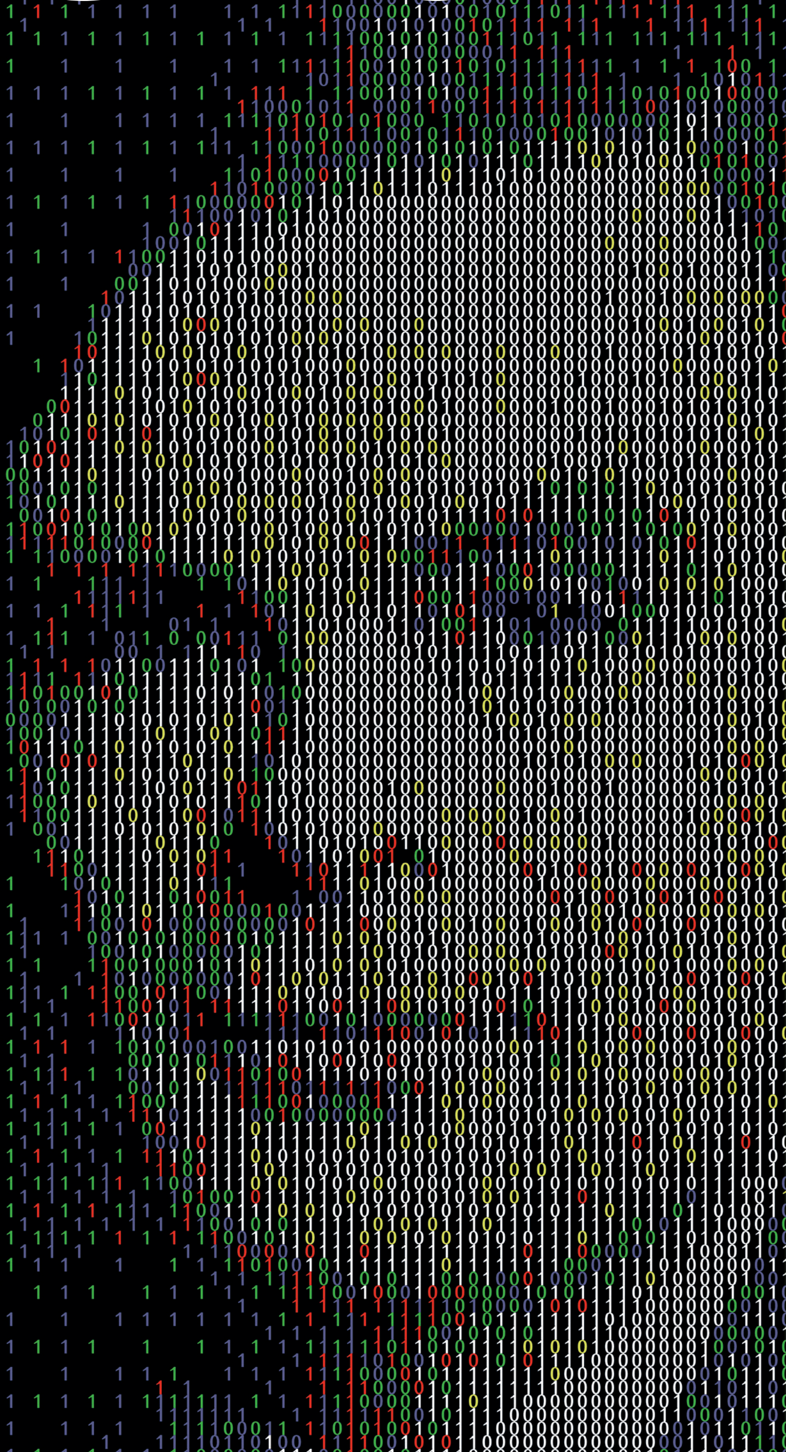
EUCLIDES
ICT-SPECIAL



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Computationeel denken

Excel bij de beroepsgerichte vakken vmbo

Mathematische besliskunde

Programmeren in Python

Toepassingen van GeoGebra in de les

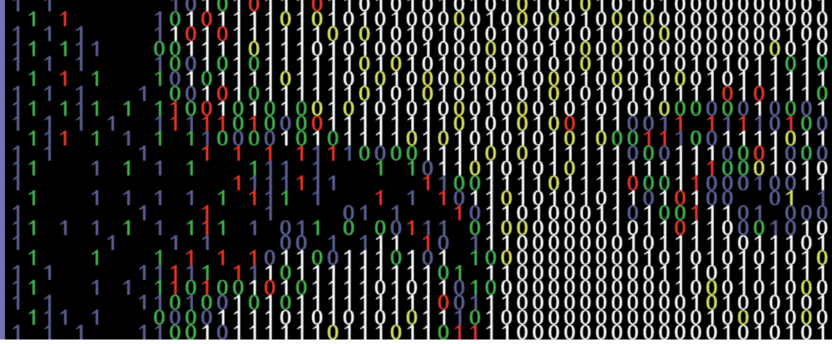
NR.4

JAARGANG 97 - FEBRUARI 2022

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR4

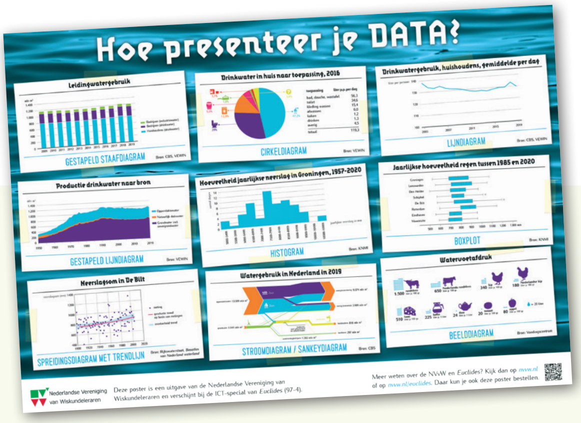


IN DIT NUMMER


Afbeelding voorkant: Alan Turing in 100111110110000 enen en nullen.

Ontwerp: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN



Poster datavisualisatie

Bij deze ICT-special hoort een poster over datavisualisatie. Het doel van de poster is dat leerlingen in één blik een overzicht zien van veelgebruikte diagrammen.
Als onderwerp voor de diagrammen is het thema ‘Water’ gekozen. De poster kun je gebruiken bij lessen statistiek om te bespreken welke data zich lenen voor welke representatie. We zijn benieuwd hoe de poster ingezet gaat worden.

Heb je een leuk lesidee dat je wilt delen met collega’s, laat het de redactie weten (*vakbladeuclides@nvvw.nl*). De verzamelde lesideeën zullen we op de site zetten.

Wil je een extra poster ontvangen?
Dat kan via de volgende link:
https://www.nvvw.nl/euclides/statistiek-poster/
Je betaalt dan alleen voor de verzendkosten.
Op de NWD kunnen deelnemers een extra poster gratis afhalen bij de NVvW-stand.

Kort vooraf

Meer dan een jaar geleden zijn we begonnen met het maken van deze ICT-special. Een gastredactie (Rogier Bos, Paul Drijvers, Sietske Tacoma, Melanie Steentjes en Mark Timmer) kwam bij elkaar om te brainstormen over de inhoud. Het doel was om een overzicht te krijgen van wat er nu op ICT-gebied speelt in het wiskundeonderwijs. Daarnaast wilden we laten zien hoe ICT in het wiskundeonderwijs zich de laatste jaren heeft ontwikkeld, waarbij we de ICT-special van de *Nieuwe Wiskrant* uit 2002 als een soort ijkpunt namen.
De artikelen zijn in een aantal thema’s te groeperen: ICT generiek, ICT-toepassingen, ICT-toetsen en digitale feedback. Maar liefst vier bijdragen zijn specifiek voor het vmbo en de onderbouw havo/vwo geschreven: Excel-applicaties in het vmbo, digitaal toetsen in het vmbo, leraren opleiden voor digitale geletterdheid en ICT en de rubriek ‘wiskunde digitaal’.
Deze ICT-special verschijnt in een grotere oplage dan normaal. Op een aantal evenementen worden deze extra exemplaren uitgereikt aan collega’s die de weg naar de NVvW nog niet hebben gevonden. Een hartelijk woord van welkom aan deze nieuwe en hopelijk blijvende lezers van *Euclides*! De poster met datavisualisaties is een cadeautje van de NVvW. Tja, en wat moet er dan op de voorkant van zo’n ICT-special? De Intel 8086 CPU waar het destijds allemaal mee begon is niet zo fotogeniek. Van Ada Lovelace, die al in 1843 ‘computational thinking’ uitvond, bestaan geen foto’s. Dus werd het Alan Turing. Hij zou dit jaar 1101110 jaar geworden zijn, of 110 als je nog decimaal denkt na het lezen van deze ICT-special.

Tom Goris

Voor de ICT-special van de *Nieuwe Wiskrant*.
vakbladeuclides.nl/974_nieuwewiskrant

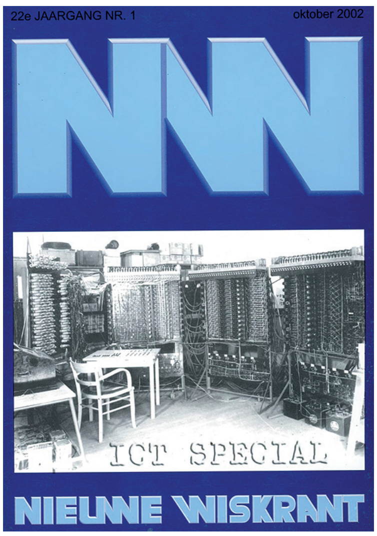
Paul Drijvers

Terugblik op de toekomst

Twintig jaar geleden verscheen een themanummer van de *Nieuwe Wiskrant* over ICT in het wiskundeonderwijs. En vandaag dus een vergelijkbare special van *Euclides*. Wat is er de afgelopen twee decennia veranderd? En wat is er in die tijd, opvallend genoeg, hetzelfde gebleven? Wat zijn de uitdagingen voor de komende twintig jaar? Paul Drijvers blikt terug en vooruit.

Inleiding

Het gebruik van digitaal gereedschap in het wiskundeonderwijs blijft een onderwerp dat gemengde reacties oproept. Enerzijds wordt bepleit dat je wiskunde toch echt alleen maar leert als je pen en papier gebruikt en wiskunde 'met hand en hoofd' doet. De wiskunde is niet wezenlijk veranderd, dus waarom zou het leren en onderwijzen van wiskunde wel moeten veranderen? Gaat wiskundeonderwijs niet 'naar de knoppen' als je zelf niet meer hoeft na te denken, maar alles aan een apparaat kunt uitbesteden?
Anderzijds is er de mening dat digitale technologie nu eenmaal onder ons is, in werk en privéleven, en dat de school zich daarvan niet moet vervreemden. Specifiek voor wiskunde maakt de beschikbaarheid van ICT duidelijk dat algoritmische en procedurele technieken prima door een apparaat kunnen worden uitgevoerd. Waarom moet de hedendaagse leerling deze procedures met de hand leren uitvoeren? Moet die niet vooral leren om op een verstandige en intelligente manier om te gaan met de digitale middelen om ons heen? En trouwens, kunnen die digitale middelen het leerproces niet ondersteunen en bevorderen?
In het licht van deze discussie is het interessant om de inhoud van dit themanummer naast die van een vergelijkbaar themanummer van de *Nieuwe Wiskrant* van twintig jaar geleden te leggen. Wat is nog hetzelfde, wat is er veranderd, wat er zou kunnen of moeten veranderen? Op deze vragen ga ik hieronder in.



figuur 1 Nieuwe Wiskrant ICT special, oktober 2002

> "De invoering van digitale technologie in de wiskundeles blijkt weerbarstiger dan we twintig jaar geleden dachten"

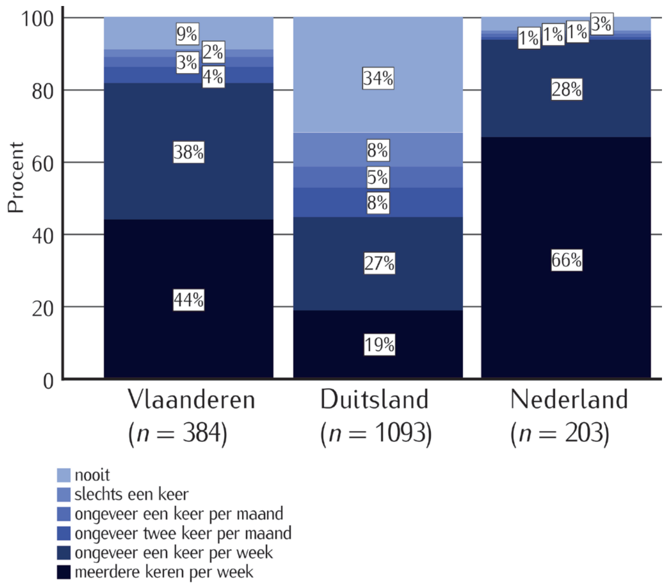
Niet veel is veranderd

Sommige onderwerpen uit het themanummer uit 2002 zien we ook in het huidige nummer weer terug. Denk bijvoorbeeld aan het gebruik van Excel bij statistiek: Frits Spijkers beschrijft in 2002 een aantal toepassingen die nog steeds actueel zijn en die goed passen bij de manier waarop Sylvia van Borkulo Excel inzet in het huidige nummer. Ondanks de mogelijkheden die Excel biedt, wordt het in de dagelijkse praktijk nog maar weinig ingezet.
Een tweede voorbeeld is het modelleren van bewegingen door metingen in video's, zoals beschreven door André Heck in 2002. Zou dat artikel niet ook goed in het huidige themanummer passen? We zien dat veel mooie ideeën en voorbeelden uit 2002 nog maar beperkt in praktijk worden gebracht. Weinig nieuws onder de zon dus, ondanks de verbetering van technologieën en interfaces?

Wat evenmin is veranderd, is de centrale positie van het schoolboek: de manier waarop ICT daarin aan de orde komt, is van groot belang voor de implementatie in de klas. De technologie die we in de boeken voor de tweede fase van havo en vwo vooral terugzien is de grafische rekenmachine, ook alweer twintig jaar oud. De discussie over wat de GR wel en niet mag kunnen bij het centraal examen gaat nog steeds door. De vmbo-examens wiskunde en rekentoetsen worden wel online afgenomen. Hoewel evenmin zonder kritiek is daar wel een stap gezet met digitaal toetsen van wiskunde.
Heeft de inzet van ICT in de wiskundeles geleid tot veranderingen in de leerprestaties van leerlingen? Een internationale overzichtsstudie uit 2020 van Hillmayr en collega's[1] naar het effect van ICT bij de bètavakken laat een positief leereffect zien, met een gemiddelde effectgrootte in de orde van $g = 0{,}65$. Dat is niet heel groot, maar wat groter dan vergelijkbare bevindingen in het verleden en zeker niet te verwaarlozen. Dat geeft de burger moed! Dergelijke studies geven ook nadere nuanceringen. Zo is de inzet van ICT vaak minder succesvol naarmate de implementatie grootschaliger is, en werkt ze beter bij wat oudere leerlingen dan bij jongere. Een beperking van dergelijke studies is natuurlijk dat de leereffecten sterk afhangen van de kwaliteit van de ICT en de inzet in de klas en die blijft buiten beschouwing.
Alles bij elkaar zien we dat de invoering van digitale technologie in de wiskundeles weerbarstiger is dan we twintig jaar geleden dachten. Het kost kennelijk veel tijd en moeite om in de praktijk daadwerkelijk te profiteren van de potentie die er volgens de reviewstudies wel degelijk is.

Heel veel verandert

Tegelijkertijd is er ook veel veranderd de afgelopen twintig jaar. Als ik mijn buurmeisje – ze zit in groep 3 – vraag wat ze het liefst doet op school, antwoordt ze: 'met de iPad'. Die blijk je dan op het digibord van de juf te moeten reserveren. Dat zou twintig jaar geleden ondenkbaar zijn geweest. ICT beïnvloedt wel degelijk de praktijk in de klas.
De meest spectaculaire recente verandering werd uit nood geboren: het afstandsonderwijs dat ineens ontstond toen de scholen in maart 2020 sloten vanwege de pandemie. Hoewel veel wiskundeleraren hierdoor overvallen werden – in het Engels wordt de uitdrukking *emergency remote teaching* gebruikt – ging men massaal over op videolessen. Toch waren de eerste ervaringen vrij positief. Zoals beschreven in het artikel van Layla van Goor elders in dit nummer bleek uit een online vragenlijst onder Duitse, Vlaamse en Nederlandse wiskundeleraren en hun leerlingen in mei 2020 dat veel docenten regelmatig online contact hadden met hun leerlingen, zie figuur 2. Ook waren zowel leraren als leerlingen behoorlijk tevreden over de technologie. Leerlingen vonden dat hun docent het goed deed. Zelfs over online interactie met leerlingen, wat vaak gezien wordt als een beperking van afstandsonderwijs, waren docenten niet alleen negatief. Ze zagen ook nieuwe mogelijkheden, bijvoorbeeld voor individuele chats met leerlingen die ze in een volle klas over het hoofd zagen. In figuur 2 zien we wel grote verschillen tussen landen: kennelijk maken regelgeving en onderwijscultuur uit voor de praktijken van leraren. Tussen de landen zijn er bijvoorbeeld verschillen in technologische infrastructuur op school en thuis, maar ook tussen richtlijnen vanuit ministeries van onderwijs.
Een kanttekening bij deze bevindingen is dat het om een momentopname ging vroeg in de lockdownperiode. Bij de herhaling van de vragenlijst in mei 2021, een jaar later, lijken de meningen wat genuanceerder zijn. Mogelijk voerde aanvankelijk de opluchting van 'hé, het werkt' de boventoon, terwijl men op termijn wat meer beperkingen is gaan ervaren. Verder valt op dat de betrokken leraren wel veel gebruik maakten van algemene tools, zoals Teams of Zoom, maar specifieke wiskundesoftware minder frequent gebruikten. Vermoedelijk vroeg de omschakeling naar online zoveel energie, dat de gebruikelijke wiskundesoftware even buiten beeld bleef.



figuur 2 Frequentie van synchroon leraar-leerling contact via videolessen en dergelijke in mei 2020 in Vlaanderen, Duitsland en Nederland [2]

Samengevat zien we in de laatste twintig jaar toenemend gebruik van ICT in het (wiskunde)onderwijs. Het gaat in veel gevallen om generieke tools, die niet specifiek op wiskunde betrekking hebben. Mijn indruk is dat er wat betreft de integratie van specifieke wiskundetools en bijbehorende didactieken nog werk aan de winkel is.

Agenda voor verdere verandering

Het mag duidelijk zijn dat de inzet van ICT in de wiskundeles nog in ontwikkeling is. We zijn er nog niet. Wat moet er gebeuren om verdere verandering vorm te geven, met als uiteindelijke doel natuurlijk eigentijds en goed wiskundeonderwijs? Ik noem een vijftal punten, die op het bordje liggen van docenten, maar ook van lerarenopleiders, curriculumontwikkelaars, ontwikkelaars van leermiddelen en de overheid.

Curriculum

Ten eerste moeten we bepalen hoe belangrijk basisvaardigheden zijn en hoe die zich verhouden tot de hogere orde leerdoelen die vaak ook in curricula worden beschreven. Hoe ziet een curriculum eruit dat leerlingen voorbereidt op burgerschap en beroep, waarin ICT een grote rol speelt? Natuurlijk worden hogere orde vaardigheden steeds belangrijker, maar we weten nog onvoldoende welke basisvaardigheden daarvoor voorwaardelijk zijn. Hoe belangrijk is het om met de hand functies te differentiëren, ook al kan het apparaat dat ook, om een goed overstijgend inzicht te krijgen in wat differentiëren is? De balans tussen basisvaardigheden en hogere orde vaardigheden, die door de beschikbaarheid van ICT nog pregnanter is, is subtiel. Een goede balans hiervan in curricula is nog niet uitgekristalliseerd.

Digitale tools

Ten tweede is de vraag wie de digitale tools van de toekomst ontwikkelt en hoe we vanuit het wiskundeonderwijs daarop invloed kunnen uitoefenen. ICT-ontwikkeling wordt veelal vanuit de industrie geïnitieerd, maar waar het (wiskunde)onderwijs betreft zou het goed zijn als deze ontwikkelingen in publiek-private samenwerking plaatsvinden. Daarmee zou het onderwijsveld kunnen meedenken over wat wenselijk of juist minder geschikt is voor het bereiken van de gestelde leerdoelen.

Digitale leeractiviteiten

Als we eenmaal een adequaat curriculum en geschikte tools hebben, dan is ten derde de kunst om daarbij goede activiteiten en opdrachten te ontwerpen. 'Digitaal design' is een vak apart en een taak voor pen-en-papier is niet vanzelf een goede digitale taak. Het is belangrijk dat ontwikkelaars, auteurs en docenten zich hierin verder professionaliseren.

Digitale didactiek

Een vierde punt is het ontwikkelen van passende digitale didactiek. Wat doe je als docent wel en niet als leerlingen met ICT-gereedschap aan de slag zijn? Soms kunnen docenten de neiging hebben om terug te treden als ICT een rol speelt, of om geen aandacht te besteden aan de technieken en de knoppen. Het is de vraag of dat een juiste opstelling is: juist omdat wiskundig inzicht nodig is bij het gebruiken van tools, zal de docent een belangrijke rol spelen in dit subtiele samenspel. In de praktijk zullen didactieken moeten ontstaan die passen bij de beschikbare hulpmiddelen en de beoogde wiskundige leerdoelen. Ook dit is een proces van professionele ontwikkeling van alle betrokkenen.

Toetsing met ICT

Als vijfde en laatste punt noem ik toetsing met ICT. Dat omvat zowel formatieve als summatieve toetsing. Voor formatieve toetsing biedt ICT veel mogelijkheden, bijvoorbeeld voor automatische beoordeling, intelligente feedback en persoonlijke leerroutes. Toch zijn die op het ogenblik nog niet uitontwikkeld. Bij summatieve toetsing is de vraag wat we willen toetsen en wat een leerling daarbij aan een apparaat kan uitbesteden. Welke vaardigheden moeten per se met de hand worden beheerst? Is een tweetrapsexamen, met een pen-en-papier deel en een digitaal deel, een geschikte aanpak? Deze vragen hangen natuurlijk sterk samen met de inhoud van het curriculum, het eerste punt hierboven.

Tot slot

Als we de *Nieuwe Wiskrant* van twintig jaar geleden vergelijken met de huidige *Euclides ICT-special*, dan spelen nog dezelfde thema's. Tegelijkertijd zijn er grote ontwikkelingen geweest op het gebied van de ontwikkeling en verspreiding van digitale tools voor wiskunde. Het online onderwijs tijdens de schoolsluiting heeft de rol van ICT in het onderwijs - misschien meer in het algemeen dan specifiek voor wiskunde - een boost gegeven. Wat blijft, is een aantal cruciale vragen rond curriculumontwikkeling, digitaal ontwerp en digitale toetsing.
Natuurlijk lost de inzet van ICT niet alle problemen van het wiskundeonderwijs op. Ik denk wel, gesteund door veel onderzoek, dat verstandig ICT-gebruik in de wiskundeles kan leiden tot eigentijdser en beter wiskundeonderwijs. Daarbij moeten we ons niet te

bescheiden opstellen, maar veeleisend zijn ten aanzien van de wiskundige en didactische mogelijkheden van de beschikbare tools. Daarnaast vraagt dit om een proces van professionalisering van alle betrokkenen. Ik denk dat we op de goede weg zijn, al zal het wiskundeonderwijs over nog eens twintig jaar vast ook nog niet af zijn. Maar dat houdt het juist boeiend!

Noten

[1] Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S.I., & Reiss, K.M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education, 153. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897*

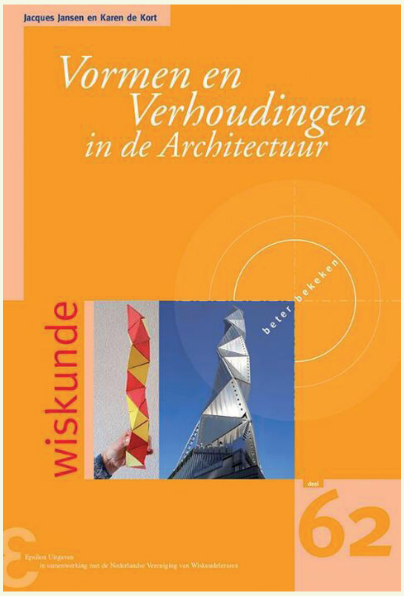
[2] Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., Mol, A., Barzel, B., Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID19 lock down. *Educational Studies in Mathematics. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s10649-021-10094-5.pdf*

Over de auteur

Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij de Universiteit Utrecht en wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *P.Drijvers@uu.nl*

Verschenen:

Vormen en verhoudingen in de architectuur



Auteurs: Jacques Jansen, Karen de Kort
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam
ISBN: 9789050411882
Prijs: € 10,-

Architectuur en wiskunde ontmoeten elkaar op het raakvlak van kunst en wetenschap. Zoals de wiskunde uitspraken doet over verhoudingen, zet de architectuur deze in om uitdrukking te geven aan een ruimte. Zo ook de koepel, deze kent zowel constructieve als esthetische eigenschappen. Verder nemen we je mee langs de piramidegebouwen van toen en nu, regelmatige en andersoortige veelvlakken. We laten voorbeelden in de architectuur zien en passen wiskundige berekeningen toe. Je neemt kennis van de matenstelsels van Le Corbusier en Dom Hans van der Laan. Ook word je uitgedaagd om met behulp van elementaire vormen te gaan ontwerpen.

Mark Timmer en Jarco Slager

Computationeel denken via dynamisch programmeren in 5 vwo

Computationeel denken zal in de toekomst een steeds grotere rol krijgen in ons wiskundecurriculum.[1] Jarco Slager ontwikkelde daarom in het kader van zijn afstudeeronderzoek een lessenserie over dynamisch programmeren voor 5 vwo wiskunde B, waarin verscheidene aan computationeel denken gerelateerde vaardigheden centraal staan. In dit artikel doet hij samen met Mark Timmer, zijn afstudeerbegeleider, verslag van de resultaten.

Inleiding

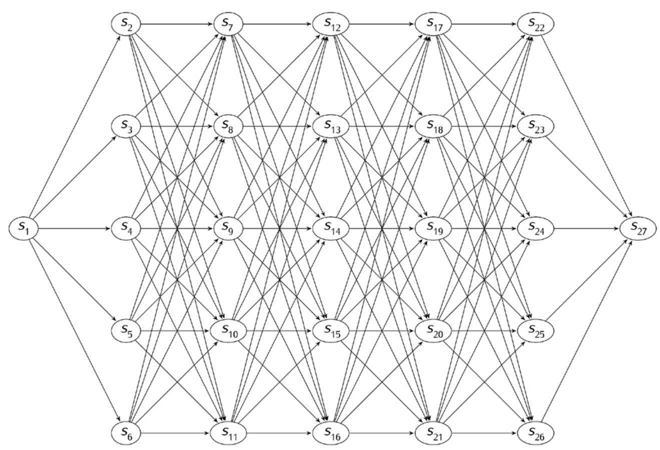
Computationeel denken is een mindset waarbij naar problemen wordt gekeken op een manier die het mogelijk maakt om ze algoritmisch (meestal met gebruik van ICT) op te lossen. Te denken valt aan zaken zoals data-representatie, abstractie, decompositie en het omgaan met computationele complexiteit. Het landelijke vernieuwingsproject Curriculum.nu ziet computationeel denken zelfs als een van de belangrijkste onderdelen van digitale geletterdheid, en hoopt leerlingen al vanaf jonge leeftijd hierin te gaan scholen.

Tot voor kort was er nog weinig onderzoek gedaan naar de mogelijkheden en didactische aandachtspunten van computationeel denken binnen het wiskundeonderwijs. Een consortium van de Universiteit Utrecht, de Radboud Universiteit, SLO en een vijftal vo-scholen werkt daarom momenteel aan een praktijkgericht onderzoek dat lesmateriaal ontwikkelt over computationeel denken. Ook vanuit de Universiteit Twente is al enkele ervaring opgedaan, en zijn werkmiddagen ontwikkeld over het algoritmeontwerpparadigma branch-and-bound [2] en over K-means clustering.[3] In dit onderzoek bouwen we hierop voort met lesmateriaal over dynamisch programmeren, een bekende techniek op het raakvlak van wiskunde en informatica waarbij lastige problemen worden opgedeeld in kleinere subproblemen. Door de oplossingen van deze subproblemen op een slimme manier te combineren tot een oplossing van het complete probleem, wordt aanzienlijke tijdswinst bereikt. Met een focus op zowel decompositie als computationele complexiteit leent dynamisch programmeren zich uitstekend voor het ontwikkelen van computationeel denken.

Kortste pad via dynamisch programmeren

Een van de eenvoudigste toepassingen van dynamisch programmeren is het vinden van kortste paden in grafen.

De meest voor de hand liggende manier om de kortste afstand te vinden tussen twee punten in een graaf is het berekenen van de lengte van ieder pad tussen deze twee punten, en daar dan het minimum van te nemen. Echter, het aantal paden neemt bij realistische grafen al snel immense hoeveelheden aan – de zogeheten 'combinatorische explosie'. Beschouw bijvoorbeeld de graaf in figuur 1, die uit 27 punten verdeeld over 7 stadia bestaat. Voor het gemak beperken we ons in het lesmateriaal tot grafen van deze vorm, waarbij ieder punt altijd met hetzelfde aantal stappen bereikt wordt. Vanzelfsprekend is het mogelijk om dit uit te breiden tot complexere situaties.



figuur 1

Vanuit ieder punt is het mogelijk om naar ieder punt uit het volgende stadium te gaan. Eenvoudige combinatoriek leert ons dat dit in totaal maar liefst $5^5 = 3.125$ routes van s_1 naar s_{27} geeft. Vanwege de exponentiële groei levert een verdubbeling van het aantal stadia geen verdubbeling van het aantal routes op, maar loopt het al snel uit de hand. Zouden we 52 punten in eenzelfde structuur gieten, met een startpunt s_1 en een eindpunt s_{52}, en met 10 stadia van 5 punten ertussen, dan hebben we ineens te maken met $5^{10} = 9.765.625$ routes. Als we in deze graaf het kortste pad willen vinden tussen het begin- en eindpunt, dan is het berekenen van de lengte van ieder pad en het vinden van het minimum dus een behoorlijke opgave. Bij nog grotere grafen is deze aanpak al snel niet meer uitvoerbaar. Dynamisch programmeren kan het aantal benodigde berekeningen drastisch reduceren. Eenvoudig gezegd werken we daarbij 'van achter naar voren', door te beginnen met kleine routes en die uit te bouwen tot steeds grotere routes totdat we ons initiële probleem hebben opgelost. Informeel is het algoritme als volgt, waarbij we de term 'opvolger' gebruiken voor alle punten die in één stap vanuit een punt te bereiken zijn:

Initialisatie

- De kortste afstand van het eindpunt naar zichzelf is 0.
- De kortste afstand van de punten in het een-na-laatste stadium naar het eindpunt zijn gewoon hun afstand tot dat eindpunt.

Iteratieve stap

- De kortste afstand van een punt p in het twee-na-laatste stadium naar het eindpunt e vind je door voor ieder van de opvolgers van p te kijken hoe lang de route via die opvolger als tussenstap zou zijn. Je neemt vervolgens het minimum van die afstanden. Wiskundig:

$$\mathrm{d}(p,e) = \min_{t \in O(p)} \left(\mathrm{d}(p,t) + \mathrm{d}(t,e)\right)$$

  waarbij $O(p)$ de verzameling van opvolgers van p is. Merk op dat de kortste afstanden vanuit die opvolgers naar het eindpunt al bekend zijn, omdat we die in de vorige stap al berekend hebben.
- Herhaal het bovenstaande voor ieder stadium, waarbij je steeds dichter richting het beginpunt werkt.

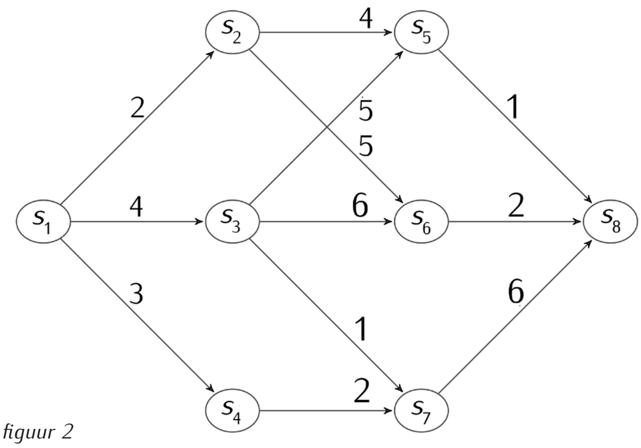
Het algoritme stopt na het berekenen van de minimale afstand van het beginpunt naar het eindpunt, en geeft als output deze afstand en de te volgen route.

Merk op dat we in dit algoritme slechts één minimalisatie hoeven te doen voor ieder punt dat niet direct aan het eindpunt grenst. Het aantal routes dat daarbij met elkaar wordt vergeleken hangt af van de uitgaande graad van de punten. In het gegeven voorbeeld in figuur 1 komt het rekenwerk neer op 6 initialisaties en 21 minimalisaties, waarbij per minimalisatie vijf optellingen worden gedaan en dus vier vergelijkingen nodig zijn – totaal betreft het dus 105 optellingen en 84 vergelijkingen. Het moge duidelijk zijn dat dit een stuk minder werk is dan het berekenen van de lengte van 3.125 routes en het bepalen van de kleinste daarvan. In het geval van de eerder-genoemde 52 punten groeide het aantal routes naar ruim 9 miljoen, terwijl er via dynamisch programmeren nog steeds slechts 230 optellingen en 184 vergelijkingen nodig zijn.

