant*, 21(2), 20-26.

Doorman, L.M. & H.B. Verhage (1989). Ruimtemeetkunde op de computer. *Nieuwe Wiskrant*, 8(4), 3-9.

Advertentie

# APS-Wiskunde

Ook in het schooljaar 2002/2003 organiseert APS-wiskunde weer diverse studiedagen, cursussen, conferenties en netwerken.



*Onder andere:*

Donderdag 9 januari 2003: 1e Reehorstconferentie wiskunde:  
wiskunde voor de leerlingen van nu  
Donderdag 24 april 2003: 3e Conferentie ICT in de wiskundeles

Woensdag 20 november 2002: Studiedag Verwondering en verbeelding

Donderdag 12 december 2002: Start van de cursus Concrete materialen in de wiskundeles

Ons volledige aanbod is te vinden op onze website:

[www.aps.nl/wiskunde](http://www.aps.nl/wiskunde)

Daar kunt u zich online inschrijven.

Geïnteresseerd en heeft u onze brochure nog niet ontvangen?

Bel of stuur een e-mail:

Secretariaat APS-wiskunde

Telefoon: 030-28 56 722

E-mail: [wiskunde@aps.nl](mailto:wiskunde@aps.nl)



Het leren van wiskunde in een computeralgebra omgeving verloopt vaak niet zonder problemen. In dit artikel brengt **Paul Drijvers** een aantal veel gesignaleerde obstakels in kaart, die allemaal een conceptueel en een technisch aspect hebben. De conclusie van deze inventarisatie is dat het aanbeveling verdient om dergelijke obstakels tot onderwerp van gesprek te maken en ze zo om te buigen tot kansen voor het leren.

## Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen

### Inleiding

In de inleiding van deze ICT-special van de Nieuwe Wiskrant heeft Gerard Koolstra<sup>1</sup> de ontwikkelingen van digitale leeromgevingen geschetst. Hij wijst daarbij op omgevingen die behalve algemene voorzieningen voor tekstverwerking en Internet-toegang ook specifieke wiskundige voorzieningen bieden, zoals computeralgebra. Elders in dit nummer doet Carel van de Giessen<sup>2</sup> verslag van zijn ervaringen met zo'n computeralgebra omgeving in zijn klas.

Tijdens verschillende schoolexperimenten heb ik gezien dat zich bij het inzetten van computeralgebra voor het leren van wiskunde allerlei moeilijkheden kunnen voordoen<sup>3, 4</sup>. In dit artikel leiden de ervaringen van een drietal schoolexperimenten tot een groeiende lijst van zulke obstakels. Daarnaast wordt betoogd dat dergelijke 'hobbels' in de klas kunnen worden uitgebuit en kunnen worden omgebogen tot kansen voor het leren.

### Instapvoorbeeld

Toen ik kennismakte met het fenomeen computeralgebra, ergens in de jaren tachtig, was ik meteen gefascineerd door de kracht en de snelheid van het computeralgebra systeem (CAS), in mijn geval Derive. Een deel van die fascinatie werd veroorzaakt door het gevoel dat wiskunde bedrijven in zo'n pakket zo simpel lijkt, terwijl het toch de nodige wiskundige expertise vraagt om de software efficiënt te kunnen gebruiken. Om de vinger achter de aard van die expertise te krijgen is een intrigerende, maar lastige zaak.

Het is bijvoorbeeld eenvoudig om de haakjes in een uitdrukking als  $(x+y)^3+1$  te laten verdrijven (zie regels #1 en #2 in figuur 1). Andersom,  $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$  door Derive laten herleiden tot  $(x+y)^3+1$ , is niet zo eenvoudig als je niet weet hoe  $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$  is gemaakt. Het commando FACTOR, dat vaak het uitwerken van haakjes ongedaan maakt, geeft hier niet het eenvoudigste resultaat (regel #4 in figuur 1).

In dit geval moet je, bijvoorbeeld op basis van de symmetrie in de expressie, op het idee komen dat  $x+y$  weleens

een factor zou kunnen zijn, die je dan bijvoorbeeld  $z$  noemt. Dan substitueer je  $y = z - x$  of  $x = z - y$  (regel #6), en uiteindelijk vervang je nog  $z$  door  $x+y$  (regel #8). Niet zo moeilijk voor een wiskundige met computeralgebra ervaring, maar voor een leerling die zowel wiskundige expertise als ervaring met computeralgebra mist? Zo komen we bij de didactische vraag van dit artikel: met welke obstakels krijgen leerlingen te maken als ze met computeralgebra leren werken, en hoe ga je daarmee om als docent?

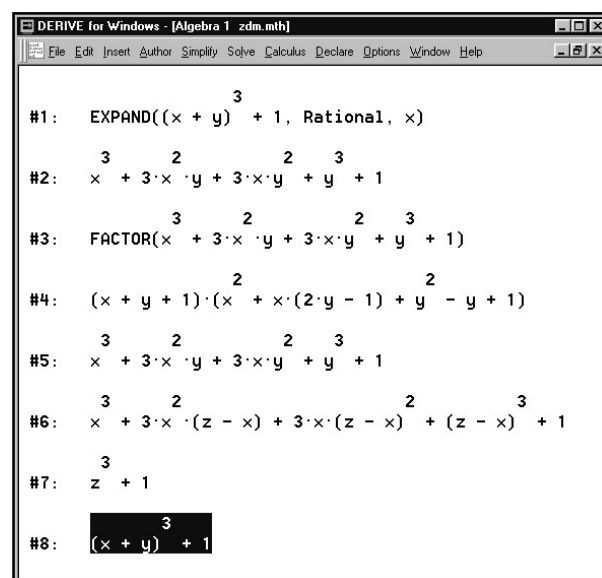


fig. 1 Terugzoeken van de factor  $x+y$  in Derive

### Globale en lokale obstakels

Ervaringen tijdens het eerste schoolexperiment (zie [3]) hebben geleid tot een lijstje van meest opvallende obstakels waar leerlingen tegenaan lopen als ze leren werken met computeralgebra.<sup>5</sup> Kort samengevat bevat deze eerste inventarisatie de volgende punten.

1. Het verschil tussen de algebraïsche voorstelling die de computeralgebra omgeving geeft, en de vorm die de leerling verwacht en als eenvoudigste beschouwt.

Het gaat hier om moeilijkheden met het zien dat bijvoorbeeld  $-(x - 12)$ , gegeven door het CAS, equivalent is met de uitdrukking  $12 - x$  die de leerling had verwacht, of dat  $\sqrt{s/4}$  gelijk is aan  $1/2 \cdot \sqrt{s}$ . Het herkennen van equivalentie is belangrijk bij algebra in een computeralgebra omgeving.

2. *Het verschil tussen numerieke en exacte berekeningen en de impliciete manier waarmee het CAS daarmee omgaat.*

Voor veel leerlingen is bijvoorbeeld  $\sqrt{2}$  niet echt een antwoord: ze beschouwen 1,41 als het uiteindelijke resultaat. Ze realiseren zich ook niet het statusverschil tussen de twee antwoorden:  $\sqrt{2}$  'bevat nog algebra' terwijl 1,41 puur numeriek is. De computeralgebra omgeving is niet altijd helder over dit statusverschil.

3. *De flexibele conceptie van variabelen en parameters die het gebruik van computeralgebra vereist.*

In een computeralgebra omgeving 'zijn alle letters gelijk', om Orwell te parafraseren. In een bepaalde probleemsituatie heeft een variabele echter een bepaalde betekenis en een rol, zoals de rol van onbekende, parameter of veranderlijke. De leerling moet het verband blijven zien tussen de contextgebonden betekenis van de variabele in de probleemsituatie en het abstracte werken ermee in de computeralgebra omgeving. Omdat de rol van een variabele tijdens het oplossingsproces kan veranderen, vraagt efficiënt werken in een CAS om flexibiliteit in dit opzicht.

4. *De neiging om alleen numerieke en geen algebraïsche oplossingen te accepteren.*

Leerlingen zijn vaak niet tevreden als de oplossing van een probleem luidt  $x = 1/2 \cdot s - 1/2 \cdot v$ . Ze willen dan weten welk getal  $x$  nu eigenlijk is. Dit wordt wel het 'expected answer obstacle' genoemd.

5. *De beperkingen van het CAS en de moeilijkheid om algebraïsche strategieën te vinden die die beperkingen omzeilen.*

In sommige gevallen, zoals in het voorbeeld van de vorige paragraaf, is er geen commando dat ineens tot het gewenste resultaat leidt, of is het CAS niet in staat zonder hulp de gevraagde bewerking uit te voeren. Zulke gevallen vragen om coöperatie tussen de expertise van de gebruiker en de capaciteiten van het CAS.

6. *Het onvermogen om te weten wanneer en hoe computeralgebra van pas komt.*

Ervaren gebruikers weten waarvoor het CAS ingezet kan worden en hoe het voor hen kan werken in bepaalde situaties. Onervaren gebruikers missen het gevoel voor wat redelijkerwijs van een computeralgebra omgeving verwacht kan worden.

7. *Het black box karakter van het CAS.*

In het algemeen geeft de computeralgebra omgeving geen inzicht in de manier waarop het zijn resultaat vindt. Dat betekent dat leerlingen het vaak niet kunnen verifiëren. Daarmee krijgt het CAS het karakter van een black box. Dat kan leerlingen het gevoel geven zich op glad ijs te bevinden, omdat ze zijn 'over-

geleverd' aan een moeilijk controleerbare machine.

Deze lijst van obstakels overziend, vallen twee zaken op. Ten eerste bevat de opsomming obstakels van verschillende aard. De obstakels 5, 6 en 7 hebben een globaal karakter: ze gaan over de manier waarop je in het algemeen de machine voor je kunt laten werken, en over de relatie tussen het oplossingsplan en de implementatie ervan in het CAS. De eerste vier obstakels daarentegen hebben een meer lokaal karakter. Ze hebben betrekking op een specifiek wiskundig onderwerp – in dit geval algebra – en op de manier waarop computeralgebra daarmee omgaat. Het woord 'lokaal' betekent niet dat ze niet belangrijk zijn; het eerste obstakel van de equivalente expressies is bijvoorbeeld essentieel voor algebraïsch inzicht. Het behelst echter niet de strategie van het probleemoplossen met computeralgebra in het algemeen. In het vervolg van dit artikel maken we dus onderscheid tussen globale en lokale obstakels.

Ten tweede roept de lijst de vraag op in hoeverre de obstakels wel door het gebruik van computeralgebra worden veroorzaakt. Het heeft er alle schijn van dat het eerder gaat om bestaande cognitieve obstakels, die zich bij het werken in een computeralgebra omgeving op een sterke manier manifesteren.

De lokale obstakels 1, 2, 3 en 4 gaan over algebra. Omdat dat het onderwerp is van mijn onderzoek, ben ik daarop gespitst; een andere invalshoek zou mogelijk tot andere lokale obstakels leiden. Van de andere kant ligt het verband computeralgebra – algebra natuurlijk wel voor de hand.

## Lokale obstakels en instrumentatie

Hoe kijk je nu als docent of als onderzoeker tegen zulke lokale obstakels aan? In mijn ogen kan de theorie van instrumentatie daarvoor een geschikt perspectief bieden. Wat daarover eerder<sup>4</sup> in de *Nieuwe Wiskrant* heeft gestaan, laat zich als volgt samenvatten.

Bij de instrumentatie van computeralgebra gaat het erom dat leerlingen leren het gereedschap, in dit geval het CAS, te gebruiken als een zinvol instrument. Dat betekent dat er zogenaamde instrumentatieschema's worden opgebouwd, die bruikbaar zijn voor een bepaalde klasse van veel voorkomende problemen. Zo'n instrumentatieschema heeft twee kanten: een technische en een conceptuele kant. De technische kant heeft betrekking op de bediening van het pakket, op zaken als navigatie, syntax en oplostechieken. De conceptuele kant betreft het inzicht van de leerling, de mentale voorstellingen die hij heeft van de wiskundige objecten en procedures waarmee wordt gewerkt. De clou is nu dat die technische en die inzichtelijke kant met elkaar verbonden zijn en elkaars ontwikkeling kunnen stimuleren. Instrumentatie komt dan neer op het opbouwen van schema's van technieken en concepties die met elkaar verweven zijn. Een gevolg daarvan is dat obstakels ook conceptuele hiaten aan het

licht kunnen brengen en dat aandacht voor obstakels niet alleen een technisch karakter kan hebben.

In het voorbeeld van figuur 1, het herleiden van  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 1$ , is sprake van zo'n samenspel: het uitvoeren van een substitutie is een techniek, maar het bedenken dat  $x+y$  een factor zou kunnen zijn is een mentale actie.

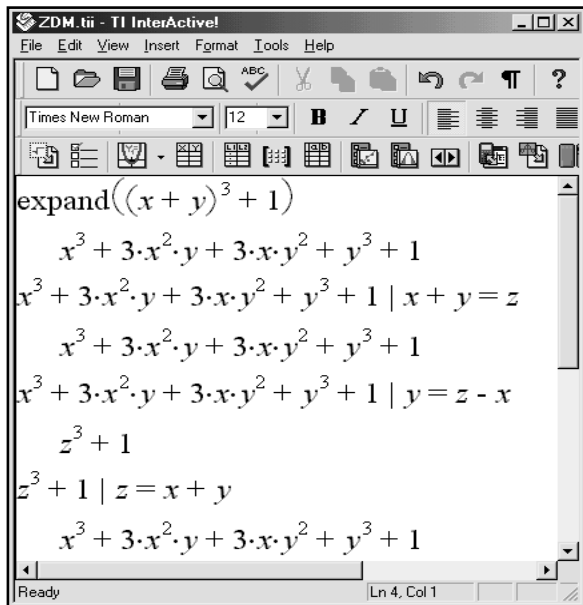


fig. 2 Substitutie in TI-Interactive

In dergelijke situaties proberen leerlingen soms ineens  $z=x+y$  te substitueren. In TI-Interactive (zie figuur 2) heeft dit geen effect. Zo'n poging wijst enerzijds op een gebrek aan technische beheersing van het substitueren en anderzijds op een beperkt inzicht: omdat bij substitutie één variabele wordt vervangen door iets anders, moet de opdracht wel de vorm *variabele = uitdrukking* hebben. Weer de verwevenheid tussen techniek en concept dus. De laatste substitutie van  $z=x+y$  in  $z^3 + 1$  in figuur 2 geeft overigens niet het verwachte antwoord  $(x+y)^3 + 1$  vanwege de automatische simplificatie van TI-Interactive. Dit toont aan dat de instrumentatie software-afhankelijk is. Was in dit voorbeeld Maple gebruikt, dan had het commando 'algsubs' de instrumentatie vereenvoudigd.