De lessenserie

Om leerlingen te trainen in computationeel denken en ze een basis te geven in dynamisch programmeren, is een lessenserie van drie lessen ontworpen. Als doel voor de lessen is gesteld dat ze moeten motiveren en dat ze begrip voor dynamisch programmeren moeten creëren. De gedetailleerde doelen en theoretische onderbouwing daarvan zijn te vinden in het bijbehorende afstudeer-verslag van Jarco.[4]
Tijdens de eerste les wordt leerlingen een eerste idee gegeven wat betreft de opzet van dynamisch programmeren. Het belangrijkste daarbij is het 'van achter naar voren'-concept. Hiertoe beginnen ze met het spelen van wat potjes *Nim*, een spel met lucifers waarbij twee spelers om-en-om één, twee of drie lucifers pakken en degene die de laatste lucifer pakt verliest. Leerlingen wordt na enige tijd gevraagd om een winnende strategie te verzinnen. De hoop is dat ze bedenken dat je met één lucifer verliest, en dus wilt zorgen dat je tegenstander eindigt met één lucifer. Om dat voor elkaar te krijgen moet jij twee, drie of vier lucifers hebben, dus zou je tegenstander in de voorgaande beurt vijf lucifers moeten hebben. Dan kun jij – ongeacht wat de ander kiest – het aantal daarna reduceren tot één. Dan moet de sprong gemaakt worden naar het idee dat je, om de tegenstander op vijf lucifers te krijgen, moet zorgen dat ze de beurt ervoor negen lucifers hebben – dan krijg jij er immers zes, zeven of acht en dan kun je er dus altijd vijf van maken, et cetera. Na het bespreken van de strategie voor *Nim* wordt het concept dynamisch programmeren geïntroduceerd, met een focus op het opdelen in eenvoudigere deelproblemen en 'beginnen aan het eind'. Tijdens de tweede les gaan leerlingen aan de slag met het bepalen van kortste paden op basis van een eenvoudige graaf, zie figuur 2. >

Zo maken ze kennis met de basisconcepten en krijgen ze enig gevoel voor hoe een oplossing tot stand kan komen. De strategie om achteraan te beginnen wordt ook al toegepast op deze graaf, inclusief bijbehorende wiskundige terminologie en notatie zoals 'arg $\min_x f(x)$'. De leerlingen werken dit met de hand uit, wat prima kan in zo'n klein netwerk.



figuur 2

Tijdens de derde les gaan leerlingen met Excel aan het werk om het grotere probleem van figuur 1 op te lossen. Voorafgaand moeten ze eerst nadenken over het aantal mogelijke routes, evenals het effect van het toevoegen van extra stadia op de tijdsduur van de brute-forceaanpak en van dynamisch programmeren. Zo ervaren ze de impact die dynamisch programmeren heeft op de computationele complexiteit van de oplossing. Daarna lossen ze het kortstepadprobleem op door een deels ingevuld Excel-document te doorgronden en aan te vullen. Hierbij maken ze kennis met datarepresentatie en met het gebruik van ICT voor het algoritmisch oplossen van een groot wiskundig probleem.

Ervaringen en conclusie

Computationeel denken zal naar verwachting een belangrijke bouwsteen vormen binnen het wiskundecurriculum van de toekomst. We zijn blij hier een bijdrage aan te hebben kunnen leveren met nieuw lesmateriaal over dynamisch programmeren.

Helaas was het vanwege corona niet mogelijk om de lessenserie uit te proberen in een volledige klas 5 vwo wiskunde B, maar gelukkig was het wel mogelijk om een aantal leerlingen uit 5 vwo die wiskunde D volgen het materiaal te laten uitproberen. Zij hebben de drie lessen tijdens een middag doorlopen, hebben alle opdrachten gemaakt en zijn vervolgens geïnterviewd over hun bevindingen. Ook heeft een expertpanel de lessen becommentarieerd.

Uit onze eigen analyse van het gemaakte materiaal blijkt dat vrijwel alle aan computationeel denken gerelateerde vaardigheden in meer of mindere mate aan bod komen. Uit de reacties van het expertpanel, de gemaakte opdrachten van de leerlingen en de interviews blijkt dat ook aan vrijwel alle ontwerpeisen betreffende motivatie en begrip is voldaan. Op detailniveau zijn er vanzelfsprekend nog verbeteringen mogelijk, maar *overall* waren de experts en leerlingen enthousiast over het materiaal en gaven de leerlingen aan een goed beeld te hebben gekregen van dynamisch programmeren. In een vervolgiteratie van het ontwerp zouden met name nog wat meer open opdrachten toegevoegd kunnen worden om leerlingen zelf meer te laten onderzoeken en ontdekken.

Wil je meer details weten over de theoretische achtergronden, de methodologie en/of de resultaten, of wil je ook aan de slag met het lesmateriaal (zowel beschikbaar in het Nederlands als het Engels), bekijk dan ook eens het bij dit onderzoek behorende afstudeerverslag (uitsluitend in het Engels) [4] of stuur een mailtje naar de auteurs.

Noten

[1] Timmer, M., & Tolboom, J. (2019). Computational thinking – een vooruitblik op het wiskundeonderwijs van de toekomst. *Nieuw archief voor wiskunde*, 5/20(1), 42-45.

[2] Timmer, M., & van der Meulen, J. (2018). Computational thinking in vwo 5: Een werkmiddag over 'branch and bound'. *Euclides*, 94(3), 14-17.

[3] Neeft, J. , & Timmer, M. (2020). Computationeel denken bij vwo wiskunde A: Een werkmiddag over het K-means-algoritme. *Euclides*, *96*(2), 8-11.

[4] Slager, J. (2021). *Dynamic Programming in Dutch Secondary Education*. (Masterscriptie, Universiteit Twente). *https://essay.utwente.nl/86275/*

Over de auteurs

Jarco Slager heeft een Bachelor Applied Mathematics en is momenteel student aan de eerstegraads lerarenopleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen aan de Universiteit Twente. E-mailadres: *jarcoslager27@hotmail.com.*

Mark Timmer is gepromoveerd theoretisch informaticus en werkt momenteel als wiskundedocent aan het Twents Carmel College te Oldenzaal en als vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente. E-mailadres: *m.timmer@utwente.nl.*

Sylvia van Borkulo

Computationeel denken in de wiskundeles Hoe krijg je dat voor elkaar?

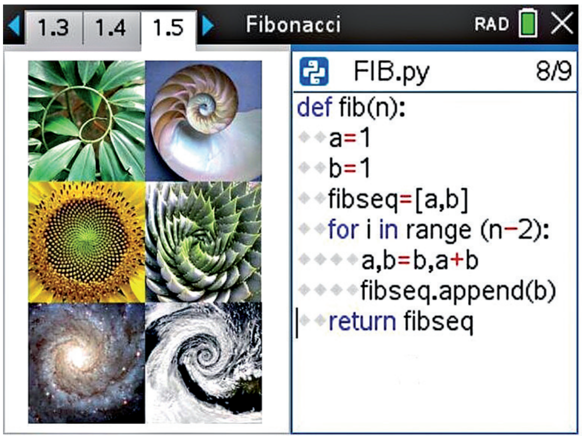
Computationeel denken staat in een groeiende belangstelling. Ook in de wiskundeles zijn er volop mogelijkheden om hier aandacht aan te besteden. Maar hoe doe je dat?

Inleiding

In de samenleving speelt ICT een steeds grotere rol. Om leerlingen voor te bereiden op deze samenleving en de toekomstige arbeidsmarkt is er in onderwijsbeleidsplannen steeds meer aandacht voor digitale geletterdheid.[1]
Onderdeel hiervan is het zogeheten 'computationeel denken', een manier van denken om problemen aan te pakken met digitale middelen, gebruikmakend van de principes van programmeren, zoals algoritmisch denken, patroon herkennen en abstraheren. Computationeel denken geeft handvatten om de digitale wereld op een diepere en rijkere manier te begrijpen. Technologie is dan niet alleen om te consumeren, maar vooral om creatief mee te zijn, aldus Simon Peyton-Jones in zijn TED lezing 'Teaching creative computer science' uit 2014.[2] Computationeel denken richt zich op deze creatieve manier van probleemoplossen, waarbij het stappenplan en de oplossing niet van tevoren duidelijk zijn of vastliggen. Het geeft leerlingen extra gereedschap om voorkomende problemen in allerlei vakken aan te pakken.
Het vak wiskunde leent zich er bij uitstek voor om computationeel denken te ontwikkelen. Er zijn duidelijk raakvlakken, denk aan aspecten zoals generaliseren, abstraheren, probleemoplossen, patroon herkennen en algoritmisch denken. Deze aspecten sluiten nauw aan bij wiskundig denken en dus zouden computationeel denken en wiskundig denken heel goed gecombineerd kunnen worden. Maar hoe besteed je aandacht aan computationeel denken in de wiskundeles en hoe integreer je het in het bestaande curriculum? Een pasklaar antwoord op deze vraag is moeilijk te geven. In dit artikel wil ik ideeën aanreiken door verschillende voorbeelden te geven. Hopelijk inspireert dat om mogelijkheden te verkennen om met computationeel denken aan de slag te gaan!
'Moeten we nu gaan programmeren?' is een vraag die wellicht bij je opkomt als je aan computationeel denken in het onderwijs denkt. Programmeren kan, maar hoeft niet. Voor computationeel denken heb je zelfs niet per se een computer nodig. Het kan ook 'unplugged', zonder computer. Of het kan aan de orde komen bij het gebruik van computerprogramma's die je al in de les hanteert, zoals Excel of GeoGebra. Van elk van deze mogelijkheden geef ik hieronder enkele voorbeelden. Eerst bespreek ik toegankelijke manieren om leerlingen te leren programmeren, daarna mogelijkheden om computationeel denken unplugged te beoefenen, en tot slot voorbeelden van computationeel denken waarbij gangbare tools worden gebruikt.

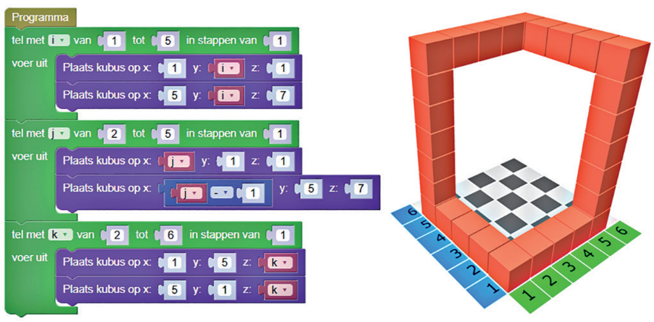
Computationeel denken door programmeren

Een vanzelfsprekende manier om computationeel denken toe te passen is door middel van programmeren. Een toegankelijke programmeertaal die veel gebruikt wordt om leerlingen te leren programmeren is Python. Tegenwoordig kun je in Python programmeren op de gangbare grafische rekenmachines zoals die van Texas Instruments, HP, Casio of NumWorks. Maar je kunt natuurlijk ook een computer of laptop gebruiken. Er kunnen ook koppelingen gemaakt worden met andere computers of apparaten. Zo kunnen bepaalde types TI rekenmachines een micro:bit© aansturen, een kleine computer waarmee leerlingen de mogelijkheden van elektronica kunnen ontdekken met lampjes en diverse sensoren. Je kunt hierbij denken aan het meten van temperatuur, magneetvelden (kompasfunctie) en acceleratie (trillingen).
De website van TI biedt kant-en-klaar lesmateriaal voor het leren van Python voor de STEM-vakken, waaronder bijvoorbeeld data-analyse, iteraties en functies, fractalen en reële functies.[3] In figuur 1 zie je een voorbeeld uit dit materiaal over het programmeren van iteraties en functies, namelijk de reeks van Fibonacci.



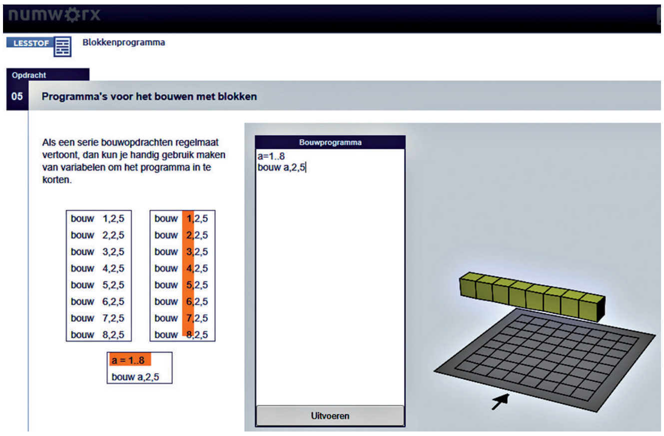
figuur 1 Python programmeren op de grafische rekenmachine, voorbeeld over de reeks van Fibonacci uit TI Python BootCamp Deel 2 Iteraties & Functies [3]

Lesmateriaal om leerlingen stap voor stap te begeleiden bij het leren programmeren in Python kun je vinden op de website van Felienne Hermans van Universiteit Leiden.[4] Het materiaal is erop gericht om toegankelijk te zijn voor gebruik in de klas door leerlingen en docenten zonder voorkennis van Python en bevat daarom veel uitleg en oefening. Het doel is vooral ook leerlingen aan te spreken die traditioneel niet voor programmeren zouden kiezen. De modules richten zich daarom juist op andere vakken dan de bètavakken, zoals Nederlands, kunst en geschiedenis. Programmeren kan ook meer visueel worden gedaan met eenvoudige 'programmeerblokken'. Het voordeel van deze aanpak is dat leerlingen minder tijd kwijt zijn met syntax-problemen en typefouten. Voorbeelden van visuele program-meertalen zijn Blockly[5], Scratch[6] of Snap![7] Een voorbeeld van Blockly programmeercode zie je in figuur 2.



figuur 2 Visueel programmeren in Blockly met resultaat in augmented reality op smartphone, ontwikkeld in project <colette/>

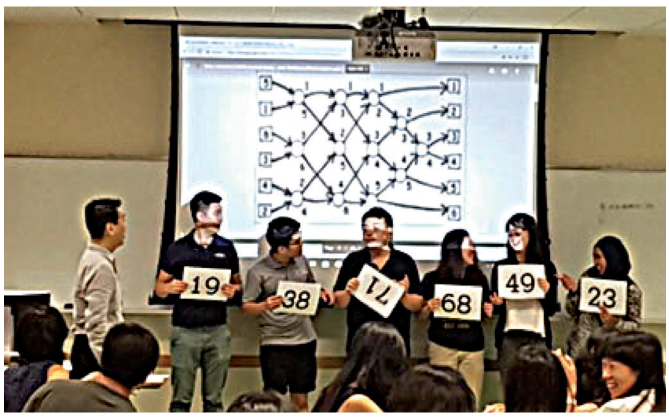
Het voorbeeld komt uit het Europees project '<colette/>' (**Co**mputational Thinking **L**earning **E**nvironment for **T**eachers in **E**urope)[8], waarin een database wordt ontwikkeld van taken voor computationeel denken die docenten eenvoudig kunnen aanpassen en gebruiken. In het voorbeeld moeten leerlingen een bouwwerk maken door kubussen te plaatsen met programmeercode. Leerlingen gebruiken hiervoor een smartphone en kunnen het geprogrammeerde bouwwerk in augmented reality van alle kanten bekijken.
Een andere, toegankelijke manier van programmeren met een beperkte en dus overzichtelijke syntax biedt de Numworx Digitale Wiskunde Omgeving.[9] In een serie opgaven kan programmeercode gebruikt worden om gebouwen van blokken te bouwen, zie figuur 3. Hierin komen de basisprincipes van programmeren aan de orde, zoals het gebruik van variabelen.



figuur 3 Blokken bouwen door te programmeren in Numworx Digitale Wiskunde Omgeving[9]

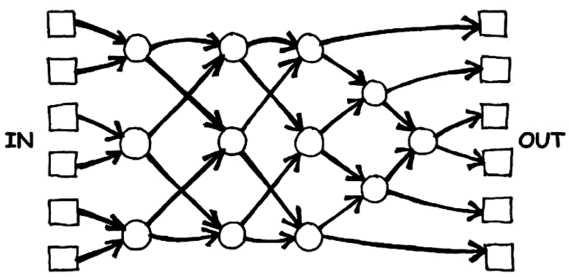
Computationeel denken 'unplugged'

Computationeel denken vereist niet noodzakelijkerwijs een computer. Het kan ook 'unplugged' beoefend worden. Op de website 'CS unplugged'[10] staan veel voorbeelden van unplugged activiteiten, bijvoorbeeld over sorteeralgoritmes.



figuur 4 Unplugged computationeel denken activiteit voor docenten[11] >

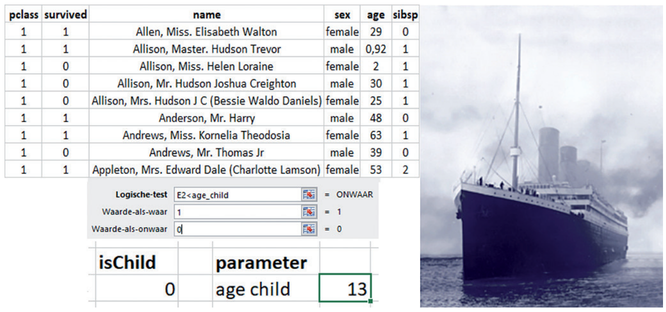
Andere voorbeelden zijn te vinden op KlasCement, dat lesmateriaal aanbiedt voor allerhande niveaus en onderwerpen (van primair tot beroepsonderwijs, van aardrijkskunde tot wiskunde) waarin eenvoudig gezocht en gefilterd kan worden.[12] Een voorbeeld van unplugged computationeel denken is een serie video's met doe-het-zelf-materiaal, puzzels, spelletjes en programmeeruitdagingen voor dagelijks gebruik in het gezin en op school. De video's zijn in het Engels en ondertiteld in het Nederlands.
Een website over de link tussen wiskunde en informatica is MATHmaniaCS. Mathmaniacs zijn 'persons exhibiting an excessive passion for MATHematics and Computer Science!'[13] De overzichtspagina van lessen biedt een gevarieerde serie onderwerpen voor unplugged computationeel denken, zoals binaire getallen, logica, grafen en sorteren, zie figuur 5.



figuur 5 Sorteernetwerk om te gebruiken op de grond

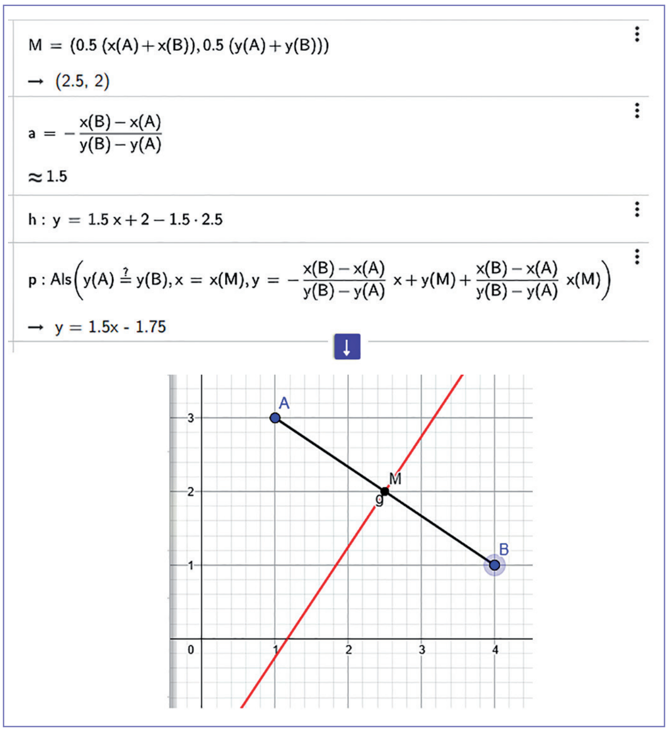
Computationeel denken met tools

Een voorbeeld van computationeel denken, waarbij gebruik gemaakt wordt van in het onderwijs gangbare tools, is ontwikkeld in een onderzoek naar computationeel en wiskundig denken van de Universiteit Utrecht in samenwerking met Radboud Universiteit, SLO en vijf scholen.[14] In dit project is in de afgelopen twee jaar lesmateriaal ontwikkeld met als uitgangspunt om dicht bij het wiskundecurriculum te blijven. Het materiaal voor 5 vwo wiskunde A sluit aan bij het onderwerp statistiek, gebruikmakend van Excel. Voor wiskunde B is het onderwerp functies en procedures voor het opstellen van raaklijnen met GeoGebra.[15] De lessen combineren 'unplugged' werk op papier met het gebruiken van tools op de computer. Het materiaal is inmiddels uitgeprobeerd op verschillende scholen.
In de wiskunde-A-lessen wordt gewerkt met de dataset met passagiersgegevens van de Titanic en wordt onderzocht of men uit de gegevens kan afleiden of 'vrouwen en kinderen eerst' van boord zijn gegaan. Met behulp van Excel worden gegevens uit kolommen gecombineerd en met formules wordt geoefend in het gebruik van condities en constructies zoals als-dan-anders, zie figuur 6. Na deze oefening met de gegevens van de Titanic passen leerlingen het geleerde toe in een tweede grote dataset waarbij ze een eigen onderzoeksvraag formuleren en onderzoeken. De voorlopige resultaten van het gebruik van de wiskunde-A-lessen laten zien dat leerlingen na het leren kennen van de functies in Excel beter weten hoe ze met behulp van de functies verbanden kunnen onderzoeken met Excel en dat een probleem hierbij in kleinere deelstappen kan worden opgedeeld.



figuur 6 Dataset Titanic in Excel: Vrouwen en kinderen eerst?

In de wiskunde B-lessen worden op papier procedures uitgewerkt voor het opstellen van bijvoorbeeld raaklijnen of middelloodlijnen, die vervolgens in GeoGebra worden ingevoerd, zie figuur 7. De beschikbare knoppen (bv. voor de



figuur 7 Algemene oplossing voor middelloodlijn met gebruik van condities in GeoGebra

middelloodlijn) worden niet gebruikt, maar de leerling gaat de stappen zelf programmeren. Om die procedures generiek te maken, worden parameters gebruikt, naast iteratiefuncties en als-dan-anders condities in GeoGebra-formules. Leerlingen maken zo kennis met principes uit het programmeren binnen een tool die ze al kennen uit de wiskundeles. De resultaten van het gebruik van de wiskunde-B-lessen laten zien dat de combinatie van 'plugged' en 'unplugged' activiteiten een zinvolle strategie is om aspecten van computationeel denken toe te passen.[16] De uitdaging zit voor de leerlingen vooral in het leren kennen van de tool, de syntax en in het gebruik van constructies met als-dan-anders. Het lesmateriaal wordt het komend schooljaar verder onderzocht en verbeterd, en na afloop van het project beschikbaar gesteld samen met een docentenhandleiding.

Tot besluit

Computationeel denken kan op veel manieren tot uiting komen. De kunst is om een passende vorm te kiezen voor de gegeven situatie. Hopelijk heeft dit artikel je ideeën aangereikt over de verschillende mogelijkheden en vormen waarin computationeel denken geleerd kan worden, en nodigt het je uit om zelf te gaan verkennen waar computationeel denken in jouw les een plaats kan krijgen.

Noten

[1] Website SLO over digitale geletterdheid: *https://www.slo.nl/thema/meer/digitale-geletterdheid/*, vakportaal digitale geletterdheid: *https://www.slo.nl/vakportalen/vakportaal-digitale-geletterdheid/*

[2] Simon Peyton-Jones (2014), TED lezing 'Teaching creative computer science': *https://youtu.be/Ia55clAtdMs*, in het Engels.

[3] Python programmeren op de rekenmachine, materiaal op de TI website: *https://resources.t3vlaanderen.be/t3vlaanderen-home/*

[4] Python in de klas: *https://felienne.gitbook.io/python-in-de-klas/*

[5] Blockly opdrachten: *https://www.programuurtje.org/blockly.html*

[6] Scratch opdrachten: *https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted* (kies Nederlands)

[7] Website 'De Schoonheid en Vreugde van Programmeren', leren programmeren met Snap!: *https://bjoc-nl.github.io/*

[8] Europees project <colette/>: *https://colette-project.eu/*, deels gefinancierd door Erasmus+ van de EU, 20201-DE03-KA201-077363. De ontwikkelde materialen komen in de loop van de komende twee jaar beschikbaar. Voor meer informatie, neem contact op met Sylvia van Borkulo (*s.vanborkulo@uu.nl*)

[9] Numworx Digitale Wiskunde Omgeving: *https://www.numworx.nl/*

[10] Website 'CS unplugged', computer science without a computer: *https://csunplugged.org/*

[11] Uit: Seow, P., Looi, C. K., How, M. L., Wadhwa, B., & Wu, L. K. (2019). Educational policy and implementation of computational thinking and programming: Case study of Singapore. In Computational thinking education (pp. 345-361). Springer, Singapore.

[12] Website KlasCement: *https://www.klascement.net/lesmateriaal*

[13] Website MATHmaniaCS: *http://mathmaniacs.org/*

[14] Deze lessenseries zijn ontwikkeld in het kader van het project 'Computationeel denken en wiskundig denken: digitale geletterdheid in wiskundecurricula', gefinancierd door NRO (projectnummer 00517751).

[15] Van Borkulo, S. P., & Drijvers, P. (2020). Het FIzier gericht op... Computationeel denken in de wiskundeles. *Euclides*, *96*(3), 20–21.

[16] Sylvia van Borkulo, Christos Chytas, Paul Drijvers, Erik Barendsen, and Jos Tolboom. 2021. Computational Thinking in the Mathematics Classroom: Fostering Algorithmic Thinking and Generalization Skills Using Dynamic Mathematics Software. In *The 16th Workshop in Primary and Secondary Computing Education (WiPSCE '21), October 18–20, 2021, Virtual Event, Germany*. ACM, New York, NY, USA, 9 pages. *https://doi.org/10.1145/3481312.3481319*

Over de auteur

Sylvia van Borkulo is universitair docent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en houdt zich bezig met technologie en wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *s.vanborkulo@uu.nl*

Melanie Steentjes

Excel-applicaties bij de beroepsgerichte vakken vmbo

Bij het centraal schriftelijk en praktisch examen (cspe) van de profielvakken in het vmbo wordt geregeld gebruik gemaakt van Excel-applicaties. Deze applicaties vragen in sommige gevallen ook reken- en wiskundevaardigheden. Melanie Steentjes heeft in opdracht van de werkgroep vmbo van de NVvW deze Excel-applicaties onderzocht.

Inleiding

Binnen het vmbo zijn er tien verschillende profielvakken waaruit een leerling kan kiezen. In tabel 1 staat een overzicht van de profielvakken. In dit artikel zal ik gebruik maken van de afkortingen van de verschillende vakken.

Bouwen, Wonen en Interieur	BWI
Dienstverlening en Producten	D&P
Economie en Ondernemen	E&O
Groen	
Horeca, Bakkerij en Recreatie	HBR
Maritiem en Techniek	MaT
Media, Vormgeving en ICT	MVI
Mobiliteit en Transport	M&T
Produceren, Installeren en Energie	PIE
Zorg en Welzijn	Z&W

tabel 1 Profielen in het vmbo en de gangbare afkortingen

Deze profielvakken worden met uitzondering van MaT afgesloten met een centraal schriftelijk en praktisch examen (cspe). Het cspe bestaat uit doorgaans vier onderdelen die meestal onafhankelijk van elkaar afgenomen kunnen worden. Het schriftelijk deel van de onderdelen van het cspe is deels op papier en deels digitaal. Bij veel cspe's wordt gebruik gemaakt van Excel-applicaties. Deze Excel-applicaties vragen in sommige gevallen ook reken- en wiskundevaardigheden. Als docent wiskunde op het vmbo weet je niet altijd wat er aan rekenen en wiskunde in andere vakken gedaan wordt en wat er bij de toetsing en examinering ervan al dan niet toepassingsgericht over gevraagd wordt of kan worden. Het is goed om daar wel van op de hoogte te zijn. Om die reden heb ik de cspe's van 2019 bekeken van vmbo basisberoeps (bb), kaderberoeps (kb) en gemengde leerweg (gl). Wat me vooral opviel was het werken met formules binnen Excel en wat daarbij van leerlingen gevraagd wordt. Ik zal mijn bevindingen illustreren aan de hand van een aantal voorbeelden.

Werken met formules

Het maken van formules ben ik tegengekomen bij de vakken BWI, D&P, E&O, HBR en MVI. In figuur 1 staat een voorbeeld van een opdracht uit het cspe van D&P voor vmbo bb. In figuur 2 vind je een uitwerking en in figuur 3 een deel van het bijbehorende correctievoorschrift. De opdracht gaat over de organisatie van een groot loop-evenement. Het bestand vb_kostenberekening_bb is een Excel-bestand. Dat moet een leerling bewerken en vervolgens opslaan onder zijn eigen naam. Zo kan de examinator (doorgaans de docent) het later corrigeren.

Uitvoering
- Open vb_kostenberekening_bb.
- Sla het op als vb_kostenberekening_bb_[jouw naam].
- Geef de cellen in de kolommen prijs per eenheid en (sub)totaal een opmaak met € en twee decimalen.
- Maak een overzicht van de kosten van de Hartloop.
- Gebruik de tabel kosten organisatie Hartloop op de volgende pagina.
- Neem de aantallen en prijzen per eenheid over uit de tabel.
- Bereken de (sub)totalen met formules.

figuur 1

Enige kennis van Excel wordt wel gevraagd. Zo moet de leerling de cellen een opmaak geven in euro's en op twee decimalen laten afronden. De aantallen en prijzen per eenheid vindt de leerling in het examen. Er staat expliciet in de opdracht dat de leerling de (sub)totalen moet berekenen met formules.

KOSTEN			
	aantal	prijs per eenheid	(sub)totaal
organisatie algemeen			
vergunning gemeente	1	€ 800,00	€ 800,00
verzekeringen	1	€ 2.200,00	€ 2.200,00
volgkaravaan	1	€ 7.300,00	€ 7.300,00
		subtotaal	€ 10.300,00
huur materialen			
mobiel toilet	12	€ 400,00	€ 4.800,00
EHBO-wagen	4	€ 550,00	€ 2.200,00
jurybus	1	€ 300,00	€ 300,00
aggregaat (stroom)	1	€ 275,00	€ 275,00
dranghekken totaalpakket	1	€ 8.000,00	€ 8.000,00
pijlen op weg totaalpakket	1	€ 650,00	€ 650,00
parcoursbeveiliging (lint)	1	€ 950,00	€ 950,00
rugnummer deelnemer	2000	€ 1,00	€ 2.000,00
uitrusting vrijwilliger	720	€ 5,00	€ 3.600,00
		subtotaal	€ 22.775,00

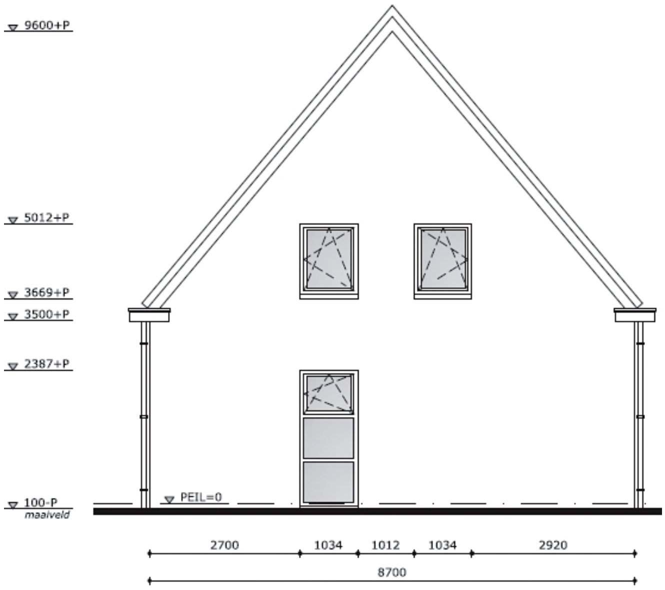
figuur 2

8		aantal	prijs per eenheid	(sub)totaal	
9	**organisatie algemeen**		800,00	€ 800,00	=D10*E10
10	vergunning gemeente	1	€ 2.200,00	€ 2.200,00	=D11*E11
11	verzekeringen	1	€ 7.300,00	€ 7.300,00	=D12*E12
12	volgkaravaan	1	€ subtotaal	€ 10.3000,00	=SOM(F10:F12)
13					

figuur 3

Je ziet in figuur 3 dat een leerling die 800 euro dus gevonden moet hebben door cel D10 met cel E10 te vermenigvuldigen. De 10.300 euro vindt de leerling door de sommatie van de cellen F10 tot en met F12 te nemen. Dit vereist wel enig abstractievermogen van een bb-leerling. Ook de term 'som' is iets dat ik in mijn les zelden noem, maar waar ze hier dus wel bekend mee moeten zijn.

In figuur 4 staat een voorbeeld uit het cspe BWI voor vmbo kb.



Bereken hoeveel stenen er nodig zijn voor deze gevel.

figuur 4

Een deel van het correctievoorschrift vind je in figuur 5.

berekening gevelstenen					
	aantal	breedte (m)	hoogte (m)	oppervlakte (m²)	formules
oppervlakte gevel tot onderkant goot	1	8,7	3,6	31,32	=E9*G9*H9
oppervlakte gevel vanaf onderkant goot	1	8,7	6,1	26,54	=(E10*G10*H10)/2
oppervlakte opening voor kozijn begane grond	1	1,034	2,487	2,57	=E11*G11*H11
oppervlakte opening voor kozijnen verdieping	2	1,034	1,343	2,78	=E12*G12*H12
afbeelding van oppervlakte					
	oppervlakte gevel (m²)			57,86	=I9+I10
	oppervlakte openingen voor kozijnen (m²)			5,35	=I11+I12
	totaal steenoppervlakte (m²)			52,51	=I15-I16
	aantal stenen				
	aantal stenen per m²			75	
	totaal aantal stenen			3938	=I17*I20

figuur 5 [1]

De lengte en breedte moet een leerling uit de figuur halen. Het omrekenen van millimeter naar meter (wat voor sommige leerlingen lastig is) gebeurt hier impliciet. Daarna moet er gerekend worden met oppervlakte. Iedereen die wiskunde geeft aan vmbo kb weet hoe lastig veel leerlingen het berekenen van oppervlakte vinden. Leerlingen die BWI gekozen hebben, zullen in de praktijk, bij bijvoorbeeld het maken van werkstukken, hier vaak mee geoefend hebben en dit zal ze helpen het concept van oppervlakte onder de knie te krijgen. Voor de oppervlakte van de rechthoek moeten lengte en breedte met elkaar vermenigvuldigd worden en dit wordt abstract gevraagd binnen de Excel-applicatie. Hetzelfde geldt voor het berekenen van de oppervlakte van de driehoek. Wellicht leer je de leerlingen in de wiskundeles om de oppervlakte van een driehoek te berekenen door ½ × basis × hoogte te doen. Hier staat in het correctievoorschrift: basis × hoogte/2. Dat is natuurlijk ook eenvoudiger in te >

voeren in Excel. Het is duidelijk dat het hetzelfde is, maar is dat voor kb-leerling ook duidelijk? Het is goed mogelijk dat de leerling niet beseft dat wat hij in de wiskundeles doet hetzelfde is als wat hij bij BWI doet.

Berekenen van percentages met een formule

Opdrachten waarbij percentages berekend moesten worden kwam ik tegen bij BWI, D&P, E&O en MVI. In figuur 6 vind je de uitwerking en in figuur 7 het correctievoorschrift van een opdracht uit het examen E&O van vmbo bb. De leerling moet een offerte maken voor negen medewerkers van een bedrijf die een jaarabonnement fitness willen. Er moet een korting van 15% in verwerkt worden en btw berekend worden.

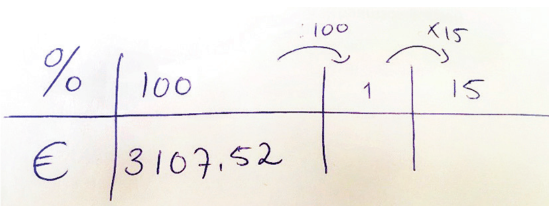
aantal	omschrijving	prijs/stuk	totaal
9	jaarabonnement bedrijfsfitness	€ 345,28	€ 3.107,52
		subtotaal	€ 3.107,52
	korting %	15	€ 466,13
		totaal exclusief btw	€ 2.641,39
	btw %	6	€ 158,48
		totaal offertebedrag	€ 2.799,87

figuur 6

aantal	**omschrijving**	**prijs/stuk**	**totaal**	**formules**
9	jaarabonnement bedrijfsfitness	€ 345,28	€ 3.107,52	=C27*G27
		subtotaal	€ 3.107,52	=H27
	korting%	15	€ 466,13	=H30/100*G31
		totaal exclusief btw	€ 2.641,39	=H30-H31
	btw%	6	€ 158,48	=H32/100*G33
		totaal offertebedrag	€ 2.799,97	=H32+H33

figuur 7

Nu worden percentages in de wiskundeles bij vmbo bb en vmbo kb eigenlijk altijd berekend met een verhoudingstabel. De verhoudingstabel die bij deze opdracht zou kunnen horen vind je in figuur 8.



figuur 8

In het bestand is al ingevuld de gerealiseerde omzet over december 2018 en de gerealiseerde omzet over de eerste drie maanden van 2019. In de gerealiseerde omzet van 2019 is de invloed van de reclamecampagne al verwerkt.

Uitvoering

- Gebruik in het bestand bij elke berekening een formule.
- Bereken in het bestand voor januari, februari en maart de verwachte omzet als de reclamecampagne **niet** zou zijn georganiseerd.
  De verwachte stijging van de omzet ten opzichte van december is normaal:
  - voor januari + 8%
  - voor februari + 10%
  - voor maart + 6%

  Bereken in het bestand:
  - de totaal verwachte omzet in het eerste kwartaal als de reclamecampagne **niet** zou zijn georganiseerd.
  - de toename van de omzet door de reclamecampagne in het eerste kwartaal

Uitwerking:

	december 2018			
omzet	€ 36.786,00			
	januari 2019	**februari 2019**	**maart 2019**	**eerste kwartaal 2019**
omzet	€ 45.365,98	€ 46.136,93	€ 40.983,69	€ 132.486,60
omzet zonder reclamecampagne	€ 39.728,88	€ 40.464,60	€ 38.993,16	€ 119.186,64
toename omzet door reclamecampagne				€ 13.299,96

Uit het correctievoorschrift:

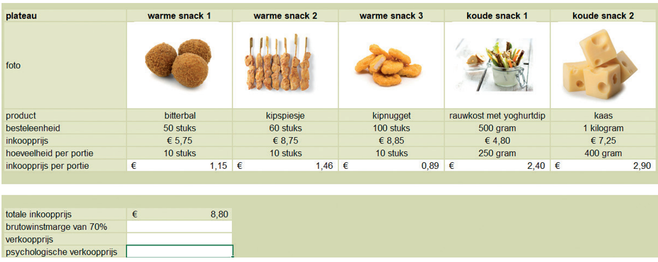
formule in E11: =E7*1,08
formule in F11: =E7*1,1
formule in G11: =E7*1,06
formule in H11: =SOM(E11:G11)
formule in H13: =H10-H11

figuur 9

Om de 15 % te vinden zal de leerling de berekening 3107,52 : 100 × 15 doen. Uiteraard dezelfde berekening als in de Excel-applicatie. Maar het vereist aardig wat abstractievermogen om de berekening in deze verhoudingstabel om te zetten naar een formule in de Excel-applicatie. Hetzelfde geldt voor de berekening van de btw.
In figuur 9 staat een voorbeeld uit het examen gl van E&O inclusief uitwerkingen en correctievoorschrift.
Bij deze opdracht moet in één cel de nieuwe omzet berekend worden als de omzet bijvoorbeeld met 8% stijgt ten opzichte van vorig jaar. Handig is dan om met een groeifactor van 1,08 te werken zoals ook in het correctievoorschrift gebeurt. Mijn ervaring is dat werken met een groeifactor voor de wiskundig minder vaardige leerling in gl best lastig kan zijn. Natuurlijk kan de waarde ook berekend worden door de formule E7 + E7/100*8 in te voeren in de cel, maar ook dit vereist behoorlijk wat abstractievermogen.

Andere vaardigheden

Bij het doorlopen van de examens zag ik ook andere reken- en wiskundevaardigheden. Meerdere malen moest bijvoorbeeld een draaiboek, rooster of wedstrijdschema gemaakt worden dat aan bepaalde voorwaarden moest voldoen (bij Z&W, BWI, D&P, HBR). Bij BWI en D&P moest een bovenaanzicht of kaart geïnterpreteerd worden. In figuur 10 staat een opdracht van het examen HBR voor wiskunde kb. Hier moet de inkoopprijs per portie berekend worden. Dit vereist rekenen met verhoudingen. Daarna moet ook met percentages gerekend worden. Bij deze opdracht is het niet noodzakelijk om met formules te werken, dus de extra abstractiestap is hier niet aan de orde.



plateau	warme snack 1	warme snack 2	warme snack 3	koude snack 1	koude snack 2
foto					
product	bitterbal	kipspiesje	kipnugget	rauwkost met yoghurtdip	kaas
besteleenheid	50 stuks	60 stuks	100 stuks	500 gram	1 kilogram
inkoopprijs	€ 5,75	€ 8,75	€ 8,85	€ 4,80	€ 7,25
hoeveelheid per portie	10 stuks	10 stuks	10 stuks	250 gram	400 gram
inkoopprijs per portie	€ 1,15	€ 1,46	€ 0,89	€ 2,40	€ 2,90

totale inkoopprijs	€ 8,80
brutowinstmarge van 70%	
verkoopprijs	
psychologische verkoopprijs	

figuur 10 [1]

In figuur 11 zie je een voorbeeld uit het examen D&P voor vmbo-kb. Een leerling moet hier de gemiddelde looptijd berekenen. Niet eenvoudig en zeker niet als de uren verschillen zoals bij de derde loper.

deelnemers	looptijd 1	looptijd 2	looptijd 3	gemiddelde looptijd
C. Aydin	4 : 50	4 : 30	4 : 20	
Y. Corstiaans	2 : 55	2 : 45	2 : 30	
H. Crommenacker	3 : 10	3 : 00	2 : 55	

figuur 11

In de praktijk

Het gevaar lijkt zeker aanwezig dat leerlingen niet door hebben dat ze bij een bepaald beroepsgericht vak eigenlijk hetzelfde aan het doen zijn als in de wiskundeles en omgekeerd. Ook zijn er natuurlijk leerlingen die wiskunde al hebben laten vallen en dan bij hun beroepsgerichte vak toch weer tegen rekenen of wiskunde aanlopen. Bij bepaalde profielvakken, zoals BWI en PIE, is wiskunde overigens verplicht. Bij ons op school heeft een collega wiskunde één uur per week om mee te lopen bij een beroepsgericht vak om de rekenvragen van leerlingen te beantwoorden en de beroepsgerichte collega te laten zien welke methoden in de wiskundeles gebruikt worden zodat er een betere aansluiting plaatsvindt tussen de vakken. Dit is geïnitieerd vanuit het rekenbeleid. De aandacht gaat vooral naar de leerlingen die wiskunde hebben laten vallen en mijn collega komt dan ook alleen bij de beroepsgerichte vakken waar wiskunde niet verplicht is. Het is wellicht ook goed om als wiskundedocent eens mee te lopen bij bijvoorbeeld BWI. Controle of de transfer van wiskunde naar het beroepsgerichte vak en omgekeerd werkelijk plaatsvindt is belangrijk. Ik kan me voorstellen dat dit ook speelt bij bijvoorbeeld Z&W en biologie en PIE en nask.

> “Het gevaar is dat leerlingen niet door hebben dat ze bij een beroepsgericht vak eigenlijk hetzelfde doen als in de wiskundeles en omgekeerd.”

Wat de wiskundeles betreft, realiseer ik me hoe afhankelijk de meeste van mijn leerlingen zijn van de verhoudings-0tabel bij het rekenen met procenten. Het lijkt belangrijk dat ze daar meer los van komen om ook met procenten te kunnen rekenen in andere vakken. Anderzijds kan ik me voorstellen dat een vraag in een beroepsgericht vak prima opgelost kan worden met een verhoudingstabel. De leerling zal dan geleerd moeten worden hoe hij zijn berekening omzet in een formule voor in een cel van Excel. Aandacht hiervoor is erg belangrijk.

Noot

[1] Klik op de figuur voor een vergroting (digitale *Euclides*) of ga naar de *Euclides*-website.

Over de auteur

Melanie Steentjes is toetsdeskundige bij Stichting Cito in Arnhem en wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum. E-mail: *melanie.steentjes@cito.nl*

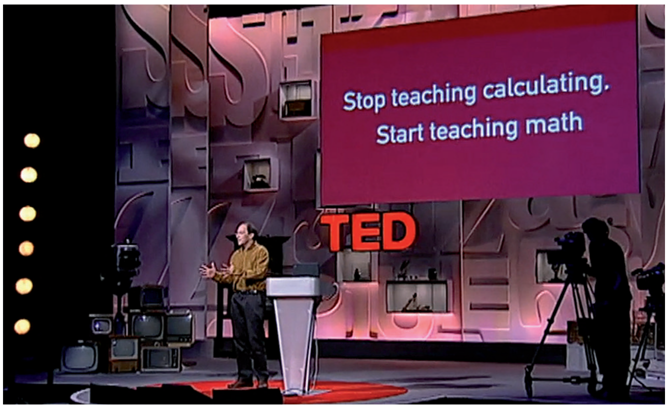
Tom Goris

Twaalf jaar na de TED Talk …

Interview met Conrad Wolfram

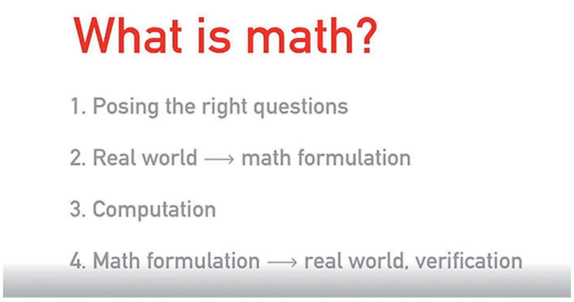
Bijna twaalf jaar geleden hield Conrad Wolfram de geruchtmakende TED talk ‘Stop teaching calculating, start teaching math’ waarin hij een pleidooi hield om wiskunde op school op alle niveaus met computers te onderwijzen. Maar het bleef niet bij deze TED Talk. Tijd voor een interview …

‘Stop teaching calculating, Start teaching math’



figuur 1

Op 10 juli 2010 hield Conrad Wolfram een TED Talk[1] waarin hij het probleem aankaart dat de wiskunde zoals die op scholen wordt onderwezen vrijwel niets meer te maken heeft met de wiskunde zoals die in het dagelijks leven door professionals wordt gebruikt. De kern van zijn betoog is gebaseerd op wat wij kennen als de modelleercyclus. Op de vraag wat wiskunde is, antwoordt hij het volgende (zie figuur 2).



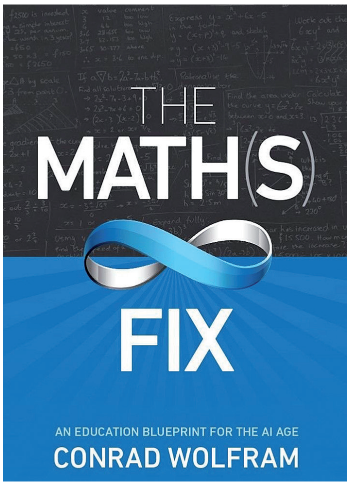
figuur 2

Vervolgens stelt hij dat we in het onderwijs vrijwel alle tijd besteden aan stap 3 en dat ook nog eens met de hand, terwijl dat juist de stap is die computers veel beter kunnen dan wijzelf. Om de kloof tussen schoolwiskunde en echte wiskunde te dichten, zou er in het onderwijs dus veel meer aandacht moeten zijn voor stap 1, 2 en 4 en kunnen we alle berekeningen overlaten aan de computer. In plaats van het oplossen van versimpelde en niet echt realistische problemen (‘dumbed down problems’) kan het onderwijs zich dan bezighouden met complexere reële problemen, waarbij de berekeningen ook niet eens meer met de hand zijn uit te voeren. Voorwaarde is wel dat er veel meer aandacht komt voor wiskundige concepten in plaats van het aanleren van technieken.

Conrad Wolfram

Wie is Conrad Wolfram dat hij dat allemaal kan beweren? Hij is de CEO van Wolfram Research Europe, een bedrijf dat gespecialiseerd is in wiskundesoftware. De bekendste producten zijn Mathematica, het wiskundesoftwarepakket en Wolfram Alpha[2], de online kennisgenerator die je alles, dus niet alleen wiskunde, kunt vragen. Door zijn werkzaamheden voor Wolfram Research kwam hij in aanraking met talloze professionals die op de een of andere manier wiskunde nodig hebben in hun vak. Daarbij viel het hem op dat dat op geen enkele manier meer leek op de wiskunde die hij zelf op Eton College had gehad en dat heeft zijn interesse voor het onderwijs gewekt. Het werd een hobby voor in de avonduren, zoals hij zelf zegt. Maar de hobby werd een grootschalige lobby voor een drastische hervorming van het wiskundeonderwijs wereldwijd. De TED Talk was slechts het begin van nog veel meer.

The Math(s) Fix



figuur 3

De vraag wat er in de twaalf jaar sinds de TED Talk is gebeurd, wordt beantwoord in het boek *The Math(s) Fix* dat Conrad Wolfram vorig jaar publiceerde. Het boek bestaat uit drie delen: I The Problem, II The Fix, III Achieving Change. Het gedachtegoed van de TED Talk, en vooral de ontwikkeling daarvan, wordt in deel I uitvoerig beschreven en leidt tot dit model: define questions → abstract to computable form → compute answers → interpret results.

Tot zover niets nieuws onder de zon. Maar in deel II wordt een suggestie gedaan voor een nieuw curriculum, gebaseerd op de leeruitkomsten van ‘real life problems’. Het curriculum kent elf dimensies, zie figuur 4, die weer onderverdeeld zijn in meerdere onderwerpen.[3]
Deze dimensies vertonen een grote overeenkomst met de wiskundige denk- en werkwijzen zoals geformuleerd in de voorstellen van Rekenen & Wiskunde in Curriculum.nu.
In deel III wordt beschreven hoe deze veranderingen gestalte zouden kunnen krijgen. Om docenten te laten zien hoe ‘computer based maths’ eruit kan zien, is een platform opgericht,[4] waar ook modules te vinden zijn die in de klas uitgevoerd kunnen worden.

Interview

Sinds de TED Talk in 2010 werd gehouden laat ik deze zien aan mijn studenten, onze toekomstige collega’s. Dat levert altijd rijke en boeiende discussies op. Want ook al ben je het totaal niet eens met het gedachtegoed van Wolfram: het zet je wel aan het denken waarom je wiskunde geeft zoals je het geeft. Maar wat zijn de drijfveren van deze Conrad Wolfram om zich als relatieve

DQ DEFINING THE QUESTION
The first step of the problem—solving process; it is vital that students can independently start to understand a problem and know how to proceed.

AC ABSTRACTING TO COMPUTABLE FORM
Changing the defined question into an abstract form —we have specific outcomes dedicated to this step, independent of the context of the problem and of the mathematical concepts being used.

C CONCEPTS
Separating the abstraction step into three dimensions clarifies the outcomes being addressed, their ordering and their different use cases.

T TOOLS
This dimension is still within the abstract step, so the outcomes here are focussed on the choice of tool rather than the application.

MC MANAGING COMPUTATIONS
Step 3 of the problem – solving process is vital to ensure that students learn how to drive the computation and deal with difficulties that arise.

IN INTERPRETING
Step 4’s outcomes crucially bring the learner back to the original problem.

CP CONFIDENCE TO TACKLE NEW PROBLEMS
This addresses the need to reflect the student’s ability to undertake new and unfamiliar challenges and apply a problem–solving process.

IF INSTINCTIVE FEEL FOR COMPUTATIONAL THINKING
A crucial skill for students is to be able to spot poorly constructed arguments or misconceptions before proceeding to make an expensive mistake.

CV CRITIQUING AND VERIFYING
Both during and after the problem – solving process, critiquing and verifying are outcomes that are rarely touched upon in a student' s current educational experience. These outcomes demonstrate an awareness of limitations and enable the student to build trust in their ability to solve problems.

GM GENERALISING A MODEL/THEORY/APPROACH
Being able to adapt one solution to different applications is a desirable skill to encourage in students.

CC COMMUNICATING AND COLLABORATING
Throughout the process, the ability to communicate accurately and in the correct form for the purpose, is a vital skill that needs to be in all curricular.

figuur 4

buitenstaander zo bezig te houden met het wiskunde-onderwijs? Het leek me een goed idee om hem dat zelf te vragen in een interview, uiteraard digitaal via Zoom.

figuur 5

> “Wiskunde is de kunst van het vermijden van rekenen.”

Hoe ervaarde je zelf je wiskundelessen op Eton College?
‘Eton was interessant, ik volgde daar uiteraard het traditionele curriculum, maar er waren een paar docenten die buiten de gebaande paden gingen, zowel in theoretisch wiskundig perspectief als in toepassingen die >

eigenlijk meer bij natuurkunde thuishoorden. In mijn boek noem ik Norman Routhlidge, een excentrieke Cambridge professor en persoonlijke vriend van Alan Turing. Een mooie uitspraak van hem was: "Je zult zien dat mijn wiskundelessen meer over het leven gaan dan over wiskunde." En deze: "Wiskunde is de kunst van het vermijden van rekenen." Dat was toen heel waar, maar nu niet meer. Want dat is de revolutie van de komst van computers: je hóeft het rekenen niet meer te vermijden. Kortom, wiskunde leek iets te maken te hebben met leven, gekoppeld aan de realiteit, af en toe hadden we zelfs "verhaaltjessommen" met contexten. Maar ik moet daaraan toevoegen dat ik geen wiskunde hoogvlieger was, ik was meer geïnteresseerd in natuurkunde.
Wel was ik een van de eerste die een grafische rekenmachine had. En er was een docent, Mr Davis, die daar meteen de meerwaarde van inzag en er van alles mee deed in zijn lessen.'

Hoe ontstond jouw 'mindshift' naar Computer Based Mathematics?

'Toen we in 1998 Mathematica aan het ontwikkelen waren, werkten we samen met een groep mensen van de University of Illinois, die het helemaal hadden gehad met het traditionele Amerikaanse calculusprogramma. Zij wilden veel meer onderzoeksvragen. In 2009 introduceerden we Wolfram Alpha, waar je in gewone taal vragen kon intikken als "Hoe groot is de bevolking van Londen in vergelijking met die van Amsterdam?" en daar kwam dan van alles uit. Maar docenten, voor wie Mathematica en Wolfram Alpha in eerste instantie niet bedoeld waren, werden ineens enthousiast over het feit dat je een kwadratische vergelijking kon intikken en dat er dan een antwoord kwam, iets waar wij niet verbaasd over waren, want Mathematica kon dat al jaren. En er volgden allerlei vragen: mogen studenten dit wel gebruiken bij het maken van hun huiswerk, is dit geen "cheating"? In die tijd had ik heel veel contact met mensen die wiskunde in hun dagelijkse praktijk gebruiken, en nu dus ook met docenten, en daar begon het langzaam maar zeker op te vallen dat die wiskunde niet veel meer te maken had met de schoolwiskunde. En ik realiseerde me dat ik vanuit die positie best wel iets over dat wiskundeonderwijs kon zeggen, als een soort outsider, zonder bang te hoeven zijn bekritiseerd te worden door peers uit de onderwijswereld. Vandaar de TED Talk. Waar ik het meest voor vreesde was dat mensen zouden zeggen: "Ja, dit vertel je alleen om meer Mathematica of Wolfram Alfa te verkopen". Daarom probeerde ik dat heel gescheiden te houden. Maar er kwamen steeds meer vragen: heeft Wolfram cursussen in CBM? Zijn er modules die we uit kunnen proberen? Dus het was eigenlijk precies omgekeerd als waar ik bang voor was. Ja, en dat inspireerde weer om het platform Computerbasedmath op te zetten.'

Wat heb je zoal bereikt in de twaalf jaar na de TED Talk?

'In Estland loopt een project dat door de overheid is geïnitieerd om op een aantal scholen daadwerkelijk met CBM aan de slag te gaan. We kregen de opdracht om een nieuw curriculum te maken voor kansrekening en statistiek, zonder dat we naar het oude curriculum mochten kijken. Het moest helemaal gebaseerd zijn op 'real life problems'. Daarbij moest de vraag beantwoord worden: welke leeropbrengsten willen we precies van CBM? En wat hebben we docenten te bieden? We zijn modules gaan ontwikkelen en op basis van deze modules kun je een curriculum maken, dat voortdurend aangepast wordt, zodat het niet achterloopt op de realiteit. Maar misschien moeten we ook kleine stappen durven zetten, met praktische opdrachten, als er op scholen zoiets bestaat.'

> "Flatten the curve: een mooier voorbeeld van CBM kun je niet hebben."

Zou het niet handiger zijn om een nieuw vak te introduceren in plaats van wiskunde te proberen te veranderen?

'Dat is een moeilijke vraag. Ik heb met veel politici en stakeholders over de hele wereld gesproken en er is geen duidelijk antwoord. Het is een optimaliseringsprobleem: er gaat veel geld om in het wiskundeprogramma, daar zou je van mee willen profiteren, aan de andere kant: een nieuw vak introduceren: dat kost veel tijd voordat het draagvlak heeft en daarnaast zitten alle curricula gewoon vol. Wiskunde heeft een enorme status en er zijn veel belanghebbenden, dus dat verander je niet zomaar. Maar er gebeurt wel wat: van onderop, scholen in de VS bijvoorbeeld die het huidige programma beu zijn en een ander onderwijsconcept willen proberen.
Het woord wiskunde polariseert binnen en buiten het onderwijs, daarom willen we ook van de naam Mathematica af en het gewoon Wolfram gaan noemen. We hadden biologen die geen Mathematica wilden gebruiken omdat dat alleen voor wiskundigen was.

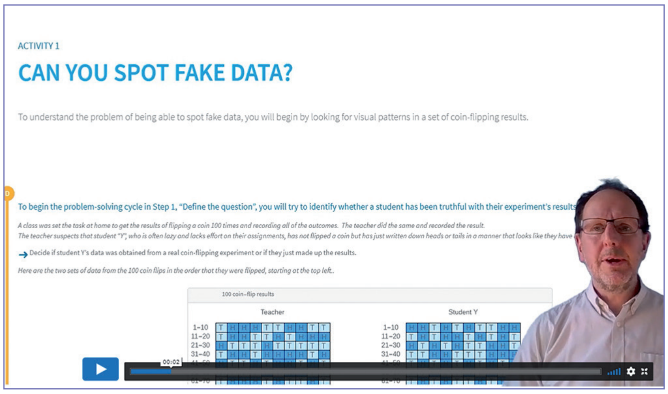
Wolfram gaat over veel meer: alles wat met computational thinking te maken heeft.'

Wat kan de overgang naar CBM versnellen?
'De coronapandemie is een interessante casus. Plotseling zit iedereen wiskundelessen te volgen op een computer of tablet, dus dan wordt het contrast wel heel groot om kwadratische vergelijkingen met de hand op te gaan lossen, misschien dat dat mensen aan het denken zet. En kijk eens naar de hoeveelheid wiskunde die je ineens in de media ziet: de modellen waarmee de pandemie beschreven wordt, de bijbehorende diagrammen, "flatten the curve" et cetera: een mooier voorbeeld van CBM kun je niet hebben.'

Hoe reageert het onderwijsveld op je ideeën?
'Verrassend positief, maar de eerlijkheid gebiedt te zeggen dat degenen die het volstrekt niet met mij eens zijn natuurlijk niet bij mij aankloppen. Iedereen is het erover eens dat mijn verhaal over hoe wiskunde in *real life* gedaan wordt klopt, dat kan ook niet anders want ik kom uit die wereld. Maar de vraag is dan altijd: kunnen we de pen-en-papier wiskunde dan zomaar loslaten? En hoe ziet dat er dan uit? Om die vraag te beantwoorden zijn we modules gaan ontwikkelen: opdrachten voor leerlingen en zeer uitgebreide docentenhandleidingen. Zodat docenten zelf kunnen ervaren hoe CBM in de praktijk werkt. Vanuit de academische wereld komen er ook positieve reacties, zie bijvoorbeeld de aanbeveling die Jo Boaler, bekend van de mindsettheorie, voor mijn boek geschreven heeft.'

Wat zou je toekomstige docenten nog mee willen geven?
'Misschien is het vreemd en bedreigend wat ik vertel, maar besef: wiskunde, CBM of computational thinking, hoe je het ook wilt noemen is belangrijker en relevanter dan het ooit tevoren was. Blijf altijd stilstaan bij de vraag: waarom onderwijs ik de dingen die ik onderwijs, wat wil ik ermee bereiken? En probeer eens een van de modules uit, bijvoorbeeld *Can I spot a cheat.* [5] Daarin gaan leerlingen eerst honderd keer met een munt gooien en vervolgens die data *faken* door *random* honderd resultaten te verzinnen. Een slim algoritme haalt die fakedata er dan uit, tot ieders verbazing.

Uiteindelijk leert de leerling om zelf hypothesetoetsen op te stellen waarmee bepaald kan worden of er met datasets iets aan de hand is. Zowel leerlingen als docenten vinden deze module én inspirerend én relevant.



figuur 6 Schermafbeelding uit Can I spot a cheat

> "Blijf altijd stilstaan bij de vraag: waarom onderwijs ik de dingen die ik onderwijs?"

Het was een aangenaam gesprek met Conrad Wolfram. Hij is oprecht bezorgd over de vraag of ons wiskundeonderwijs wel genoeg aansluit bij de *real life* wiskunde. Is hij een visionair of een roepende in de woestijn? De toekomst zal het uitwijzen.

Noten

[1] Zie: *https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers*
[2] Zie: *https://www.wolframalpha.com/*
[3] Zie: *https://www.computerbasedmath.org/materials/math-education-outcomes.php#detailed-view-if*
[4] Zie: *https://www.computerbasedmath.org/*
[5] Zie: *https://www.wolfram.com/wolfram-u/cbm-can-i-spot-a-cheat/*

Over de interviewer

Tom Goris is lerarenopleider bij Fontys Lerarenopleidingen Tilburg en hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mail: *t.goris@nvvw.nl*

John Poppelaars

Mathematische besliskunde

Als ICT een rol speelt in het wiskundeonderwijs, dan is het voor ons ook goed om te weten hoe wiskunde en ICT er in het écht uitzien. John Poppelaars is mathematisch besliskundige met een warm hart voor wiskundeonderwijs. Onlangs richtte hij zijn eigen bedrijf op: Doing The Math. Hij beschrijft zijn dagelijkse praktijk door de jaren heen.

Inleiding

Computers en software zijn onmisbare hulpmiddelen in het werk van de mathematisch besliskundige. Door de steeds toenemende processorsnelheid en de goedkoper wordende hardware kunnen berekeningen worden uitgevoerd die tot voor kort praktisch onmogelijk waren. Door de toenemende rekenkracht, de steeds beter beschikbare data en de groeiende geheugencapaciteit is het mogelijk steeds grotere beslismodellen op te lossen en kunnen meer, voor de beslissing relevante, details worden meegenomen. Aangezien door de toegenomen rekenkracht tevens meer oplossingen kunnen worden geëvalueerd, verbetert de kwaliteit van de oplossing. Over de hele wereld werken mathematisch besliskundigen met wiskunde en IT aan het oplossen van complexe vraagstukken in transport, financiën, gezondheidszorg, werkgelegenheid, supply chain management, duurzaamheid en nog veel meer gebieden. En met succes. De INFORMS Franz Edelman award die ieder jaar wordt toegekend aan de meest impactvolle toepassing van mathematische besliskunde maakt dat duidelijk. Sinds de eerste editie van deze award in 1972 is door de kandidaat-organisaties meer dan $300 miljard [1] aan verbeteringen gerealiseerd. De verbeteringen zijn niet beperkt tot omzetstijging of kostenbesparing, maar hebben bijvoorbeeld ook betrekking op de reductie van overstromingsrisico's of het bestrijden van hongersnood.[2] Zonder de voortuitgang in informatietechnologie was dit schier onmogelijk geweest.

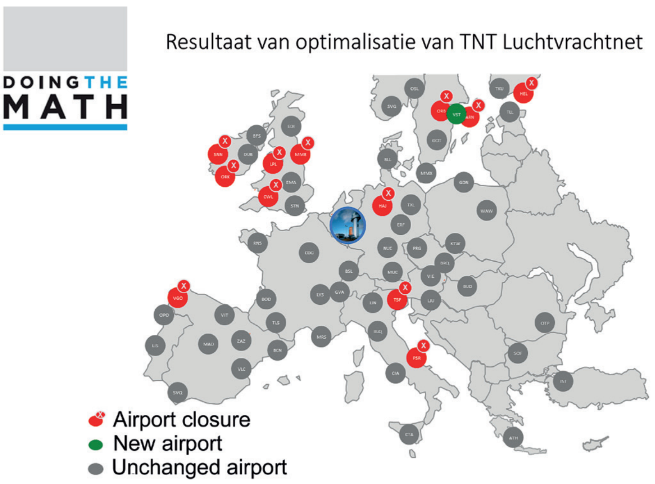
Leerschool

Ik begon mijn carrière als mathematisch besliskundige bij ORTEC, een bedrijf dat gegrondvest is op de gedachte dat wiskundige modellen en beslissingsondersteunende software essentieel zijn voor goede besluitvorming. In die tijd was het werken met een computer anders dan nu. Om een beeld te schetsen, de processor in mijn werkcomputer was een 16 bit Intel 80286 chip met een kloksnelheid van 6 MHz. Ik beschikte over 640 KB werkgeheugen, 20 Mb schijfruimte en een amberkleurig CRT-scherm. Een muis bestond nog niet. Dit alles draaide op MS-DOS 3.3. Afgezet tegen wat tegenwoordig gangbaar is zou je je kunnen afvragen of dit überhaupt wel een fiets voor je verstand [3] zou mogen heten, duidelijk toch meer een benenwagen. Mijn geklaag over de traagheid van de computer bij mijn werkgever leidde steevast tot de opmerking dat het wachten totdat mijn computer klaar was met compileren van mijn C-code mij voldoende tijd gaf na te denken om slimmer om te gaan met de middelen die ik had. Een advies dat ik goed in mijn oren heb geknoopt. Dat rekenkracht niet een noodzakelijke voorwaarde is voor succesvolle praktische toepassing van wiskunde blijkt wel uit de projecten die ik in die tijd heb uitgevoerd. Van het optimaliseren van gebouwonderhoud voor de Rijksgebouwendienst, de budgetallocatie voor de aanleg van rijkswegen, onderhoud aan vluchtsimulators en vliegtuigen (KLM), ploegenroosters voor de procesindustrie tot aan de ontwerpstudies van de Tweede Maasvlakte. Stuk voor stuk projecten met een grote impact, die met een pc met een fractie van de rekenkracht van mijn huidige smartphone konden worden aangepakt, maar dat wil niet zeggen dat het eenvoudig was.

Evolutie

Als je beperkte (reken)middelen hebt, moet je daar slim mee omgaan en dat betekent dat je veel modelleerwerk op papier doet alvorens het op de computer in programmacode uit te werken. De beperkte rekenkracht van mijn computer had tot gevolg dat ik vaak gebruik maakte van heuristische benaderingen van het beslisprobleem, simpelweg omdat het bepalen van een optimaal onderhoudsplan, investeringsportfolio of ploegenrooster anders veel te lang zou duren om het praktisch bruikbaar te maken. Met het steeds sneller worden van de processoren en de ontwikkeling van modelleertalen als GAMS, AIMMS en AMPL werd het, in combinatie met commerciële LP/MIP solvers als CPLEX

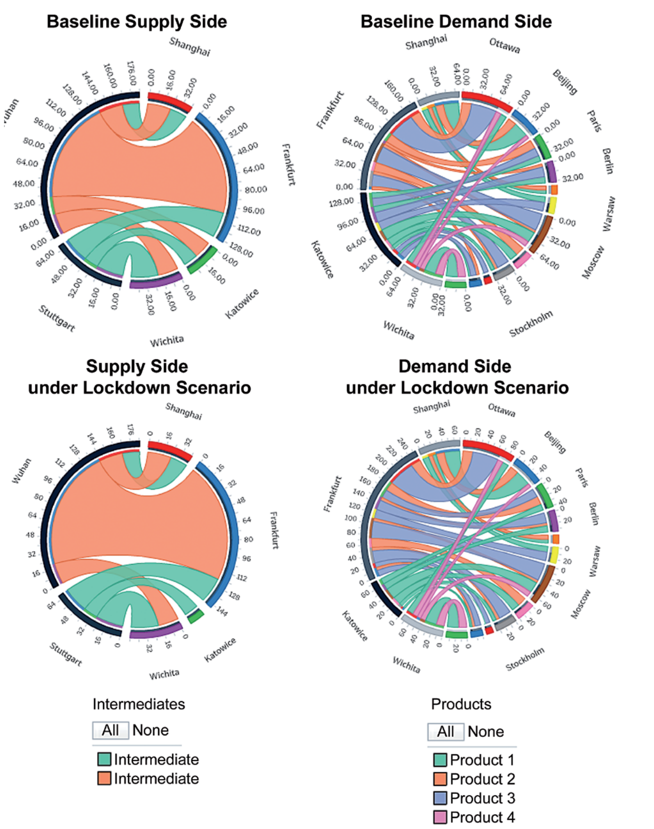
(IBM) en Gurobi, steeds makkelijker om modellen te maken en op te lossen. Een mooi voorbeeld daarvan is de snelheid waarmee mijn team en ik voor TNT Express [4] (nu FedEx) een uitweg uit de financiële crisis (2008) konden vinden met behulp van een dergelijke modelleertaal. Als gevolg van de crisis daalde het luchtvrachtvolume van TNT Express dramatisch, met als gevolg dat het in de lucht houden van de hele luchtvrachtvloot financieel niet meer houdbaar zou zijn. Het aan de grond zetten van delen van de vloot zou de benodigde kostenbesparingen opleveren. Aan de andere kant zou dit ook tot directe inkomstenderving leiden en mogelijk tot klantverlies waardoor TNT wellicht verder in de problemen zou kunnen komen. Met behulp van de modelomgeving AIMMS waren mijn team en ik in staat om in een tijdsbestek van een paar weken de hele supply chain van TNT Express gedetailleerd te modelleren en scenario's door te rekenen. Op basis van onze resultaten kon de board van TNT een beslissing nemen. Resultaat, €20 miljoen kostenbesparing en een beperkt effect op de service aan de klant. Zonder AIMMS en CPLEX was dat in die korte tijd onmogelijk geweest. Een mooie illustratie van de effectiviteit van de combinatie van IT en wiskunde, zie figuur 1.



figuur 1

Het belangrijkste voordeel van een modelleeromgeving als AIMMS, GAMS en AMPL is dat modellen op wiskundige wijze kunnen worden uitgedrukt. De interactie met de LP/MIP solver wordt geheel overgenomen, waardoor een mathematisch besliskundige zich geheel op het begrijpen en modelleren van het vraagstuk kan richten. In de praktijk leidt dat tot een substantiële versnelling van het modelleerproces. Je kunt als het ware met de klant aan tafel het model opstellen wat enorm helpt bij de acceptatie van zowel het model als de oplossing. Deze voordelen zijn niet langer voorbehouden aan alleen de modelleeromgevingen. In de Open Source wereld worden steeds meer initiatieven ontplooid, zoals COIN-OR[5], Python-MIP[6] en JuMP[7], die vergelijkbare ondersteuning bieden. Ten opzichte van de commerciële omgevingen hebben ze als voordeel dat ze de meest recente ontwikkelingen in wiskundige modellering en oplostechnieken bevatten en bovendien open zijn. Je hebt zicht op de manier waarop een probleem wordt opgelost dat je naar believen kunt aanpassen (en kunt bijdragen aan de verdere verbetering van de methode). Bij Doing The Math maken we veel gebruik van Open Source modelleertalen en dragen we bij aan de verdere verbetering van de gebruikte methodes.