In het tweede schoolexperiment<sup>4</sup> leiden observaties van leerlingen vanuit het instrumentatieperspectief tot een drietal nieuwe lokale algebraïsche obstakels om toe te voegen aan de groeiende lijst:

8. *De beperkte conceptie van algebraïsche substitutie.*

Leerlingen hebben vaak een beeld van substitutie dat beperkt is tot het invullen van getallen. Dat beeld moet worden uitgebreid tot algebraïsche substitutie.

9. *De beperkte conceptie van algebraïsch oplossen.*

In veel computeralgebra omgevingen moet je expliciet aangeven naar welke variabele een vergelijking moet worden opgelost. Dat dwingt leerlingen om hun begrip van het algebraïsch oplossen aan te passen.

10. *De conceptie van een expressie als een proces, als een rekenvoorschrift, en niet als een object.*

Leerlingen beschouwen een expressie vaak als een compacte manier om een rekenproces, een serie handelingen weer te geven, en niet als een object, als een 'ding', dat bijvoorbeeld in een andere vergelijking gesubstitueerd kan worden.

De theorie van instrumentatie biedt dus een manier om tegen dergelijke obstakels aan te kijken: van een obstakel is sprake wanneer de technische en de conceptuele kant van een instrumentatieschema niet in evenwicht zijn, ofwel omdat de techniek niet gekoppeld is aan adequaat inzicht en betekenis, ofwel omdat de technische vaardigheid ontbreekt om een conceptueel idee uit te voeren. Als docent is het van belang te weten aan welke kant van de dimensie techniek – concept het probleem zit, voor het kan worden aangepakt.

## De driehoek scherm – papier – hoofd

Een tweede manier om tegen obstakels aan te kijken is die van de driehoek scherm – pen – papier. Bij instrumentatie staat de relatie tussen de technieken in de computeralgebra omgeving en de mentale objecten in het hoofd van de leerling centraal. Leerlingen die leren werken met een CAS hebben echter meestal al een ruime ervaring met technieken in een ander medium, namelijk 'met-de-hand' technieken met pen-en-papier. Dat is voor hen het belangrijkste referentiekader, dus het is goed om te kijken hoe de nieuwe 'CAS-technieken' en de oude 'pen-en-papier' technieken zich verhouden.

Idealiter vormen de mentale conceptie, de papier-en-pen techniek en de CAS-techniek drie zijden van een geïntegreerde driehoek die elkaar verstevigen: hoofd, papier en scherm werken samen en vullen elkaar aan. Voor wat betreft de verhouding tussen CAS en papier-en-pen gelden er twee voorwaarden: de CAS-techniek en de papier-en-pen techniek moeten congruent zijn, en de CAS-techniek moet transparant zijn voor de leerling.

Met congruentie wordt hier bedoeld dat eenzelfde techniek in beide media kan worden uitgevoerd en dat dan zichtbaar is dat het twee verschillende implementaties betreft van dezelfde techniek, in plaats van twee verschillende technieken die niets met elkaar te maken hebben. Dit vraagt bijvoorbeeld om syntax en notatie in de computeralgebra omgeving die 'natuurlijk' is en aansluit bij de papier-en-pen ervaring. Dat betekent niet dat de verschillen tussen de twee media worden ontkend; het is wel belangrijk dat leerlingen zich bewust zijn van de flexibiliteit van papier-en-pen en van de kracht van computeralgebra.

Met transparantie wordt bedoeld dat de leerling in staat is om de manier waarop het CAS een techniek uitvoert te doorzien op basis van zijn papier-en-pen ervaring. Hierboven is al aangegeven dat dit een zwak punt is van veel computeralgebra systemen, die zich als 'black box' voordoen.

Als aan de voorwaarden van congruentie en transparantie is voldaan, kunnen leerlingen de technieken in de twee media met elkaar in verband brengen. Dan vindt bijvoorbeeld transfer plaats tussen de probleemaanpak van de papier-en-pen omgeving naar die van het CAS, of worden CAS-notaties overgenomen op papier. De volgende twee voorbeelden uit het derde schoolexperiment illustreren de interferentie tussen de technieken in de twee media.

In de eerste observatie probeert een leerling uit vwo-4 het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{aligned}x \cdot y &= 540 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 39\end{aligned}$$

In de computeralgebra omgeving geeft deze leerling er de voorkeur aan om eerst in beide vergelijkingen  $y$  te isoleren, dus beide te herschrijven in de vorm  $y = \dots$ , terwijl het sneller is om  $y$  in één van de twee vergelijkingen te isoleren en het resultaat in de andere te substitueren. Ik vermoed dat dit gedrag in de computeralgebra omgeving voortkomt uit gewoonten uit de pen-en-papier omgeving: in de schoolboeken zijn grafieken vaak de context voor vergelijkingen, en dan zijn de vergelijkingen vaak al geïsoleerd in  $y$ . Overigens kunnen veel computeralgebra systemen zo'n stelsel ook ineens oplossen, maar dat wist deze leerling nog niet.

Het tweede voorbeeld betreft een leerling die na afloop van een TI-89 experiment met pen-en-papier een stelsel vergelijkingen probeert op te lossen.

$$\begin{aligned}y &= a - x \\ x^2 + y^2 &= 10 \quad | \quad y = a - x\end{aligned}$$

fig. 3 Transfer van notatie

Zoals in figuur 3 te zien is, gebruikt deze leerling de verticale streep als symbool voor substitutie, een notatie die is overgenomen van de TI-89.

De transparantie en congruentie die voorwaarde zijn voor het integreren van CAS-techniek en papier-en-pen techniek worden niet altijd gerealiseerd. Het werken met haakjes in het CAS is bijvoorbeeld een kwestie die leerlingen in verwarring kan brengen. Als wordt ingevoerd  $(x+5)/3$ , dan moeten er in veel computeralgebra pakketten haakjes om de teller worden gezet. Na invoer verschijnt de uitdrukking dan echter tweedimensionaal en zonder haakjes op het scherm. In feite kan de horizontale deelstreep in

$$\frac{x+5}{3}$$

beschouwd worden als een manier van haakjes zetten, maar dat realiseren veel leerlingen zich niet. Op dezelfde manier verdwijnen de haakjes die nodig zijn bij het invoeren van een wortel van een expressie.

Samengevat is de integratie van mentale conceptie, papier-en-pen techniek en CAS-techniek een belangrijke factor in het leren van wiskunde in een computeralgebra

omgeving. Het black box karakter van het CAS, genoemd in obstakel 7, kan de beoogde transparantie in de weg staan. Voor een docent kan het verhelderend zijn om zich af te vragen of een CAS-probleem van een leerling voortkomt uit gebrek aan congruentie met de papier-en-pen omgeving.

Het punt van de congruentie leidt tot een nieuw, globaal obstakel bij het werken met computeralgebra:

**11. De moeilijkheid van transfer tussen CAS-techniek en papier-en-pen techniek vanwege het gebrek aan congruentie tussen de technieken in beide media.**

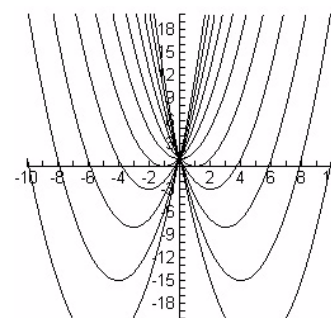
Wanneer de syntax of de notatie van het CAS zo afwijkt van wat met papier-en-pen gebruikelijk is, staat dit de samenhang tussen mentaal beeld, CAS-techniek en papier-en-pen techniek in de weg.

## Praktijkvoorbeeld

Hierboven is een onderscheid gemaakt tussen globale en lokale obstakels waar leerlingen mee te maken krijgen als ze wiskunde leren in een computeralgebra omgeving. Deze paragraaf bevat een lange observatie, die illustreert hoe obstakels uit beide categorieën door elkaar heen kunnen lopen. Het gaat om een leerling uit vwo-4, Maria, die gedurende enkele weken met de TI-89 symbolische rekenmachine werkt. Voorafgaand aan de opgave in figuur 4 hebben Maria en haar klasgenoten de waarde van een parameter verschoven met behulp van een schuifbalk. Op die manier is het effect van de dynamische verandering van de parameter op de grafiek onderzocht. Een van de leerlingen formuleert het zo: de parameter is 'de letter die de plaats van de parabool bepaalt'.

Hieronder staat een bundel grafieken bij de familie  $y = x^2 + b \cdot x + 1$ .

We letten speciaal op de toppen van de parabolen.



- Teken alle toppen in het plaatje en verbind ze met elkaar. Wat voor soort kromme lijkt je zo te krijgen?
- Druk de coördinaten van de top van een 'familielid' uit in  $b$ . Tip: de top ligt midden tussen twee nulpunten, als die er tenminste zijn.
- Bepaal de vergelijking van de kromme door de toppen van de bundel en teken ter controle enkele grafieken.

fig. 4 Opgave over de kromme door de toppen

Bij vraag **a** denkt Maria dat ze de bundel na moet maken op het scherm van de TI-89. Dat lukt pas nadat verschil-

lende kleine moeilijkheden (verkeerde letter ingetypt, verkeerde mintoets bij het instellen van het kijkvenster, geschikte waarden kiezen voor de parameter) zijn overwonnen. Allemaal kleine, lokale obstakels. Als de bundel uiteindelijk verschijnt, is Maria erg trots en tevreden:

Maria: Hij doet het! Dit is een revolutie in mijn wiskunde-rekenmachinedinges.

Bij vraag **b** voert Maria in: `solve(x^2+b*x+1,x)`. Dat geeft een foutmelding omdat '=' na de expressie ontbreekt. Sommige andere computeralgebra pakketten tillen daar overigens niet zo zwaar aan en zouden deze invoer accepteren. In dit geval een instrumentatieprobleem met `solve`, obstakel 9.

Maria begint genoeg te krijgen van foutmeldingen:

Maria: Hij haat mij, die rekenmachine.

Dan probeert ze `solve(x^2+b*x+1,x)`. Ze lijkt iets te willen substitueren (obstakel 8). Dan verandert ze de  $x$  in een  $b$  maar dat werkt evenmin: `solve(x^2+b*x+1,b)`. Een voorbeeld van rolverwarring, obstakel 3. De moeilijkheden met oplossen en substitueren overwint ze niet en de les is voorbij. De volgende les vergeet Maria eerst het vermenigvuldigingsteken tussen de  $b$  en de  $x$ :  $Y1=x^2+bx+1$ .

Maria: O dat moet keer. Ja dat heb ik altijd, ik doe het nooit helemaal goed.

Ze repareert de invoer en krijgt weer de bundel grafieken op haar scherm. Dan wil ze opnieuw de nulpunten berekenen. Ze voert in `solve(x^2+b*x+1=y,b)`, dus een  $y$  in plaats van 0 en oplossen naar  $b$  in plaats van naar  $x$ .

Dat geeft:  $b = \frac{-(x^2 - y + 1)}{x}$ .

Ze richt zich kennelijk op  $b$  en houdt de rollen van de verschillende letters niet goed uit elkaar (obstakel 4). Ze geeft  $b$  de waarde 5 (obstakel 3), en lost dan op naar  $x$ , wat een uitdrukking voor  $x$  geeft in termen van  $y$ , die niet veel helpt.

Maria: Ik snap het gewoon niet, ik ben gewoon te dom. Maar ik heb ook geen  $y$  natuurlijk.

Hier speelt het globale obstakel van het onvermogen om een oplossingsstrategie uit te werken in de computeralgebra omgeving (obstakel 6). Het is overigens de vraag of Maria wel zo'n duidelijke strategie in haar hoofd heeft. Met hulp van de observator krijgt Maria in de gaten dat de  $y$ -waarde 0 is, en dat leidt tot de algemene formule voor de nulpunten uitgedrukt in de parameter  $b$  (figuur 5).

fig. 5 Nulpunten in termen van de parameter met de TI-89

Maria schrijft dit over in haar schrift, maar ze leest de formule niet helemaal goed, want het wortelteken loopt in haar schrift te ver door (zie figuur 6).

fig. 6 Overschrijven van de oplossing in het schrift

Nu Maria de algemene oplossing heeft, wil ze toch graag concrete waarden voor  $b$  voor ze verder gaat:

Maria: Maar je moet dan toch een waarde voor  $b$  invullen?

En, even later:

Maria: Maar daar heb je toch niks aan als het tussen twee nulpunten ligt als je het niet uit kunt rekenen?

Hier komen de obstakels naar boven die te maken hebben met de voorkeur voor numerieke antwoorden (obstakel 2) en met het accepteren van expressies als antwoord (obstakel 10). Weer met wat hulp van de observator is Maria bereid met de expressies verder te werken. Met wat moeite berekent ze het midden van de twee nulpunten en vindt zo dat de  $x$ -coördinaat van de top van de parabool gelijk is aan  $-b/2$ . Daar is Maria heel tevreden mee:

Maria: Nou dat heb ik toch wel goed gevonden dan.

Om nu ook de  $y$ -coördinaat van de top uit te rekenen, substitueert Maria  $x = -b/2$ , maar daarvoor gebruikt ze het `solve`-commando `solve(y=-0.5*b^2+b*-0.5*b+1,y)`, dus obstakels 8 en 9. Ze vergeet de haakjes om  $0.5*b$ , zodat alleen  $b$  wordt gekwadeerd. Het resultaat,  $y = 1 - b^2$ , is dan ook niet correct. Over het verschil tussen 0.5 en  $1/2$  maakt Maria zich geen zorgen (obstakel 2).

Bij vraag **c** ten slotte schrijft Maria in haar schrift dat de top coördinaten  $(1/2 b, 1-b^2)$  heeft en dat de vergelijking van de kromme door de toppen is  $y = (1 - b^2) \cdot x - \frac{1}{2}b$ . Mogelijk met hulp van haar buurvrouw verandert ze dat later in de correcte formule  $y = 1 - x^2$ .

Terugkijkend op de werkwijze van Maria valt op dat een aantal van de geïdentificeerde obstakels hierin te herkennen is, en dat die elkaar afwisselen en wellicht ook versterken. Mijn indruk is bijvoorbeeld dat lokale obstakels rond het oplossen van vergelijkingen en de rollen van de verschillende variabelen het Maria moeilijk maken om de globale lijn van het oplossingsproces aan te houden. Overigens is de vraag of Maria die grote lijn van tevoren wel helder genoeg voor ogen had.

Verder blijken Maria's moeilijkheden vaak een samenspel te zijn van begripsmatige en technische problemen. De verwarring tussen oplossen en substitueren bijvoorbeeld geeft aan dat ze enerzijds de technische kant van deze opdrachten niet geheel beheerst, maar ook dat ze zich daarbij niet altijd de juiste voorstelling maakt.

Wat opvalt in Maria's commentaar is dat haar gevoelens van succes en frustratie vrij heftig zijn. Dat kan natuurlijk



een karaktereigenschap zijn van deze specifieke leerling, maar observaties als deze zijn in mijn ogen aanleiding om de obstakels van leerlingen serieus te nemen. Behalve de reeds gesignaleerde obstakels en hun verwevenheid, is er een nieuw globaal obstakel naar voren gekomen:

#### 12. Het interpreteren van de uitvoer van het CAS.

Leerlingen hebben vaak moeite om de uitvoer van het CAS te begrijpen en te interpreteren. Zelfs het overschrijven van een antwoord kan tot fouten leiden. Ook foutmeldingen van het CAS worden vaak niet begrepen.