Inzicht



figuur 2 Voorbeeld van datavisualisatie

Als besliskundige ben je niet alleen bezig met het opstellen en oplossen van wiskundige modellen. Vaak is dat maar een klein onderdeel van een project. Veel tijd gaat zitten in het verzamelen en opschonen van data en het communiceren van resultaten. Voor beide is visualisatie essentieel. Veel beslissers in organisaties hebben niet de tijd om lang naar tabellen met getallen te kijken. Je helpt ze enorm door met behulp van visualisaties, bijvoorbeeld met grafieken, flow charts en landkaartjes, knelpunten bloot te leggen en oplossingen daarvoor aan te dragen. Een plaatje zegt immers meer dan duizend woorden. Het creëren van een goede visualisatie is een >

Computational thinking:

link tussen wiskunde en informatica

Laat je leerlingen zelf ervaren hoe Python en wiskunde samenwerken, met computational thinking als de verbindende schakel tussen de twee. Computational thinking – net als physical computing – stimuleren het probleemoplossend vermogen en het algoritmisch denken bij je leerlingen.

Inspiratie opdoen om aan de slag te gaan met computational thinking in je wiskundeles? We bieden je kant-en-klare lesactiviteiten, maar ook instructievideo's en leerzame webinars en trainingen.

Python op de handheld

Leerlingen programmeren zelf in Python met de TI-Nspire™ CX II-T-handhelds of -software en de TI-84 CE-T Plus Python Edition. Bekijk lesactiviteiten op:

» **www.wil-depython.nl**

Webinars leraren

De webinars van het T^3-lerarennetwerk draaien om logisch redeneren, algoritmisch structureren en programmeren in de klas. Je schrijft je in voor nieuwe en kijkt opgenomen webinars terug op:

» **resources.t3nederland.nl/webinars**

Python-module Turtle

Laat je leerlingen zich creatief uitleven door bewegende illustraties te maken met Turtle Graphic. Deze Python-module is ideaal voor leerlingen die nog geen ervaring hebben met programmeren. En is beschikbaar voor de TI-84 Plus CE-T Python Edition- en TI-Nspire™ CX II-T-handhelds. Download de Turtle-module op onze website:

» **education.ti.com/nl/NSTurtle**

» **education.ti.com/nl/84Turtle**

BBC micro:bit

Koppel de BBC micro:bit aan een TI-Nspire™ CX II-T-handheld en stuur het microcomputertje aan met Python-scripts. Een beknopte lesactiviteit met de BBC micro:bit vind je hier:

Texas Instruments

iteratief proces, waar informatietechnologie opnieuw een grote rol speelt. Was het in de begintijd nog uren werk om met Harvard Graphics[8] een paar sheets met diagrammen te maken, tegenwoordig is het kinderspel om interactieve visualisaties te maken, waarbij real time data worden verwerkt en grafisch weergegeven in welke vorm dan ook. Dat heeft ook een keerzijde. Als het eenvoudig is plaatjes te genereren dan is de neiging groot er veel te maken, resultaat 'analysis paralysis' of 'death by PowerPoint'. Ook hier geldt het advies dat ik kreeg aan het begin van mijn carrière: denk na! Alleen dan zullen de gevisualiseerde modelresultaten leiden tot datgene waar het om gaat, inzicht. Het zijn immers niet de modellen of de visualisaties die beslissingen nemen, maar mensen. De modellen en de visualisaties verschaffen inzicht in de probleemstelling, mogelijke oplossingen, de samenhang en de beperkingen. Met die inzichten komt uiteindelijk een geïnformeerde beslissing tot stand.

IT & wiskunde, een duurzame combinatie

Het mag duidelijk zijn dat verbeteringen in de IT bijdragen aan de effectiviteit en impact van de mathematische besliskunde. Onderzoek van Martin Grötschel[9] laat zien dat in een periode van vijftien jaar versnellingen zijn gerealiseerd met een factor 43 miljoen. Beslisproblemen die eerst nog 85 jaar kosten om uit te rekenen kunnen vijftien jaar later in enkele seconden worden opgelost. Die versnelling is deels afkomstig uit hardware, maar het merendeel uit de verbetering van de software (algoritmes). De versnellingen in de algoritmiek zijn het resultaat van versnellingen in numerieke lineaire algebra, want zoals zoveel andere toegepaste wiskunde, komt het allemaal neer op lineaire algebra. Deze versnelling is niet alleen prettig omdat je snel een antwoord hebt, het maakt het ook mogelijk om de complexe vraagstukken die we op dit moment ervaren aan te pakken.

In 2015 formuleerde de Verenigde Naties (VN) 17 ontwikkelingsdoelstellingen[10] voor 2030. Met die doelen vragen de VN aandacht voor onder meer de groeiende ongelijkheid, de rechten van vrouwen en meisjes, vrede, veiligheid en klimaatverandering. Het spreekt voor zich dat er een afhankelijkheid is tussen de ontwikkeldoelen. Armoede aanpakken kan niet zonder ook ongelijkheid aan te pakken en toe te werken naar een vreedzame en inclusieve samenleving.

Er zijn ook beperkingen waar nadrukkelijk rekening mee moet worden gehouden. Immers, we kunnen geen duurzame economische groei of voedselzekerheid bereiken zonder rekening te houden met de impact van onze activiteiten op het milieu. Ik ben er stellig van overtuigd dat IT en wiskunde een belangrijke sleutel zijn in het realiseren van deze doelen.

figuur 3

Noten

[1] Gorman, M.F., Nittala, L. & Alden, J.M. (2020). Anatomy of the Edelman: Measuring the World's Best Analytics Projects. *INFORMS Journal on Applied Analytics, 50*(6), 373-386.

[2] zie: *https://www.informs.org/About-INFORMS/News-Room/Press-Releases/Food-Assistance-Amid-Emergency-Responses-The-United-Nations-World-Food-Programme-WFP-Awarded-the-2021-INFORMS-Edelman-Award*

[3] Zie: Moss Kanter, R. (2011). Steve Jobs's Bicycles for the Mind. *Harvard Business Review. https://hbr.org/2011/10/steve-jobss-bicycles-for-the-m.html*

[4] Supply Chain wide optimization at TNT Express (2021), Zie: *https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/inte.1120.0655*

[5] Zie: *https://www.coin-or.org/*

[6] Zie: *https://www.python-mip.com/*

[7] Zie: *https://jump.dev/*

[8] Zie: *https://en.wikipedia.org/wiki/Harvard_Graphics*

[9] Zie: *https://bits.blogs.nytimes.com/2011/03/07/software-progress-beats-moores-law/*

[10] Sustainable Development Goals, zie: *https://sdgs.un.org/goals*

[11] Zie: *https://doingthemath.nl/*

[12] Zie *https://immchallenge.org/* en *Euclides* 97-3

Over de auteur

John Poppelaars is oprichter van Doing the Math. Voordat hij zijn eigen bedrijf oprichtte, was John werkzaam bij BearingPoint en ORTEC. Tijdens zijn adviescarrière heeft hij rollen vervuld als adviseur, besliskundige, programmamanager en adviseur procesverbetering. John ontving in 2012 de Franz Edelman Award voor zijn werk bij TNT Express. Daarnaast is hij lid van de Nederlandse jury van de IM^{2}C [12]

Melanie Steentjes

Digitaal toetsen in het vmbo

Digitale examens zijn niet meer weg te denken uit het vmbo. Vanaf het begin is Melanie Steentjes betrokken geweest bij de constructie van de digitale examens wiskunde voor vmbo kb. Dit schooljaar had ze voor het eerst een examenklas vmbo kb die ze voorbereidde op het digitale examen.

Inleiding

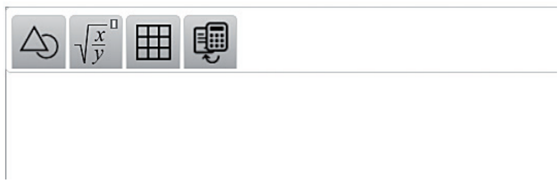
In 2005 startte het project voor de invoering van flexibele digitale centrale examens in het vmbo basisberoeps (bb) en vmbo kaderberoeps (kb). De eerste digitale examens bb werden vanaf 2005 afgenomen en in 2010 volgde kb. Naar verwachting neemt de minister in de loop van dit jaar het besluit om de centrale examens regulier digitaal af te nemen bij bb en kb. Dit besluit geldt dan voor de tien grootste vakken. Alleen de vakken Spaans, Turks, Arabisch en Frans worden dan nog op papier afgenomen.
Digitaal toetsen biedt bij het ene vak meer voordelen dan bij het andere vak. Bij wiskunde bleek het een uitdaging om de meerwaarde te realiseren en vooral om ervoor te zorgen dat wat er getoetst wordt ook echt wiskunde is en geen technische vaardigheid. Slechts 0,4% van de leerlingen bij vmbo bb met wiskunde doet nog examen op papier. Bij vmbo kb is dit 1%.

Automatisch scoorbaar?

Digitaal toetsen kan als groot voordeel hebben dat er ook automatisch gescoord kan worden. Vanaf het begin van de ontwikkeling van de digitale examens bij wiskunde was het uitgangspunt om juist niet terug te vallen op louter meerkeuzevragen of numerieke vragen, die eenvoudig automatisch scoorbaar zijn. Vanuit Cito en het College van Toetsen en Examens (CvTE) vond men het belangrijk dat, net als bij de papieren examens, de berekeningen die leiden tot het antwoord genoteerd en gescoord konden worden. Dit bracht wel moeilijkheden met zich mee. Want hoe noteer je bijvoorbeeld een berekening met een wortel erin? Een formule-editor kan dit oplossen, maar heeft als nadeel dat leerlingen moeten weten hoe zo'n editor werkt. Daarnaast kost het een leerling veel tijd om zijn berekening in de formule-editor te zetten. Al vrij snel is daarom de toolbox ontwikkeld, die momenteel zowel in de examens wiskunde en nask1 gebruikt wordt, als ook bij vmbo bb en vmbo kb. De toolbox bij vmbo bb heeft iets minder knoppen dan de toolbox bij vmbo kb. Ook de toolbox bij nask1 verschilt iets van de toolbox bij wiskunde. De verschillen zijn klein. Ik zal me in dit artikel beperken tot de toolbox bij wiskunde kb.

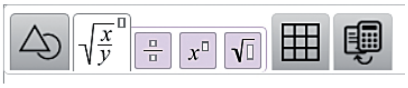
Toolbox

De toolbox is eigenlijk een groot invoerveld waarin de leerling kan typen. Bovenaan het invoerveld staan vier knoppen: de gereedschappen die de leerling tot zijn beschikking heeft, zie figuur 1. Deze knoppen zijn zo ontwikkeld dat ze intuïtief werken voor de leerlingen.
We vonden dit erg belangrijk: de bedoeling is dat de wiskundige vaardigheid getoetst wordt en niet de digitale vaardigheid.



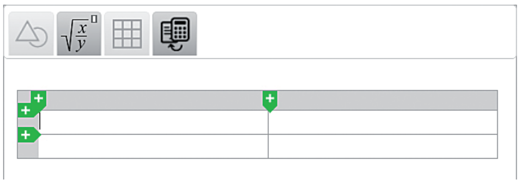
figuur 1

Als op knop 1 geklikt wordt, verschijnt een cirkel, driehoek en vierkant. Zodra op één van deze figuren geklikt wordt, verschijnt het figuur in het invoerveld en kan de figuur groter of kleiner gemaakt worden en er kunnen maten in worden gezet of hoekpunten worden benoemd. Met deze knop kan een leerling bijvoorbeeld een schets maken van de rechthoekige driehoek waarmee hij werkt.
Knop 2 is een (zeer beperkte) formule-editor. Als op deze knop geklikt wordt, verschijnt een breuk, macht en wortel, zie figuur 2.



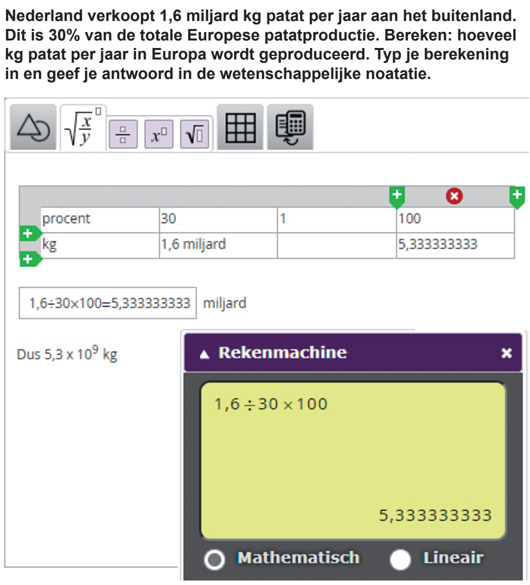
figuur 2

Als een leerling op knop 3 klikt, verschijnt er een tabel in het invoerveld van twee rijen en twee kolommen, zie figuur 3. Een leerling kan eenvoudig een kolom of rij toevoegen of verwijderen. Binnen het vmbo wordt veel met tabellen gewerkt. Bijvoorbeeld met de verhoudingstabel om procenten te berekenen of met een pythagoras-tabel om een zijde van een driehoek te berekenen.



figuur 3

De laatste knop, knop 4, is de knop die de leerlingen het meest gebruiken. Met deze knop kan een berekening die in de digitale rekenmachine is gemaakt, worden opgeslagen in het invoerveld. Het prettige is dat een leerling zijn berekening dus niet hoeft over te typen of over te zetten in de formule-editor: met één druk op de knop wordt zijn berekening gekopieerd naar het invoerveld en is voor de docent duidelijk wat de leerling gedaan heeft. In figuur 4 zie je een vraag uit het digitale examen van 2021 en een mogelijke uitwerking van de vraag in het invoerveld van de toolbox.

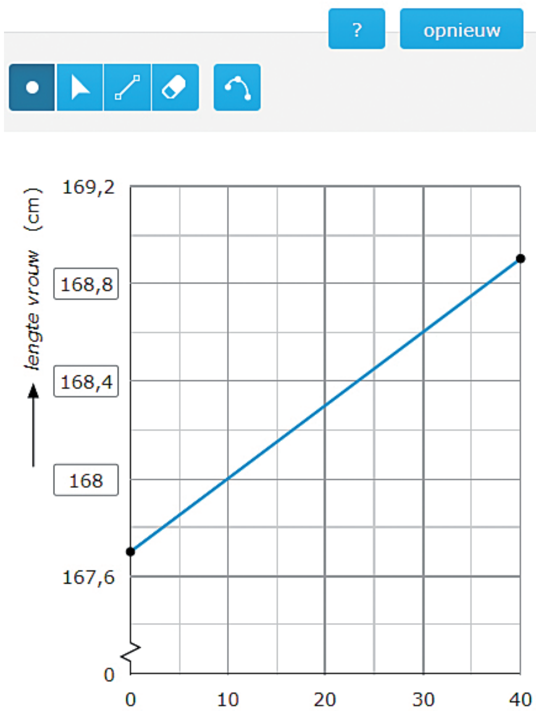


figuur 4

Deze leerling heeft voor het berekenen van 100% een tabel gebruikt. Daarna heeft hij de berekening gemaakt in de rekenmachine en deze vervolgens gekopieerd naar het invoerveld. Als hij met de cursor in een cel van de tabel staat, wordt alleen de uitkomst (5,3333) naar de cel van de tabel gekopieerd. Als hij buiten de tabel staat, wordt de berekening inclusief de uitkomst naar het invoerveld gekopieerd. De negende macht uit de wetenschappelijke notatie heeft hij ingevoerd met de formule-editor.

Diagramtool

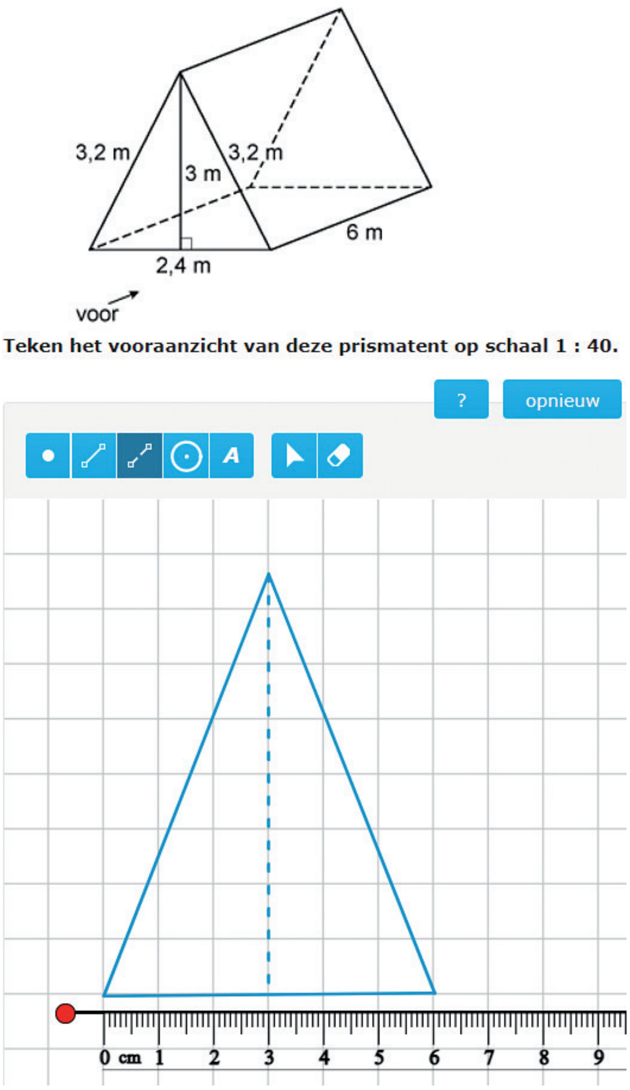
Voor het tekenen van grafieken hebben we, eveneens in samenwerking met onze collega's van nask1, een diagramtool ontwikkeld, zie figuur 5. Net als bij de toolbox heeft de leerling ook bij de diagramtool meerdere gereedschappen tot zijn beschikking. Hij kan een punt zetten, een punt verslepen, een rechte lijn maken, een punt, lijn of kromme uitgummen en een kromme tekenen. Door op de laatste knop te klikken wordt een kromme getekend die het beste past bij de punten die al gezet zijn. Het zelf netjes kunnen tekenen van een parabool kan dus niet meer getoetst worden binnen het digitale examen. Wat nog wel getoetst wordt, is of een leerling zich realiseert of het een rechte lijn of een kromme is die bij een bepaalde formule hoort. In het voorbeeld van figuur 5 is ook een aantal waarden van de verticale as weggelaten die nog door de leerling moeten worden ingevuld.



figuur 5

Meetkundetool

Voor het tekenen van meetkundige constructies hebben we de meetkundetool ontwikkeld. In figuur 6 zie je een vraag uit het examen wiskunde bb van 2021.



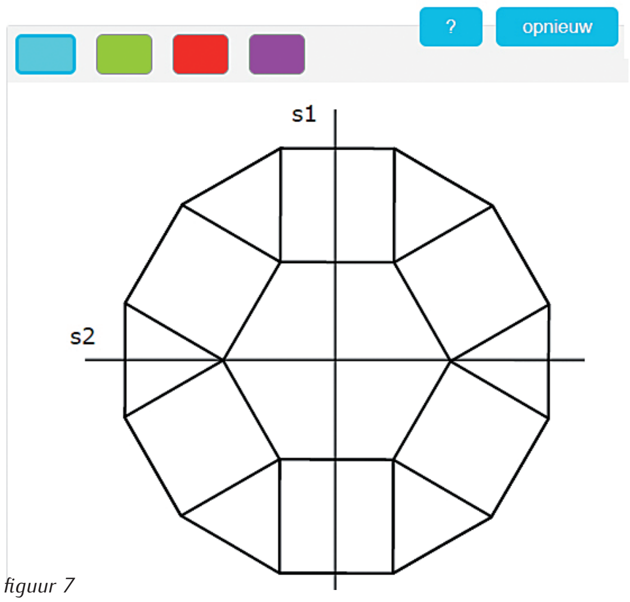
figuur 6

Overeenkomstige knoppen binnen de meetkundetool en de diagramtool zien er hetzelfde uit om het gebruiksgemak te vergroten. Ook hier kan een leerling een punt zetten of een rechte lijn maken, verslepen en uitgummen. Daarnaast kan in de meetkundetool ook een stippellijn of een cirkel gemaakt worden. En er kunnen letters bij hoekpunten geplaatst worden.

Overige applicaties en animaties

Ook worden er applicaties speciaal gebouwd voor specifieke vragen. Bijvoorbeeld een vraag over symmetrie, zie figuur 7. Een dergelijke vraag zou lastig zijn in een papieren examen, zeker omdat het fout inkleuren niet heel makkelijk ongedaan kan worden gemaakt. Digitaal is dat geen probleem.

Bij sommige contexten is het prettig om een animatie of filmfragment te kunnen laten zien bij de introductie van de context. Zo zat er in het examen van 2021 een context over een wondertrommel of zoëtroop. Het zou lastig geweest zijn om de werking ervan in woorden uit te leggen. Met een filmfragment werd het in één keer duidelijk.



figuur 7

De praktijk

Maar hoe werkt zo'n digitaal examen nu in de praktijk? Hoe bereid je je leerlingen erop voor? Afgelopen jaar had ik voor het eerst een examenklas vmbo kb die ik op het examen voorbereidde. Heel spannend vond ik dat. Ik denk dat elke docent dat wel herkent. Heb ik ze wel goed genoeg voorbereid? Kunnen ze een examen maken, waarin alles door elkaar getoetst wordt? Voor mij kwam daar als speciaal aandachtspunt bij dat ik benieuwd was hoe ze zouden reageren op het digitale examen. Omdat het mijn eerste jaar was met een examenklas, besloot ik zoveel mogelijk bij de praktijk van mijn collega aan te sluiten. Dat betekende dat ik de leerlingen pas in de examentraining (zo'n week of zes voor de examens) kennis liet maken met de digitale examens. De rest van het jaar gaf ik gewoon les uit het boek en maakten de leerlingen de opgaven dus veelal op papier.

Examentraining

Voordat ik aan de inhoud van de examens begon, wilde ik ze laten kennismaken met de digitale tools en dan met name de toolbox, de diagramtool en meetkundetool.

Op *oefenen.facet.onl* [1] vind je digitale examens van de afgelopen jaren. Niet alleen van wiskunde trouwens, van alle vakken. Ook de digitale Eindtoets, de mbo-examens en de staatsexamens NT2 zijn hier terug te vinden, leuk om eens rond te neuzen. Bij wiskunde zijn hier de 'oefenopgaven toolbox en rekenmachine' te vinden. Hier liet ik de leerlingen aan de start van de examentraining mee oefenen. Maak maar eens een tabel, een formule en een figuur met de toolbox. Dat ging ze gemakkelijk af. En ik kreeg enthousiaste reacties. Zo was een van mijn leerlingen aan het begin van de les (begrijpelijk) een beetje boos geweest: 'Mevrouw, krijgen we de hele tijd les op papier en nu moeten we het examen op de computer maken. Ik weet niet of ik dat wel kan. Ik vind dat helemaal niet fijn!' Maar nu ze de mogelijkheid ontdekte dat ze haar berekeningen met één druk op de knop kon opslaan en niet meer over hoefde te schrijven was ze om. Aangezien ze alles eruit gooit wat er in haar opkomt, kreeg ik ook dit te horen: 'Maar dit is superhandig!'
Bij de examens mogen de leerlingen hun eigen rekenmachine erbij houden. Maar ik gaf aan dat het handig was om met de rekenmachine op de computer te werken, juist omdat je dan in één keer je berekening kunt opslaan.
De rekenmachine op de computer werkt net anders dan de rekenmachine die mijn leerlingen gewend zijn (Casio fx-82ex). Gelukkig zit er op de computerrekenmachine met ingang van dit jaar ook de mogelijkheid om de berekeningen weer te geven in de mathematische weergave waar mijn leerlingen altijd in werken. Voor een verschil tussen de lineaire en de mathematische weergave, zie figuur 8.

lineaire weergave	3^4+√(6) 83,44948974
mathematische weergave	$3^4 + \sqrt{6}$ 83,44948974

figuur 8

Leerlingen bleken zonder veel uitleg goed te kunnen werken met de rekenmachine. De enige vraag die leerlingen hadden over de rekenmachine was waar de shift-knop zat, waarmee ze de inverse sinus konden berekenen. Dat is bij de computerrekenmachine de inv-knop.
Deze eerste les gaf me veel voldoening. Bij de ontwikkeling van de digitale examens was het één van onze uitgangspunten om de werking van alle tools zo intuïtief mogelijk te maken zodat leerlingen eigenlijk weinig oefening nodig hadden om aan de slag te kunnen.
Dat bleek inderdaad in mijn examenklas zo te zijn en sommigen werden zelfs enthousiast.

Centraal examen

Eigenlijk bleek één les uitleg over de verschillende tools voldoende. In de lessen erna heb ik vooral aandacht kunnen besteden aan de wiskunde, zoals het hoort eigenlijk. En op een woensdag was het dan eindelijk zover: het centraal examen! Omdat er meerdere varianten van het centraal examen beschikbaar zijn, is het mogelijk om de digitale examens flexibel in te plannen: het examen hoeft niet op hetzelfde tijdstip in het hele land afgenomen te worden. Dit geeft meer flexibiliteit, wat zeker in deze coronatijd zeer handig is. De afname ging redelijk vlekkeloos. Er waren weinig technische problemen. Eén leerling knalde na een minuut of tien uit haar examen. Snel werd onze ICT-man erbij gehaald en het examen kon weer opgestart worden en gelukkig was alles bewaard gebleven wat ze had ingevoerd en kon deze leerling weer verder. Ik kreeg een aantal keer de vraag van een leerling hoe een macht ingevoerd kon worden met de toolbox (in hun examen zat de vraag uit figuur 4). Verder konden ze prima uit de voeten met het digitale examen. Het nakijken ging na wat opstartproblemen soepel. Je kunt aangeven of je per vraag of per leerling wilt nakijken. Helaas lukte het mij niet om aan het eind de totaalscore van de leerlingen in te zien. Dat heb ik dus op papier bijgehouden. Mijn leerlingen bleken het goed gedaan te hebben. En ook het examen had zich prima gehouden: er waren weinig op- en aanmerkingen. Natuurlijk geeft dat laatste ook voldoening, maar de blije hoofden op de diploma-uitreiking deden me toch het meest.

Tot slot

Ben je nieuwsgierig geworden en wil je zelf eens aan de slag met een digitaal examen? Kijk dan op *oefenen.facet.onl* [1], dan kun je zelf eens rondkijken en je eigen oordeel vellen. Mocht je andere ervaringen hebben met de digitale examens of vragen hebben, schroom niet mij een mail te sturen!

Noten

[1] Zie *oefenen.facet.onl*

Over de auteur

Melanie Steentjes is toetsdeskundige bij Stichting Cito in Arnhem en wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum. E-mail: *melanie.steentjes@cito.nl*

Jeroen Spandaw

Wiskunde doen met GeoGebra: tien voorbeelden

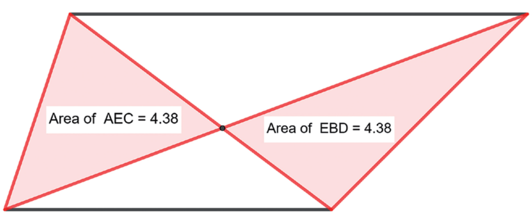
Wiskunde moet je *doen.* Het is pas echt leuk, wanneer je aan het experimenteren en het ontdekken bent. Meetkunde is hiervoor bij uitstek geschikt, ook voor leerlingen, omdat je meetkunde letterlijk kunt *zien*. GeoGebra is daarbij (naast andere hulpmiddelen, zoals fysieke objecten) een fantastisch gereedschap voor probleemoplossen en (her)ontdekkingen door leerlingen. Jeroen Spandaw bespreekt tien pakkende voorbeelden.

Inleiding

Waarom is GeoGebra zo geschikt? Ten eerste kun je snel precieze tekeningen maken – de docent kan dit geheel of gedeeltelijk al voor haar of zijn leerlingen voorbereiden – en observeren *dat* bepaalde opmerkelijke zaken gelden in een constructie. Ten tweede kun je snel controleren hoe algemeen zo'n observatie geldt door verschillende onderdelen van je constructie te variëren. Ten derde kun je gebruik maken van *bewegende* beelden. Ten vierde kun je afhankelijkheden tussen punten in een constructie bestuderen, bijvoorbeeld: hoe beweegt punt Q wanneer ik punt P beweeg? Ten vijfde kan GeoGebra helpen bij het vinden van een oplosmethode. Hieronder beschrijf ik tien voorbeelden van meetkundige ontdekkingstochten, waarin je al deze verschillende functies tegenkomt. We beperken ons tot twee dimensies. De voorbeelden worden successievelijk geavanceerder. Met 'we' bedoel ik meestal: jij en ik en onze leerlingen en studenten.[1], [2]

Trapezium-probleem

Teken een trapezium in GeoGebra met horizontale boven- en onderkant en teken beide diagonalen. Onderzoek de oppervlakte van de (rode) driehoeken links en rechts.

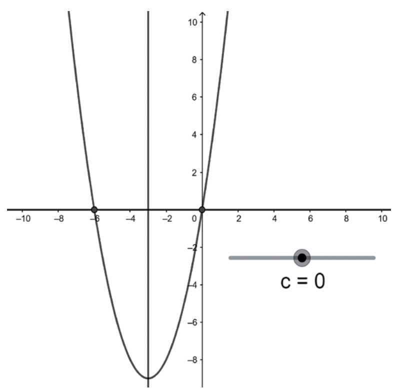


figuur 1 Trapezium-probleem

Enig experimenteren in GeoGebra, zie figuur 1, waarbij de leerling GeoGebra de oppervlakte van de driehoeken in kwestie laat tonen, leidt tot het vermoeden dat die twee oppervlakten gelijk zijn. Het experimenteren bestaat uit het variëren van de hoekpunten en wellicht het vergroten van het aantal getoonde decimalen. Vervolgens kunnen leerlingen het vermoeden proberen te bewijzen. Daarvoor is niet meer nodig dan de bekende formule ½bh voor de oppervlakte van een driehoek. Het is zelfs voldoende te weten dat twee driehoeken met gelijke basis en gelijke hoogte dezelfde oppervlakte hebben. Op welke driehoeken binnen het trapezium kunnen we deze kennis toepassen en waarom bewijst dit ons vermoeden? Tot slot schrijven we ons vermoeden (nu een stelling!) en ons bewijs netjes op. Leerlingen die (ook met hulp) niet uit het bewijs zijn gekomen, kunnen wel het vermoeden precies formuleren. Deze stap kan natuurlijk ook worden gezet vóór de zoektocht naar een bewijs.

De top van een parabool

Hoe kunnen we onderbouwleerlingen helpen de formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ voor de top van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) te herontdekken? Dit kan bijvoorbeeld door hen de familie van parabolen $y = x^2 + 6x + c$ te laten onderzoeken, waarbij c varieert, zie figuur 2. Dit onderzoek dient logischerwijze vooraf te gaan aan de behandeling van de *abc*-formule.
De afgeleide is niet nodig.

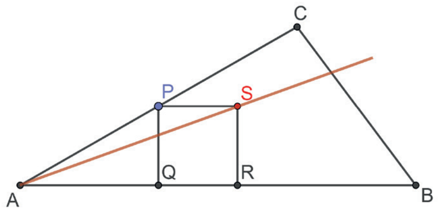


figuur 2 De familie $y = x^2 + 6x + c$

Door c te variëren, verschuift de parabool verticaal op en neer. Het is duidelijk dat de ligging van de symmetrieas van de parabool hierbij niet verandert. Voor de bepaling van die symmetrieas kunnen we de parameter c dus kiezen hoe we willen. Nu ligt die symmetrieas midden tussen de snijpunten van de parabool met de x-as. Leerlingen hebben niet veel sturing nodig om te ontdekken dat dit voor $c = 0$ heel gemakkelijk is: $x^2 + 6x = 0$ voor $x = 0$ en voor $x = -6$. De symmetrieas is dus de verticale lijn $x = -3$ en de x-coördinaat van de top is dus -3. Vervolgens is dit gemakkelijk te generaliseren naar $y = x^2 + bx + c$ en naar $y = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
De symmetrie van de parabool $y = x^2 + 6x + c$ hebben we hierboven zonder bewijs aangenomen. Dit is eenvoudig te repareren door y uit te laten rekenen voor $x = -3 + u$ en voor $x = -3 - u$. In beide gevallen vindt de leerling $y = u^2 - 9 + c$. Dit leidt dan weer tot de techniek van kwadraatafsplitsen en tot de algemene *abc*-formule.
Uiteraard zijn veel verschillende vormen van ondersteuning mogelijk. De docent kan bijvoorbeeld de animatie klaarzetten, de top en de snijpunten met de x-as aangeven in het plaatje en het spoor van die top aanzetten, zodat de meetkundige plaats (de symmetrieas) getekend wordt wanneer de leerling de parameter c varieert.

Een heuristiek van Polya

In zijn beroemde boekje *How to solve it* beschrijft Polya verschillende heuristieken voor het aanpakken van wiskundeproblemen. Eén van die heuristieken is 'laat één voorwaarde weg'. Hij gaf hiervoor het volgende voorbeeld, zie figuur 3: *Gegeven een driehoek ABC, construeer een vierkant PQRS, waarbij P op de zijde AC ligt, Q en R op de zijde AB en S op de zijde BC*. Figuur 3 toont Polya's heuristiek toegepast op de laatste voorwaarde.



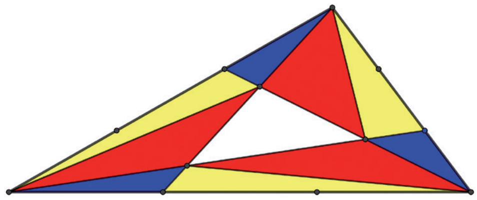
figuur 3 Heuristiek van Polya

Zonder de voorwaarde *S ligt op BC* is het heel gemakkelijk om zo'n vierkant *PQRS* te construeren: neem *P* willekeurig op *AC*, laat een loodlijn vallen vanuit *P* op *AB* om *Q* te vinden, enzovoorts. Voor ieder punt *P* op *AC* hebben we nu een punt *S*. Spelen met GeoGebra (tip: zet het spoor van *S* aan) doet ons vermoeden dat de meetkundige plaats van *S* een rechte lijn is door *A*. Dit is eenvoudig te bewijzen met behulp van gelijkvormigheid.

Nu is het probleem opgelost. We kunnen immers voor één punt *P* op *C* het hoekpunt *S* bepalen, de lijn door *A* en *S* tekenen en deze lijn snijden met de zijde *BC*. Dit snijpunt *S* is een hoekpunt van het gezochte vierkant en de overige drie hoekpunten van dit vierkant zijn eenvoudig uit *S* te bepalen.

Twee Sangaku's

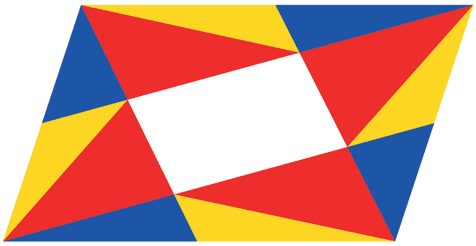
Figuur 4 is een voorbeeld van een Sangaku. Vermoedelijk gebruik je al Sangaku's in jouw onderwijs, niet alleen omdat ze zo geschikt zijn om leerlingen vermoedens te laten ontdekken, formuleren, weerleggen, herformuleren en bewijzen, maar ook omdat ze nu eenmaal onweerstaanbaar zijn.



figuur 4 Sangaku 1

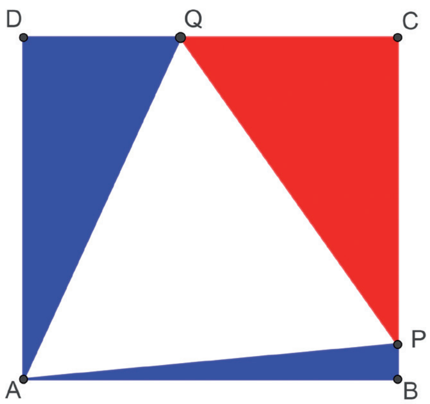
Een Sangaku is een drieledige puzzel in de vorm van een prachtig plaatje zonder woorden. De eerste taak is het ontdekken van een vermoeden. De tweede taak is het vinden van een bewijs. De derde taak is het oppoetsen van het vermoeden en het bewijs totdat ze net zo mooi glimmen als de Sangaku zelf.
In dit voorbeeld luidt het vermoeden: *Wanneer een driehoek door driedeling van de drie zijden wordt opgedeeld in deeldriehoeken als in de figuur, dan zijn gelijk gekleurde oppervlakten even groot en dan geldt bovendien: blauw : geel : rood : wit = 1 : 2 : 3 : 3. In het bijzonder verhoudt zich het witte gedeelte tot het geheel als 3 : 21 = 1 : 7.* Heel verrassend, hoe 1/7 uit een driedeling tevoorschijn komt!
Door de constructie na te tekenen (of door de docent voorgeschoteld te krijgen via zijn account op *geogebra.org*) kunnen de leerlingen de constructie onderzoeken. Wat gebeurt er bijvoorbeeld met alle oppervlakten als je de top van de driehoek parallel langs de basis beweegt?
Nog mooier is het om leerlingen zelf Sangaku's te laten ontwerpen door te variëren op de constructie: start bijvoorbeeld met een parallellogram, zie figuur 5, of een andere vorm in plaats van een driehoek en deel de zijden in tweeën in plaats van in drieën.

>



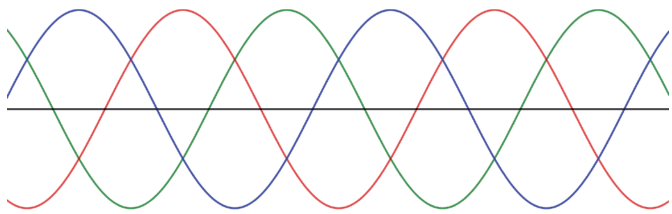
figuur 5 Sangaku 2

Zo hebben leerlingen van Delftse leraren in opleiding al de stelling van Morley en de stelling van Napoleon herontdekt!
In de volgende Sangaku, zie figuur 6, helpt GeoGebra niet alleen bij de ontdekking van het vermoeden, maar ook bij het vinden van een handige probleemaanpak.



figuur 6 Gelijkzijdige driehoek in een rechthoek

Hoewel in een Sangaku de dikke punten en namen van die punten eigenlijk niet thuishoren, heb ik ze nu wel opgenomen om de onderstaande discussie te vergemakkelijken. Het vermoeden luidt: *Gegeven een gelijkzijdige driehoek APQ ingeschreven in een rechthoek ABCD geldt dat de oppervlakte van de driehoek PCQ gelijk is aan de som van de oppervlakten van de driehoeken ABP en ADQ.*
Een voor de hand liggende aanpak is: schrijf $a_1 = DQ$, $a_2 = QC$, $b_1 = BP$, $b_2 = PC$ en $c = AP = PQ = QA$.
Dan geldt $(a_1 + a_2)^2 + b_1^2 = c^2$, $a_2^2 + b_2^2 = c^2$ en $a_1^2 + (b_1 + b_2)^2 = c^2$.
Uit deze drie algebraïsche voorwaarden willen we de volgende algebraïsche conclusie afleiden:
$\tfrac{1}{2}a_2b_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 + a_2)b_1 + \tfrac{1}{2}a_1(b_1 + b_2)$. Dit blijkt een erg lastige algebraopgave te zijn. Laat het me alstublieft weten als je leerlingen hebt die dat kunststukje hebben geflikt! Gelukkig kan GeoGebra ons helpen een eenvoudigere aanpak te vinden. Wanneer we de bovenstaande Sangaku natekenen in GeoGebra, dan merken we al snel dat het handig is om eerst een assenstelsel te tekenen met A in (0, 0). Vervolgens kiezen we een punt P in het eerste kwadrant, waarna de rest vastligt. We krijgen Q door GeoGebra een gelijkzijdige driehoek op de basis AP te laten tekenen, waarna we B, D en C krijgen met behulp van geschikte loodlijnen. De lengte van AP doet er niet toe en we zien dat de enige vrijheidsgraad van belang de hoek $\varphi = \angle BAP$ is. Het is gemakkelijk om alle hoeken uit te drukken in φ. Met $AP = 1$ luidt het vermoeden dan:
$\tfrac{1}{2}\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \tfrac{1}{2}\cos(\varphi + 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ) =$
$\tfrac{1}{2}\cos(60^\circ - \varphi)\sin(60^\circ - \varphi)$.
Dit kunnen we mooier herschrijven als
$\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi + 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ) + \cos(\varphi - 60^\circ)\sin(\varphi - 60^\circ) = 0$,
wat weer equivalent is met
$\sin(2\varphi) + \sin(2\varphi + 120^\circ) + \sin(2\varphi - 120^\circ) = 0$.
Deze mooie identiteit – nu nog een vermoeden! – kunnen we onderzoeken door in GeoGebra de grafieken van de drie termen en hun som te tekenen, zie figuur 7.

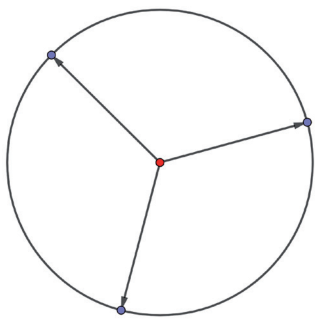


figuur 7 Drie sinussen en hun som

Hoewel het een goede en vrij eenvoudige gonio-oefening is deze identiteit te bewijzen met behulp van de additieformule van $\sin(\psi + \alpha)$ voor $\psi = 2\varphi$ en voor $\alpha = \pm 120^\circ$, doen we het hier anders. De symmetrie van de identiteit schreeuwt immers om een elegant, inzichtelijk bewijsje.
Figuur 7 doet vermoeden dat ook
$\cos(2\varphi) + \cos(2\varphi + 120^\circ) + \cos(2\varphi - 120^\circ) = 0$
geldt. Samen vinden we dus het vermoeden:

$$\begin{pmatrix}\cos(\psi)\\ \sin(\psi)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\psi+120^\circ)\\ \sin(\psi+120^\circ)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\psi-120^\circ)\\ \sin(\psi-120^\circ)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Als je vectoren wilt vermijden, lees je dit als: het zwaartepunt van de drie punten links is (0, 0). Dit kunnen we tekenen in de eenheidscirkel, zie figuur 8.

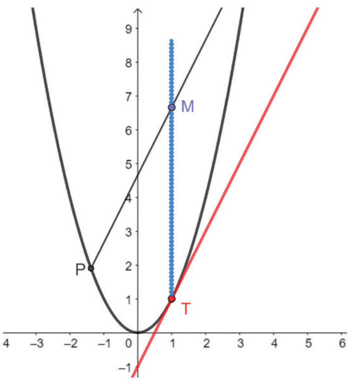


figuur 8 Bewijs van de gonio-identiteit

Pas een rotatie over 120º rond (0, 0) toe op de drie termen van de som. De termen worden dan cyclisch doorgeschoven, dus de som blijft gelijk. Die som (het zwaartepunt) verandert dus niet wanneer dit punt geroteerd wordt rond (0, 0) over 120º. Er is maar één punt met deze eigenschap, namelijk (0, 0) zelf. Dus de som is inderdaad gelijk aan (0, 0). Fijn, zo'n bewijs uit symmetrie, zonder rekenen en zonder gonio!

Archimedes en de parabool

Het volgende probleem gaat terug op Archimedes. Neem een parabool, zeg $y = x^2$.

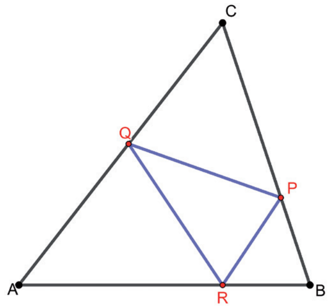


figuur 9 Parallelle paraboolkoorden

Nu zijn er verschillende opties, zie figuur 9. Je kunt bijvoorbeeld starten met een punt T op de parabool en GeoGebra de raaklijn r laten tekenen. Vervolgens teken je een punt P op de parabool en de lijn door P parallel aan de raaklijn r. Deze lijn snijdt de parabool in P en in een tweede punt, dat we Q noemen. Het midden van de 'koorde' PQ noemen we M. Het plaatje wordt overzichtelijker als je de lijn PQ onzichtbaar maakt en vervolgens het lijn*stuk* PQ tekent. Laat GeoGebra het midden M van het lijnstuk PQ tekenen. Kies voor M de optie 'spoor aan' en beweeg P langs de parabool. (Dit laatste kan worden geautomatiseerd door voor P de optie 'animeer' te kiezen.) We vinden nu de meetkundige plaats van M. In figuur 9 is dit de dikke, blauwe, verticale halve lijn. Deze halve lijn eindigt in T. We kunnen deze eigenschappen bewijzen met een beetje algebra. Als $P = (a, a^2)$ en $Q = (b, b^2)$ met $a \neq b$, dan is de richtingscoëfficiënt van de lijn PQ gelijk aan $\frac{b^2-a^2}{b-a} = b + a$. Deze helling is constant in dit probleem, dus daarmee is $x_M = ½(a + b)$ ook constant. Het bewijs (of plausibel maken) van de overige uitspraken laat ik over aan je leerlingen.

Fagnano's probleem

Gegeven een scherpe driehoek ABC, zeg $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$ en $C = (7, 9)$. Bepaal de 'ingeschreven' driehoek PQR met minimale omtrek, zie figuur 10.

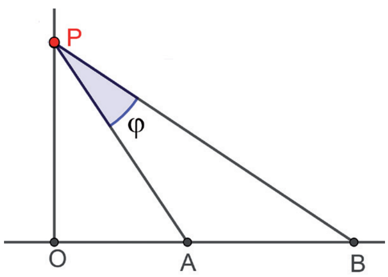


figuur 10 Fagnano's probleem

Je kunt het probleem verkennen in GeoGebra met *trial and error*. Een fysiek experiment met een gespannen touwtje of elastiek behoort ook tot de mogelijkheden. De minimale omtrek blijkt (afgerond) 14,98 te zijn. Lukt het je om de omtrek van PQR onder de 15 te krijgen?
Als je in de buurt van dit minimum zit, kun je vermoedens opstellen over de ligging van de optimale P, Q, R waarbij we er eerst maar eens van uitgaan dat er een unieke oplossing PQR is. Een andere, wellicht meer systematische aanpak is om bij gegeven P en Q het optimale punt R te vinden. (Hint: licht is heel goed in het vinden van de kortste route van P naar Q via de spiegel AB.) Kun je dit bewijzen? (Hint: spiegel in de spiegel!) Daarna lukt het ook wel om de optimale Q en R te vinden wanneer alleen P vast gegeven is, waarna de oplossing van Fagnano's probleem binnen handbereik ligt. We hebben het probleem dan opgelost met dank aan natuurkunde en GeoGebra.

Het rugby-probleem

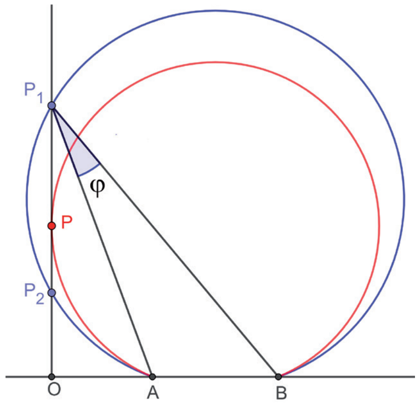
Na een *try* bij rugby mag een speler via een *conversion* proberen extra punten te scoren. Wanhoop niet als je niets van rugby weet, want hier is het interessante het daaruit volgende meetkundeprobleem. Gegeven de posities $A = (a, 0)$ en $B = (b, 0)$ van de doelpalen, waarbij $b > a > 0$. We zoeken het punt $P = (0, p)$ op de positieve y-as zodat de kijkhoek $\varphi = \angle APB$ maximaal is, zie figuur 11.



figuur 11 Maximale kijkhoek op AB

We experimenteren in GeoGebra, bijvoorbeeld met $a = 4$ en $b = 9$. Als P naar O zakt of juist oneindig ver omhooggaat, dan gaat φ naar 0. Tussen die twee uitersten ligt >

een maximum. GeoGebra suggereert dat dit maximum wordt aangenomen in $P = (0, 6)$.
Het verschijnsel 'kijkhoek' doet ons natuurlijk denken aan de stelling van de constante hoek. We tekenen dus een cirkelboog door A, B en P. Door het punt P in GeoGebra te variëren, begrijpen we hoe we het rugby-probleem kunnen oplossen, zie figuur 12.

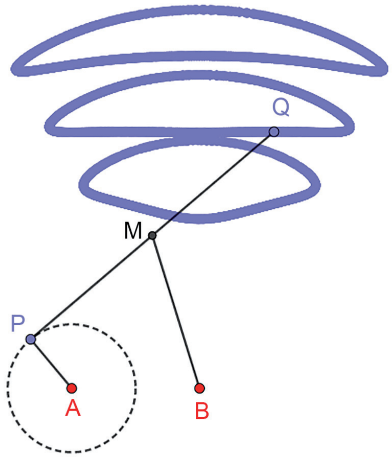


figuur 12 Cirkels met constante kijkhoek

In de twee snijpunten P_1 en P_2 van de blauwe cirkelboog door A en B zijn de kijkhoeken op het doel AB gelijk. Tussen P_1 en P_2 is die kijkhoek groter. Het maximum wordt dus bereikt in het raakpunt P van de rode cirkelboog door de doelpalen A en B die raakt aan de verticale lijn door O. Het middelpunt M van die rode cirkelboog heeft $x = ½(a + b)$ en $y = p$. De straal van deze cirkelboog is $r = MP = ½(a + b)$. Met Pythagoras vind je nu snel $p = \sqrt{a \cdot b}$. Ik laat de details over aan jou en jouw leerlingen. De laatsten vinden het wellicht prettig om eerst het concrete geval $a = 4$ en $b = 9$ te bestuderen.

Stangenconstructies

In het rugby-probleem hierboven bespraken we de zeggingskracht van bewegende beelden in GeoGebra bij het *oplossen* van problemen. We bekijken nu een voorbeeld waarin de beweging een wezenlijk deel is van het probleem *zelf*, namelijk stangenconstructies. In een van de komende nummers van *Euclides* komt een artikel over de Vakantiecursus die Rainer Kaenders in 2021 over dit onderwerp verzorgde. Op de website van Platform Wiskunde Nederland vind je de complete documentatie van die vakantiecursus (inclusief GeoGebra-bestanden en een mooi filmpje van strandbeestenmaker Theo Jansen) met daarin veel meer informatie over stangenmeetkunde. Hier beperken we ons tot het zogenaamde lambda-mechanisme, zie figuur 13, van de Russische wiskundige Tsjebysjov.



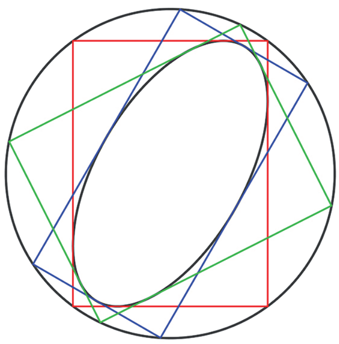
figuur 13 Tsjebysjovs Lambda-mechanisme

Negeer in eerste instantie de onderste en bovenste blauwe kromme. In deze constructie zijn de rode punten A en B vast, terwijl P de gestippelde cirkel doorloopt. AP is een rigide, rechte stang, evenals BM en PQ. Het punt M is het midden van PQ. Als P de gestippelde cirkel doorloopt, beweegt M over een deel van de cirkel met middelpunt B en straal BM. Als gevolg hiervan beweegt het punt Q over de middelste blauwe kromme. Voor mechanische toepassingen, zoals lopende strandbeesten, is het van belang dat het punt Q een vrijwel recht lijnstuk doorloopt (de onderkant van de middelste blauwe kromme) met een vrij constante snelheid. Het punt Q kan dus een voet van een lopend mechanisme aandrijven. Omzetten van een cirkelvormige beweging naar een (bijna) recht-lijnige beweging is uiteraard belangrijk in heel veel andere mechanismen.
Volgens het Wikipedia-lemma over *Chebyshev's Lambda Mechanism* en de daargenoemde bronnen heeft Tsjebysjov dit mechanisme gebruikt voor zijn wandelende machine, de Plantigrade Machine, die hij presenteerde op de Wereldtentoonstelling in Parijs in 1878. De strandbeesten van Theo Jansen gebruiken overigens een ander, ingewikkelder mechanisme.
Terug naar de 21ste eeuw. De bovenstaande constructie is eenvoudig te simuleren in GeoGebra. Neem $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, teken de cirkel met middelpunt A en straal 2, teken P op die cirkel, teken cirkels met straal $r = 5$, laat M het bovenste snijpunt zijn van deze twee cirkels, construeer Q als de puntspiegeling van P in M, maak de cirkels onzichtbaar, kies de optie 'spoor aan' bij Q en kies de optie 'animeer' bij P. Het resultaat is de blauwe meetkundige plaats van Q. Door de beweging van Q te bestuderen zie je bovendien dat Q het onderste deel van de blauwe kromme met vrijwel constante snelheid doorloopt.

Het is interessant om te onderzoeken hoe die meetkundige plaats en de beweging van Q door die kromme varieert, wanneer we bijvoorbeeld $r = BM = PM = MQ$ veranderen. (Dit kun je handig onderzoeken door r in de constructie als 'schuifje' in te voeren.) In figuur 13 zie je onder en boven de krommen voor $r = 6$ respectievelijk $r = 4$. Uiteraard valt er nog veel meer te variëren: de afstand AB, de verhouding $PM : BM$, de verhouding $PM : MQ$, enzovoorts. Kan Tsjebysjovs mechanisme verder worden geoptimaliseerd? Theo Jansen heeft voor zijn strandbeesten vergelijkbaar onderzoek verricht. Dit zou je STEM-onderzoek kunnen noemen, waarbij STEM voor Science, Technology, Engineering & Mathematics staat. Wiskunde is binnen STEM-onderwijs helaas vaak een ondergeschoven kindje, dus ieder mooi voorbeeld is zeer welkom!
Als wiskundigen hoeven we ons niet te laten beperken door praktische overwegingen. We – en daarmee bedoel ik uiteraard niet alleen ons wiskundedocenten, maar ook onze leerlingen en studenten! – kunnen onderzoeken wat er gebeurt als je successievelijk voorwaarden loslaat. Welk type krommen krijg je dan? En wat gebeurt er als je een stang toevoegt? Welke krommen zijn dan mogelijk? In de hierboven genoemde documentatie van de Vakantiecursus 2021 vind je de verrassende antwoorden op deze vragen met als bonus een heel natuurlijke en leerlingvriendelijke toegang tot meer abstracte en geavanceerde materie als 'de topologie van de configuratieruimte'. Uitmuntende stof voor jouw wiskunde-D-lessen op vwo!

Ellipsen en rechthoeken

We eindigen met een Sangaku, zie figuur 14.



figuur 14 Rechthoeken om een ellips

Hoe formuleren we hier een vermoeden? We zien een ellips, een cirkel en enkele rechthoeken ingeschreven in de cirkel en omgeschreven om de ellips. Als structuur voor het vermoeden raad ik de volgende structuur aan:

Voorwaarden: Gegeven … Als …
Conclusie: Dan …

Waar beginnen we mee? Wat zou je als eerste tekenen in GeoGebra? Niet de rechthoeken, want daar zijn er te veel van. De cirkel dan? Nee, want hoe zou uit die zeer symmetrische figuur de minder symmetrische ellips moeten ontstaan? We starten dus met: *Gegeven een ellips* ε. Hoe verder? Dat laat ik weer over aan jou en jouw leerlingen. Een juist vermoeden formuleren is hier niet zo heel lastig. Het vermoeden bewijzen is wel pittig. Voor natuurkundigen schijnt de stelling echter zo vanzelfsprekend te zijn dat ze er stilzwijgend aan voorbijgaan. De bovenstaande Sangaku heb ik gemaakt toen ik las over elliptisch gepolariseerd licht. Hierbij beweegt het elektrische veld $E(t) = (E_1(t), E_2(t))$ langs een ellips met centrum (0, 0). Vervolgens beweren natuurkundigen dat de energie van dit licht evenredig is met $(E_1^{max})^2 + (E_2^{max})^2$, waarbij E_j^{max} het maximum is van $E_j(t)$ voor $j = 1, 2$. Als de ellips is zoals in figuur 14, dan geeft de rode omgeschreven rechthoek aan hoe groot deze maxima zijn. De zijden van deze rechthoek zijn dan namelijk $x = \pm E_1^{max}$ en $y = \pm E_2^{max}$. Die energie kan natuurlijk niet afhangen van de keuze van de oriëntatie van het (x, y)-stelsel ten opzichte van de lange en korte as van de ellips. Dus blijkbaar hebben alle omgeschreven rechthoeken om een vaste ellips even lange diagonalen.

Tot slot

De bovenstaande tien voorbeelden laten zien hoe GeoGebra wiskundige ontdekkingstochten van jouw leerlingen kan ondersteunen. Dit kan op alle mogelijke niveaus en je kunt verder differentiëren door hulp op verschillende niveaus aan te bieden. Kortom, laat leerlingen meetkunde *doen*…

Noten

[1] Dit artikel is gebaseerd op een artikel dat september 2020 in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* is verschenen.

[2] Op *www.geogebra.org/search/spandaw* vind je de bestanden bij alle plaatjes in dit artikel.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiliteerd in de algebraïsche meetkunde, waarna hij heeft gewerkt als docent wiskunde en natuurwetenschappen in het voortgezet onderwijs. Sinds 2007 werkt hij als universitair docent en wiskundelerarenopleider aan de TU Delft.
E-mailadres: *J.G.Spandaw@tudelft.nl*

Koen Stulens, Bert Wikkerink

Computational thinking in de klas

Programmeren in Python

Als we digitale geletterdheid vertalen naar wiskunde komen we vaak uit op computational thinking en physical computing. Bij de invoering van de grafische rekenmachine eind jaren '90, beschikten leerlingen over een digitale onderzoekstool en zorgde deze technologie dat docenten wereldwijd startten met programmeren in de klas om het probleemoplossend en algoritmisch denken te stimuleren.

Historisch overzicht

Eén van de pioniers in Nederland was Henk Pfaltzgraff (1939-2018). In 2003 had ik (Koen) de eer om samen met Henk het boekje *Programmeren met de TI-83 Plus, Wiskunde met een extra dimensie* te publiceren.[1] Het was gebaseerd op TI-Basic voorbeelden van zijn destijds bekende website Henk's Hoekje. Henk omschreef programmeren als volgt: 'Programmeren is een intellectuele creativiteit van een hoog niveau. Vindingrijkheid en systematiek spelen er een grote rol bij. De leerling kan zijn programma's gebruiken als probleemoplosser en automaat bij het huiswerk, de praktische opdracht, als verdieping van de wiskunde of als hobby. Gewoon, voor zijn of haar plezier.'
Gelijktijdig met de invoering van de grafische rekenmachine vond de meetkundesoftware Cabri Geometry zijn ingang tot het meetkundeonderwijs. Dit leidde tot het digitaliseren van tal van meetkundige opdrachten en programmeren van meetkundige constructies aan de hand van Cabri macro's. De Nederlandse docent Dick Klingens (1945-2021) werd een wereldwijde bekendheid met zijn voorbeelden gebaseerd op zijn algoritmische en analytische denkvermogen. De voorbeelden zijn nog steeds beschikbaar op zijn website.[2]

Meer dan ooit is het nodig dat leerlingen inzicht krijgen in de hen omringende digitale wereld. Zo kunnen ze in de toekomst hierin optimaal functioneren en een rol spelen in het oplossen van actuele problemen. In 2006 omschreef Jeannette Wing computational thinking als volgt: 'Computational thinking is the *thought processes* involved in formulating problems and their solutions so that the solutions are represented in a form that can be effectively carried out by an information-processing agent.'
Op de website van het SLO vinden we de volgende definitie van computational thinking:

'Computational thinking is het *procesmatig (her)formuleren* van problemen op een zodanige manier dat het mogelijk wordt *om met* computer*technologie* het probleem *op te lossen*. Computertechnologie gebruiken bij het zoeken naar oplossingen betekent *inzicht* krijgen *in algoritmes* – een reeks instructies om vanaf een beginpunt een bepaald doel te bereiken – *en procedures* – een verzameling activiteiten die in een bepaalde volgorde moet worden uitgevoerd.'

> 'Onderdelen van computational thinking, bijvoorbeeld algoritmisch denken of patroonherkenning, liggen duidelijk op het terrein van de wiskunde. Het zou logisch zijn om die leerdoelen op te nemen in de volgende generatie van het wiskundecurriculum. Dat zou het wiskundecurriculum relevant houden voor de huidige tijd.'
> *Jos Tolboom, leerplanontwikkelaar bij SLO rekenen/wiskunde, informatica.*

Alhoewel computational thinking een breder draagvlak heeft dan wiskunde, hebben wiskunde en computational thinking heel wat aspecten gemeen: problem solving, algoritmisch denken, logisch redeneren, abstractie, patroonherkenning, modelleren, ...

De programmeertaal Python, bedacht door de Nederlander Guido van Rossum[3], is vanwege de laagdrempeligheid en leesbaarheid de ideale brug tussen het denkwerk en een machine om het (reken)werk uit te voeren, problemen te analyseren of op te lossen. Computational thinking kan, samen met programmeren in Python, een extra dimensie geven aan de wiskundeles. Het helpt leerlingen te motiveren en uit te dagen om enerzijds abstracte wiskundige concepten beter te begrijpen en anderzijds deze concepten te automatiseren en toe te passen in het oplossen van meer complexe problemen. Wat het nog interessanter maakt, is gebruik te maken van interdisciplinaire STEM-onderwerpen. Ideeën en voorbeelden zijn beschikbaar.[4]

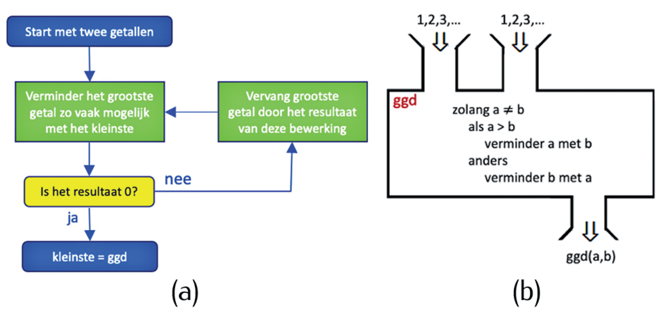
In deze bijdrage illustreren we met voorbeelden hoe computational thinking en programmeren in de klas kan gebracht worden: definiëren & structureren→abstraheren & vertalen (coderen)→berekenen & verwerken→controleren & interpreteren. En hoe leerlingen *goesting* te geven om de digitale probleemoplossers van de toekomst te worden.

De voorbeelden worden uitgewerkt met TI-Nspire™ CX II technologie. Vrij gelijkaardige code kan geprogrammeerd worden op de TI-84 Plus CE-T PYTHON EDITION. De ideeën zijn vanzelfsprekend bruikbaar als je een andere technologie gebruikt.

Wiskundige voorbeelden

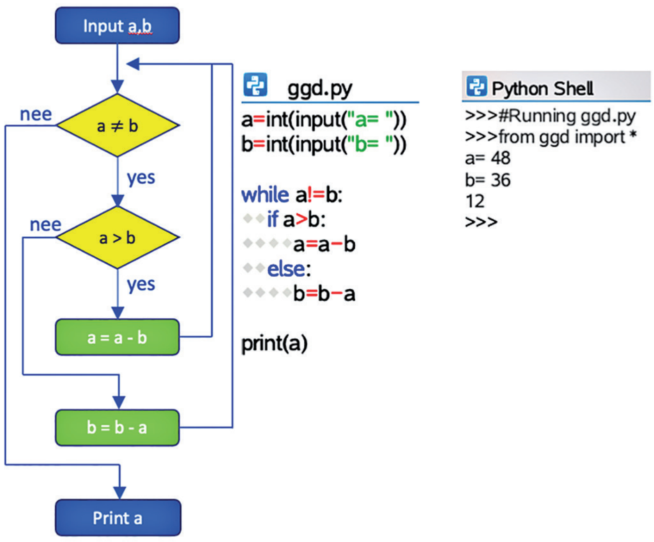
Algoritme van Euclides

Als eerste voorbeeld bekijken we het algoritme van Euclides, beschreven in de boeken VII en X van zijn *Elementen*, voor het berekenen van de grootste gemene deler van twee natuurlijke getallen.
Dit algoritme om de ggd(a, b) van a en b te berekenen, kan omschreven worden als 'verminder het grootste getal, a, zo vaak mogelijk met het kleinste, b, tot er nul overblijft of een getal kleiner dan b'.
Indien er 0 overblijft is ggd(a, b) = b; anders herhaal het algoritme voor b samen met wat er van a overblijft.
Dit algoritme geeft ons een eerste stroomdiagram, zie figuur 1a. Het is nog te vaag om te vertalen in code en uit te voeren door een machine.
Door het algoritme wat meer te structuren, m.b.v. logische condities, krijgen we het stroomdiagram in figuur 1a dat vrij letterlijk kan vertaald worden naar Python-code, zie figuur 1b.



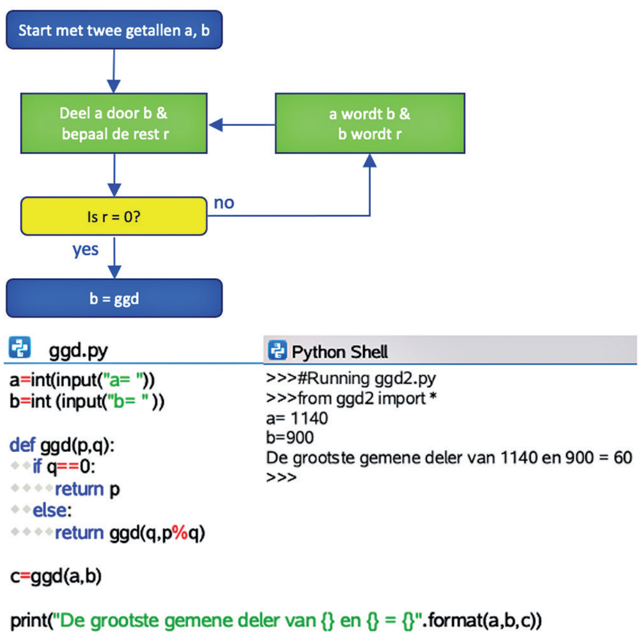
figuur 1

Dit geeft het volgende resultaat, zie figuur 2.



figuur 2

Het algoritme van Euclides is gebaseerd op de eigenschap dat de ggd van twee natuurlijke getallen gelijk is aan de ggd van het kleinste getal en de rest die overblijft bij deling van het grootste getal door het kleinste.
Gebruikmakend van quotiënt en rest, vooral de rest, kunnen we het algoritme als volgt aanpassen. Voor de Python-code maken we gebruik van recursie, zie figuur 3.

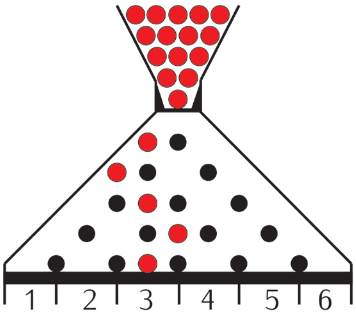


figuur 3

>

Galton-bord

In 1889 ontwikkelde Sir Francis Galton een instrument-(bord) om de centrale limietstelling te demonstreren en de vraag te onderzoeken: Hoeveel samples van een binomiale kansverdeling zijn er nodig om een normale verdeling te benaderen? Het bord bestaat uit een aantal rijen van pinnen waardoor een bal rolt. De kans om links of rechts te rollen bij iedere pin is gelijk aan 50 %. De kansverdeling van het experiment om in een bepaalde bak terecht te komen, is een binomiale verdeling met parameters *n* het aantal rijen pinnen en *p* gelijk aan ½, zie figuur 4.
Het simuleren van een bak met vijf rijen pinnen, is gebaseerd op het coderen van Links met 0 en Rechts met 1.



figuur 4

Het rollen van één bal kan als volgt gecodeerd worden:

```
from random import *
for i in range(0,5):
◆◆p = p + randint(0,1)
print(p)
```

De waarde van *p* geeft weer in welke bak de bal terechtkomt. Voor het rollen van meerdere ballen, voeren we bovenstaande code een aantal keer uit. In de lijst 'bak' wordt bijgehouden in welke bak de ballen terechtkomen.