## Obstakels zijn kansen

In het bovenstaande is een aantal obstakels geïdentificeerd waarmee leerlingen te maken kunnen krijgen als ze wiskunde leren in een computeralgebra omgeving. Deze laten zich verdelen in globale en lokale obstakels. Bij de laatste categorie benadrukt het idee van instrumentatie de relatie tussen machinetechniek en wiskundige conceptie. Dat onderscheid kan van pas komen bij het omgaan met problemen in de klas. Verder kan behalve de machinetechniek en de mentale conceptie ook de papier-en-pen technieken een obstakel mede veroorzaken. De congruentie tussen beide soorten technieken laat soms te wensen over, evenals de transparantie van het computeralgebra gereedschap.

Bij de lijst van geïdentificeerde obstakels zijn enkele kanttekeningen te maken. Om te beginnen pretendeert deze opsomming niet om volledig te zijn; het gaat om obstakels die zich in de klas regelmatig voordeden, maar ongetwijfeld zijn er 'hobbels' die ontbreken. Verder is de collectie van lokale obstakels vooral tot stand gekomen op basis van mijn belangstelling voor algebra. Mogelijk zal observatie vanuit een ander wiskundig domein tot andere obstakels leiden. De lokale obstakels hebben met elkaar gemeenschappelijk dat ze zowel een technische als een conceptuele kant hebben.

Wat betekenen de bevindingen nu voor de praktijk in de klas? Naar mijn idee zijn er twee belangrijke redenen om de geconstateerde obstakels bij het gebruik van computeralgebra in de klas serieus te nemen. De eerste reden vormt de al genoemde gevoelens van ergernis en frustratie die de obstakels bij leerlingen kunnen veroorzaken. Natuurlijk hoort een zekere mate van frustratie bij het leren van wiskunde (en van andere zaken), maar een teveel ervan kan improductief worden. Het niet onderkennen van de obstakels in de klas kan dit effect versterken.

De tweede en wellicht belangrijkere reden om obstakels in de klas serieus te nemen, is dat ze mogelijkheden bieden tot leren. Omdat obstakels vaak een technisch én een conceptueel aspect kennen, zal aandacht voor het overwinnen van een obstakel het technische niveau ontstijgen

en leiden tot verdere begripsvorming. Eventuele misconcepties of hiaten in het inzicht kunnen aan de hand van de instrumentatieproblemen bij het gebruik van computeralgebra aan het licht komen. Zeker als we constateren dat deze obstakels vaak niet worden veroorzaakt door het gebruik van computeralgebra zelf, maar een conceptuele achtergrond hebben die zich in de computeralgebra omgeving manifesteert, ligt het voor de hand om het signaleren van obstakels op deze manier aan te grijpen. Het zoeken naar de werkelijke achtergrond van een obstakel, het bepalen van de logica achter de syntax van een commando, het ontdekken van de betekenis van de uitvoer, het ontwerpen van een strategie die haalbaar is in de computeralgebra omgeving, dergelijke activiteiten zijn kansen voor leren die zowel in individuele begeleiding als in klassengesprekken kunnen worden uitgebuit. Als dat goed gebeurt, kan dit naar mijn overtuiging een positief effect hebben op conceptuele ontwikkeling en wiskundige attitude.

De houding van de docent zou er naar mijn idee dus een moeten zijn die de obstakels niet negeert, maar ze tot onderwerp maakt van klassengesprekken waarin de betekenis van de technieken en concepten wordt ontwikkeld. De wiskundige ideeën achter de obstakels worden geëxpliciteerd en de computeralgebra omgeving fungeert als inspirerend object van studie in plaats van als 'orakel'. Op deze manier kunnen de obstakels veranderen in kansen voor leren.

*Dit artikel is een bewerking van 'Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities', dat geaccepteerd is voor publicatie in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol 34(5), najaar 2002. Het komt voort uit het onderzoek 'Algebra leren in een computeralgebra omgeving' dat mogelijk gemaakt is door NWO, projectnummer 575-36-03E.*

*Paul Drijvers, Freudenthal Instituut*

## Noten

- [1] Koolstra, G. (2002). Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning. *Nieuwe Wiskrant*, 22(1), 9-11.
- [2] Giessen, C. van de (2002). Computeralgebra in 4 vwo, verslag van een experiment. *Nieuwe Wiskrant*, 22(1), 25-29.
- [3] Drijvers, P. (1999). De symbolische rekenmachine in de wiskundeles. *Nieuwe Wiskrant*, 18(3), 34-38.
- [4] Drijvers, P. & O. van Herwaarden (2000). Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra. *Nieuwe Wiskrant*, 20(1), 38-43.
- [5] Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(3), 189-209.

# Wat te bewijzen is

## Rubriek

En als er breuken zijn ... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer. Aldus mijmert Multatuli's geesteskind Woutertje Pieterse in het kantoor van zijn toekomstige bazen Ouwetijd & Kopperlith. Woutertje moet welhaast aan het optellen (of aftrekken) van breuken hebben gedacht. Bij het vermenigvuldigen heeft het *gelijknamig* maken van breuken weinig zin; bij het delen van breuken wél, al wordt dat voorzover ik weet weinig toegepast en zal dit niet in het rekenboek van Strabbe hebben gestaan. Of de Woutertjes anno 2002 weten wanneer en hoe breuken gelijknamig gemaakt worden, daaraan kun je twijfelen. Zeker als het breuken met variabelen betreft. Want wie kijkt er nog gek op als een leerling een vorm zoals

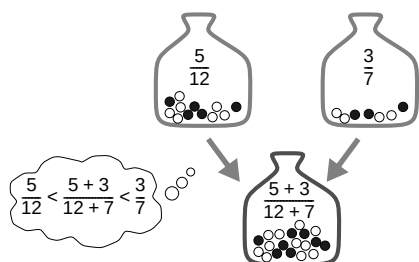
$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \text{ achteloos herleidt tot: } \frac{3}{2x}?$$

Daar komt dan een rode streep door; maar in plaats van voorschrijven hoe het dan wel moet, zou de leraar ook eens met de klas kunnen onderzoeken wat de betekenis is van het naïef optellen van tellers en noemers.

Uitgaande van bijvoorbeeld  $\frac{1}{2}$  en  $\frac{1}{3}$  komt er  $\frac{2}{5}$  en de waarde van die laatste breuk ligt tussen de waarden van de oorspronkelijke breuken. Bij andere voorbeelden gebeurt hetzelfde en de prikkelende vraag rijst dan of er altijd een *tussenbreuk* uitkomt en zo ja, waarom dan wel?

Ik gebruik een nieuw voorbeeld als paradigma.

De breuk  $\frac{5}{12}$  is een beetje kleiner dan de breuk  $\frac{3}{7}$ ; ze zijn immers respectievelijk gelijk aan  $\frac{35}{84}$  en  $\frac{36}{84}$ , zoals Woutertje Pieterse zou hebben kunnen bevestigen. Dat betekent dat als je een bal trekt uit een vaas met 12 ballen waarvan er 5 zwart zijn, de kans op een zwarte bal een pietsje kleiner is dan bij een vaas waarin 3 van de 7 ballen zwart zijn. Voeg je nu de inhoud van beide vazen samen in een nieuwe vaas, dan zal de kans op zwart ten opzichte van de eerste vaas iets groter worden en ten opzichte van de tweede vaas iets kleiner. Dat is intuïtief duidelijk.



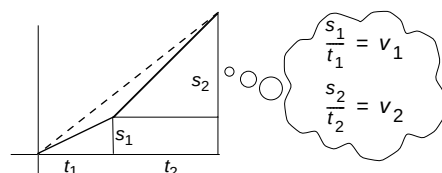
Een formeel bewijs is bijvoorbeeld dit: stel  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  met  $a, b, c$  en  $d > 0$ . Met hulp van de 'algemene noemer'  $bd$  is dan te zien dat  $ad < bc$ . Vergelijk nu  $\frac{a}{b}$  met  $\frac{a+c}{b+d}$ . Er geldt:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} < \frac{ab+bc}{b(b+d)} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{a+c}{b+d}$$

Geheel analoog volgt:  $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

Geen speld tussen te krijgen, wat je noemt een hard bewijs. Toch denk ik dat er mensen zijn die zich gemakkelijker laten overtuigen door die vazen met balletjes.

Er is nog een context die heel overtuigend is. Bekijk de tijd-afstand-grafiek van bijvoorbeeld een fietsrit:



De eerste  $t_1$  minuten van de rit werd met een constante snelheid  $v_1$  gefietst; in de volgende  $t_2$  minuten was de (constante) snelheid groter:  $v_2$ .

De gemiddelde snelheid over de gehele rit is duidelijk meer dan  $v_1$  en minder dan  $v_2$ , zoals ook in het plaatje te zien is (helling stippellijn). Hoe bereken je die gemiddelde snelheid? Wel: totale weg gedeeld door totale tijd. Zo wordt opnieuw duidelijk dat:

$$\frac{s_1}{t_1} < \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} < \frac{s_2}{t_2}$$

Deze context maakt ook onmiddellijk duidelijk dat de waarde van een tussenbreuk afhankelijk is van de representatie van zijn twee voortbrengers. Als er zeg twee keer zo lang wordt doorgefietst met dezelfde constante snelheid  $v_2$ , verandert de breuk  $\frac{s_2}{t_2}$  niet van waarde, maar de tussenbreuk (= gemiddelde snelheid) wordt groter.

Aardig is het nog om de twee speciale gevallen  $t_1 = t_2 = t$  en  $s_1 = s_2 = s$  te bekijken. In het eerste geval geldt:

$$v_{gem} = \frac{s_1 + s_2}{t + t} = \frac{1}{2} \left( \frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t} \right) = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Dus bij gelijknamige breuken is de 'tussenbreuk' het rekenkundige gemiddelde van zijn voortbrengers.

In het tweede geval geldt:

$$v_{gem} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)}$$

In het geval van gelijke tellers is de tussenbreuk blijkbaar gelijk aan het *harmonisch* gemiddelde van de voortbrengende breuken. Het harmonisch gemiddelde is kleiner dan (of gelijk aan) het rekenkundig gemiddelde. Denk aan een fietsrit met heen wind mee en terug wind tegen. De gemiddelde snelheid van de totale rit is dan lager dan het (rekenkundig) gemiddelde van de snelheden, om de doodeenvoudige reden dat je langer (in tijd) met de lagere snelheid fietst.

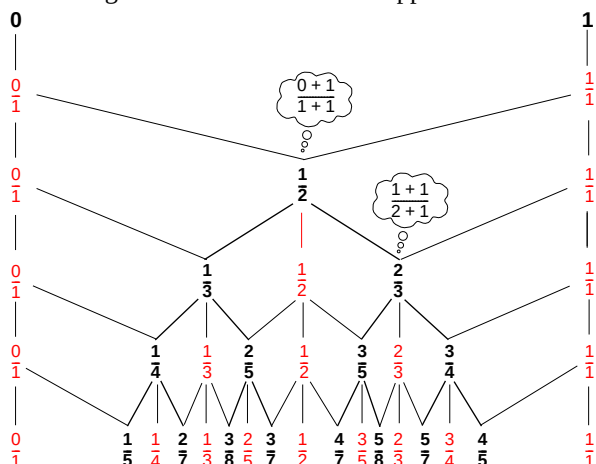
## Stamboom van breuken

Het 'naïef optellen' van breuken leidt tot een (oneindige) stamboom van de rationale getallen tussen 0 en 1.

De 'oerouders' 0 en 1 worden geschreven als  $\frac{0}{1}$  en  $\frac{1}{1}$ .

Die brengen als tussenbreuk  $\frac{1}{2}$  voort.

Uit  $\frac{0}{1}$  en  $\frac{1}{2}$  wordt  $\frac{1}{3}$  geboren, terwijl  $\frac{1}{2}$  en  $\frac{1}{1}$  de breuk  $\frac{2}{3}$  voortbrengen. Enzovoort. Na vier stappen komt er:



Deze stamboom heeft veel interessante eigenschappen waarvan ik er hier vier onder de loep neem:

1. Op elke regel staat een van klein naar groot geordend rijtje van breuken.
2. Als  $\frac{y}{x} < \frac{y^*}{x^*}$  burens zijn op een regel, dan  $xy^* - yx^* = 1$ .
3. Alle voorkomende breuken (na  $\frac{0}{1}$  en  $\frac{1}{1}$ ) zijn onver-eenvoudigbaar.
4. Alle bestaande en niet te vereenvoudigen breuken tus-sen 0 en 1 komen in de stamboom voor.

Eigenschap 1 volgt onmiddellijk uit het feit dat er steeds *tussenbreuken* worden ingelast.

Voor het bewijs van de andere eigenschappen kies ik het instrument van de lineaire algebra.

Een breuk  $\frac{y}{x}$  (waarbij  $x$  en  $y$  geheel) correspondeert met een 'roostervector'  $(x, y)$  in het Oxy-vlak.

Het getal  $xy^* - yx^*$  is de zogenaamde determinant van de vectoren  $(x, y)$  en  $(x^*, y^*)$ , in de klassieke notatie:

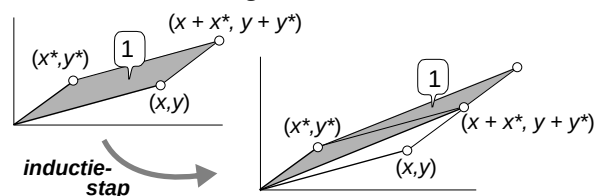
$$\begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix}$$

Het bewijs van eigenschap 2 is een zaak van volledige inductie. Om te beginnen is de stelling juist voor het geval  $(x, y) = (1, 0)$  en  $(x^*, y^*) = (1, 1)$ .

De inductiestap volgt gemakkelijk uit:

$$\begin{vmatrix} x & x+x^* \\ y & y+y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+x^* & x^* \\ y+y^* & y^* \end{vmatrix}$$

maar is ook meetkundig te zien.



Eigenschap 3 volgt uit 2. Als  $\frac{y}{x} = \frac{kv}{ku}$  en  $\frac{y^*}{x^*}$  burens in de boom zijn,  $k$  geheel, dan geldt:

$$1 = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kv & x^* \\ ku & y^* \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} v & x^* \\ u & y^* \end{vmatrix}$$

dus  $k$  is een deler van 1.

Ten slotte het bewijs dat elk rationaal getal een plekje in de boom krijgt. Stel dat  $\frac{t}{n}$ , met  $n, t$  onderling ondeelbare positieve gehele getallen, niet in de boom optreedt. Die breuk kan dan stapsgewijs nauwer worden ingeklemd tus-sen buurbreuken uit de stamboom.