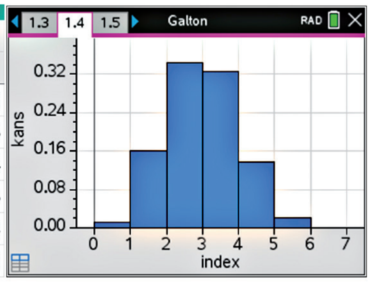
```
from random import *

aantal = int(input("Aantal ballen: "))
bak = [0 for i in range(0,6)]

for k in range(aantal):
◆◆for i in range(0,5):
◆◆◆◆p = p + randint(0,1)
◆◆bak[p] += 1

print(bak)
```

Met de module ti_system kan voor TI technologie de data gegenereerd door een Python-programma geïmporteerd worden in de andere applicaties voor verdere visualisatie en analyse. Hiervoor definiëren we de lijsten:
nummer = baknummer
binom = benaderende kans
We importeren de lijsten nummer, bak, en binom als de lijstenindex, aantal en kans in de ingebouwde spreadsheet.

```
from random import *

aantal = int(input("Aantal ballen: "))
bak = [0 for i in range(0,6)]

for k in range(aantal):
◆◆for i in range(0,5):
◆◆◆◆p = p + randint(0,1)
◆◆bak[p] += 1

nummer = [i for i in range(0,6)]
binom = [round(bak[i]/aantal,3)
◆◆◆◆for i in range(0,6)]

from ti_system import *
store_list("index",nummer)
store_list("aantal",bak)
store_list("kans",binom)
```

Dit geeft de volgende resultaten, zie figuur 5:

	index	B aantal	C kans
=			
1	0	6	0.012
2	1	80	0.16
3	2	172	0.344
4	3	163	0.326
5	4	69	0.138
6	5	10	0.02



figuur 5

Grafisch programmeren

Beeldverwerking

Digitale afbeeldingen kunnen beschouwd worden als matrices met als elementen RGB-pixelwaarden (Rood Groen Blauw). Experimenteren met de RGB-waarden van een afbeelding geeft aanleiding tot interessante korte programmeeropdrachten.

Voorbeeld 1
Leerlingen kunnen online heel wat informatie vinden over hoe filters toe te passen op foto's: grayscale, sepia, inversie, helderheid, contrast, et cetera. Maar hoe kunnen ze die zelf programmeren? We illustreren dit aan de hand van een grayscale filter gebaseerd op de gemiddelde intensiteit. Na het importeren en benoemen van een foto, tonen we met de volgend Python-code de foto in het grafische 318 x 212 Python-venster, zie figuur 6.

```
from ti_image import *

pic = load_image("ballon")
pic.show_image(0,0)
```

figuur 6

Het uitvoeren van de grayscale-filter op deze foto, komt neer op de RGB-waarde voor iedere pixel te lezen en vervolgens zowel R, G als B te veranderen in: (Rood + Groen + Blauw) / 3. De Python-code, en het resultaat in figuur 7,

```
for x in range (0,pic.w):
♦♦for y in range (0,pic.h):
♦♦♦♦rgb = pic.get_pixel(x,y)
♦♦♦♦sum = int((rgb[0] + rgb[1] + rgb[2]) / 3)
♦♦♦♦grijs = (sum,sum,sum)
♦♦♦♦pic.set_pixel(x,y,grijs)
pic.show_image(0,0)
```

figuur 7

Voorbeeld 2
Een mooie programmeeropdracht en denkoefening is het laten uitvoeren van een meetkundige transformatie op een foto. De volgende Python-codes spiegelen de foto om de horizontale en verticale as, zie figuur 8.

```
Flip horizontal
from ti_image import *

pic = load_image("ballon")
newpic = copy_image(pic)
newpic.show_image(0,0)

for x in range(0,pic.w):
♦♦for y in range(0,pic.h):
♦♦♦♦rgb = pic.get_pixel(x,(pic.h-1)-y)
♦♦♦♦newpic.set_pixel(x,y,rgb)
♦♦newpic.show_image(0,0)

Flip vertical
from ti_image import *

pic = load_image("ballon")
newpic = copy_image(pic)
newpic.show_image(0,0)

for x in range(0,pic.w):
♦♦for y in range(0,pic.h):
♦♦♦♦rgb=pic.get_pixel(x,(pic.h-1)-y)
♦♦♦♦newpic.set_pixel(x,y,rgb)
♦♦newpic.show_image(0,0)
```

>

Merk op dat in de code gebruik gemaakt wordt van (pic.w – 1). Voor een breedte pic.w (= 318) worden de pixels genummerd van 0 , ... , pic.w – 1 (=317). Met het statement newpic.show_image(0,0) in de for-lus voor *x*, wordt de nieuwe foto kolom per kolom gegenereerd. Door dit statement uit de lus te halen, wordt alles eerst berekend en dan getoond.

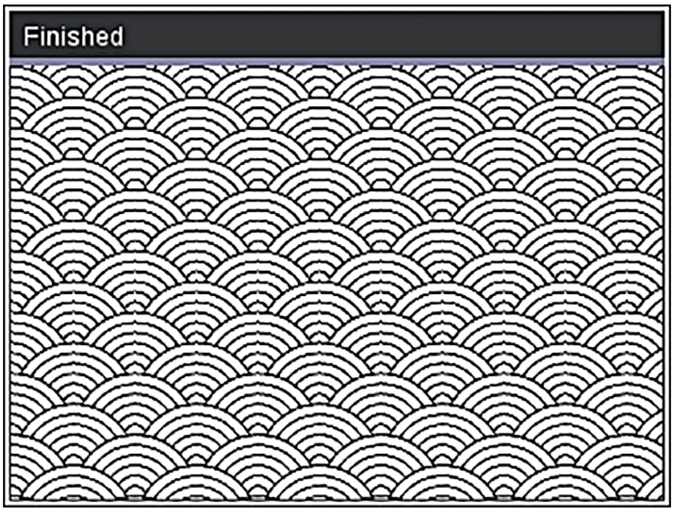
horizontal flip vertical flip

figuur 8

Mathemagische kunst

Experimenteren met lijnen en bogen en het iteratief tekenen van gelijkaardige patronen stimuleert de creativiteit bij leerlingen en maakt de kunstenaar in hen wakker. Een tiental lijnen code is vaak genoeg om artistieke figuren te tekenen. Heel wat denk-, reken- en probeerwerk komt aan bod en leidt tot verrassende uitput. Een voorbeeld, zie figuur 9.

```
from ti_draw import *


# 15 rijen figuren
for j in range(0,212/15+2):
◆◆x=30*(j%2)

# 6 figuren per rij
◆◆for i in range(0,318,60):

# Tekenen van 6 cirkels
◆◆◆◆for r in range(30,0,-5):
◆◆◆◆◆◆set_color(255,255,255)
◆◆◆◆◆◆fill_circle(i+x,j*15,r)
◆◆◆◆◆◆set_color(0,0,0)
◆◆◆◆◆◆draw_circle(i+x,j*15,r)
```

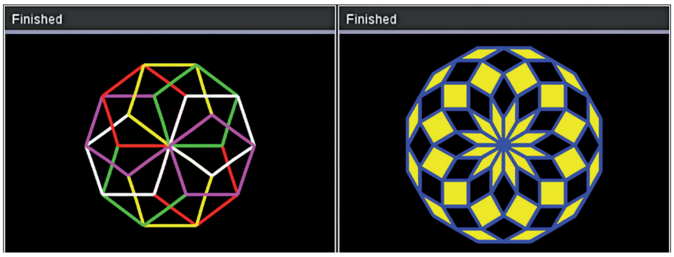


figuur 9

Een handige tool voor de mathemagische Python-kunstenaar is de Turtle Graphics module. De Turtle-robot is ontworpen voor het tekenen op basis van locatie, oriëntatie en attributen van de pen verbonden met de robot. Waar de Draw-module gebaseerd is op cartesiaanse meetkunde, is Turtle vector-based (relatieve richting en afstand t.o.v. startpunt).
Ook hier genereren slechts een tiental lijnen code mooie artistieke geometrische figuren door het herhaaldelijk uitvoeren van gelijkaardige procedures. Vanzelfsprekend kan dit aanleiding geven tot meer uitgebreidere programmeeropdrachten zoals dynamische animaties of simulaties. Twee Turtle graphics, gebaseerd op het tekenen en kleuren van veelhoeken, zie figuur 10.

```
Vijfhoeken
from turtle import *; t = Turtle()
t.hidegrid(); t.hideturtle()

t.dot(500); t.pensize(2); t.speed(10)
kleuren = ["red","yellow","green","white","magenta"]
for i in range(10):
◆◆t.pencolor(kleuren[i%5])
◆◆for j in range(5):
◆◆◆◆t.forward(50)
◆◆◆◆t.right(72)
◆◆t.right(36)
```

```
Twaalfhoeken
from turtle import *; t = Turtle()

t.hidegrid(); t.hideturtle()
t.dot(500); t.pensize(2); t.speed(10)

t.pencolor("blue"); t.fillcolor("yellow")

t.begin_fill()
for i in range(12):
◆◆for j in range(12):
◆◆◆◆t.forward(a)
◆◆◆◆t.right(30)
◆◆t.right(30)
t.end_fill()
```



figuur 10

Object-georiënteerd aan de slag

Voor het aanpakken van grotere programmeeropdrachten is het handig om klassen van objecten te gebruiken om het probleem gestructureerd op te delen in deelproblemen en het programma zeer leesbaar te houden. We kijken naar de volgende algoritmes: K-means hieronder en het Prim algoritme op de website.[5]

K-means

In het artikel 'Computationeel denken bij vwo wiskunde A' in *Euclides* 96-2 wordt K-means clustering omschreven als een clusteringalgoritme om datasets zo goed mogelijk te partitioneren in groepen van vergelijkbare objecten. K-means clustering partitioneert data/observaties in clusters waarbij iedere observatie tot de cluster behoort van het dichtstbijzijnde midden(mean), ook wel cluster-centrum genoemd. In het volgende voorbeeld worden de data voorgesteld als punten in het euclidische vlak met de euclidische afstand als afstandsmaat.

Een standaard K-means algoritme kan als volgt gestructureerd worden, zie figuur 11:

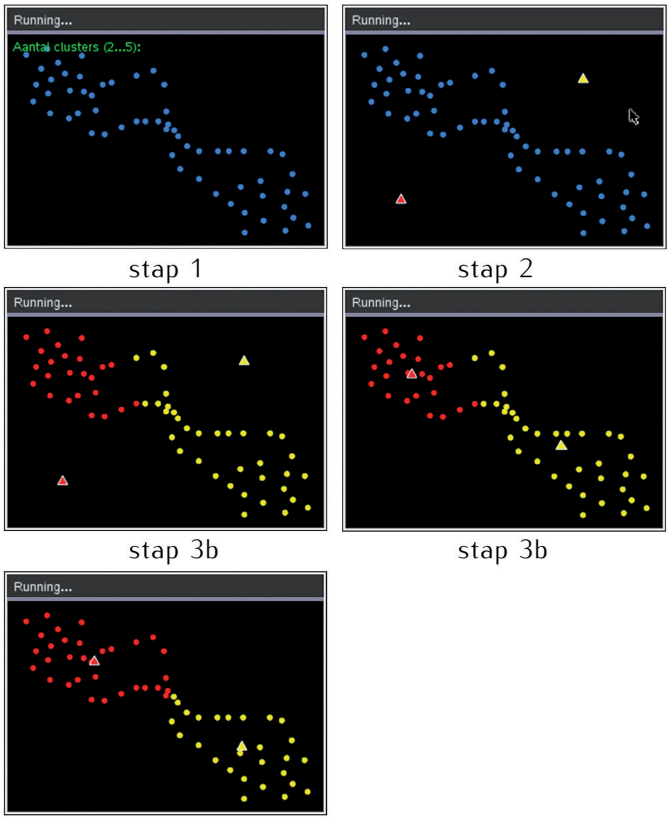
Stap 1: Het bepalen van het aantal clusters K.

Stap 2: Kiezen van de positie van de clustercentra c_1, c_2, ... c_K.

Stap 3a: Bepaal voor elk punt het dichtstbijzijnde centrum en ken het punt tot aan het bijhorende cluster.

Stap 3b: Bepaal voor ieder cluster een nieuw centrum, het gemiddelde/zwaartepunt van het cluster.

Stap 4: Herhaal stap 3 net zolang totdat de clustercentra en clusters niet meer veranderen.



stap 1 stap 2 stap 3b stap 3b stap 4

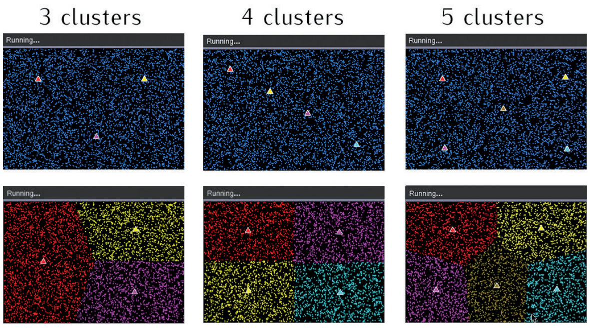
figuur 11

Na het definiëren van de klassen/objecten voor de datapunten en centra en functies voor het tekenen van de data en de clusters, kan het algoritme er als volgt uitzien:

```
punten = [ ]
random_data(n)
aantal_clusters()
centra_kiezen()
while get_key() != "esc":
◆◆achtergrond(zwart)
◆◆vorm_clusters()
◆◆punten_tekenen()
◆◆centra_tekenen()
◆◆update_centra()
```

Het gebruiksvriendelijke karakter en de leesbaarheid van Python, maakt dit K-means standaardalgoritme een >

doenbare, interessante en uitdagende programmeeropdracht i.v.m. modelleren, simuleren, computational problem solving en algoritmisch denken. Het uitvoeren van het algoritme verdeelt het vlak in partities; Voronoi-diagrammen genoemd, zie figuur 12. Voor de code van dit K-means algoritme verwijzen we naar *Computational Thinking in de wiskundeles*.[6]



figuur 12

Tot slot

De bedoeling van dit artikel is je een computational thinking sampler m.b.v. Python coding aan te bieden rond de verscheidenheid van computational thinking en programmeren in de wiskundeles: van eenvoudige problemen met korte code tot uitgebreidere projecten, in samenwerking met het docentennetwerk T^3 Nederland/Benelux.[7]

Op de site zijn meerdere bestanden te downloaden.
vakbladeuclides.nl/974python_1
vakbladeuclides.nl/974python_2
vakbladeuclides.nl/974python_3

Noten

[1] Te downloaden van de *Euclides* website
[2] Zie: *www.pandd.nl*
[3] Interview met Guido van Rossum: *t3nederland.nl/nl/t3-europe/edublogs/interview-guido-rossum*
[4] Zie: *www.wil-destem.nl* en *www.wil-depython.nl.*
[5] Zie de *Euclides* website, daar staan ook nog twee voorbeelden van physical computing: programmeren met de micro-controllers TI-Innovator™ Hub en een BBC micro:bit.
[6] Zie: *resources.t3nederland.nl/webinars*
[7] T^3 Nederland/Benelux (Teachers Teaching with Technology) is een groep docenten wiskunde en exacte vakken. Zij ontwikkelen lesmateriaal en nieuwe didactische werkvormen in combinatie met technologie. T^3 Nederland wordt ondersteund door Texas Instruments en al haar partners. Zie: *www.t3nederland.nl*

Over de auteurs

Koen Stulens is al meer dan 20 jaar betrokken bij Texas Instruments. In 1998 begon hij als T3-consulent, in 2011 als educatief consultant, beide in combinatie met zijn werkkring bij de Universiteit in Hasselt(B). In 2007 stapte hij volledig over naar TI. E-mailadres: *k-stulens@ti.com*
Bert Wikkerink doceerde wiskunde aan CSG Liudger. Hij is reeds jaren betrokken bij wiskundeprojecten rond Derive en TI InterActive!™. Vanaf 2008 gebruikt hij de TI-Nspire™ technologie in de klas. E-mailadres: *b.wikkerink@gmail.com*

Wiskunde op postzegels

Henk Rozenhart

In vroeger tijden waren wiskundigen aangewezen op de posterijen als men met elkaar wilde communiceren. Dat ging per postkoets of natuurlijk via bevriende bezoekers. Tegenwoordig houden we contact via allerlei digitale media en schrijven we nauwelijks nog brieven. Daardoor is de postzegel een beetje op de achtergrond geraakt. Maar als we even zoeken kunnen we bij veel landen nog een aantal postzegels vinden, die op de wiskunde zijn geïnspireerd of voor een belangrijke gebeurtenis op wiskundig gebied speciaal zijn uitgegeven. In veel landen werden er ook postzegels uitgegeven met wiskundigen erop afgebeeld of met een aan wiskunde verwant onderwerp.

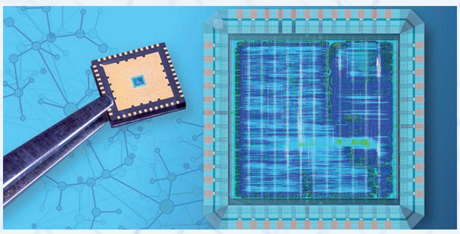
Bron: *http://philamat.blogspot.com/*

Wis en Waarachtig

Kenmerkende kuiltje in appel verklaard

De meeste appels zijn grotendeels rond, maar bij het steeltje houdt die rondheid op. Daar buigt het vruchtvlees naar binnen en vormt het een kuiltje. Een internationaal team van wis- en natuurkundigen heeft nu verklaard hoe dat kuiltje ontstaat. Dat deden ze met een combinatie van waarnemingen, theoretisch onderzoek, experimenten en simulaties.
De onderzoekers haalden appels van bomen om de precieze vorm in verschillende groeistadia in kaart te brengen. Dat deden ze in een boomgaard van de Universiteit van Cambridge, de universiteit waar natuurkundige Isaac Newton aan verbonden was toen hij in 1666 de zwaartekracht doorgrondde – volgens de overlevering dankzij een vallende appel.
Gewapend met deze gegevens verfijnden de onderzoekers een eerder ontwikkeld wiskundig model van de groei van een appel. Met het nieuwe model simuleerden ze de ontwikkeling van allerlei soorten appels. Daaruit bleek dat het verschil in groeisnelheid tussen vruchtvlees en klokhuis het kenmerkende kuiltje veroorzaakt.
De formules waarop het appelmodel is gebaseerd, komen vooral uit de singulariteitentheorie. Die theorie beschrijft verschijnselen waarbij op kleine afstanden grote veranderingen plaatsvinden. Door die relatie met singulariteiten geeft het appelmodel biologen een beter begrip van hoe objecten in de natuur hun vorm verkrijgen.
Naar: *www.newscientist.nl/nieuws/kenmerkende-kuiltje-in-appel-verklaard/*

Energiezuinige AI detecteert hartafwijkingen



CWI-onderzoekers Bojian Yin en Sander Bohté hebben samen met hun collega Federico Corradi van Stichting Interuniversitair Micro-Elektronica Centrum (IMEC) in Eindhoven een wiskundige doorbraak bereikt in het rekenen met zogeheten gepulste neurale netwerken. Dankzij deze doorbraak kunnen speciale chips die geschikt zijn voor deze kunstmatige intelligentie (AI) spraak, gebaren en elektrocardiogrammen (ECG's) een factor twintig tot duizend energiezuiniger herkennen dan traditionele AI-technieken. Zulke chips staan op de rand van praktische, alledaagse toepassingen.
In het afgelopen decennium heeft AI steeds meer alledaagse toepassingen gekregen, onder andere voor het herkennen van beeld en gesproken woord. Dat gebeurt met diepe neurale netwerken, die een sterk vereenvoudigde nabootsing zijn van de manier waarop het menselijk brein informatie verwerkt. Voor mobiele toepassingen kost het uitvoeren van huidige AI-modellen echter vaak te veel energie. Het ontwikkelen van energiezuinige AI is daarom steeds belangrijker geworden.
Een van de manieren om AI-toepassingen energiezuiniger te maken, is om de neurale netwerken beter te laten lijken op die van het menselijk brein. Klassieke neurale netwerken gebruiken signalen die continu zijn en wiskundig makkelijk hanteerbaar. Gepulste neurale netwerken rekenen met pulsjes, wat veel meer lijkt op wat er in het brein gebeurt en minder energie kost, maar wat als nadeel heeft dat de signalen discontinu zijn en wiskundig moeilijker hanteerbaar. Voor dat probleem hebben de onderzoekers echter een wiskundige oplossing gevonden.
Om algoritmen zoals die van Bohté te gebruiken in alledaagse toepassingen, zijn speciale, neuromorfe computerchips nodig. De architectuur van deze chips lijkt meer op de biologische architectuur van het menselijk brein dan die van traditionele computerchips.
Bohté: 'Onze onderzoekspartner IMEC heeft op basis van onze algoritmen een speciale neuromorfe chip gemaakt met 336 gepulste neuronen: de μBrain-chip. Wanneer we ons algoritme door deze speciale chip laten uitvoeren, winnen we een factor twintig aan energieverbruik. Voor het detecteren van hartafwijkingen betekent dit dat je een ECG-registrerende chip kunt implanteren en dat die een jaar lang op een enkele batterij blijft werken.'
De komende jaren zullen neuromorfe chips steeds meer gepulste neuronen gaan bevatten, wat de toepassingsmogelijkheden van kunstmatige intelligentie in draagbare chips steeds verder zal uitbreiden.
Bron: CWI persbericht

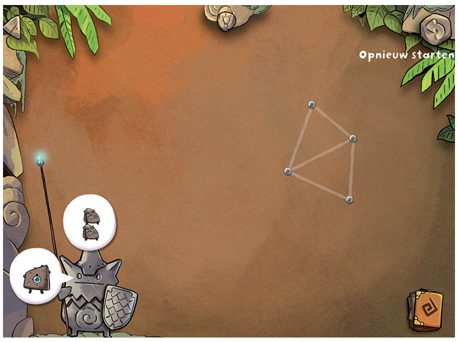
Wiskunde digitaal

Lonneke Boels

Leren over veelhoeken voor vmbo-bkg en mavo met DragonBox Elements

Deze keer een spel dat heel geschikt is voor de onderbouw van het vmbo. Het spel leert je verschillende soorten vlakke figuren kennen. Het doel van het spel is om zoveel mogelijk 'kracht' te verzamelen om monsters te bestrijden. Ik schreef al eerder over een DragonBox[1] spel[2]. Dat spel was vooral bedoeld om algebraïsche vaardigheden op te doen, nu gaat het over eigenschappen van veelvlakken. Het spel is gemaakt door een gamestudio die educatieve games maakt met wiskundige inhoud.

Het doel van het spel is om een leger te bouwen om het monster Osgard op de top van de rots te bestrijden. Daarvoor verzamel je krachten in de vorm van driehoeken, vierhoeken, enzovoort. Allerlei geometrische vormen komen aan bod, zoals gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken, cirkels, driehoeken in cirkels, enzovoort. Door met je vinger de vorm te beschrijven (langs de drie hoekpunten gaan voor een driehoek) en vervolgens op de ontstane kracht te tikken (een figuurtje dat in het midden van de driehoek verschijnt) kun je aantikken welke twee zijden even lang zijn, waarna het woord 'gelijkbenige driehoek' verschijnt. Als je alle opdrachten hebt vervuld, krijg je de gevonden figuurtjes als kracht.

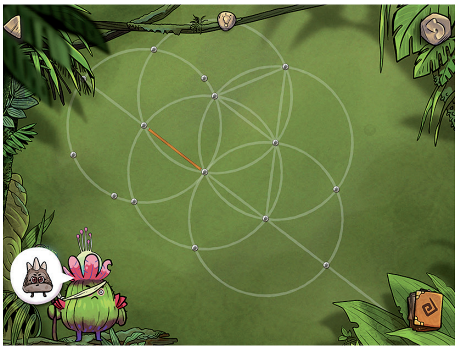


figuur 1 Voorbeeld van het speelscherm met daarin twee driehoeken en een vierhoek die moeten worden overgetrokken om alle krachten vrij te maken.

Net als in de eerdere games, word je geholpen bij de ontdekking van de belangrijkste acties. Zo leer je bijvoorbeeld dat je eerst de cirkel moet aantikken voordat je de straal kunt ronddraaien om meer driehoeken te maken. Tegelijkertijd zitten er verborgen elementen in. Zo blijkt de polydex (een boek) allerlei uitleg te bevatten over bijvoorbeeld het doel (help de bewaker om de vechters in de witte ballon te maken), de evolutie (in de TRI-familie heb je de Triangulum die 3 punten waard is en de Isosceles, de gelijkbenige-driehoek-vechter, die 30 punten waard is) met nog twee open plekken in de stamboom die je als wiskundedocent misschien wel kunt raden. Sommige takken in de familie hebben maar één lid, andere meerdere. Daarmee wordt de (wiskundige) samenhang tussen de figuren zichtbaar die wel een klassikale nabespreking behoeft. In de familie QUA heb ik tijdens het schrijven van dit stukje pas één plek ingevuld van de zes plekken in totaal. Het knappe van het spel is dat het met een minimum aan tekst is geprogrammeerd. Dat maakt het ook uitermate geschikt voor leerlingen met Nederlands als tweede taal of met een taalachterstand.

figuur 2 Twee van de drie opdrachten in de witte ballonnen zijn vervuld.

In de eerste serie opdrachten ontdekken leerlingen dat gelijkbenige driehoeken twee even lange zijden hebben, in de tweede serie opdrachten komt de eigenschap aan bod dat er twee even grote hoeken zijn (de basishoeken). Het wordt aangeraden om na een serie opdrachten een klassikale bespreking te houden over de ontdekkingen tot zover. De stamboom kan daarvoor een goede aanleiding zijn. Wat zou er op de lege plekken komen? Waarom zijn er twee takken vanuit de moederdriehoek? Welke eigenschappen hebben de driehoek in één tak gemeen? Welke eigenschappen wanneer aan bod komen, kun je vinden in de Engelstalige docentenhandleiding. Daar valt te lezen dat ook overstaande hoeken, eigenschappen van een ruit (rhombus) en nog veel meer aan bod komt.



figuur 3 Via cirkels en stralen, worden allerlei driehoeken gemaakt die vervolgens weer in krachten kunnen worden omgezet.

Pluspunten

— Het is een echt spel. Ondanks dat ik de eigenschappen van veelvlakken al ken, vind ik het jammer te moeten stoppen.
— Er zijn drie instapniveaus: makkelijk (voor basisschool), normaal (voor vmbo-bkg) en moeilijk (vmbo-gt/mavo, eventueel brugklas hv).
— Door meer veelhoeken te ontdekken dan strikt nodig zijn, kun je meer krachten krijgen.
— De docentenhandleiding geeft je als docent overzicht van de wiskunde in het spel.
— Het is een uitdaging om zoveel mogelijk krachten te vinden voordat je de laatste gevraagde kracht vindt, want dan stopt de opdracht en kun je dus niet nog meer veelhoeken overtrekken (om krachten te krijgen).
— Als je vergeten bent wat je moet doen, kun je op het lampje klikken (bij moeilijkere opdrachten).
— Je kunt het spel in tweetallen spelen. (Zet dan linkshandige spelers bij elkaar want aan het begin van het spel kies je of je links- of rechtshandig bent.)

Minpunten

— Je moet alle niveaus doorlopen voordat je aan volgende niveaus toekomt. Met name voor leerlingen die het snel door hebben, kan dat saai worden.
— Als een driehoek niet ‘voorgetekend’ is, kun je deze ook niet overtrekken waardoor deze geen extra punten oplevert.
— Met een kleine aanpassing zouden enkele opdrachten voor havo en vwo kunnen worden uitgebreid naar het ontdekken van meetkundige stellingen. De stelling van Thales ligt op een gegeven moment erg voor de hand en ook de stelling van de constante hoek of koordenvierhoek. Deze zouden als een soort bonusopdrachten kunnen worden ingebouwd zodat je ook zonder die opdrachten verder kunt.
— De handleiding voor docenten is in het Engels (maar DeepL Translator [3] is een prima vertaalsite, beter dan Google translate).
— Als je acties vergeten bent, kun je vastlopen. Gelukkig is er dan meestal een medeklasgenoot die je kan helpen.

Conclusie

Geschikt voor: onderbouw van het vmbo, eventueel brugklas hv.
Eindoordeel: ‘aanschaffen’
Kosten: € 4,99. Prijsreductie tot 50 % is mogelijk voor scholen[4] en een gratis proeflicentie voor docenten is beschikbaar voor DragonBox numbers en big numbers (dus niet voor Elements). Bij de aanschaf van meerdere DragonBox games tegelijk, krijg je ook korting, ook als je er al één hebt.
Taal: Nederlands
Getest op: i-pad Pro (9,7 inch) met softwareversie 14.8.
Beschikbaar voor Android, iPad, iPhone, iPod Touch, Kindle Fire. Het lijkt erop dat het ook gebruikt kan worden op een Windows computer en Chromebook maar dat heb ik niet uitgetest.
Maker: DragonBox zegt een kleine onafhankelijke gamestudio te zijn die als missie heeft om het wiskundespel te onthullen en abstracte wiskundige begrippen om te zetten in speelplezier voor kinderen. Dragonbox is onderdeel van Kahoot+.

Noten

[1] Zie: *dragonbox.com*
[2] Zie: Boels, L. (2015). Wiskunde Digitaal: Dragon Box 2. *Euclides 90*(4), 8-9.
[3] Zie: *www.deepl.com*
[4] Zie: *https://www.dragonbox.com/educators/educational-downloads*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en promovendus met een lerarenbeurs aan de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

Anna Shvarts

Leer wiskunde zoals je leert fietsen

Een *embodied* benadering van onderwijstechnologieën

Leerlingen wiskundige concepten met de handen laten ontdekken: zo zou je de *embodied* benadering (te) kort kunnen omschrijven. En ook daarbij kan ICT een belangrijke rol spelen.

Technologie om te doen en technologie om te leren

Als we denken aan technologische vooruitgang, zien we vaak hoe technologieën menselijke taken vervangen: navigatiesystemen helpen ons om ons te oriënteren, mobiele telefoons slaan onze contacten op, plannings-assistenten houden onze agenda bij, auto's brengen ons sneller ter plekke. Al deze technologische innovaties voeren de doeltaken perfect uit, maken het leven makkelijker en maken ruimte voor meer creatieve activiteiten die niet kunnen worden uitbesteed aan technologische hulpmiddelen. Op dezelfde manier ondersteunen onderwijstechnologieën zoals rekenmachines, digitale algebrasystemen en dynamische visualisaties van complexe verbanden leerlingen bij het oplossen van wiskundeproblemen. Echter, zodra technologie bepaalde taken voor ons oplost, worden onze hersenen bevrijd van deze activiteiten. Navigatiesystemen vernietigen het ruimtelijk oriëntatievermogen van mensen, door mobiele telefoons te gebruiken trainen we ons geheugen niet met het onthouden van telefoonnummers, en het gebruik van de auto verzwakt het lichaam en creëert de noodzaak om het gebrek aan lichamelijke activiteit te compenseren in de sportschool. Op dezelfde manier zullen leerlingen, als onderwijstechnologieën problemen oplossen, de bijbehorende vaardigheden niet oefenen. Als leraar willen we dat precies het omgekeerde gebeurt: we willen niet dat technologieën de taken voor de leerlingen uitvoeren, maar dat ze leerlingen ondersteunen bij hun eigen ontdekking van de wiskunde, en hun eigen wiskundig denken en ervaringen vergemakkelijken.

Wiskunde leren alsof je leert fietsen

Embodied action-based design (belichaamd op actie gebaseerd onderwijsontwerp) – een benadering van onderwijstechnologieën die in 2009 door Dor Abrahamson werd voorgesteld – is gebaseerd op het idee dat het leren van wiskunde vergelijkbaar kan zijn met het leren van een motorische vaardigheid. Wanneer kinderen leren zwemmen of fietsen, wordt hun niet verteld hoe ze ieder been en iedere arm moeten bewegen en hoe ze met een bocht in de weg mee moeten leunen. In plaats daarvan leren kinderen door te onderzoeken en te experimenteren. Ze krijgen continu feedback van de omgeving: als een kind te veel leunt, valt het gewoon om. De technologieën die leerlingen ondersteunen bij het verwerven van deze sportieve vaardigheden zijn van een ander soort dan de navigatiesystemen of plannings-assistenten. Denk aan een loopfiets of een zwemplank. Deze technologieën voeren geen actie uit voor de leerlingen; in plaats daarvan ondersteunen ze kinderen bij het vinden van een nieuwe coördinatie, zoals balanceren of het ontspannen van een gestrekt lichaam in het water. Met behulp van deze technologieën creëren volwassenen omgevingen waarin een kind veilig een bepaald aspect van de doelvaardigheid kan verkennen en oefenen. Na een tijdje ontdekt een kind een nieuwe coördinatie en verwerft het een stabiele en flexibele vaardigheid, zoals fietsen of zwemmen.

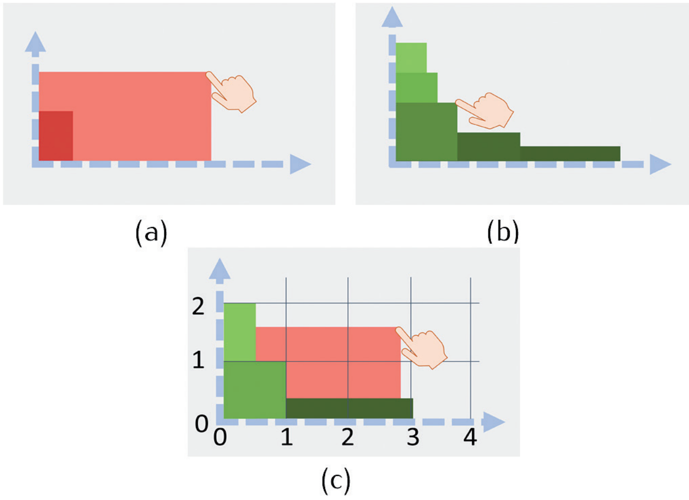
Embodied ontdekken van wiskunde

De kern van het idee van *embodied design* is dat leerlingen wiskunde kunnen voelen. Door parabolische en sinusoïde bewegingen lichamelijk te ervaren, 'omarmen' ze letterlijk een parabool of sinusgrafiek. Pas later gaan ze nadenken over deze beweging, en deze wiskundig uitdrukken. Het *embodied leren* van wiskunde begint als een spel. Stel je een leerling voor die voor een interactief schoolbord staat (of met een tablet zit). Zijn doel is het krijgen van doorlopende groene feedback – net zoals bij leren fietsen is het doel om niet te vallen. Zodra de leerling een juiste beweging maakt, wordt de feedback groen; als de beweging niet de juiste is, wordt de feedback rood. De wiskundige verhouding tussen de afstanden die de leerlingen manipuleren bepaalt de feedback. Bijvoorbeeld, het systeem geeft groene feedback op paraboolachtige bewegingen als de leerlingen een punt op gelijke afstand van een richtlijn en een focus houden (zie 'Voelen van de geometrie van parabolen' op p. 50). De leerlingen weten echter niet van tevoren wat de juiste beweging is en hoe de afstanden zich tot elkaar verhouden. Hoe krijgen ze dan toch groene feedback? Door verkennen en onderzoeken!