Stel dat zo na een aantal stappen wordt gevonden:

$$\frac{y}{x} < \frac{t}{n} < \frac{y^*}{x^*}$$

Vector  $(n, t)$  is lineair afhankelijk van  $(x, y)$  en  $(x^*, y^*)$ :

$$(n, t) = \lambda \cdot (x, y) + \mu \cdot (x^*, y^*)$$

met  $\lambda$  en  $\mu$  rationaal.

Nu geldt (onder meer volgens eigenschap 2):

$$\begin{vmatrix} x & n \\ y & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \lambda x + \mu x^* \\ y & \lambda y + \mu y^* \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

Gevolg:  $\mu$  is geheel en omdat  $\frac{y}{x} < \frac{t}{n}$  ook  $\mu > 0$ .

Hetzelfde geldt voor  $\lambda$ .

Is nu  $\lambda = \mu = 1$ , dan  $n = x + x^*$  en  $t = y + y^*$  en verschijnt de breuk  $\frac{t}{n}$  in de volgende regel van de boom.

Is  $\lambda > 1$  of  $\mu > 1$ , dan:  $n > x + x^*$  en  $t > y + y^*$  dus:

$$n + t > x + x^* + y + y^*$$

De breuk  $\frac{t}{n}$  kan nu nauwer worden ingeklemd tussen  $\frac{x+x^*}{y+y^*}$  en een van beide breuken  $\frac{y}{x}$  en  $\frac{y^*}{x^*}$ .

Vervolgens kan de vector  $(n, t)$  als lineaire combinatie van de nieuwe buurvectoren worden geschreven.

De som van de tellers en noemers van het nieuwe paar buurbreuken is op zijn minst 1 groter dan de vorige som  $x + x^* + y + y^*$ .

Als  $\frac{t}{n}$  niet na een zeker aantal stappen in de boom zou verschijnen, zou dit proces van inklemmen nooit eindigen. Dat is echter in tegenspraak met het feit dat de (bij elke stap groeiende) som van de tellers en noemers van de inklemmende breuken steeds kleiner zou moeten zijn dan het vaste getal  $n + t$ .

De boom waarvan hier is aangetoond dat zij alle rationale getallen tussen 0 en 1 genereert (en via de reciproque breuken ook alle rationale getallen  $> 1$ ) dateert uit ongeveer 1860 en draagt de naam van zijn ontdekkers Stern (een Duits wiskundige) en Brocot (een Franse klokkenmaker). Een behandeling van de boom en daaruit voortvloeiend een opmerkelijke binaire voorstelling van de reële getallen (Minkowski, 1904) is te vinden in het boek *Concrete Mathematics for Computer Science*, auteurs: R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Addison-Wesley 1994.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl

De softwareomgeving Coach maakt het mogelijk om op digitale videoclips metingen te verrichten. De filmpjes kunnen ook door leerlingen zelf met een webcam opgenomen worden. **André Heck**, als onderzoeker bij het ontwerp van Coach voor wiskundeonderwijs betrokken, geeft in dit artikel een voorbeeld van een praktische opdracht die zonder dit gereedschap moeilijk, zo niet onmogelijk, te realiseren is.

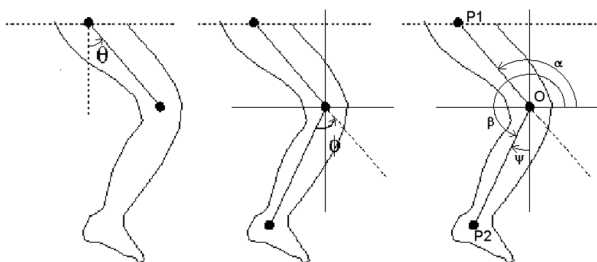
## Stilstaan bij lopen

### De opdracht volgens twee leerlingen

We geven onverkort de inleiding uit het verslag van Gerda en Vianne, omdat dit een aardig beeld geeft van hoe leerlingen de opdracht begrepen hebben en dit in eigen woorden opschrijven:

‘Dit onderzoek gaat over lopen. Een kind leert lopen rond zijn eerste jaar, daarna wordt lopen de gewoonste zaak van de wereld. Daarom denken de meeste mensen niet echt meer na over lopen, terwijl het toch een hoogst interessant proces is. Ieder mens loopt namelijk weer anders en ieder mens kan op heel veel verschillende manieren lopen. Je kunt wandelen, rennen, sluipen of, om nog maar eens een willekeurig voorbeeld te noemen, lopen met een boek op je hoofd. Aan je manier van lopen is soms ook te zien hoe je je voelt. Als je sloffend loopt ben je misschien niet zo vrolijk of ben je moe, als je heel verend loopt ben je juist weer heel blij.

Lopen wordt door verschillende vakgebieden onderzocht: geneeskunde, sportwetenschappen, filmindustrie en persoonsidentificatie. Al deze vakgebieden hebben op hun eigen manier inzicht nodig in de menselijke gang. In het project ‘stilstaan bij lopen’ hebben wij het loopproces van mensen geanalyseerd door middel van videometingen in het programma Coach. Het uiteindelijke doel was om twee soorten lopen te vergelijken. Wij hebben gekeken naar sluipen en lopen met een boek op je hoofd. Van het lopen met een boek op je hoofd hebben we een wiskundige analyse gemaakt. We hebben de heuphoek en de kniehoek gemeten. Omdat hoek  $\theta$  en hoek  $\pi$  niet rechtstreeks gemeten konden worden, moesten we zelf hoek  $\alpha$  en  $\beta$  meten, door de knie als oorsprong te nemen en de heup en enkel als meetpunten 1 en 2.



Met formules konden we toen de heuphoek en de kniehoek tegen elkaar uitzetten. De grafiek die toen ontstond heet een cyclogram. Daarna hebben we ons cyclogram vergeleken met dat van Kah-Kih, die een analyse had gemaakt van sluipend lopen. We vonden het wel moeilijk om te begrijpen, waar dat verschil nou precies in lag, maar uiteindelijk is dat ons toch gelukt.’

### De opdracht in de ogen van de auteurs

We citeren uit de inleiding op het lesmateriaal, dat bestemd is voor vwo5-leerlingen met N&G profiel:

‘In deze praktische opdracht maak je kennis met enkele kinematische facetten van ganganalyse door middel van videometing in Coach. Een van de zaken die aan de orde komen is hoe je arm- en beenbewegingen tijdens het lopen met goniometrische functies kunt beschrijven. Ook kijk je naar het verband tussen de bewegingsuitslag van het kniegewricht en die van het heupgewricht tijdens een loopbeweging; de bijpassende grafiek heet het heup-knie cyclogram. In het laatste onderdeel van de opdracht neem je met een webcam een zelfgekozen loopbeweging op, construeer en analyseer je het bijpassende heup-knie cyclogram, en vergelijk je dit met een cyclogram van een afwijkende loopbeweging (bij voorkeur met een cyclogram van een klasgenoot). Alleen van dit laatste onderdeel verwachten we een verslag ter beoordeling.’

We denken dat het voor Gerda en Vianne duidelijk was wat er van hen verwacht werd. In de prettig leesbare inleiding van hun verslag hebben zij opgeschreven wat de opdracht volgens hen inhield en wat ze gedaan hebben. Ook wordt duidelijk dat voor hen het vergelijken van cyclogrammen van twee verschillende bewegingen vooral inhoudt het opsporen en begrijpen van de verschillen; overeenkomsten in de grafieken zijn geen aandachtspunt.

### Het lesmateriaal

Het lesmateriaal is bestemd voor vwo5-leerlingen die al enige ervaring hebben met Coach en met het doen van videometingen. Het doel is om leerlingen te laten

- werken met echte data, verzameld uit een videoclip, en hierop wis- en natuurkundige modellen toe te laten passen

- ervaren dat een grafiek meer is dan een mooi plaatje alleen, maar juist veel informatie kan verschaffen over het fenomeen dat ze bestuderen
- oefenen met en verbeteren van ICT-vaardigheden, in het bijzonder vaardigheden in het maken van een videoclip en het doen van metingen hierop
- omgaan met reeds verworven kennis van wis- en natuurkunde in praktisch werk
- kennismaken met hedendaags wetenschappelijk onderzoek, inclusief de gangbare terminologie en onderzoeksmethoden.

Het lesmateriaal bestaat uit vier activiteiten:

### 1. Wiskundige analyse van menselijke gang

De twee centrale thema's zijn (i) de bepaling van stapgrootheden (zoals staplengte, stapfrequentie en gangsnelheid) en staptijdfactoren (bijvoorbeeld de tijdsduur van de standfase en zwaafase van een been en de bipedale contacttijd) aan de hand van een videoclip en (ii) het vinden van een geschikte kromme bij meetgegevens die via videometing vergaard zijn.

### 2. Zwaafase bij langzaam lopen

Lopen is een periodieke beweging: je zet de ene stap na de andere in een zekere regelmaat. In deze activiteit komt aan de orde hoe de bewegingen van ledematen goed met goniometrische functies beschreven kunnen worden. In deze activiteit wordt de zwaafase van een been bij langzaam lopen bestudeerd. De hoeken die dijbeen en scheenbeen ten opzichte van het bewegende assenstelsel met het kniegewricht als oorsprong maken, worden opgemeten. Experimenteel wordt naar een wiskundig verband gezocht. Een som van twee sinusgrafieken blijkt aardig te kloppen (zie de grafieken rechtsboven in de figuren 1, 4, 5 en 6). In natuurkundige zin betekent dit dat een periodiek aangedreven slinger een redelijk model is voor de beweging van het scheenbeen.

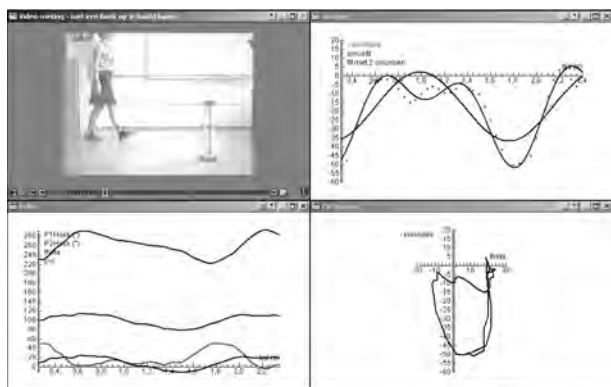


fig. 1 Resultaten van lopen met een boek op je hoofd

### 3. Schrede bij langzaam lopen

Deze activiteit is een vervolg op de vorige. Nu gaat het niet alleen meer over de zwaafase van een been, maar over de hele loopcyclus, inclusief de fase waarin

het been als standbeen fungeert. Ook nu blijkt een som van twee sinusgrafieken de beweging nog goed in wiskundige taal te beschrijven.

Veranderingen van hoeken van beensegmenten zijn niet onafhankelijk van elkaar. Hoe verder je bijvoorbeeld je dijbeen naar achteren strekt, des te kleiner is de maximale kniebuiging. Om een beter inzicht te krijgen in de bewegingen die dijbeen en scheenbeen ten opzichte van elkaar maken tijdens een schrede, worden de kniehoek en de heuphoek tegen elkaar in een grafiek uitgezet. Wiskundig gezien is dit niet meer dan een parameterkromme, die idealiter gesloten is. Figuur 2 is een voorbeeld van zo'n heup-knie cyclogram; het betreft een normale gang en is afkomstig uit een recent artikel (Goswami, 1998). Op de grafiek zijn punten gemarkeerd die bij een zeker moment in de loopbeweging horen (hielafzet, contact over de volle lengte van de voet van het standbeen, teenafzet, enzovoort).

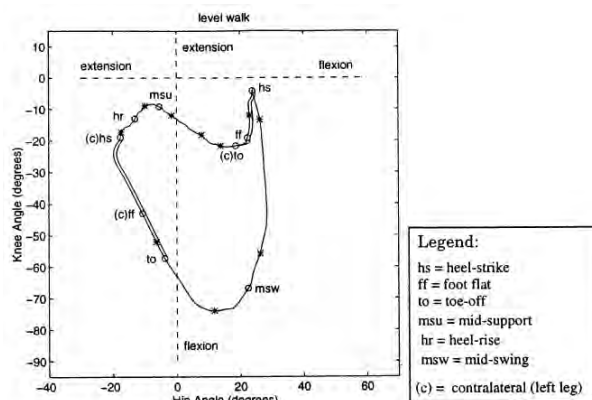


fig. 2 Cyclogram van normale gang

De vorm van een cyclogram hangt af van de aard van de beweging (zie figuur 3) en dit is wat leerlingen onderzoeken in de laatste opdracht.

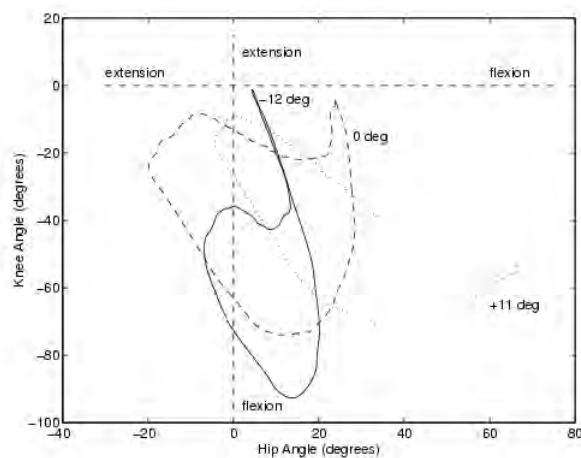


fig. 3 Cyclogrammen van normale gang op een vlakke ondergrond, op een hellend vlak omhoog en omlaag

#### 4. Analyse van een zelfgekozen gangproces

Met een webcam wordt een loopbeweging van een leerling gefilmd. Op de videoclip worden met behulp van Coach metingen gedaan om het heup-knie cyclogram te construeren. Leerlingen sporen de karakteristieke momenten in de loopbeweging in de grafiek op en brengen de vorm van de grafiek in verband met de beweging zelf. Omdat Coach de eenduidige correspondentie tussen een punt op het cyclogram en een beeldje in de videoclip tegelijkertijd in beeld kan brengen, wordt het verkrijgen van inzicht in de betekenis van de grafiek vergemakkelijkt. Daarna vergelijken leerlingen cyclogrammen van twee verschillende loopbewegingen met elkaar en proberen ze de verschillen en overeenkomsten in de grafieken in verband te brengen met de verschillende aard van de bewegingen.

### Videometing met behulp van Coach

Voor een uitgebreide beschrijving van Coach verwijzen we naar (Heck, 2000). Laten we hier volstaan met de opmerking dat het een computerwerkplaats is voor leerlingen om binnen de exacte vakken actief met lesstof in de weer te zijn en om experimenten uit te voeren. Mogelijke ingrediënten van activiteiten zijn:

- teksten met uitleg of instructies
- plaatjes ter verduidelijking van een experimentele opstelling of van de context van het probleem
- videoclips ter illustratie van een fenomeen of om in te meten (dit heet ook wel ‘Interactieve Video’ en Video-Based Laboratory’, afgekort met VBL)
- meetgegevens in de vorm van grafieken of tabellen
- programma’s om apparaten aan te sturen of om wiskundige modellen door te rekenen
- webpagina’s.

Leerlingen kunnen zo op diverse manieren met wiskundige en natuurwetenschappelijke concepten, methoden en technieken kennismaken. Zij kunnen een probleem, indien nodig meer dan eens, op verschillende manieren bestuderen. Deze herhaalde oefening van eenzelfde concept met steeds een andere invalshoek of een andere techniek van bestuderen leidt in de praktijk tot betere ontwikkeling en verankering van kennis en ervaring (Molenaar, 2002).

Daarnaast is er de hoop en verwachting dat deze vorm van ICT bij kan dragen aan het realiseren van uitdagende, vakoverstijgende en realistische toepassingen van wiskunde, met name voor leerlingen die niet door (abstracte) wiskunde alleen gemotiveerd worden.

Laten we nu kort beschrijven hoe videometen en de experimentele analyse van de meetresultaten in zijn werk gaat. We doen dit aan de hand van de resultaten van Jordi en Alexandra, die ‘gewoon’ lopen bestudeerd hebben. In figuur 4 is een schermafdruck van hun activiteit.

Rechtsonder is hun cyclogram getekend. De vorm stemt

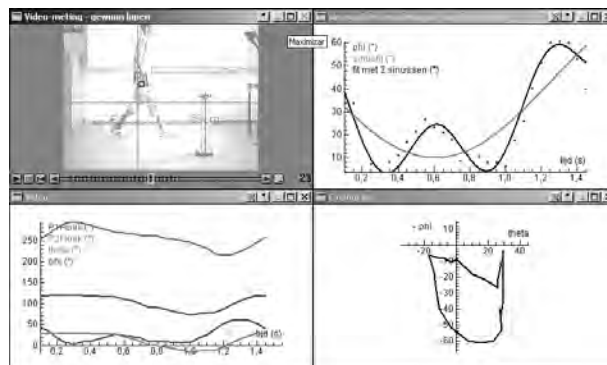


fig. 4 Leerlingenresultaat van ‘gewoon’ lopen

goed overeen met de kromme in figuur 2. Sterker nog, als je de karakteristieke momenten in de gang, zoals hielcontact, teenafzet, enzovoort, opspoort in het cyclogram, dan blijken ze zich op eenzelfde plaats in de kromme te bevinden als in figuur 2.

Rechtsboven in de schermafdruck is te zien hoe de grafiek van de kniehoek uitgezet tegen de tijd verrassend goed benaderd kan worden met een som van twee sinusgrafieken (met verschillende amplitude, frequentie en fase). Deze benadering krijg je door eerst een sinusoidale benadering te bepalen. Als je vervolgens de grafiek van het verschil tussen de meetdata en de regressiekromme laat tekenen, dan zul je zien dat dit sterk lijkt op de grafiek van een periodieke functie en goed met een sinusgrafiek te benaderen is. Ten slotte tel je de twee regressiekrommen bij elkaar op voor de uiteindelijke benadering.

Maar hoe gaat het vergaren van meetgegevens in de videoclip precies in zijn werk? Om te beginnen speel je het filmpje af om een indruk te krijgen van wat er gebeurt en welke beelden van de videoclip bruikbaar zijn: in dit voorbeeld wil je in ieder geval een complete loopcyclus meten. Verder wil je de kniehoek en de heuphoek op verschillende tijdstippen bepalen. Je kunt met een elektronische gradenboog in verschillende beeldjes de hoeken opmeten en de resultaten in een tabel plaatsen, maar dit is veel werk. Wil je de activiteit van het meten niet laten overheersen in het geheel, dan is het verstandiger om steeds de posities van voet en heup ten opzichte van de knie te bepalen. Klikken op punten in een filmbeeldje volstaat dan: je meldt eerst aan Coach dat je in elk beeldje van de film steeds opnieuw de oorsprong van een assenstelsel aan wilt geven en vervolgens posities van twee punten wilt meten. Deze drie punten wijs je per filmbeeldje aan door met de muis te klikken.

Als je in de videoclip een meetpunt vastlegt, dan wordt de positie zowel in Cartesische coördinaten als in poolcoördinaten vastgelegd. Kortom de hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  in de figuur uit de inleiding van Gerda en Vianne worden onmiddellijk vastgelegd door klikken. Van vwo 5-leerlingen mag verwacht worden dat ze met hun kennis van meetkunde de formules voor de heuphoek  $\theta$  en kniehoek  $\phi$  kunnen bepalen.



Deze formules zijn (hoeken in graden):  $\theta = \alpha - 90^\circ$  en  $\phi = \alpha - \beta + 180^\circ$ . Trouwens, een verkeerde formule springt meestal onmiddellijk in het oog omdat het de grafiek van een fysiek onmogelijke buiging of strekking van een ledemaat oplevert.

We praten wel gemakkelijk over 'klikken = meten van positie', maar hiervoor moet wel een lengtemaat ingesteld zijn. Ook als je alleen maar hoeken wilt meten, is er in Coach een lengtemaat nodig omdat er anders geen coördinatenstelsel kan worden vastgelegd. Meestal wordt voor het instellen van een lengtemaat een object van bekende lengte in de videoclip gebruikt: in ons voorbeeld is dat de hoogte van een elektriciteitspaaltje in het klaslokaal. Verder is het goed om op te merken dat de gemeten beweging zich in een plat vlak moet afspelen dat loodrecht staat op de blikrichting zodat perspectivische vervorming geen merkbare rol speelt.

Na al deze voorbereidingen kun je toch echt aan de slag: per gekozen beeldje in de videoclip wijs je achtereenvolgens de positie van knie, heup en voet aan. Coach springt vervolgens automatisch naar het volgende beeldje in de videoclip dat bemeten kan worden. Desgewenst kun je tijdens het meten al de gewenste grafieken op laten bouwen. Metingen kun je achteraf door slepen met de muis nog corrigeren.

## Onderzoek naar videometen in onderwijs

Videometing wordt tot nu toe voornamelijk gebruikt binnen natuurkundeonderwijs en met name in lessen over mechanica waar concepten als positie, snelheid en versnelling centraal staan. Didactisch onderzoek richt zich hier ook meestal op. We verwijzen naar Hilscher (2000) voor een overzicht over de stand van zaken wat betreft het gebruik van video in natuurkundeonderwijs. In deze paragraaf noemen we alleen een paar belangrijke resultaten van didactisch onderzoek.

Zo heeft Beichner (1996) in zijn onderzoek uitgebreid gekeken naar effecten van interactieve video op het leren begrijpen van grafieken uit de kinematica door leerlingen. Zijn conclusies waren dat het leerproces verbeterd ten opzichte van traditionele lessen wanneer videometing regelmatig gebruikt wordt, dat sporadisch gebruik of demonstratie door de leraar alleen weinig bijdraagt aan een beter begrip bij leerlingen en dat de impact van VBL (Video-Based Laboratory) groter is als de integratie in het curriculum meer vergaand is. Verbeteringen treden op bij bijna alle klassieke problemen van leerlingen met grafieken zoals het interpreteren van een grafiek als een plaatje van de situatie of het door elkaar halen van de begrippen helling en hoogte in een grafiek (McDermott et al, 1987). Zollmann en Brungardt (1995) hebben onderzocht in hoeverre synchronisatie van de videoclip en bijpassende afstand-tijd en snelheid-tijd grafieken bijdraagt aan een beter begrip van deze grafieken dan met MBL (Microcomputer-Based Laboratory, dat wil zeggen meten met senso-

ren of met dataloggers die met een PC verbonden zijn) bereikt wordt. Hun conclusie is dat er weinig verschil in resultaten van leerlingen is, maar dat studenten met VBL wel gemotiveerder lijken te zijn. Dit wordt bevestigd in het werk van McCullough (2000), waarin effecten van VBL en MBL in natuurkundeonderwijs met elkaar vergeleken worden.

Maar er zijn natuurlijk meer vaardigheden nodig dan het begrijpen van grafieken uit de bewegingsleer alleen en er zijn ook andere natuurkundige begrippen zoals kracht, impuls en energie die aan bod komen in het curriculum. Leerlingen moeten tevens vaardigheden ontwikkelen op het terrein van probleem-oplossen, modelleren, formuleren en testen van hypothesen, interpreteren van gegevens uit metingen of databases, enzovoorts. En dit moeten ze niet alleen binnen de natuurwetenschappelijke vakken doen, maar ook bij wiskunde. Het is vreemd dat de mogelijke bijdrage van VBL aan het ontwikkelen van deze vaardigheden weinig of niet onderzocht is. Twee mogelijke oorzaken zijn: (i) de techniek is nog betrekkelijk nieuw en met name het door leerlingen zelf kunnen maken van videoclips is pas sinds kort, met de introductie van webcams, op school op grote schaal mogelijk; (ii) als ook een MBL-experiment mogelijk is, dan wordt hier vaak de voorkeur aan gegeven omdat dit in het algemeen sneller werkt, meer gegevens oplevert en leerlingen meer aan lijkt te zetten tot samenwerking en discussie over het onderwerp dat ze bestuderen. VBL lijkt voorbehouden voor situaties waarvoor er geen alternatieve meetmethode is of waarin een 'echt' experiment te duur, te lastig, te gevaarlijk of moeilijk reproduceerbaar is.

Laws en Pfister (1998) noemen de volgende voordelen van VBL ten opzichte van MBL en traditionele natuurkundige proeven op:

- Het is een snelle, gemakkelijke en breed inzetbare methode om kwantitatieve gegevens te verzamelen in praktische opdrachten; hierbij kun je dankbaar gebruik maken van het feit dat leerlingen tegenwoordig opgroeien met videotechnologie.
- Er worden minder meetfouten gemaakt dan bij traditionele proeven.
- Je hoeft geen proefopstelling te bouwen. Integendeel. Je kunt fenomenen buiten de practicumzaal bestuderen; denk hierbij aan sportgebeurtenissen, dansbewegingen, filmstunts en dergelijke.
- Je kunt uit de gemeten punten ook nieuwe punten berekenen en op de videoclip weergeven. In ons experiment over lopen zou je bijvoorbeeld het zwaartepunt van het zwaaibeen kunnen uitrekenen en de beweging van dit punt ten opzichte van het heupgewricht kunnen bestuderen.

We willen daar nog het volgende aan toevoegen:

- Bij interactieve video hoeft je niet van tevoren tot in elk detail te bedenken wat je precies gaat meten. Je kunt je meer door nieuwsgierigheid laten leiden.
- Je kunt achteraf en op elke werkplek metingen nog eens verifiëren en zondig corrigeren of aanvullen.

- De videoclip waarop gemeten is en de bijpassende wiskundige representaties zoals grafieken en tabellen zijn gesynchroniseerd: als je punt op een grafiek of een rij in een tabel aanwijst, dan verschijnt automatisch het corresponderende beeldje van de videoclip. Je kunt ook heen en weer gaan door een interessant fragment van de videoclip. Op deze manier kunnen karakteristieke eigenschappen van een grafiek met het fenomeen gemakkelijker en beter met elkaar in verband worden gebracht.
- VBL verheldert het gebruik van een variabele als symbool voor een variabel object. De positie van een bewegend punt heeft coördinaten die in de tijd veranderen. De heup- en kniehoeken in ons voorbeeld van de menselijke gang zijn tijdsafhankelijk.

Het door ons gekozen onderwerp is een voorbeeld waarin werken met sensoren zoals hoekmeters en een krachtenplatform te kostbaar in tijd en geld is. Bovendien kun je met VBL steeds weer opnieuw dezelfde videoclip bestuderen, nadenken over de getoonde beweging en vergelijken met bewegingen in andere videoclips. Je hoeft dan niet alleen naar krachten en andere natuurkundige concepten te kijken, maar je kunt ook naar andere zaken kijken zoals bijvoorbeeld lichaamshouding en coördinatie van lichaamsdelen tijdens verschillende manieren van lopen. Je kunt proberen hiervoor bruikbare wiskundige beschrijvingen en modellen op te stellen die een beter inzicht op de bewegingen geven.

Dit is ook de grote verdienste geweest van Boyd en Rubin (1996), namelijk dat zij gezocht hebben naar herkenbare situaties, in hun geval fotoseries van bewegingen van mensen en dieren, waaruit leerlingen grafische en andere wiskundige representaties kunnen ontwikkelen. Zij hebben onderzocht in hoeverre het VBL-leerlingen helpt om een grafiek niet alleen als een mooi plaatje te beschouwen dat past bij een wiskundige functie, maar meer als instrument in hun redeneren. Zij besteden daarbij ook veel aandacht aan de verschillen tussen alledaagse waarnemingen, VBL en wiskundige representaties. Bijvoorbeeld, tijd is in de echte wereld continu, onomkeerbaar en niet stil te zetten. Daarentegen is tijd in VBL discreet, maar bij afspelen van een filmpje ontstaat de illusie van een continu veranderend beeld. In VBL kun je met de tijd spelen: je kunt een filmpje achterwaarts, versneld of vertraagd afspelen, stap voor stap door de beelden van een videoclip gaan of het afspelen van een videoclip onderbreken. Leerlingen hebben er baat bij zich bewust te worden van dergelijke verschillen.

## Onze ervaringen in de klas

Het experiment is uitgevoerd op het Bonhoeffer College te Castricum in een 5 vwo-klas van 18 leerlingen met N&G profiel die het N1 programma natuurkunde volgen. U leest het goed: wiskunde tijdens de natuurkundeles. Dit is gebeurd in de laatste vijf lessen (van 45 minuten) voor

het einde van het studiejaar en de opdracht werd als proefwerk meegeteld in de eindbeoordeling. Leerlingen werkten in tweetallen en tijdens lesuren in het sciencelab van de school. Daarnaast hadden zij een thuisversie van Coach met de activiteiten in dit project. Leerlingen hadden in totaal drie weken de tijd om hun werk te doen en hun korte verslag in te leveren.

We spreken hierboven met opzet van een *experiment* in de klas. We waren er immers vooraf helemaal niet zeker van of de vrije keuze van het gangproces in de eindopdracht wel bruikbare cyclogrammen op zou leveren, en of de wiskundige analyses die leerlingen in het eerste deel van het lesmateriaal oefenden wel goed toepasbaar zouden zijn bij het bestuderen van hun eigen lichaamsbewegingen. Per slot van rekening gaat het om ingewikkelde bewegingen en hanteren we maar simpele wiskundige modellen.

Een van de belangrijkste boodschappen van dit experiment is dat dit verrassend goed gaat, ook bij gebruik van eenvoudige apparatuur als een webcam. Kijk maar naar de schermafdrucken van resultaten van leerlingen in dit artikel (figuren 1, 4, 5 en 6).