Voelen van de oppervlakte van een rechthoek

Er zijn *embodied designs* uitgewerkt voor verschillende wiskundige onderwerpen. We geven een paar voorbeelden om te illustreren hoe *embodied taken* het onderwijzen en leren van elk onderdeel van het wiskundecurriculum kunnen ondersteunen.

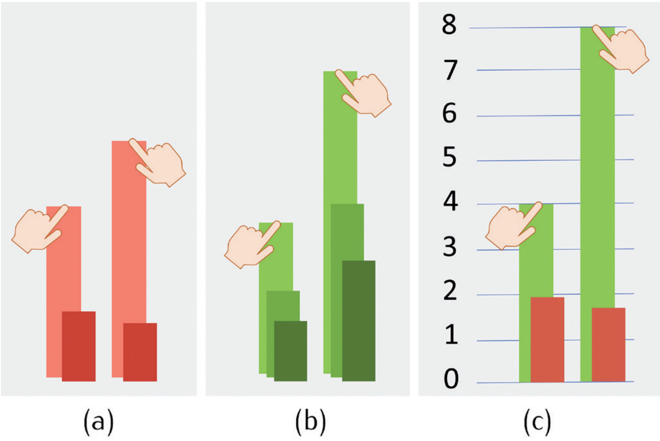
In ons eerste voorbeeld speelt een leerling met een rechthoek die een vaste oriëntatie heeft en waarvan één van de hoekpunten zich in de linkerbenedenhoek van het scherm bevindt, zie figuur 1. Door het tegenoverliggende hoekpunt te verplaatsen, kan een leerling de rechthoek veranderen in een andere rechthoek. De kleur van de rechthoek is echter alleen groen voor rechthoeken met een vaste gelijke oppervlakte. De leerling wordt uitgenodigd om het hoekpunt te manipuleren en een groene rechthoek te vinden, en dan nog een, en vervolgens te ontdekken hoe ze het hoekpunt van de rechthoek kunnen verplaatsen zodat de groene kleur continu behouden blijft. Zodra de leerling de relevante motorische actie heeft vastgesteld en groene feedback weet vast te houden, probeert hij de regel te raden die feedback groen maakt, en reflecteert zo op zijn eigen acties. Leerlingen melden dat ‘groene rechthoeken niet te klein en niet te groot zijn, ze zijn middelgroot’, ‘groene rechthoeken zijn alsof ze van boetseerklei zijn gemaakt, je kunt niets toevoegen, alleen de vorm veranderen’. Tot slot geven ze aan dat rechthoeken groen zijn als ze allemaal dezelfde oppervlakte hebben. Op een middelbare school kan een leraar deze ontwikkeling stimuleren door het over hyperbolen te hebben; het is namelijk de grafiek van een hyperbolische functie die wordt gevolgd door het hoekpunt van de rechthoek: als de horizontale zijde van een groene rechthoek a is, is de andere zijde S/a, waarbij S de oppervlakte van een groene rechthoek aangeeft.



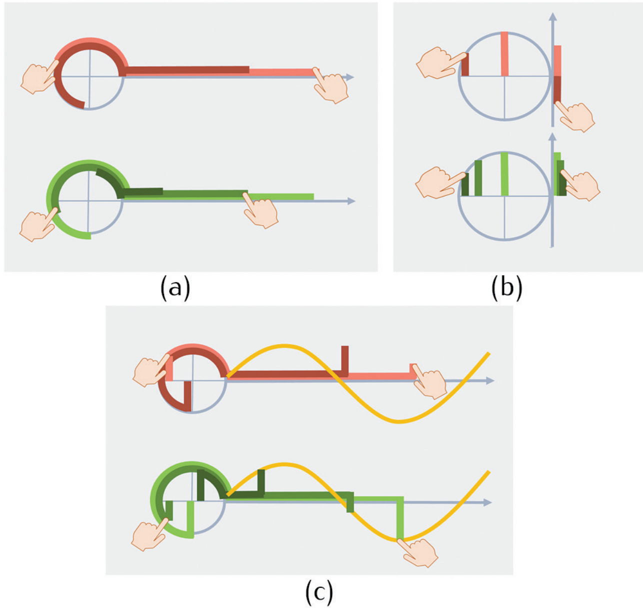
figuur 1 Embodied design voor de oppervlakte van een rechthoek:
(a) de rechthoek blijft rood als hij een willekeurige oppervlakte heeft;
(b) de rechthoek wordt groen als deze de doeloppervlakte heeft;
(c) er wordt een raster toegevoegd om de relatie tussen de zijden van de rechthoeken met gelijke oppervlakte te kwantificeren.

Proportioneel bewegen met twee handen

In een ander bekend *embodied design* manipuleert een leerling twee staven in verticale richtingen. Het systeem is ingesteld op een bepaalde proportionele verhouding, bijvoorbeeld 1 : 2. Dit betekent dat de leerling groene feedback krijgt als de ene hand twee keer hoger is dan de andere hand, zie figuur 2. Ook nu wordt de leerling niet verteld welke actie hij moet uitvoeren, maar wordt hij uitgenodigd om deze door verkenning te ontdekken. Verderop probeert de leerling uit te leggen hoe hij zijn handen beweegt om groene feedback te krijgen. Hij merkt dat de ene hand steeds hoger is dan de andere en bovendien sneller beweegt, en dat de afstand tussen beide handen groter wordt. Gaandeweg ontdekken leerlingen op deze manier het idee van proportionele relaties in het algemeen en de doelrelatie in het bijzonder.



figuur 2 Embodied design voor verhoudingen: (a) als de balken rood zijn heeft hun lengte een willekeurige relatie; (b) de balken worden groen als hun lengte de verhouding 1 : 2 heeft; (c) er wordt een raster toegevoegd om de relatie tussen de lengtes van de staven te kwantificeren.



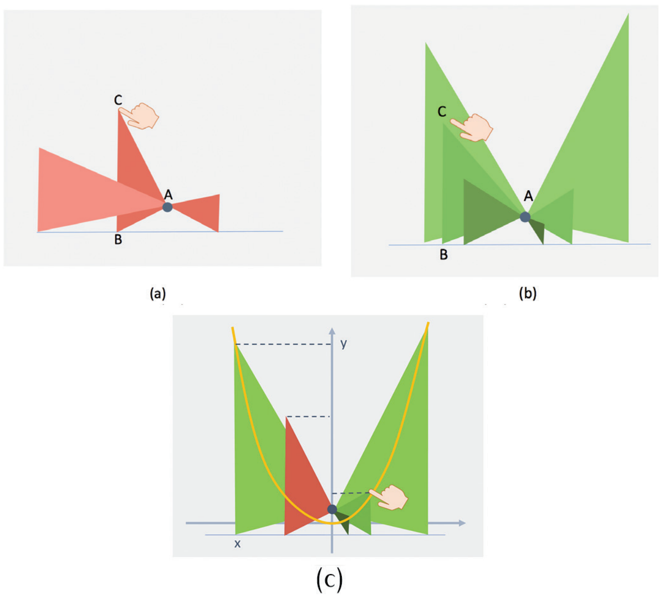
figuur 3 Embodied design voor goniometrie: (a) het coördineren van de omtrek van een boog op een eenheidscirkel en x-coördinaat; (b) het coördineren van de sinuswaarde op een eenheidscirkel en y-coördinaat; (c) twee eerdere ervaringen samenvoegen en een sinusgrafiek maken (de gele lijn verschijnt alleen als de leerlingen de juiste beweging hebben geleerd).

Construeren van een sinusgrafiek

De *embodied design* benadering beperkt zich niet tot het basisonderwijs: er zijn ook opdrachten ontworpen voor middelbare schoolonderwerpen. Ons volgende voorbeeld is ontworpen voor het leren van goniometrie. Een goed begrip van goniometrische functies komt voort uit het onderling verbonden gebruik van een driehoek, een eenheidscirkel en een sinusgrafiek, zie figuur 3. Laten we ons concentreren op de onderlinge verbinding tussen een eenheidscirkel en een sinusgrafiek. Om te begrijpen hoe een sinusgrafiek wordt geconstrueerd, ontwierpen we technologische activiteiten waarbij leerlingen eerst het verband tussen de lengte van een boog op een eenheidscirkel en een afstand op de x-as blootleggen. In het volgende stadium manipuleert de leerling een punt op een eenheidscirkel en de verticale positie van een ander punt in het cartesiaanse vlak en gaat de leerling de y-coördinaat begrijpen als de sinuswaarde van een hoek. Ten slotte voegt de leerling die twee coördinaties samen en vormt een sinusgrafiek, die op het scherm verschijnt als het resultaat van correcte motorische acties. Een op zo'n manier gegenereerde sinusgrafiek is niet langer gewoon een golf – wat vaak in de gedachten van leerlingen blijft hangen na het bekijken van deze curve in schoolboeken. In plaats daarvan is dit wiskundige begrip diepgeworteld in de persoonlijke sensorisch-motorische acties van leerlingen en kunnen ze terugkeren naar de constructie ervan.

Voelen van de geometrie van parabolen

Het laatste voorbeeld van een *embodied* taak gaat over parabolen vanuit een geometrisch perspectief zoals dat wordt gedaan in het wiskunde D-curriculum. Een leerling krijgt een driehoek op een scherm te zien. Hij manipuleert een van de hoekpunten van de driehoek (C). Een ander hoekpunt is bevestigd aan een punt (A), en het derde hoekpunt (B) loopt langs een horizontale lijn (l) zodanig dat B altijd direct onder C is geplaatst en BC loodrecht op l staat (figuur 4). Net als in de vorige ontwerpen wordt de leerling uitgenodigd om een positie te zoeken waar de driehoek groen wordt. Vervolgens ontdekt de leerling de beweging van het hoekpunt C die het mogelijk maakt om de driehoek continu groen te houden. De wiskundige relatie die de driehoek groen maakt wanneer hoekpunt C op een parabool met richtlijn l en focus in punt A loopt, is ingebed in het ontwerp. De leerling ziet de parabool eerst niet en ontdekt dat alle groene driehoeken gelijkbenig zijn: $AC = AB$ (zoals een parabool een verzameling punten is die op gelijke afstand van een brandpunt liggen en een lijn die richtlijn wordt genoemd). In de volgende fase wordt de leerling uitgenodigd om het hoekpunt C te manipuleren en zo de kwadratische relatie te ervaren. Ten slotte reflecteert de leerling samen met een leraar op de x- en y-coördinaten van het hoekpunt C en drukt de y-coördinaat uit in termen van de x-coördinaat met behulp van de stelling van Pythagoras, zie figuur 4c. Het resultaat is dat de leerling de grafiek van een kwadratische functie conceptueel verbindt met de geometrische definitie van de parabool door wat gevoeld wordt in de eigen sensorisch-motorische acties.



figuur 4 Embodied design voor parabolen: (a) de driehoek blijft rood wanneer het hoekpunt zich op een willekeurige plaats bevindt; (b) de driehoek wordt groen als het hoekpunt op gelijke afstand van een punt en een lijn ligt, dus de driehoek ligt op een parabool; (c) een coördinatensysteem en variabelen worden toegevoegd om de kromme waar het hoekpunt van de driehoek doorheen loopt te bestuderen (de gele lijn verschijnt alleen als de leerlingen de juiste beweging hebben verworven). De letters A, B, C en D zijn alleen zichtbaar in dit artikel, maar niet in de taak.

Van bewegingen naar wiskundige taal

Natuurlijk is het ontdekken van een beweging niet het einde, maar het begin van het leren van wiskunde in *embodied design*. Later worden wiskundige artefacten, zoals rasters, getallen en variabelen, op het scherm geïntroduceerd en helpen ze leerlingen hun ervaringen te kwantificeren en uit te drukken in wiskundige taal.
Als een leerling bijvoorbeeld notie heeft gekregen van het behoud van de oppervlakte van rechthoeken, kan een raster worden toegevoegd met cellen die gelijk zijn aan de oppervlakte van de rechthoek (figuur 1c). Dan kan een leerling ontdekken dat, als een rechthoek twee keer breder wordt, deze twee keer lager moet zijn om dezelfde oppervlakte te hebben. Bij het leren van proporties helpen horizontale lijnen bij het beschrijven van het interval tussen twee handen als continu groeiend, en getallen vergemakkelijken de conceptualisering van de relatie van de twee staven als proportioneel (figuur 2c).
In een later stadium kan de relatie die een leerling heeft ontdekt tijdens sensomotorisch handelen worden uitbesteed aan de technologische omgeving (zoals berekeningen worden uitbesteed aan rekenmachines) en de basis vormen voor verdere wiskundige probleemoplossing. Als een leerling bijvoorbeeld de overeenkomst heeft ontdekt tussen een punt op een eenheidscirkel en de x-coördinaat in een *embodied design*, kan het systeem in een later stadium automatisch een punt op de x-as aanpassen als de leerling een punt op een eenheidscirkel verplaatst. Leerlingen gebruiken dat om een hoek in radialen te schatten, of om te rekenen van radialen naar graden. Het begrip van het verband tussen een boog op een eenheidscirkel en de bijbehorende afstand op de x-as zal gebaseerd zijn op eerdere sensomotorische acties van leerlingen binnen het *embodied design*.

> “Vraag leerlingen om de acties die ze in een technologische omgeving hebben uitgevoerd, met gebaren te herhalen.”

Rol van de leraar

Door te werken aan *embodied designs*, creëren leraren een technologische omgeving waar leerlingen nieuwe sensomotorische acties oefenen. Toch moeten die acties nog in het wiskundige discours worden opgenomen via gesprekken in de klas. Het stimuleren van een gesprek dat leerlingen helpt hun *embodied* ideeën te overbruggen met normatieve wiskundige taal kan een uitdaging zijn voor een leraar. Leraren moeten aandachtig en responsief zijn voor leerlingen in hun pogingen om wiskunde te begrijpen en hun zorgvuldig ondersteunen in dit proces.
In plaats van een leerling bijvoorbeeld te vertellen dat een oppervlakte van een rechthoek wordt berekend met de formule $S = a \cdot b$, kan een leraar leerlingen vragen om in meer detail uit te drukken hoe ze ervoor zorgen dat de driehoek niet te klein of te groot is en dat ze groene feedback krijgen. Deze vragen zullen de aandacht van leerlingen vestigen op de veranderingen in de zijden.
In dit responsieve onderwijs is het nuttig om leerlingen

opnieuw te vragen wat ze bedoelen en aandacht te besteden aan hun gebaren. Leraren kunnen de gebaren van leerlingen herhalen om uit te drukken hoe ze de ideeën van leerlingen hebben begrepen. Een andere strategie is om leerlingen rechtstreeks te vragen om de acties die ze in een technologische omgeving hebben uitgevoerd, met gebaren te herhalen. In sommige situaties kunnen leraren en leerlingen samen gebaren maken en de wiskundige objecten die ze beschrijven opnieuw creëren. De belangrijkste heroriëntatie van lesmethoden die *embodied design* vraagt, ligt in aandacht voor *embodied* vormen van conceptualisering van wiskundige relaties door leerlingen, zoals gebaren, vage verwijzingen en acties, in plaats van het opleggen van standaard-algoritmen en formules.

Embodied design en leren op afstand

Gezien het belang van de rol van de leraar, vragen sommigen zich misschien af of dergelijke technologieën nuttig zijn in formats van leren op afstand, en of ze kunnen worden gebruikt voor het huiswerk. Kunstmatige begeleidingssystemen kunnen de verantwoordelijkheid van leraren om de acties van leerlingen te overbruggen met wiskundig discours gedeeltelijk overnemen. Zo kunnen *embodied designs* thuis worden gebruikt bij onderwijs op afstand. Terug in de klas, zullen leraren echter altijd een flexibele *live* discussie met de leerlingen moeten faciliteren. Het goede nieuws is dat de sensomotorische coördinatie die de lichamen van leerlingen ontwikkelen bij het werken met *embodied designs* stabiel zijn, net als fietsen. De resultaten van *embodied* leren blijven dagen en mogelijk weken behouden, waardoor leraren voldoende tijd hebben om de ervaringen van hun leerlingen in een klassengesprek te verzamelen.

Dank aan Rosa Alberto en Rogier Bos voor de samenwerking en het lezen van eerdere versies van dit artikel.

Noten

[1] Zie ook *https://embodieddesign.sites.uu.nl/*

[2] Abrahamson, D. (2019). A new world: Educational research on the sensorimotor roots of mathematical reasoning. In A. Shvarts (Ed.), *Proceedings of the annual meeting of the Russian chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) & Yandex* (pp. 48–68). Moscow: Yandex. *http://www.igpme.org/wp-content/uploads/2020/01/PMEYandex2019Final.pdf*

[3] Alberto, R. en Bos, R. (2020). Het FIzier gericht op... Embodied cognition in wiskundeonderwijs. *Euclides 95*(5), 4–6.

[4] Alberto, R., Shvarts, A., Drijvers, P., Bakker, A. (2021) Action-based embodied designs for mathematics learning: A decade of variation on a theme. *International Journal of Child-Computer Interaction, 100419. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2021.100419*

[5] Dahmani, L., & Bohbot, V. D. (2020). Habitual use of GPS negatively impacts spatial memory during self-guided navigation. *Nature. Scientific Reports*, *10*(1), 6310. *https://doi.org/10.1038/s41598-020-62877-0*

[6] Flood, V. J., Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2020). Teaching with embodied learning technologies for mathematics: responsive teaching for embodied learning. *ZDM - Mathematics Education*, 52, 1307–1331. *https://doi.org/10.1007/s11858-020-01165-7*

[7] Shvarts, A., & van Helden, G. (2021). Embodied learning at a distance: from sensory-motor experience to constructing and understanding a sine graph. *Mathematical Thinking and Learning. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1983691*

Over de auteur

Anna Shvarts is universitair docent bij het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Ze werkt aan nieuwe benaderingen van wiskundeonderwijs op basis van *embodied cognition*. Haar educatieve ontwerpen zijn bedoeld om het plezier van het leren van wiskunde toegankelijk te maken voor iedere leerling. E-mailadres: *a.y.shvarts@uu.nl*

Hannah Bijlsma

Digitale feedback van leerlingen over de kwaliteit van de les

Hoewel je door feedback beter kunt gaan presenteren, krijgen docenten nauwelijks feedback over de kern van hun werk: de lessen die ze geven. Met de door de Universiteit Twente ontwikkelde digitale tool *Impact!* kan dit wel; snel en eenvoudig. Een tool die helpt om leerlingfeedback over leskwaliteit efficiënt te verzamelen.

Feedback aan docenten

Onderzoek wijst uit dat je door het ontvangen van feedback op je activiteiten beter kunt gaan presteren. In het onderwijs ontvangen docenten echter maar weinig feedback, en als dit wel gebeurt, dan wordt vaak gebruikgemaakt van lesobservaties door een leidinggevende of een andere collega. Maar om een betrouwbaar beeld van de leskwaliteit te geven, moeten meerdere lesobservaties per docent uitgevoerd worden. En deze lessen moeten eigenlijk het liefst door meerdere, getrainde observatoren beoordeeld worden. Dit maakt lesobservaties kostbaar en tijdrovend voor scholen.

> "Docenten leren dat ze – volgens de leerlingen – duidelijker het lesdoel moeten benoemen aan het begin van de les."

Het perspectief van de leerling

Een andere manier voor docenten om feedback op de kwaliteit van hun lessen te ontvangen, is aan leerlingen te vragen wat zij van de les vonden. Als je een hele klas om feedback vraagt over je les, verzamel je in een keer de oordelen van veel leerlingen (meerdere observatoren). Omdat je de klas een keer of zelfs vaker per week ziet, kan leerlingfeedback gemakkelijk vaker verzameld worden (meerdere lesobservaties van een les). Zo kan dus een rijk beeld van de leskwaliteit gegeven worden. Leerlingen geven bovendien het perspectief van de doelgroep weer. Voor docenten is dit interessante informatie over de les, want leerlingen bekijken een les vanuit hun 'klantperspectief'. Er wordt hun bovendien niet vaak gevraagd wat zij van een les vonden. Doordat leerlingen feedback geven over lessen, wordt recht gedaan aan *student voice*: de stem en inbreng van leerlingen in het onderwijs dat ze ontvangen.

impact!

De Impact! tool[1]

Het is mogelijk om op een eenvoudige en snelle manier leerlingfeedback te verzamelen door middel van de Impact! tool. Dit digitale feedbacksysteem is ontwikkeld door de Universiteit Twente en het bedrijf Crolox. Leerlingen kunnen met Impact! aan het eind van de les op hun smartphone, iPad, tablet of laptop feedback geven aan hun docent over de les die net is geweest. In vergelijking met schriftelijke leerlingvragenlijsten is deze tool gemakkelijk te gebruiken voor leerlingen en docenten. Het vraagt namelijk geen tijdrovende datacollectie en data-analyses. De resultaten zijn na afloop van de les direct beschikbaar voor de docent, uitgesplitst in wat hoog, gemiddeld en laag presterende leerlingen van de les vonden. Leerlingen blijven voor de docent anoniem. In een korte video[2] laten we zien hoe dit er in de praktijk uitziet. Kort gezegd komt het erop neer dat de leerlingen aan het eind van een les via een zescijferige code (aangemaakt door de docent in

>

zijn eigen web-omgeving) een vragenlijst invullen. De tool is gemakkelijk in gebruik en heel overzichtelijk.

Wederzijdse impact

De feedback van leerlingen, zie bijvoorbeeld figuur 1, kan docenten inzicht geven in de sterke kanten van hun lessen en in waar nog verbetering mogelijk is. Dit vergroot de kans op reflectie van docenten op hun les(sen). Reflectie ontstaat namelijk niet spontaan en feedback kan hierbij helpen. Idealiter leidt de reflectie tot verbeteracties van docenten op die punten waar nog verbetering mogelijk is. Dit kan de lessen van de docent beter maken. De Impact! tool bevordert dus wederzijdse impact: docenten geven les, dat heeft impact op de ontwikkeling en leerprestaties van leerlingen. Leerlingen geven feedback, dat kan impact hebben op de leskwaliteit van de docent. Als de docent op basis van de leerlingfeedback beter gaat lesgeven, dan heeft dat weer een positieve impact op de ontwikkeling en leerprestaties van de leerlingen.

figuur 1

Wetenschappelijke basis

De feedback die leerlingen geven, gaat over lesaspecten waarvan wetenschappelijk is aangetoond dat ze lessen effectief maken. Bijvoorbeeld of de docent zorgt voor een veilig en stimulerend leerklimaat, een goed klassenmanagement hanteert en de lesstof duidelijk uitlegt met een goede afstemming op de verschillen tussen leerlingen. Bij het opstellen van de vragen is uitgebreid gebruikgemaakt van onderzoek naar effectief docentgedrag en inzichten uit de cognitieve leerpsychologie. Aan onderwijsonderzoekers uit binnen- en buitenland is bovendien gevraagd welke vragen zij zouden toevoegen aan de vragenlijst. Op basis van intensief overleg tussen onderzoekers is een conceptvragenlijst voor de Impact! tool opgesteld. Deze conceptvragenlijst is diverse malen voorgelegd aan docenten en leerlingen om te weten hoe zij de vragen interpreteren. Op basis van hun feedback is de vragenlijst definitief gemaakt.

Onderzoek naar de Impact! tool

Door de Universiteit Twente is onderzoek[3] gedaan naar het gebruik van Impact! onder wiskundedocenten en hun leerlingen in 3 havo. De resultaten laten zien dat docenten door het gebruik van Impact! inzicht krijgen in de verbeterpunten van hun lessen. Een voorbeeld is dat docenten leren dat ze – volgens de leerlingen – duidelijker het lesdoel moeten benoemen aan het begin van de les. Ook zouden docenten leerlingen meer cognitief kunnen activeren door het stellen van vragen. Opvallend was dat de reflectie van docenten over de les niet vooruitging. Docenten voerden op basis van de leerlingfeedback echter wel verbeteracties uit, om de lessen beter aan te laten sluiten bij de wensen van hun leerlingen. Docenten gingen ook met hun collega’s in gesprek over de leerlingfeedback. Wat belangrijk is, is dat we zagen dat docenten naarmate ze Impact! langer gebruikten ze steeds meer in gesprek gingen met hun leerlingen over de feedback die ze van hen over de lessen kregen.

Duurzame verbetering van leskwaliteit vraagt méér

Hoewel docenten door de feedback meer inzicht kregen in waar ze hun lessen konden verbeteren, en hoewel ze verbeteringsgerichte acties ondernamen op basis van de feedback, werd de leskwaliteit nog niet duurzaam beter volgens de leerlingen (in het begin ging de kwaliteit wel omhoog). Hoe kan dat? Reflectie op lessen is een belangrijke stap op weg naar verbetering. Het is mogelijk dat, omdat de docentreflectie niet toenam, de uitgevoerde acties niet gebaseerd waren op grondige probleemanalyses en daardoor niet effectief waren. Het kan ook zijn dat de lesaspecten die volgens leerlingen verbeterd zouden moeten worden complexe vaardigheden van docenten veronderstellen (bijvoorbeeld aspecten van duidelijke instructie, differentiatie, of het stellen van vragen die leerlingen aan het denken zetten).

Het duurzaam verbeteren van dergelijke complexe docentvaardigheden vraagt méér dan alleen het ontvangen van feedback. Docenten moeten goed nagaan wat er misging in hun lessen en waarom. Onderzoek naar *deliberate practice* (doelgericht oefenen) laat zien dat het ontwikkelen van expertise een sterke verbeteringsmotivatie vraagt van docenten, waarbij ze hun lessen willen en durven aan te passen. Daarbij kan een coach helpen het gewenste docentgedrag te beschrijven en kleine, precieze verbeterdoelen te formuleren. Deze coach zou dus moeten weten hoe ideaal docentgedrag eruitziet en hoe het effectief getraind kan worden. Het is voor een docent onmogelijk om dit alleen te weten en te doen, dus is samenwerking tussen docenten die willen verbeteren en coaches die dat kunnen ondersteunen wenselijk.

De Impact! cyclus

Om aan de voorwaarden voor *deliberate practice* te voldoen, is de Impact! cyclus ontwikkeld. Docenten werken dan niet alleen aan het verbeteren van hun lessen, maar zij vormen dan met vijf á tien collega's een Impact! team. Dit team wordt geleid door een Impact! coach. In een korte video[4] laten we zien hoe de cyclus eruitziet. Gezamenlijk doorlopen ze vijf fases waarin zij werken aan verbetering van lessen, zie ook figuur 2.

figuur 2

1 Docenten verzamelen feedback over hun leskwaliteit; niet alleen van leerlingen maar óók van een collega. Bovendien geven docenten een eigen oordeel over hun les.
2 Docenten interpreteren en analyseren de feedback die zij ontvangen hebben.
3 De feedback wordt besproken in het Impact! team en elke docent stelt een verbeterplan op. Zo werkt iedereen aan een eigen, concreet verbeterdoel op basis van de feedback.
4 Docenten voeren de in het verbeterplan afgesproken verbeteracties uit.
5 Gezamenlijk reflecteren zij op de doorlopen fases van de cyclus en op de uitgevoerde verbeteracties.

Na fase 5 worden opnieuw data over de leskwaliteit verzameld door middel van de Impact! tool. Zo kan worden onderzocht of het verbeterdoel is behaald. Deze cyclus is gebaseerd op kenmerken van een professionele leergemeenschap (PLG).

Impact als 'quick scan'

Het gebruik van de Impact! tool kan in de vorm van de Impact! cyclus van grote waarde zijn. Het gebruik ervan dient dan als een 'quick scan' voor docenten, die hun inzicht geeft in waar volgens leerlingen, een collega en henzelf ruimte is voor de verbetering in hun lessen. We weten dat dit slechts een startpunt voor verbetering is. Het duurzaam verbeteren van leskwaliteit vraagt veel meer: een gezamenlijke structurele aanpak onder leiding van een coach en een sterke verbetermotivatie van de docent, gestimuleerd door collega's. De Impact! cyclus biedt hiervoor alle handvatten die nodig zijn.[5]

Noten

[1] zie *https://www.impactoponderwijs.nl/*
[2] zie *https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=k264tJHI8GI*
[3] zie *https://www.impactoponderwijs.nl/projecten-en-publicaties/publicaties*
[4] zie https:/*/www.youtube.com/watch?app=desktop&v=FC51YlzS-DX4feature=youtu.be*
[5] Wil je meer informatie over de Impact! tool of het onderzoek dat uitgevoerd is? Mail dan naar *info@impactoponderwijs.nl.*

Over de auteur

Hannah Bijlsma werkt als inspecteur po/vo bij de onderwijsinspectie, is basisschoolleerkracht op De Cirkel en onderwijsonderzoeker aan de Universiteit Twente. Haar onderzoek richt zich op het gebruik van leerlingfeedback in het onderwijs en het meten van effectief leerkrachtgedrag.
E-mailadres: *h.j.e.bijlsma@utwente.nl*

Ylja Remmits en Sander Klous

Weglaten van stigmatiserende indicatoren biedt geen soelaas om eerlijke algoritmen te krijgen

We laten leerlingen werken met grote datasets. Daarbij spelen ethische vragen een steeds belangrijkere rol: wat kun je wel en niet aan personen vragen? In de klas zal het niet zo'n vaart lopen, maar bij dataverzamelaars die maatschappelijk relevante onderzoeksvragen beantwoorden uiteraard wel

Inleiding

Voor de ontwikkeling van algoritmes gebruiken we data uit de echte wereld, omdat we op die manier de patronen die in deze data zitten kunnen vangen in modellen. Deze data bevatten helaas niet alleen de patronen die we van plan waren te modelleren, maar ook de bestaande vooroordelen van mensen. Bij het gebruik van deze data in algoritmes bestaat het risico dat deze vooroordelen in de algoritmes sluipen. Van een aantal overheids-algoritmes is zelfs bekend dat eigenschappen zoals afkomst expliciet worden gebruikt als risico-indicator, bijvoorbeeld in de Leefbaarometer[1] en in het project 'Zicht op ondermijning',[2] zoals *Trouw* berichtte op 30 maart. De aanhoudende kritiek hierop leidt ertoe dat er een nieuwe versie komt van beide algoritmes waarin etniciteit niet meer als factor wordt meegenomen. Dit is echter onvoldoende om te voorkomen dat bestaande vooroordelen alsnog in een algoritme belanden. Erger nog, dit leidt waarschijnlijk tot meer bevooroordeling in algoritmes en niet tot minder.

Weglaten is niet de weg

Het weglaten van afkomst als indicator zal er niet voor zorgen dat vooroordelen op basis van afkomst geen invloed meer hebben op het algoritme. Het verschil is wel dat er dan minder duidelijk zicht op is. Neem het voorbeeld van een algoritme dat cv's beoordeelt in een sollicitatieprocedure. In een poging om geen onderscheid te maken tussen mannen en vrouwen, wordt geslacht vaak niet als datapunt gebruikt. Het blijkt echter dat mannen en vrouwen andere woorden gebruiken om hun ervaring en talenten te beschrijven. In combinatie met een voorkeur voor mannen die in de historische data zit, leert het algoritme om de verschillen in woordkeuze te gebruiken om geschiktheid te bepalen en maakt daarmee indirect onderscheid tussen mannen en vrouwen.

Een ander voorbeeld is de eerdergenoemde Leefbaarometer, de ontwikkeling van dit algoritme is voor een deel gebaseerd op een beoordeling van de leefbaar-heid door bewoners. Dat afkomst van bewoners een indicator blijkt van de ervaren leefbaarheid, geeft aan dat er een relatie is tussen deze eigenschappen. Het bestaan van die relatie zou erop kunnen duiden dat vooroordelen een rol spelen. Als die vooroordelen inderdaad een rol spelen, dan helpt het niet om afkomst uit het algoritme weg te laten. Een groot aantal andere gegevens, zoals adres, opleiding of sociaal-economische status corre-leren namelijk met iemands afkomst. Deze gegevens noemen we 'proxies'. Omdat bij de ontwikkeling van het algoritme nog steeds gebruik wordt gemaakt van de door de bewoners ervaren leefbaarheid, zullen vooroordelen via proxies weer net zo hard in het algoritme terugkomen. Het is nu alleen een stuk ingewikkelder om ze aan te tonen omdat we de afkomstinformatie missen.

> "Met eerlijkheidscriteria kunnen we vaststellen of een algoritme verschillende groepen gelijk behandelt."

Eerlijke algoritmes

De oplossing is niet het weglaten van deze indicatoren, maar juist het inzetten van deze informatie op de juiste manier. We kunnen deze informatie gebruiken om relaties zoals die in het bovenstaande voorbeeld te berekenen en dus inzichtelijk te maken. Dat is de eerste stap in het herkennen van mogelijke vooroordelen in de data. Daarnaast kunnen we met behulp van zogenaamde eerlijkheidscriteria vaststellen of een algoritme verschillende groepen gelijk behandelt. Er zijn veel criteria waarmee eerlijkheid vanuit verschillende perspectieven berekend kan worden. Zo kunnen we berekenen of een algoritme voor verschillende groepen gemiddeld dezelfde uitkomst geeft of dat een algoritme voor verschillende groepen even vaak een fout antwoord geeft. In ons cv beoordelend algoritme kunnen we meten of we bij een vergelijkbare ervaring mannen en vrouwen even vaak selecteren. In het geval van de Leefbaarometer kunnen we bijvoorbeeld de uitkomsten voor (fictieve) wijken met elkaar vergelijken waarin alle eigenschappen gelijk zijn, behalve de afkomst van de inwoners. De inzichten die bovenstaande methodes verschaffen kunnen vervolgens gebruikt worden om algoritmes zo te bouwen of trainen dat stigmatiserende indicatoren geen rol meer spelen in de uitkomst. Om eerlijke algoritmes te bouwen hebben datawetenschappers dus juist toegang tot deze gegevens nodig. Veel commerciële partijen hebben deze informatie niet of mogen deze vanwege privacywetgeving niet gebruiken. Een overheidspartij die informatie over bijvoorbeeld afkomst wel heeft en mag gebruiken voor statistische analyses, zou deze ook moeten inzetten in de strijd voor eerlijkere algoritmes. Ook is in de voorgestelde AI-wetgeving van de EU een uitzonderingsartikel opgenomen, zodat gevoelige informatie, zoals bijvoorbeeld afkomst, verzameld mag worden om vertekening (bias) in algoritmes te monitoren.[3]

Tot slot

Naast technische oplossingen vraagt het bouwen van eerlijke algoritmes ook maatschappelijke en ethische afwegingen. Welke gegevens zien we als mogelijk stigmatiserend of discriminerend? Hoe heeft beleid dat gebaseerd wordt op uitkomsten van dit algoritme impact op kwetsbare groepen? Wanneer vinden we verschillende uitkomsten tussen groepen wél acceptabel? Hierbij is context erg belangrijk, opleidingsniveau als indicator bijvoorbeeld kan in sommige contexten wel stigmatiserend werken, maar kan in de context van werk en inkomen juist een eerlijke indicator zijn.