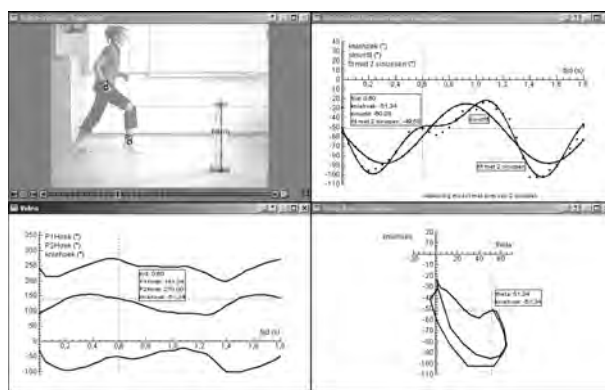


fig. 5 Leerlingenresultaat van huppelen

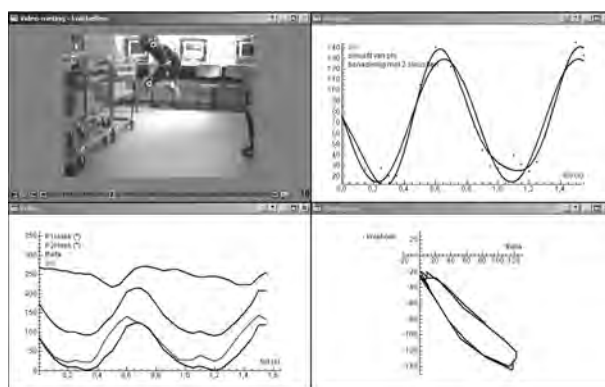


fig. 6 Leerlingenresultaat van kniehefbeweging

Of het nu om gewoon lopen, huppelen, joggen, achteruit lopen, met een boek op je hoofd lopen, met hoog opgetrokken knieën voortbewegen of op je tenen lopen betreft, het levert allemaal bruikbare cyclogrammen op. En

wij zijn niet de enigen die aangenaam verrast zijn; de leerlingen Dries en Edwin delen kennelijk onze mening want zij geven als commentaar op de opdracht: 'Het is leuk om te zien dat je benen toch eigenlijk een mooie wiskundige ronde afleggen, de klap als men de voet op de grond zet en dergelijke'.

De praktische opdracht mag dan wel meer gericht zijn op het toepassen van wiskunde en minder op het leren van nieuwe wiskunde, het is in ieder geval een prima voorbeeld voor leerlingen om te ervaren hoe een complexe situatie toch goed door een betrekkelijk eenvoudig wiskundig model beschreven kan worden en hoe zo'n model helpt bij het beter begrijpen van de situatie. De klassieke aanpak om uit te gaan van een wiskundige functie en de grafiek hiervan te tekenen is overboord gezet. Hier meet een leerling eerst een alledaagse beweging in een videoclip op, geeft de data grafisch weer en gebruikt de grafieken als uitgangspunt voor een wiskundig model. Van de leerling worden de volgende twee dingen verwacht in de praktische opdracht: Hij of zij kan

1. nagaan in welke opzichten het wiskundig model de werkelijkheid goed benadert en in welke opzichten het wat minder goed klopt (en het formuleren van criteria voor 'best passend' valt hier ook onder)
2. verbanden leggen tussen grafieken afkomstig van de meetgegevens, resultaten uit een wiskundig model en de gebeurtenissen in de videoclip.

Maar wat komt hiervan in de praktijk terecht? Het videometen, construeren van grafieken en toepassen van een gegeven regressiemodel levert naar onze waarneming in de klas geen grote problemen op voor de meeste leerlingen. Dit hebben ze wel meer gedaan, hetgeen ook blijkt uit het feit dat sommige leerlingen ongevraagd meetgegevens gaan filteren om een wat minder hoekige grafiek te krijgen.

Maar het interpreteren van de grafieken in de context van de lichaamsbeweging is een ander verhaal. Bij het vergelijken van cyclogrammen komt menig leerling niet verder dan het opmerken van verschillen tussen de grafieken zonder deze echt te koppelen aan de bewegingen in de videoclips zelf. Een mogelijke verklaring is dat het andere team misschien alleen de grafiek gegeven geeft en niet het Coach resultaat waarin ook nog naar de videoclip gekeken kan worden. Maar het kan ook duiden op het nog niet volledig begrijpen van de betekenis van een cyclogram. In het lesmateriaal had hier waarschijnlijk meer aandacht aan besteed moeten worden. Het is trouwens best moeilijk om alleen op grond van een cyclogram een goede voorstelling te maken van de corresponderende beweging. Dit alles levert dan vergelijkingen op van de volgende soort:

*'We hebben onze cyclogram vergeleken met het cyclogram van Manon en Marleen. Het is duidelijk te zien dat er een andere manier van lopen is aangenomen. Dit is te zien aan het filmpje. Manon heeft gehuppeld en Sietske heeft gejogd. Manon heeft een andere heup- en kniehoek*

*tijdens het huppelen. Bij deze filmpjes is het huppelen een meer constante beweging dan het joggen.'*

Er zijn gelukkig ook verslagen waarin wel op zijn minst een poging ondernomen wordt om de verschillen tussen cyclogrammen in kaart te brengen en te verklaren vanuit de loopbeweging. Bijvoorbeeld, Remco en Niek vergelijken hun kniehefbeweging (figuur 6) met de huppelbeweging van Manon en Marleen (figuur 5) en schrijven hierover het volgende op:

*'Er zijn al meteen duidelijke verschillen te zien. Het cyclogram van de huppelbeweging is veel ronder, in tegenstelling tot het hoekige cyclogram van de kniehefbeweging. Dit is gemakkelijk te verklaren doordat de dynamiek van de kniehefbeweging ook veel strakker is en veel minder soepel dan de beweging bij het huppelen. Daarnaast bereikt de kniehoek en heuphoek bij de kniehefbeweging een veel hogere waarde dan bij de huppelbeweging. Dit is natuurlijk logisch omdat het bij het knieheffen de bedoeling is de knieën zo hoog mogelijk te heffen. Hierdoor wordt de heuphoek natuurlijk zeer groot, twee keer zo groot als de hoogste waarde bij het huppelen. Ook probeer je het onderbeen eigenlijk tegen het bovenbeen aan te krijgen en hierdoor ontstaat natuurlijk een zeer hoge kniehoek. Ook bereiken de hoeken kleinere waarden bij onze beweging. Dit is te verklaren doordat bij het knieheffen het been dat blijft staan zo recht mogelijk moet blijven, bij huppelen doe je dit minder.'*

Nog beter doen Gerda en Vianne het in hun verslag over 'lopen met een boek op je hoofd' (figuur 1). Zij vergelijken hun cyclogram met dat van Gijs en Kah-Kih over 'marcheren op je tenen'; dit laatste diagram is niet in dit artikel opgenomen, maar lijkt kwalitatief op dat in figuur 6 van de kniehefbeweging. Zij schrijven in hun verslag aparte paragrafen over de verschillen en de oorzaken van de verschillen, daarbij gebruikmakend van de terminologie in loopanalyses die ze in de les geleerd hadden. De laatste paragraaf willen we u niet onthouden:

*'De oorzaak van de verschillen in de grootte en de verhouding van de hoeken ligt in de manier van lopen. Gijs liep op zijn tenen, waardoor zijn hielen de grond niet raakten. Hierdoor is het niet echt mogelijk om je heup te buigen zonder je knie te buigen. De kniehoek moet dus wel toenemen zodra de heuphoek toeneemt. Bovendien tilde Gijs zijn benen ook nog eens heel hoog op, waardoor de heup- en kniehoek extra groot werden.*

*Bij het lopen met een boek op je hoofd, moet je juist extra 'voorzichtig' lopen en zo min mogelijk veranderingen in je beweging maken. Als je namelijk je benen erg buigt, verandert de hoogte van je hoofd en dat moet je juist zo veel mogelijk vermijden. Bovendien kon Vianne haar hiel wel op de grond zetten, waardoor ze haar knie niet verhoefde te buigen terwijl ze haar been wel naar voren zwaaide. Omdat ze zo weinig mogelijk beweging wilde maken, tilde ze ook haar voet minder hoog op. Hierdoor waren de heup- en de kniehoek veel kleiner.*

*Bij het sluipen buig je je benen heel erg, bij het lopen met een boek op je hoofd juist niet. Hierdoor zijn de verschillen tussen de twee cyclogrammen te verklaren.'*

Het is duidelijk dat voor Gerda en Vianne de grafieken ergens over gaan en dat allerlei zaken die je afleest in de grafieken gekoppeld zijn aan de loopbewegingen. Dit was precies een van onze doelstellingen van de les.

Er zijn overigens grote verschillen in de verslagen van leerlingen. Met opzet hadden we gevraagd om een kort verslag van pakweg één A4-tje waarin twee cyclogrammen vergeleken zouden worden. Maar toch kregen we ook verslagen van meer pagina's. Kennelijk hadden deze leerlingen zoveel plezier of ambitie in hun werk gehad, dat ze de behoefte aan een uitgebreider verslag hadden. Ze klagden dan wel over tekort aan tijd; we citeren de mening van Sanne en Sander over het onderzoek:

*'Het onderwerp van dit onderzoek vonden wij op zich wel interessant, maar er was te weinig tijd om het onderzoek goed uit te voeren en de uitleg was op sommige punten te ingewikkeld of te summier. Dat is natuurlijk jammer. Waarschijnlijk zou dit onderzoek leuker zijn als er wat meer tijd voor werd uitgetrokken. Coach is een erg handig programma bij dit onderzoek. Wij hadden al eerder met dit programma gewerkt, dus wisten we al een beetje hoe we ermee moesten werken. En met de uitleg in het boekje kon je de metingen goed uitvoeren. Coach kun je nog voor heel veel andere onderzoeken gebruiken, bijvoorbeeld: onderzoeken in de sport (dus met hardlopen, balspelen, gymnastiek), onderzoeken in het verkeer (snelheid, remweg, enzovoort) enzovoort.'*

Ook tijdens de lessen zijn al tekenen van werkplezier en gedrevenheid te zien: leerlingen zijn bij videometingen veel intensiever bezig dan wanneer ze enkel pen en papier gebruiken; kennelijk gaat er inderdaad een zekere attractie uit van deze multimediacomponent. Wij waren bijvoorbeeld aangenaam verrast dat de leerlingen in het allereerste lesuur na een buitenlands schoolreisje meteen bij de les waren. We dachten eerst nog dat de leerlingen simpelweg te moe van de reis waren. Maar ook in de lessen hierna waren ze met veel aandacht en werklust aan het werk, meer dan gebruikelijk in de laatste drie weken van het schooljaar. De resultaten die de leerlingen behaald hebben waren mede hierdoor zeer bevredigend.

## Tot slot

Ook leerlingen uit uw eigen VWO5/6-klas kunnen in de huid van een bewegingswetenschapper kruipen: op 7 en 8 november 2002 organiseert het AMSTEL Instituut een tweedaagse masterclass over dit onderwerp. In overleg met de cursusleiders kunt u dit als een praktische opdracht laten meetellen. Neem contact op met de auteur (heck@science.uva.nl, 020-5255723).

Het onderwerp is ook zeer geschikt voor een profielwerk-

stuk. Nuttig hierbij is te weten dat de Faculteit Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de UvA met ingang van het schooljaar 2002-2003 leerlingen werkplekken en begeleiding aanbiedt voor uitvoering van profielwerkstukken en dat het onderwerp 'stilstaan bij lopen' deel uitmaakt van het aanbod in het ICT-lab/Werkstuk-Lab. We verwijzen naar de website [www.science.uva.nl/profielwerkstukken/](http://www.science.uva.nl/profielwerkstukken/) voor meer informatie.

Maar ook aan leraren wordt gedacht: u kunt in uw agenda noteren 7 februari 2003 of 3 april 2003 als datum voor de mastercourse over wis- en natuurkunde van de menselijke gang.

*Met dank aan André Holleman en Peter Uytings, zonder wie het experiment in de klas op het Bonhoeffer College niet had kunnen plaatsvinden en met wie de auteur vele discussies over het onderwerp en het lesmateriaal heeft gehad.*

André Heck, AMSTEL Instituut, Universiteit van Amsterdam, [heck@science.uva.nl](mailto:heck@science.uva.nl)

## Literatuur

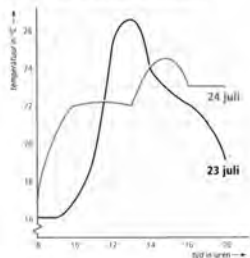
- Beichner R.J. (1996). The Impact of Video Motion Analysis on Kinematics Graph Interpretation Skills. *American Journal of Physics*, 64(10), 750-762.
- Boyd, A. & A. Rubin (1996). Interactive Video: a bridge between motion and math. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 1, 57-93.
- Goswami, A. (1998). A new gait parameterization technique by means of cyclogram moments: Application to human slope walking. *Gait & Posture*, 8(1), 15-36. Op 14/8/2002 elektronisch beschikbaar op webadres [www.cis.upenn.edu/~goswami/hgis.html](http://www.cis.upenn.edu/~goswami/hgis.html)
- Heck, A. (2000). Coach:  $\beta$ -tool in spe en nu al inzetbaar bij wiskunde. *Nieuwe Wiskrant*, 19(4), 36-42.
- Hilscher, H. (2000) Videoeinsatz in der Lehre. *Physik in der Schule*, 38(3), 193-200.
- Laws, P. & H. Pfister (1998). Using Digital Video Analysis in Introductory Mechanics Projects. *The Physics Teacher*, 36, 282-287.
- McCullough, L.E. (2000). *The effect of introducing computers into an introductory physics problem-solving laboratory*. Ph.D. thesis, University of Minnesota.
- McDermott, L.C., M.L. Rosenquist & E.H. van Zee (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 5(6), 503-513.
- Molenaar, P. (2002). *Virtueel Practicum (Virtual Laboratory) Digital multimedia materials for physics education*. GIREP 2002 Conference, Lund, Sweden.
- Zollman, D.A. & J. Brungardt (1995). The Influence of Interactive Videodisc Instruction Using Simultaneous-time Analysis on Kinematics Graphing Skills on High School Physics Students. *Journal of Research in Science Teaching*, 32(8), 855-869.

Wanneer een leerling de taal van een opgave niet begrijpt, dan kan hij de opgave uiteraard niet maken. En is het vervolgens ook niet duidelijk of hij de wiskunde al dan niet begrijpt. Wisbaak is een project waarin aandacht besteed wordt aan de taal van de wiskunde. **Corine van den Boer** en **Dolly van Eerde** laten voorbeelden uit Wisbaak zien.

## Wisbaak: software voor taalzwakke leerlingen

### Vragen van brugklasleerlingen

- 1-2 Op 24 juli meet Joris de temperatuur weer. Hij tekent de grafiek van deze temperaturen in hetzelfde assenstelsel van de vorige dag. Je ziet het resultaat hieronder.