In de praktijk betekent dit dat we al bij het verzamelen van de data inzicht moeten hebben in deze maatschappelijke en ethische vraagstukken. Als vooraf goed wordt nagedacht over voor welke groepen benadeeld zouden kunnen worden door bestaande vooroordelen, kunnen we hier rekening mee houden in de dataverzameling en het ontwerp van algoritmes.

Het weglaten van mogelijk discriminerende of stigmatiserende indicatoren uit algoritmes is niet de manier om tot eerlijke algoritmes te komen. Het zorgvuldig gebruik van deze informatie om onbedoelde relaties en eerlijkheid te meten is dat wel.

Een kortere versie van dit artikel verscheen op 13 april 2021 in Trouw.

Noten

[1] Zie: *https://www.leefbaarometer.nl/home.php*

[2] Zie: *https://www.zichtopondermijning.nl/*

[3] Zie: artikel 10 lid 5 van de voorgestelde EU-verordening voor geharmoniseerde regel betreffende artificiële intelligentie; *https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A52021PC0206*

Over de auteurs

Ylja Remmits en Sander Klous zijn werkzaam bij KPMG Trusted Analytics. Sander is tevens hoogleraar Big Data Ecosystemen aan de Universiteit van Amsterdam.
E-mailadres: *Remmits.Ylja@kpmg.nl*

Mandy Stoop

Leraren opleiden voor digitale geletterdheid en informatica

In september 2021 ging de nieuwe lerarenopleiding Digitale geletterdheid & Informatica van start met als doel het opleiden van breed inzetbare docenten voor het vmbo en de onderbouw havo/vwo.

Aanleiding

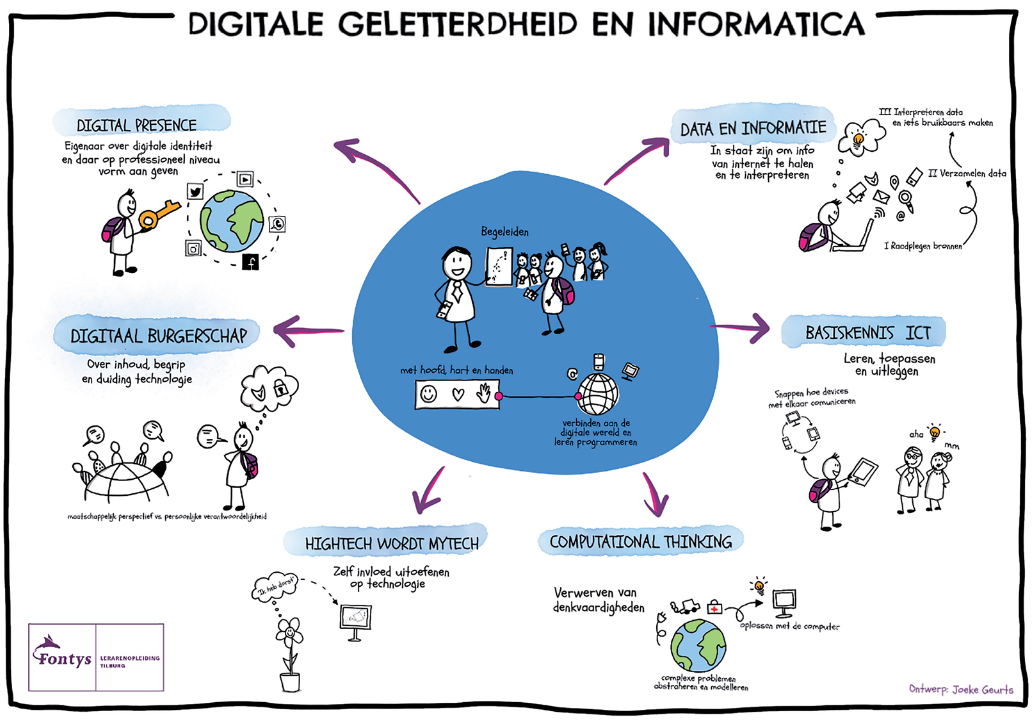
Dat leerlingen meer zouden moeten leren om zelfredzaam te zijn in de digitale wereld heeft de afgelopen jaren steeds meer weerklank gekregen. Enerzijds werd dit maatschappelijke thema aangejaagd door stimulerings-programma's voor techniek, die programmeren voor kinderen op de kaart hebben gezet. Anderzijds wordt steeds meer zichtbaar welke impact ICT heeft op de samenleving en hoe belangrijk het is om leerlingen hiermee om te leren gaan en zo onze democratie en sociale veiligheid te versterken.
Al bij de eerste definiëring van de 21th century skills in 1983, werd er gesproken over digitale vaardigheden voor leerlingen. In het Amerikaanse rapport *A Nation at Risk* [1] werd gesteld dat de digitalisering en robotisering een grote invloed uit zouden gaan oefenen op het werk en dagelijks leven en dat leerlingen hierop voorbereid moeten worden. Ook in latere rapporten over de toekomst en de inhoud van het onderwijs is de aandacht voor digitale geletterdheid altijd prominent aanwezig gebleven.
De urgentie werd ook gevoeld bij de curriculumherziening van curriculum.nu, waarin digitale geletterdheid een grote rol speelt. De controverse rondom deze curriculum-wijzigingen heeft niet gespeeld rondom het belang van digitale geletterdheid voor de ontwikkeling van jonge kinderen. Daarvoor is voldoende maatschappelijke consensus. Kennisnet constateert dat de ontwikkeling van digitale geletterdheid van leerlingen niet vanzelf tot stand komt in de hoogtechnologische samenleving waarin we leven; digitale geletterdheid ontwikkelt zich vooral door goed onderwijs. Goed onderwijs begint met goed opgeleide docenten. Het docententeam Techniek van Fontys Lerarenopleiding Tilburg heeft daarom de conclusie getrokken dat er ook een degelijke leraren-opleiding en een passende tweedegraads bevoegdheid moet komen voor digitale geletterdheid en informatica.

Lerarenopleiding Techniek

De kennisbasis van de lerarenopleiding Techniek gaat over de gemaakte wereld. Tijdens deze opleiding verdiepen studenten zich in hoe producten tot stand komen vanuit micro-, meso- en macroperspectief en wat hun impact op de samenleving is. Met deze kennis en inzichten maken ze inspirerende leeromgevingen voor leerlingen. De verbinding met de wereld van ICT is voor de hand liggend. Feitelijk is er geen fundamenteel onderscheid tussen een tastbaar product en een IT-product. Vanuit deze gedachte heeft het docententeam een tweede variant van de opleiding ontwikkeld die onder het CROHO[2] Tweedegraads Leraar Techniek aangeboden kan worden. Dit team had een vergelijkbare vingeroefening al eens gedaan. Onder hetzelfde CROHO was vier jaar geleden gestart met de opleiding Science & Technology. Dit is een afstudeer-variant van Techniek, waarbij er vanuit vernieuwde beroepsperspectieven en hedendaagse onderwijskundige inzichten een nieuw opleidingsprogramma is ontwikkeld. De onderwijsdidactiek die bij Science & Technology volwassen is geworden, wordt nu ook ingezet bij de afstudeervariant Digitale geletterdheid & Informatica.[3]

Opleidingsdidactiek

In de opleidingsdidactiek staan leervragen vanuit het werkplekleren centraal. Studenten gaan op zoek naar praktijksituaties waarin er ontwikkeld of georganiseerd moet worden, of waarin zij handelingsverlegenheid ervaren. De lesmaterialen voor dit onderwijs liggen er niet kant-en-klaar, dus het schrijven van lesmateriaal is een praktijkopdracht die voor de studie is in te zetten. Een ander voorbeeld is dat docenten samen willen werken met bedrijven om hun onderwijs betekenisvol te maken. Het leggen van contacten, het afstemmen van de samenwerking, het uitvoeren en evalueren ervan helpt de praktijk vooruit. Deze activiteiten zijn allemaal inzetbaar als praktijkopdracht voor de opleiding. Een ander sterk



figuur 1 [4]

voorbeeld is dat sommige studenten nu al sectievoorzitter zijn. Zij zijn verantwoordelijk voor het schrijven van een vakwerkplan. Het schrijven van dit plan, vanuit een visie op leren, met daarin een verantwoording van de inhoud van het programma en de (vak-)didactische keuzes, helpt een docententeam enorm vooruit. Een dergelijk vakwerkplan, met een beschrijving van het proces laat goed zien dat de student de benodigde competenties heeft.
De opleiding geeft richting aan de ontwikkeling van de student door te werken met vier beroepsrollen. Drie daarvan zijn voor beide afstudeerrichtingen identiek: de talentcoach, de netwerker en de ontwerper. Het onderscheid tussen de afstudeerrichtingen zit in de vierde vakinhoudelijke beroepsrol. Voor Science & Technology is dat de beroepsrol bèta-professional en voor Digitale geletterdheid & Informatica is dat de IT-professional.
De leraren in opleiding maken hun ontwikkeling in iedere beroepsrol zichtbaar vanuit theorie en praktijk. Deze twee ontwikkelingslijnen zijn van elkaar gescheiden. De beroepsrollen zijn verder onderverdeeld in leeruitkomsten; deze geven weer wat de student moet kennen en kunnen. Het staat iedere student vrij om zelf te kiezen wat hij gaat doen en met welke beroepsproducten hij bewijst de leeruitkomst te hebben behaald. De praktijk is dus leidend bij het leren. Vanuit de praktijk ontwikkelt de leraar in opleiding zich tot een professional die praktijkvraagstukken kan herkennen en deskundig kan aanpakken.

Vakinhoud

De vakinhoudelijke leeruitkomsten van Science & Technology zijn ontstaan vanuit de kennisbasis techniek, die door alle lerarenopleidingen techniek in Nederland wordt gehanteerd.

Voor de afstudeervariant Digitale geletterdheid & Informatica, met name voor de beroepsrol IT-professional, is ervoor gekozen om voor de ontwikkeling van de beroepsrol te starten bij de basis van wat er door SLO, curriculum.nu en Kennisnet over digitale geletterdheid wordt gezegd. Op basis daarvan heeft het team een visie ontwikkeld op waar dit onderwijs over zou moeten gaan. In die visie staat de leerling in de onderbouw centraal. Wat en hoe gaat deze leerling leren? Dit hebben we in een *visual* verwoord. Deze hebben we gebruikt om zo veel mogelijk betrokkenen enthousiast te maken voor ons verhaal, zie figuur 1.

Dit zijn de zes basisideeën:

— *Digital presence*: het vormgeven van jouw identiteit op het internet. Dat gaat over het kennen van de mogelijkheden en de risico's en hier gefundeerde keuzes in kunnen maken.
— *Digitaal burgerschap*: hoe heeft de virtuele wereld invloed op het dagelijks leven? Leerlingen worden zich bewust van de mechanismes die invloed hebben op hun gedrag en leren hier zelf keuzes in te maken.
— *Physical computing*: de wereld van high tech toegankelijk maken. Onderwijs dat leerlingen laat ervaren dat het maken van producten met een chip erin leuk, realistisch en uitdagend kan zijn. Het besef van maakbaarheid en kwaliteit van IT-producten vergroten.
— *Computational thinking*: leren denken in functionele structuren om het probleemoplossend vermogen te vergroten. Het ontwikkelen van denkvaardigheden die het mogelijk maken om problemen met computers op te lossen.

- *Basiskennis ICT*: om kunnen gaan met de IT-producten in het dagelijks leven van nu en van de toekomst. Voldoende basiskennis over IT-producten en hun communicatieprotocollen om straks het *internet of things* goed en veilig te kunnen gebruiken.
- *Data en informatie*: relevante informatie kunnen halen uit grote hoeveelheden data. Het internet, maar ook andere bronnen bevatten enorme hoeveelheden informatie, die pas toegankelijk wordt als je weet hoe je daar goed mee om kunt gaan. Veilig en betrouwbaar informatie leren verzamelen en inzicht krijgen in de basisgedachten achter big data.

Om vanuit deze basisideeën tot een ontwerp van een kennisbasis te komen voor de IT-professional heeft het team bijeenkomsten georganiseerd met 'mensen die het kunnen weten': vertegenwoordigers vanuit het bèta technisch bedrijfsleven, experts vanuit SLO en curriculum.nu, ervaren docenten, de vakverenigingen, vakdidactici informatica, Fontys lectoren en vele anderen zijn gevraagd om het eerste concept kritisch te beschouwen. Opmerkelijk was dat deze groep een accentverschuiving van inhoudelijke thema's naar burgerschap als advies gaf.
De kennisbasis moet te verantwoorden zijn onder het CROHO Techniek, omdat deze leraren ook een bevoegdheid techniek gaan krijgen. Tijdens de ontwikkeling hadden we de oorspronkelijke kennisbasis even losgelaten en ons gericht op de inhoud van het leergebied en welk onderwijs we de leerling gunnen. Nadat de nieuwe kennisbasis is geschreven, hebben we de kennisbasis van het CROHO techniek naast de nieuwe kennisbasis gelegd, met de vraag of we nog kunnen verantwoorden wat we doen. Dit bleek heel goed te kunnen, het is vooral een perspectiefwisseling van een tastbaar product naar een softwareproduct.

Wiskunde

Een ander ontwerpvraagstuk was de positie van wiskunde in het opleidingsprogramma. Voor Science & Technology waren de eindexamens voor nask en biologie in het vmbo gekozen als richtinggevend voor de inhoud, omdat dit de studenten een beeld geeft waar hun inzet in de eerste twee jaar van het vo toe moet leiden. Niet alle domeinen uit het wiskundeprogramma in het vmbo zijn relevant voor informatica. Omdat de opleiding zelfsturend leren als opleidingsdidactiek hanteert, moet het voor de studenten helder zijn aan welke eisen ze moeten voldoen en er moeten passende materialen bij zijn. De uitkomst van het ontwerpvraagstuk is gevonden in het vwo wiskunde-C-programma (met uitzondering van het domein Vorm en Ruimte). Inhoudelijk sluit dit goed aan bij de kennisbasis voor informatica. De ontwikkeling van de zelfstudiematerialen is vergevorderd. Uiteraard wordt er veel ICT ingezet, bijvoorbeeld Numworx, Wolfram Alpha, GeoGebra, Excel en Python.

Veldraadpleging

Naast het raadplegen van experts heeft er een grote veldraadpleging plaatsgevonden: docenten, directeuren, rectoren, projectleiders, enzovoort om ons te adviseren over de rol van de leraar Digitale geletterdheid & Informatica in de school. Daarbij merkten we dat de rol van deze docent zeer wisselend zal zijn. Waar de ene school zal kiezen voor een vakdocent, zoekt een andere school een expert die ondersteuning kan bieden bij de vakkenintegratie van digitale geletterdheid in het curriculum. Het initiatief is goed ontvangen door het veld. Een twaalftal studenten is in september met de opleiding gestart. Deze groep bestaat met name uit leraren die al actief zijn in het vakgebied en nu eindelijk de mogelijkheid zien om daar ook een bevoegdheid voor te verwerven.

Noten

[1] Rapport van de United States National Commission on Excellence in Education. Zie: *https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED226006.pdf*

[2] Het Centraal Register Opleidingen Hoger Onderwijs (CROHO) bevat de lijst van alle in Nederland georganiseerde opleidingen voor hoger onderwijs, die door het Ministerie van OC&W worden erkend. Zie: *https://www.hbostart.nl/wat-is-het-croho/*

[3] zie: *https://fontys.nl/Professionals-en-werkgevers/Opleidingen-en-cursussen/Leraar-Techniek-deeltijd/Afstudeerrichting-Digitale-geletterdheid-Informatica.htm*

[4] Klik op de figuur voor een vergroting (digitale *Euclides*) of ga naar de *Euclides* website

Over de auteur

Mandy Stoop is onderwijsmanager bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg en initiatiefnemer van de opleidingsvariant Digitale geletterdheid & Informatica.
E-mailadres: *mandy.stoop@fontys.nl*

Layla van Goor

Afstandsonderwijs in de lockdown 2020

Digibeet of niet, iedereen moest er in de lockdown van maart 2020 aan geloven: werken op afstand. Voor de scholen betekende dit een razendsnelle overgang naar het gebruik van digitale platforms om de lessen te kunnen continueren. Leerlingen kwamen elkaar niet meer fysiek tegen in de klas, maar zaten thuis achter hun laptop. Hoe hebben leerlingen dit ervaren?

Inleiding

In maart 2020 werd een nationale lockdown aangekondigd, met grote consequenties voor het onderwijs. In plaats van fysiek onderwijs moesten alle lessen digitaal uitgevoerd worden. En hoewel online educatie, e-learning en virtuele educatie ook gebruik maken van computers of andere elektrische apparatuur, verschillen deze vormen van onderwijs wel degelijk van volledig afstandsonderwijs, waarin de leerlingen alle lessen thuis volgen. Er vindt nooit face-to-face contact plaats tussen de docent en leerling. Afstandsonderwijs werd altijd gezien als een goede back-up voor het klassieke onderwijs maar nooit als kritisch middel voor de continuïteit van het onderwijs. COVID-19 heeft dit beeld uiteraard drastisch veranderd. We móesten nu wel.

Zowel docenten als leerlingen moesten leren omgaan met deze nieuwe vorm van onderwijs. Het grote risico van deze spontane omschakeling is dat het de kwaliteit en effectiviteit van het onderwijs negatief zou beïnvloeden. Effectief afstandsonderwijs is namelijk het resultaat van zorgvuldige planning, ontwikkeling en een goed ontwerp – iets wat ontbrak tijdens de noodgedwongen omschakeling naar afstandsonderwijs, omdat er simpelweg geen tijd voor was. Daarnaast is afstandsonderwijs sowieso onderworpen aan belemmeringen die het effectief leren lastig maken. Zo kan de leeromgeving thuis ongeschikt zijn, doordat leerlingen bijvoorbeeld in de woonkamer of in gedeelde slaapkamers moeten studeren. Of zij worden afgeleid door geluid van buitenaf, huisdieren of huisgenoten. Daarnaast beschikken niet alle leerlingen over de juiste elektronische apparatuur of internetverbinding. Tot slot wordt het moeilijker om school en privé gescheiden te houden en kunnen leerlingen betrokken raken bij de huishoudelijke taken tijdens schooluren of studie-uren. Al met al klinkt het als een somber verhaal, met weinig uitzicht op een positieve ervaring maar… niets bleek minder waar.

Ervaringen wiskundeonderwijs op afstand

Voor mijn masterscriptie onderzochten we de ervaring van middelbare scholieren met het wiskundeonderwijs op afstand tijdens de lockdown van het voorjaar 2020. Leerlingen uit Duitsland, Vlaanderen en Nederland konden hun ervaring delen via een online vragenlijst. In totaal deden er 2553 leerlingen mee.

Uit de resultaten bleek dat de opvattingen van leerlingen over wiskundevaardigheden en het online wiskundeonderwijs vrij positief waren. Wel gaf de meerderheid van de leerlingen de voorkeur aan fysiek onderwijs in plaats van afstandsonderwijs.

We waren daarnaast benieuwd naar de mogelijkheden en beperkingen dat afstandsonderwijs biedt volgens de leerlingen. We vroegen de leerlingen wat goed ging en wat niet goed ging, zie tabel 1. Hieruit kwam duidelijk naar voren dat de onderwijsactiviteiten nog altijd goed in de smaak van de leerlingen vielen (Tabel 1: 620 positieve opmerkingen). Volgens de leerlingen deden de leraren het vooral goed als het ging om het beantwoorden van vragen en het geven van uitleg.

Aan de andere kant waren er ook leerlingen die juist hierop commentaar hadden (Tabel 1: 172 negatieve opmerkingen). Deze opmerkingen gingen met name over het gebrek aan heldere uitleg over de lesstof door de leraar. Afstandsonderwijs zorgde daarnaast ook voor zelfmanagement onder de leerlingen (Tabel 1: 358 positieve opmerkingen). Omdat leerlingen vaak op zichzelf waren aangewezen, konden ze makkelijk in hun eigen tempo en in hun zelfgekozen tijd werken aan school, waardoor ze goed voorbereid voor de lessen waren en aangaven meer tijd te hebben om hun huiswerk te maken. Wat ook een succes bleek te zijn, was de technologie (Tabel 1: 275 positieve opmerkingen). Veel docenten maakten gebruik van digitale uitlegvideo's en ook het gebruik van de verschillende digitale platforms was soepel verlopen.

>

	What worked well?	What did not work well?
1.1 Structure & instruction	220	43
1.2 Teaching activity	620	172
1.3 Technology	275	65
1.4 Comparison F2F – online	43	33
1.5 Workload	39	120
1.6 Teacher's (digital) skills	45	8
1.7 Materials	122	29
2.1 Interaction student-student	20	36
2.2 Interaction student-teacher	246	234
2.3 Pedagogy	87	78
2.4 Flexibility	67	4
2.5 Teacher's aid	18	75
3.1 Formative assessment	55	31
3.2 Summative assessment	12	31
4.1 Student equity	6	74
4.2 Technological infrastructure	18	196
4.3 Well-being	15	17
5.1 Concentration	38	82
5.2 Presence	11	21
5.3 Self-management	358	76
5.4 Disturbance	52	28
5.5 Motivation & engagement	21	59
6.1 Undefined S11	30	0
6.2 Undefined S12	0	56
(no) difficulty with content	122	163
(un)clear	13	18
Everything	186	14

tabel 1 Een overzicht van het aantal positieve en negatieve opmerkingen van bepaalde aspecten van het wiskundeonderwijs op afstand door 2553 leerlingen in Nederland, Vlaanderen en Duitsland

Colour index:

What worked well		Max.
		Average
		Min.
What did Not work well		Max.
		Average
		Min.

"Leerlingen gaven aan dat zij in de toekomst uitlegvideo's willen blijven gebruiken."

Leerlingen gaven zelfs aan dat ze in de toekomst de uitlegvideo's zouden willen blijven gebruiken, omdat ze het pauzeren en opnieuw bekijken van de video's als een waardevolle toevoeging zien op de uitleg van de lesstof. Wat ook goed ging volgens de leerlingen was de interactie tussen hen en hun leraar (Tabel 1: 246 positieve opmerkingen). Veel opmerkingen hadden betrekking op communicatie in het algemeen en de mogelijkheid om vragen te stellen aan de docent.
Uiteraard was er ook een aantal aspecten dat juist slecht ging volgens de leerlingen. De meeste negatieve opmerkingen gingen over de leerling-docent interactie (Tabel 1: 234 negatieve opmerkingen). Opvallend genoeg zijn de aantallen positieve en negatieve opmerkingen vrijwel gelijk aan elkaar. Toch werd dit door de leerlingen over het algemeen beschouwd als de grootste beperking van afstandsonderwijs. Leerlingen misten met name de mogelijkheid om direct een vraag te kunnen stellen aan hun docent: in plaats daarvan moesten ze hun vraag bewaren tot de volgende online bijeenkomst of een e-mail of appje sturen.

Leerlingen hadden daarnaast ook veel klachten over de technologische infrastructuur (Tabel 1: 196 negatieve opmerkingen). Zo hadden de leerlingen last van de slechte verstaanbaarheid of de trage internetverbinding van de docent, of ontstonden er problemen met het digitale platform zoals geen toegang, overbelasting et cetera. Tot slot viel op dat veel leerlingen aangaven moeite te hebben met het begrijpen en het verwerken van de lesstof (Tabel 1: 163 negatieve opmerkingen).

Factoren van invloed op een positieve ervaring

In mijn scriptie is ook onderzoek gedaan naar factoren die mogelijk van invloed zijn op de ervaring van leerlingen van wiskundeonderwijs op afstand. Zo bleek dat een goede werkomgeving thuis geassocieerd is met een positieve ervaring van afstandsonderwijs. Onder werk-omgeving verstaan we onder andere in het bezit zijn van een eigen bureau, waar in rust aan gewerkt kan worden. De kwaliteit van de thuisleeromgeving speelt namelijk een belangrijke rol voor de concentratie, wat het afstandsonderwijs interessant, leuk en motiverend maken. Dit vertaalt zich uiteindelijk naar een positievere ervaring. In tegenstelling tot werkomgeving had de thuissituatie van de leerling geen significant effect op de ervaring van het afstandsonderwijs. Er was dus geen reden om aan te nemen dat het uitmaakt of een leerling sterk betrokken is bij huishoudelijke taken, zorgen voor zusjes/broertjes of niet. Een mogelijke verklaring hiervoor zou kunnen zijn dat de thuissituatie van onze steekproef niet ingewikkeld genoeg was om een impact te hebben op de ervaring van deze leerlingen. Het lijkt alsof in onze steekproef oudere leerlingen (tweede fase) en leerlingen van havo en vwo oververtegenwoordigd waren.

Tot slot hebben we ook gekeken hoe het beeld van een leerling over zijn/haar docent van invloed is geweest op de ervaring van wiskundeonderwijs op afstand. Zo vroegen we de leerlingen hoe ze keken naar de digitale vaardigheden van hun docent. Een positief beeld over de leraar werd geassocieerd met een positieve ervaring van het afstandsonderwijs. Mogelijk hadden deze leerlingen daadwerkelijk een docent die digitaal vaardig is en zo zorgde voor kwalitatief goed afstandsonderwijs, met een positieve ervaring als resultaat. Ook waren we benieuwd hoe de kijk op wiskunde in het algemeen van invloed kon zijn op de ervaring van wiskundeonderwijs op afstand. Ook hier vonden we dat een positief beeld over wiskunde geassocieerd werd met een positieve ervaring over wiskundeonderwijs op afstand. Niet verrassend: leerlingen die het vak wiskunde leuk vinden, zijn enthousiaster over wiskundeonderwijs – ook al is het op afstand.

Verhoudingen docent en leerling

Ten derde en als laatste hebben we onderzocht hoe de visie van de wiskundedocent op digitaal onderwijs zich verhoudt tot de ervaring en opvattingen van leerlingen over digitaal wiskundeonderwijs. Een positieve visie van een docent zou namelijk een positieve voorspeller kunnen zijn voor de ervaringen van leerlingen met wiskundeonderwijs op afstand. Dit is bijvoorbeeld het geval voor de visie van een wiskundedocent op online leeromgevingen. Hoe positiever de docent was over online leeromgevingen, hoe groter de kans op een positieve ervaring van een leerling met betrekking tot het wiskundeonderwijs op afstand. Dit was bijvoorbeeld niet het geval als we het hebben over de visie van de docenten op de leerdoelen van de wiskundelessen op afstand. Dat wil zeggen: vinden docenten dat ze online ook nieuwe stof kunnen behandelen of dat je je juist moet beperken tot oefenen en herhalen? In dit geval was een positieve visie van een docent op de leerdoelen geen positieve voorspeller voor diezelfde visie van leerlingen. Wellicht kan dat verklaard worden doordat sommige leraren nou eenmaal een positievere houding hadden dan hun leerlingen.

Wat blijft hangen in de toekomst?

Al met al zien we dat de eerste ervaringen onder de leerlingen van het afstandsonderwijs helemaal niet zo negatief waren. Sterker nog, wiskundeonderwijs op afstand kan zelfs een positief effect hebben op de zelfredzaamheid en zelfstandigheid van leerlingen en gaf een boost aan het gebruik van ICT-gerelateerd lesmateriaal, zoals uitlegvideo's. De belangrijkste factor waar we rekening mee moeten houden voor een succesvolle ervaring van afstandsonderwijs is een adequate leeromgeving. Daarnaast kunnen we ook stellen dat een positieve visie van de wiskundedocent een waardevolle bijdrage kan leveren op de ervaring van de leerling. De vraag voor de toekomst is welke digitale middelen ingezet blijven worden in het traditionele, fysieke onderwijs.

Over de auteur

Layla van Goor is afgestudeerd masterstudente Science Education & Communication aan de Universiteit Utrecht en schreef in 2021 haar scriptie over de ervaring van middelbare scholieren over het wiskundeonderwijs op afstand. E-mailadres: *layla.vangoor@outlook.com*

Ab van der Roest

Grrrrr ...

De eerste weken zitten er weer op. Zelfs na 42 jaar ervaring maken nieuwe klassen me altijd een beetje zenuwachtig. In de vakantie maak ik me altijd een beetje zorgen. Zullen ze aanspreekbaar zijn? Zullen ze hun huiswerk maken? Zullen ze hun spullen in orde hebben? En dit jaar kwam de vraag er nog bij of ze grote 'corona-achterstanden' hebben. En zoals elk jaar zijn deze vragen geheel overbodig. Zoals elk jaar zitten er in elke nieuwe klas weer twintig tot dertig nieuwsgierige mensen. Niet altijd nieuwsgierig naar wiskunde, maar toch. Binnen twee weken is er weer een mooie groep gevormd, waar ik als leraar deel vanuit mag maken.

Eén puntje blijft lastig in de vierde klassen. De grafische rekenmachine. De GR en af en toe maak ik daar maar in gedachten de Grrrrr van. Je herkent misschien wel zo'n vierde klas. Johan heeft een GR van broer of zus die ongeveer tien jaar geleden de school verliet. 'Nee, Johan deze grafische rekenmachine mag niet meer. Hij heeft geen lampje!' 'Maar', sputtert Johan nog even, 'hij ziet er toch bijna hetzelfde uit!' Nauwelijks uit te leggen. Geertje heeft hem in bestelling, maar de GR is nog niet geleverd. Verschillende leerlingen komen met een lege GR. Hij loopt zo snel leeg, hoe kan dat toch? Examenstand is het euvel en dat is snel te verhelpen.

Dan volgen de eerste lessen. Lastig duidelijk te maken dat de onderbouwrekenmachine niet mag, want we moeten van begin af aan werken met de examenmachine. En dat is dus alleen een GR. Maar de rekenmachine uit de onderbouw is zo vertrouwd en wat we in het begin doen kan makkelijk met dat apparaat. Hoe overtuig ik mijn leerlingen dat ze op de toets meteen op achterstand zijn als ze niet met de GR geoefend hebben? Worstelingen van de eerste weken, maar je weet dat het overgaat. Volhouden dus.
Of, afschaffen die GR. Maar wat dan? Je wilt toch realistische modellen kunnen behandelen. En, behandel de normale verdeling zonder GR! Overstappen naar GeoGebra en Excel en Wolfram Math en VU-stat of R is een redelijke optie. Natuurlijk zullen de leerlingen hier eerst vertrouwd mee moeten raken, maar dat komt wel goed. Nu gebruiken we een duur apparaat en de leerlingen zien nauwelijks het nut hiervan. Als toets en examen het enige nut is, is dat ook mager. En daarom na 25 jaar tweede fase, kunnen we de GR wel wegdoen en aansluiten bij wat de maatschappij gebruikt.
Graag vermeld ik nog een keer dat de klassen heel werkbaar zijn. De meeste leerlingen letten goed op en maken trouw hun huiswerk. Mijn laatste les is dus: maak je in de vakantie niet al te druk over hoe de klassen zullen zijn, want mijn ervaring leert, dat het bijna altijd meevalt.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Top,
die statistiek,
pure cijfermuziek.
Om rijkdom te ervaren,
starten met data vergaren.
Bepaal met chi-kwadraattoets,
vermeend normaalverdeeld goeds.
Dan hypothese stellen, vanuit theorie,
standaarddeviatie, maakt een en al euforie.
Toch, over statistiek wordt ook veel naars gezegd.
Als, met cijfers komt de werkelijkheid nooit tot haar recht.
Zelfs met gemodelleerde aarde, hecht ik aan statistiek, veel kritieke waarde.

Lourens Schuijtemaker, OSG West-Friesland te Hoorn

Olympiadepuzzel 97-4
Vierkanten en driehoeken

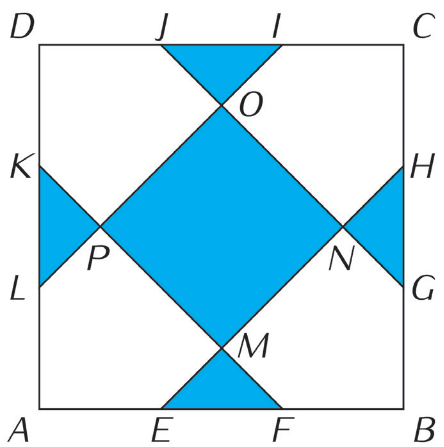
Esther Bod

PZZL

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl.*

Gegeven is een vierkant $ABCD$ met zijde 1. De punten E, F, G, H, I, J, K en L liggen op de zijden van het vierkant zodat de lijnstukken EH, GJ, IL en KF evenwijdig zijn aan de diagonalen van het vierkant en $|AE| = |BG| = |CI| = |DK|$. Daarnaast is de oppervlakte van vierhoek $MNOP$ gelijk aan de som van de oppervlaktes van de driehoeken $\triangle EFM$, $\triangle GHN$, $\triangle IJO$ en $\triangle KLP$.

Bepaal de lengte van lijnstuk EH.



Let op: de figuur is niet op schaal getekend!

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 25 februari naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel 97-2

Voor de puzzel *Toernooi* hebben we 14 inzendingen ontvangen.

De opgave ging over een toernooi waarvan de winnaar was gediskwalificeerd wegens doping. De uitdaging was om te achterhalen hoeveel punten deze valsspeler had gehaald. Met de gegeven informatie konden de meeste inzenders al snel een formule opstellen voor het aantal behaalde punten en het aantal deelnemers. Aangezien er geen halve deelnemers of punten zijn, kan met de delers van 2021 alle informatie over het toernooi worden bepaald. En wees gerust, de winnaar van deze opgave hoeft niet te worden gediskwalificeerd.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 12 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Han Baumer.

vakbladeuclides.nl/974olympiadepuzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2022

Vr 16/02
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 11/03
ONDERWIJS MEETS ONDERZOEK
Organisatie: NVvW

Vr 11/03
12 NEDERLANDSE UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Vr 08/04 Za 09/04
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

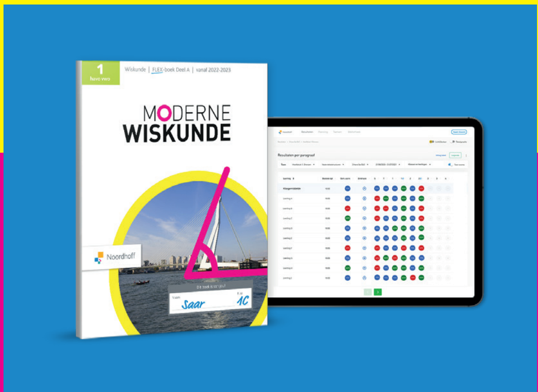
JAARGANG 97

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	15 maart 2022	03 januari 2022
6	03 mei 2022	28 februari 2022
7	21 juni 2022	25 april 2022

MODERNE
WISKUNDE

Laat je leerlingen alledaagse geheimen ontrafelen!

MODERNE WISKUNDE 13
leert leerlingen wiskunde in de praktijk herkennen



Het lesmateriaal van Moderne Wiskunde zelf inzien en beoordelen?

Vraag het gratis beoordelingspakket aan!