- a Om 14 uur was het op beide dagen even warm. Hoeveel graden was het toen?

*Uit: Moderne Wiskunde, 1b vbo, vmbo editie*

Serkan: Ik snap dit niet: om 14 uur was het op beide dagen even warm. Hoeveel graden was het toen?

- 2 Bomen worden elk jaar langer en dikker. De populier is een boom die erg hoog kan worden. Elke vijf jaar heeft een boswachter de hoogte van een populier opgemeten. Deze hoogten staan in de tabel hieronder.

|                   |    |    |    |    |    |    |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|
| leeftijd in jaren | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| hoogte in meters  | 14 | 20 | 24 | 27 | 30 | 32 |

- a Hoeveel meter is de boom tussen zijn 10e en zijn 15e jaar gegroeid?  
b Komen er elke vijf volgende jaren evenveel meters bij?



*Uit: Moderne Wiskunde, 1b vbo, vmbo editie*

Madina: Hier staat: Hoeveel meter is de boom tussen zijn tiende en vijftiende jaar gegroeid? Wat moet ik hier doen?

Iedere wiskundedocent herkent dit soort vragen vermoedelijk wel. Het ligt voor de hand om de leerling een korte uitleg te geven, zodat de leerling weer verder kan. Maar hebben we daarmee ook een antwoord gegeven op de

vraag die de leerling stelde? Als wiskundedocent lezen en interpreteren we de tekst die bij een opdracht staat als een wiskundige vraag. Daardoor kan een werkelijkheid die door de context opgeroepen wordt, of een dubbelzinnige dan wel lastige formulering, ons wel eens ontgaan. Het probleem van een leerling die een vraag stelt kan dan ook van een heel andere orde zijn dan de docent in eerste instantie vermoedt. Wiskundig gezien lijken de twee opgaven hierboven niet moeilijk, zelfs niet voor brugklassers: het antwoord van de eerste opgave is eenvoudig af te lezen uit de grafiek; bij de tweede opgave moeten de juiste gegevens in de tabel worden opgezocht en moet  $20 - 14$  worden uitgerekend.

Laten we ons eens trachten te verplaatsen in een leerling en nagaan welke moeilijkheden hij mogelijk tegen zou kunnen komen in de opgaven hierboven.

*Om 14 uur was het op beide dagen even warm. Hoeveel graden was het toen?*

Leerlingen hebben veelal de neiging om de introductie van een probleem over te slaan, en meteen te beginnen met de eerste opgave. De moeilijkheid zou dan kunnen zijn dat de leerling niet weet wat er met 'beide dagen' wordt bedoeld. Wanneer een leerling vervolgens toch maar de inleiding gaat lezen, komt hij de zin 'Op 24 juli meet Joris de temperatuur weer' tegen. Uit het woordje 'weer' moet de leerling afleiden dat er blijkbaar iets dergelijks aan voorafgegaan is, en dat zal dan in de opgave ervoor beschreven moeten staan. Natuurlijk kunt u hier tegen inbrengen 'de leerling hoeft toch niet zo ingewikkeld te doen, je ziet toch meteen dat erboven twee grafieken staan, met twee verschillende data!'. Maar tijdens onze observaties bleek dat leerlingen bij onduidelijkheden zich eerder op de tekst concentreren dan aanwijzingen te zoeken in afbeeldingen zoals tabellen, grafieken of schema's.

Voor een allochtone leerling die de Nederlandse taal nog niet goed beheerst, kan het woordje 'weer' overigens ook de associatie oproepen met de weersomstandigheden, het gaat immers over een warme dag.

Mogelijk kan er ook twijfel ontstaan als gevolg van slordig lezen. Wanneer een leerling over het gegeven van 14

uur heen leest en alleen let op momenten waarop het beide dagen even warm was, komt hij in de problemen: er zijn immers twee snijpunten, en welke wordt er nu bedoeld?

*Hoeveel meter is de boom tussen zijn tiende en vijftiende jaar gegroeid?*

Hier ligt het probleem vermoedelijk in de interpretatie van de vraag. De leerling moet inzien dat groei in deze opgave betrekking heeft op een verandering in de hoogte in meters en niet op het dikker worden, waarover ook in de inleiding van het probleem gesproken wordt. Er moet een relatie gelegd worden tussen het begrip 'groei' in de vraag en 'hoogte in meters' in de tabel. Daarna kan het verschil berekend worden tussen de twee lengtes die corresponderen met de leeftijden.

Ook vraag b 'Komen er elke vijf volgende jaren evenveel meters bij?' is niet voor elke leerling even helder. 'Ik weet niets over de vijf volgende jaren. Wie weet is de boom eerst twee jaar niet gegroeid en toen een paar jaar weer wel. Dat kan ik toch niet zien in de tabel?' zo kan een leerling terecht redeneren.

Een andere leerling ondervindt weer problemen met de hele formulering, en begrijpt absoluut niet wat er van hem verwacht wordt met deze vraag.

Deze voorbeelden laten zien dat de moeilijkheden van de leerlingen niet zozeer met wiskunde als wel met taal te maken hebben. En dan ook nog met diverse aspecten van de taal: het begrijpend lezen van een opdracht, het combineren van gegevens in de tekst met de gegevens in de tabel en het halen van impliciete informatie uit een opgave.

In de volgende voorbeelden zit het probleem niet zozeer in de formulering van de vraag – zoals in de eerdere voorbeelden – maar in de betekenis van de gebruikte woorden.

Tijdens een van onze observaties komt Khalid bij de tafel van zijn juf. Hij schuift haar zijn boek met opgave 15 onder haar neus.

Khalid: Wat bedoelen ze met 'Van welke lijn is dit de dienstregeling?'

Khalid lijkt niet aan een buslijn te denken, maar aan een lijn in wiskundige zin en begrijpt daardoor de vraag niet. Het flexibel interpreteren van woorden met meerdere betekenissen is juist voor niet-Nederlandse leerlingen zoals Khalid moeilijk. Mogelijk kent hij zelfs de verkorte vorm 'lijn' voor buslijn niet.

E-5 In de tabel zie je de waterstanden in een haven op verschillende middagtijden. Een kapitein met een schip, dat een diepgang heeft van 2 meter, moet niet om 14.00 uur de haven willen binnenvaren. De waterhoogte is dan maar 1,3 meter.

| tijd in uren          | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| waterhoogte in meters | 1,3 | 2,3 | 3,2 | 3,9 | 4,1 | 7,8 | 3,0 |



Uit: *Moderne Wiskunde, 1a vbo mavo, vmbo editie*

Bij deze introductie van een probleem over waterhoogten lijkt de moeilijkheid niet wiskundig van aard te zijn. Het is echter de vraag of alle leerlingen begrippen zoals: 'waterstanden', 'diepgang' en 'waterhoogte' kennen. Het probleem is hier dus niet alleen gelegen in de formulering van de vraag, maar ook in de betekenis van bepaalde woorden.

## Wiskunde en taal

Met bovenstaande voorbeelden hopen we duidelijk gemaakt te hebben hoe docenten voortdurend geconfronteerd worden met leerlingen die vastlopen bij wiskundeopdrachten zonder dat direct duidelijk wordt waar de schoen wringt. We denken immers niet direct aan een taalprobleem als we met wiskunde bezig zijn. Toch lopen taalzwakke leerlingen dagelijks tegen dit soort problemen aan.

Het wiskundeonderwijs is de laatste jaren veel taliger geworden: er wordt een groter beroep gedaan op de mondelinge en schriftelijke taalvaardigheid van de leerling en de docent. Daarbij worden de leerlingen geconfronteerd met verschillende soorten 'taal': met *vaktaal* (wiskundige begrippen en formuleringen) en met *schooltaal* (begrippen die op school bij diverse vakken voorkomen zoals: verband, constant, gegevens, tijdstip, maar ook formuleringen als: 'licht toe' en 'schets'). Voor alle taalzwakke leerlingen – zowel allochtoon als autochtoon – vormt deze toegenomen taligheid van het vak wiskunde een obstakel. En wiskundedocenten in meertalige klassen hebben dus de moeilijke opdracht hierop in te spelen.

Het is voor hen echter niet altijd mogelijk om alle problemen (direct) op te lossen, omdat leerlingen zelf vaak niet weten welke voor hen onbekende woorden uit de opgaven relevant zijn. Zij ontwikkelen strategieën om toch tot een antwoord te komen, zoals het weglaten van de moeilijke woorden of maar wat proberen. Soms levert dit een correct antwoord op. Het gevaar hiervan is dat de leerlin-



P-3 Hierboven zie je een gedeelte van een bladzijde uit de winterdienstregeling 1996/1997 van de buslijnen in Utrecht.

a Van welke lijn is dit de dienstregeling?

Uit: *Moderne Wiskunde, 1b vbo mavo, vmbo editie*



gen zich niet bewust zijn van fouten die ze daarbij maken. Als docent kom je ze ook niet op het spoor en ken je de ondersteuningsbehoefte van de leerlingen niet. Daarnaast doen zich tijdens (wiskunde)lessen vaak onopgemerkte communicatieproblemen voor. De docent en leerling(en) denken ten onrechte dat ze over hetzelfde praten en dat ze elkaar begrijpen. Als docent word je je hierdoor niet bewust van het bestaan van een probleem. Ten slotte is het binnen de lestijd en organisatie van de les niet altijd mogelijk om gedifferentieerde ondersteuning te geven aan alle individuele leerlingen die daar behoefte aan hebben.

## Het Wisbaak-project

Een jaar geleden is een ICT-project gestart onder de naam 'Wisbaak' met het doel wiskundedocenten en hun leerlingen te ondersteunen in de geschetste problematiek. Een projectteam van ontwikkelingsonderzoekers, wiskundedocenten en taalkundigen ontwikkelt introductielessen en software en beproeft deze op twee scholen in Utrecht. We beperken ons daarbij tot de onderbouw van het voortgezet onderwijs en spitsen de ondersteuning toe op het gebied van de combinatie van problemen met de wiskunde en met taal.

Globaal gezien kunnen taalproblemen liggen in schriftelijke taal (in wiskundeboeken en toetsen) en mondelinge taal (eigen gedachten verwoorden en die van anderen interpreteren). Voor taalzwakke leerlingen speelt de problematiek vermoedelijk op beide aspecten, die bovendien niet altijd goed zijn te onderscheiden. Daarom richt de Wisbaak zich zowel op ondersteuning bij de interpretatie van schriftelijke taal, als op het stimuleren van de ontwikkeling van mondeling taalgebruik.

Bij de ontwikkeling van de programma's voor de leerlingen streven we naar het volgende:

- Problemen waarin taalcomponenten meespelen worden met behulp van Wisbaak op diverse manieren verholpen. Leerlingen verkennen de contexten waarin de wiskundeopgaven worden aangeboden via het zien en aanklikken van woorden, plaatjes en animaties, en/of het afluisteren van de opdracht of van bepaalde termen daarin. Hierdoor vormen de leerlingen zich letterlijk een beeld van de situatie. Bovendien vestigt Wisbaak de aandacht op wiskundige kernbegrippen om zo het wiskundig fundament bij de leerlingen te verstevigen.
- Om in te spelen op de verschillen tussen de leerlingen biedt Wisbaak een variëteit aan mogelijkheden, zoals geschreven tekst, al dan niet ondersteund door illustraties, bewegende beelden (animaties) en gesproken tekst (audio).
- Wisbaak stelt vragen en geeft opdrachten die aanzetten tot horizontale interactie tussen leerlingen onderling en verticale interactie tussen leerlingen en docent. Interactie is noodzakelijk om tot een actieve beheersing van de (wiskunde)taal te komen en stimuleert de

reflectie.

- Wisbaak besteedt nadrukkelijk aandacht aan de ontwikkeling van een wiskundige attitude. Dit gebeurt onder andere door leerlingen te laten beseffen dat meerdere oplossingen van een opgave mogelijk zijn, door reflectie te stimuleren over de probleemanalyse en de te volgen of gevolgde aanpak van een opgave, of door de gekozen aanpak en het resultaat daarvan te laten controleren.

We proberen in het Wisbaak-project op diverse manieren een antwoord te geven op moeilijkheden van leerlingen. Daartoe willen we het volgende ontwikkelen:

- korte computerprogramma's rond wiskundige onderwerpen waarin extra hulp geboden wordt rond wiskunde, vaktaal en schooltaal
- een elektronisch woordenboek, waar leerlingen de betekenis van bepaalde begrippen uit de vaktaal en schooltaal kunnen opzoeken
- introductielessen die sterk interactief van karakter zijn en waarin de docent kan verkennen wat leerlingen al van een onderwerp weten door hen te activeren daarover te vertellen en schriftelijke groepsopdrachten te maken
- korte toetsen waarmee leerlingen hun eigen kennis van vaktaal en schooltaal kunnen controleren.

Al deze middelen zijn bedoeld om op diverse manieren ondersteuning te bieden aan taalzwakke leerlingen door middel van voorbeelden, opdrachten, hulpvragen en uitleg. Tegelijkertijd zijn ze ook bedoeld om mondeling en schriftelijk taalgebruik en de communicatie tussen docent en leerlingen onderling te stimuleren. De gedachte hierachter is dat juist taalzwakke leerlingen onzes inziens gebaat zijn bij 'talig' onderwijs. Door erover te praten worden leerlingen zich bewust van hun eigen taal en worden problemen zichtbaar, leren de leerlingen de begrippen op juiste wijze uitspreken, horen ze wellicht verschillende beschrijvingen voor hetzelfde, en – last but not least – moeten ze ook zelf actief de wiskundetaal gebruiken.

De door ons ontwikkelde introductielessen zijn hier een voorbeeld van. Deze lessen zijn bedoeld om via klassikale activiteiten en groepsopdrachten te peilen wat leerlingen van een bepaald onderwerp afweten en hen uit te dagen tot overleg en uitwisseling van ideeën.

De introductielessen worden aan de gehele klas gegeven en het werken met de Wisbaak-software gebeurt in tweetallen aan een computer achterin de klas. Wanneer de leerling vastloopt met een aantal opgaven in zijn boek, en Wisbaak heeft een ondersteunend programma bij dat onderwerp, kan de docent een of twee leerlingen naar de computer sturen om zo'n programma door te werken. Ook hierbij trachten we de communicatie te activeren: de communicatie tussen leerlingen door ze bij voorkeur in tweetallen achter de computer te laten werken en de communicatie tussen leerlingen en docent door de leerlingen na het werken aan de computer een schriftelijke eindop-

dracht te geven die ze met de docent moeten nabespreken. We streven ernaar om deze eindopdracht zodanig te formuleren dat de leerling niet kan volstaan met het opschrijven van een antwoord, maar er altijd een motivatie of een toelichting bij moet schrijven. Zo oefent de leerling het schriftelijk taalgebruik. Wanneer de docent de leerling vraagt om een toelichting te geven bij de opdracht, krijgt de docent een beeld van wat de leerling heeft geleerd van het werken op de computer en wordt de leerling gedwongen om zelf actief de wiskundetaal te gebruiken. Al met al moet het werken met Wisbaak per keer niet meer dan vijftien minuten in beslag nemen. Daarna gaat de leerling weer verder in zijn eigen lesboek, waarbij de docent kan beslissen of het werken met de Wisbaak als vervanging van enkele opdrachten uit het boek kan dienen.

Centraal in het Wisbaak-project staat dus de ontwikkeling van een computerprogramma. De gedachte is dat een computerprogramma kan bijdragen aan de oplossing van taalproblemen bij het leren van wiskunde. We zijn zeker niet van mening dat de computer dit beter kan dan een docent. Een computer kan bijvoorbeeld niet de aard van een probleem vaststellen, niet direct inspelen op wat een leerling doet en zegt, en alleen die hulp bieden die tevoren is geprogrammeerd. Maar de computer heeft ook voordelen: hij kan gedifferentieerde ondersteuning bieden tijdens de les aan taalzwakke leerlingen zonder veel extra aandacht van de docent, en het computerprogramma biedt de mogelijkheid om gebruik te maken van veel verschillende talige en niet-talige representaties, zoals: tekst, plaatjes, gesproken tekst, filmpjes en animaties.

Binnen het Wisbaak-project willen we gebruikmaken van de voordelen van de computer, waarbij we doelstellingen zoals het stimuleren van communicatie en interactie en het ontwikkelen van een onderzoekshouding bij de leerlingen niet uit het oog willen verliezen.

## Een voorbeeld: Sanne

Laten we eens kijken naar 'Sanne', het eerste programma dat we voor Wisbaak hebben gemaakt. Het is zeer eenvoudig en lineair van opzet. Voordat we er de klas mee ingingen, vroegen we ons af of het wel 'flitsend' genoeg zou zijn voor de leerlingen, maar ze bleken erg enthousiast. Voor de HAVO/VWO-leerlingen hadden de vragen wel wat uitdagender mogen zijn, maar toch werkten ook zij gemotiveerd aan het programma en vertelden achteraf dat ze het wel goed vonden om alles nog eens te herhalen.

We tonen enkele bladzijden uit het computerprogramma dat is ingebed in de context van de groei van een meisje, Sanne. In dit applet gaat het zowel om vaktaal, zoals 'grafiek', als om schooltaal zoals bijvoorbeeld: 'geleidelijk' en 'enorm gegroeid'. Daarnaast worden deze begrippen geïnterpreteerd in de context van het dagelijks leven

(groei leidt tot te korte broeken) en van de wiskunde (het verloop van de grafiek wordt bepaald door ontwikkeling in de groei).

De leerlingen krijgen het probleem voorgelegd met de opdracht dit zorgvuldig te lezen. Op de bladzijden daarna wordt er ingezoomd op de tekst bij de opdracht.

### Lees goed wat hieronder staat.

Sanne moet bij de wiskundeles een verhaal vertellen waar je een grafiek bij kunt tekenen. Sanne zegt: 'Een paar jaar geleden groeide ik niet zo hard maar vorig jaar ben ik opeens enorm gegroeid.'



De klas moet er een grafiek bij tekenen.

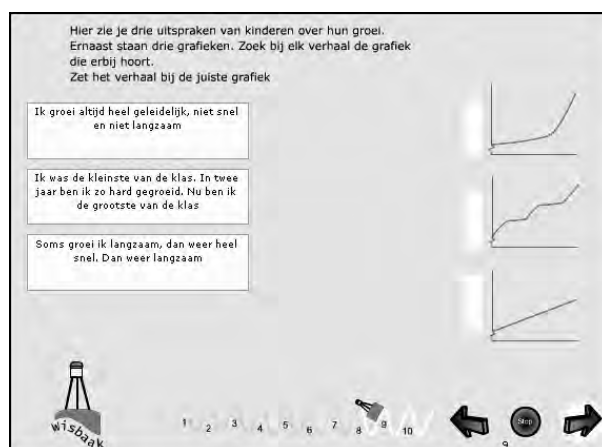
Steeds wordt de hele tekst herhaald, en lichten bepaalde begrippen op waarover vragen worden gesteld. Opvallend was dat de VBO/MAVO-leerlingen steeds de hele tekst opnieuw gingen lezen, terwijl de HAVO/VWO-leerlingen zich al snel beperkten tot de woorden die geaccentueerd waren. Na afloop vroegen we de leerlingen onder meer of ze niet vonden dat er te veel tekst op de pagina's stond. Geen van de leerlingen had hier last van, de meeste gaven aan het juist wel te waarderen dat ze het verhaaltje er steeds bij hadden. Eén HAVO/VWO-leerling merkte expliciet op dat zij er de voorkeur aan had gegeven wanneer alleen de losse stukjes tekst in beeld waren, maar toen haar vriendin hiertegen protesteerde, vertelde ze dat ze er ook geen bezwaar tegen had wanneer de hele tekst wel steeds werd herhaald. Bij de VBO/MAVO-leerlingen was men unaniem in de voorkeur voor de herhaling van hele stukken tekst.



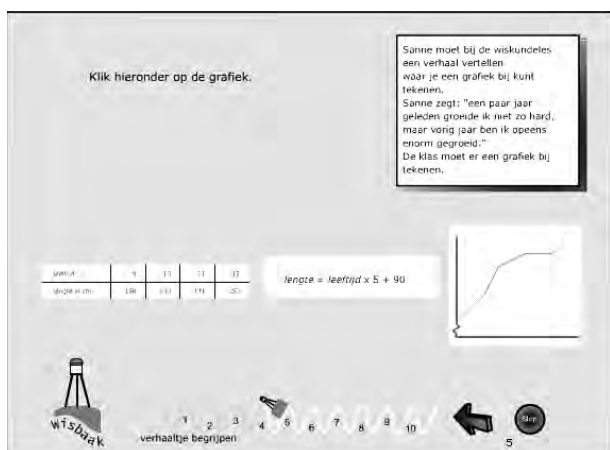
Scherf 3: Kennen de leerlingen het schooltaalbegrip 'enorm'?



Scherf 4: Kunnen de leerlingen het verhaal binnen de context begrijpen?



Scherf 9: Kunnen de leerlingen verhaal en grafiek koppelen?



Scherf 5: Weet de leerling wat een grafiek is?

Bij scherm 5 zien we een voorbeeld van hoe ook wij ons bij het opstellen van de formulering richten op de wiskundige vraag en de context uit het oog verliezen. Het doel van deze vraag was namelijk om te achterhalen of de leerlingen het verschil weten tussen een tabel, een formule en een grafiek. Het simpel aanklikken van de grafiek was dus al voldoende. De leerlingen lazen echter opnieuw het verhaal en probeerden een relatie te leggen tussen het verhaal en de drie plaatjes van respectievelijk tabel, formule en grafiek. Een nadere analyse van de opgave bracht ons op het idee dat het probleem mogelijk zit in het woordje 'de', wat de leerlingen interpreteren als 'de juiste'. Een betere formulering zou kunnen zijn 'Je ziet hieronder drie hokjes. In welk hokje is er een grafiek getekend?'

Bij scherm 9 gaat het om de interpretatie van een realistische situatie met een grafiek. Het is een test of de leerlingen begrepen hebben wat er bij de vorige vragen is behandeld.

Het programma 'Sanne' is bedoeld als introductie bij het onderdeel grafieken. Wanneer de leerlingen wat verder zijn in het hoofdstuk kunnen ze gebruikmaken van het applet 'Grafieken'. In dit applet staat niet de taal, maar de wiskunde (en daarbij behorende taal) centraal. We leggen daarin een verband tussen een grafiek, een tabel en een formule, drie vakbegrippen waarvan we tijdens onze observaties hebben geconstateerd dat het onderscheid en de samenhang voor sommige leerlingen niet duidelijk is. Bij het uitproberen van dit applet hebben we gebruikgemaakt van opgaven uit het wiskundeboek van de leerlingen. Het is de bedoeling dat we in een later stadium opgaven samenstellen die bij het applet op het scherm verschijnen. Wie al een eerste indruk van dit applet wil krijgen, verwijzen we naar onze website (zie adres aan het eind van dit artikel).

## Hoe verder met de Wisbaak?

Wisbaak is een tweejarig project, waarvan we het eerste jaar net achter de rug hebben. In het afgelopen jaar heeft het accent gelegen op de oriëntatie op verschillende wiskundeonderwerpen, het verhelderen van problemen van leerlingen bij die onderwerpen, het ontwerpen en uitproberen van enkele computerprogrammaatjes (applets) en het ontwikkelen en uitproberen van Introductielessen. Hierbij ging het om vragen als: Begrijpen de leerlingen de bedoeling? Spreekt het de leerlingen aan? Komt de gewenste interactie tot stand? Leren de leerlingen er wat van?

In het tweede ontwikkeljaar gaan wij ons met name richten op taalhelp: wiskundetaal en schooltaal zowel binnen de applets als in de vorm van een elektronisch woordenboek.

Daarnaast zitten we nog met problemen waarvoor we pas gedeeltelijk een oplossing bedacht hebben. Een paar voorbeelden, met nog slechts een eerste poging tot een oplossing.

- Hoe weet de docent wat de leerling heeft gedaan achter de computer?  
Oplossing: na afloop de leerling een schriftelijke opdracht laten maken die de leerling vervolgens ter beoordeling aan de docent voorlegt.
- Hoe kunnen we leerlingen aanzetten tot interactie als ze achter de computer zitten?  
Oplossing: de opdrachten zodanig formuleren dat leerlingen enerzijds tot samenwerken ‘gedwongen’ worden (‘overleg samen over...’) en anderzijds de opdrachten zo te problematiseren dat leerlingen uitgedaagd worden om er samen over te praten.
- Wat is de beste manier om feedback te geven bij het werken met de computer?  
Oplossing: variëren in de vormen van feedback. Bijvoorbeeld: directe terugkoppeling van goed/fout; mondelinge feedback van de docent op opdrachten die leerlingen op papier ‘mee terug nemen’ als ze op de computer gewerkt hebben; het geven van een hint na een fout antwoord.

In het Wisbaak-project op zoek zijn we naar mogelijkheden om tot een zekere integratie te komen tussen de principes van interactief wiskundeonderwijs en ICT. Het is duidelijk dat we nog midden in de ontwikkelfase

van Wisbaak zitten. Mocht u geïnteresseerd zijn in ons project dan kunt u kijken op onze website ([www.fi.uu.nl/wisbaak](http://www.fi.uu.nl/wisbaak)) of ons een e-mail sturen ([wisbaak@fi.uu.nl](mailto:wisbaak@fi.uu.nl)).

Corine van den Boer en Dolly van Eerde, Freudenthal Instituut

## Literatuur

- Boer, C. van den (2001). Ik zie, ik zie wat jij niet ziet? Ik hoor, ik hoor wat jij niet hoort! *Tijdschrift voor nascholings- en onderzoek van het rekenwiskundeonderwijs*, 19(3), 7-14.
- Eerde, H.A.A. van, M. Hajer, T. Koole & J. Prenger (2002). Betekenisconstructie in de wiskundeles. De samenhang tussen interactief wiskunde- en taalonderwijs. *Pedagogiek*, 22(2), 134-147.
- Hajer, M., T. Meestringa & M. Miedema (2000). Taalgericht vakonderwijs, een nieuwe impuls voor taalbeleid. *Levende talen tijdschrift*, 1(1), 34-43.
- Jorge Carvalho Figueiredo, N. (2000). Bintjes en parketvloeren. *Nieuwe Wiskrant*, 19(3), 43-46.
- Laan, E. van der & T. Meestringa (red.) (2000). *Bronnenboek Taalgericht Vakonderwijs*. Enschede: SLO.

## Nationale Wiskunde Dagen 2003

Op 31 januari en 1 februari 2003 worden voor de negende keer de Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Kosten: € 325,- all in (twee kamerdelers: € 295,- p.p.). Deelname aan de NWD kan door de school betaald worden uit nascholings- en professionaliseringsgelden. In september is de programmaproject met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Bovendien ontvingen de deelnemers van de afgelopen NWD een folder op naam op hun huisadres.

De thema's voor NWD 9 zijn:

- wiskunde om de wiskunde: codes en cryptografie
- wiskunde en zeevaart
- wiskunde en modelleren
- wiskunde, statistiek en sport

- wiskunde door de ogen van de leerlingen
- wiskunde en het vrije veld
- wiskunde en filosofie
- wiskunde en actualiteit
- wiskunde en het vmbo.

U kunt ook zelf een workshop verzorgen op de NWD. Een deskundige jury maakt een keuze uit de ingediende voorstellen. De beloning is gratis deelname aan de NWD. Meer informatie vindt u in de programmaproject.

Nam u in februari jl. niet deel aan de NWD, maar wilt u wel graag een folder op naam ontvangen, stuur dan uw adresgegevens naar NWD, t.a.v. Ank van der Heiden, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht. Per e-mail ([nwd@fi.uu.nl](mailto:nwd@fi.uu.nl)) of fax (030-2660430) kan ook.





## De grafische rekenmachine, computeralgebra en een tekstverwerker in één programma

-  Van tekst naar algebra naar tekst
-  Tekent grafieken
-  Maakt tabellen bij formules
-  Rekent met matrices
-  Spreadsheet
-  Berekent regressie op statistische data
-  Transporteert data van en naar een aangesloten grafische rekenmachine

en nog veel meer...

Prijs van een single user licentie: € 45,00 (incl btw)



DÆDALUS  
ONDERWIJS  
PRODUCTIES

Postbus 60 9350 AB Leek  
Internet: [www.educadbv.nl](http://www.educadbv.nl)  
Tel: 0594 516751  
Fax: 0595 517181  
Mob: 0653 219852



|                                        |                                                                     |    |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----|
|                                        | Inhoudsopgave                                                       | 2  |
|                                        | Over het laatste nieuws                                             | 3  |
| G. Alberts                             | Een halve eeuw computers in Nederland:                              |    |
|                                        | 1. Een willekeurig getal                                            | 6  |
| G. Koolstra                            | Digitale leeromgevingen: een kritische verkenning                   | 9  |
| S. Palha / M. van Reeuwijk             | Zie je het verband?                                                 | 12 |
| F. Spijkers                            | Excel in de wiskundeles                                             | 16 |
| M. Doorman / A. Mooldijk               | Een discussie op internet                                           | 20 |
| C. van de Giessen                      | Computeralgebra in 4 vwo, verslag van een experiment                | 25 |
| J. van den Brink / P. Boon / V. Jonker | Basisvaardigheden ruimtemeetkunde op de computer                    | 30 |
| P. Drijvers                            | Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen | 36 |
| M. Kindt                               | Wat te bewijzen is                                                  | 42 |
| A. Heck                                | Stilstaan bij lopen                                                 | 44 |
| C. van den Boer / D. van Eerde         | Wisbaak: software voor taalzwakke leerlingen                        | 51 |