Puzzel 97-1 opgave 6 en7 **Frans van Hoeve**

(Zie voor de hele puzzel het bestand ”Van tientallig naar tweetallig en weer terug”)

Inleiding (overgenomen uit de opgave in Euclides)

In deze puzzel maken we rijtjes getallen $a(0)$ tot en met $a(i) = 1$. Het algoritme om $a(j + 1)$ te krijgen uit a(j) is als volgt:

1) Schrijf $a(j)$ in het 2-tallig stelsel, maar beschouw dat als rij cijfers in het 10-tallig stelsel.
2) Plaats naar keuze een aantal + tekens tussen die enen en nullen en bepaal de 10-tallige som $s(j)$ die je zo hebt verkregen.
3) Stel nu $a(j + 1) = s(j)$. Zo ontstaat een rij $a(0)$, $a(1)$, … $a(i)$ met $a(i) = 1$ We zoeken een rij, beginnend met een bepaalde $a(0)$, waarvoor i zo klein mogelijk is.

Voorbeeld: $a(0) = 19$, dus 2-tallig is dat 10011. Dit beschouwen we nu als een rij cijfers in het 10-tallig stelsel. Hier zetten we een aantal plus-tekens tussen de cijfers en bepalen de 10-tallige som. Bijvoorbeeld 10 + 0 + 1 + 1 = 12, of 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3 of 100 + 11 = 111. Dus $s(0)$ kan o.a. worden 12 , 3 of 111. $a(1)$ is daarvan de binair geschreven versie, dus 1100, 11 of 1101111 Met 1100 en 11 kunnen we hiervan de som 2 maken, dus $s(1) = 2$, zodat $a(2)= 10$. En dan 1 + 0 = 1, dus $s(2) = 1$ en dus ook $a(3) = 1$. Dus $i = 3$. Nu blijkt dat als we dit voor elk willekeurig startgetal $a(0)$ handig aanpakken, we altijd kunnen krijgen $a(i) = 1$ met $i \leq 3$.

Stelling: Voor alle startgetallen $a(0)$ is het mogelijk een a(i) te vinden met i ≤ 3.

<einde inleiding>

Een paar definities

a(0)	is een natuurlijk getal
B(a(0))	is de binaire representatie van a(0)
E	is het aantal enen in B(a(0))
N	is het aantal nullen in B(a(0))
S	is de verzameling van alle mogelijke sommen s(0) van E
s_0	is de minimumwaarde van S = E
dS	is te overbruggen verschil van s_0 met 2^j (dS $=2^j - s_0$)
ddS	is dS/9
G(11..)	is bijdrage aan ddS die geleverd wordt door deze deelrij van B(a(0))
E_j	is laagste te onderzoeken E die matcht op 2^j
Nodig(E)	is het aantal enen uit E dat minimaal nodig is om de som ddS te kunnen maken
Vrij(E)	E – Nodig(E)
i, j, k	zijn natuurlijke getallen groter of gelijk aan 1

Opgave 7: Geef een overzicht van de minimumwaarden van i bij alle E.

Alle mogelijke waarden van E kunnen we splitsen in 3 verzamelingen:

V1: E=1 en a(0)=1 daarvoor geldt i = 0

V3: E = 5, 10, 17 of 25 of E is een 3-voud, daarvoor geldt i ≤ 3

V2: alle overige waarden van E, daarvoor geldt i = 2

Ik ga dat bewijzen voor V2. Het bewijs voor V3 is daarna simpel.

Het bewijs voor V2 verloopt in 2 stappen:
Stelling 1: ik bewijs het als B(a(0)) **uitsluitend** uit E enen bestaat;
Stelling 2: ik bewijs het als B(a(0)) **naast** E enen ook uit N>0 nullen bestaat.
Algemene aanpak van bewijs stelling 1 is als volgt. B(a(0)) bestaat uit E enen. Als we tussen die E enen overal “+” plaatsen, dan hebben we B(a(0)) verdeeld in E 1-groepen en dat levert de som s_0 = E. Als dat een 2-macht is zijn we klaar maar zo niet dan moeten we in de E-rij ook 2-, 3- of mogelijk nog langere groepen opnemen om op die manier de som s_0 te verhogen tot een 2-macht. (Ik gebruik de formulering “E wordt ***gematcht*** op een 2-macht” .)
Afhankelijk van E bepalen we eerst wat de dichtstbijzijnde 2-macht is en daarna bepalen we de optimale verdeling in groepen om het verschil te overbruggen. Een optimale verdeling is daarbij dat we daarvoor zo min mogelijk enen nodig hebben. Na deze inleiding de formele stelling plus bewijs.

Stelling 1

Als E ∈ V2 en N=0, dan is er een altijd een j en een s ∈ S te vinden zodanig dat s = 2^j.
(Andere formulering: als E ∈ V2 dan bestaat er een j zodanig dat E matcht met $\mathbf{2^j}$.)

Bewijs

Als ik een bepaalde E wil matchen met een bepaalde 2-macht dan moet het een 2-macht zijn die dezelfde restklasse modulo 9 heeft als E. Waarom dat zo is, wordt direct duidelijk als we kijken welke extra bijdrage er wordt geleverd door de verschillende groepen. De groep G(11) bestaat uit 2 enen en die levert een extra bijdrage aan dS van 9 = 11- 2*1. Analoog levert G(11) een bijdrage aan dS van 108 = 111 – 3*1. Het is snel te zien dat een G-groep van elke lengte een bijdrage aan dS levert die deelbaar is door 9. Dus zullen we E alleen kunnen matchen op een 2-macht 2^j waarvoor geldt 2^j mod 9 = E mod 9.
Hieronder een overzicht van de relevante G-groepen en de 2-machten en hun restklassen in opklimmende volgorde.

2-machten en restklassen	
2-macht	restklasse
32	5
64	1
128	2
256	4
512	8
1024	7
2048	5
4096	1
8192	2

Groepen en extra bijdragen			
groep	Bijdrage aan dS	Bijdrage aan ddS = dS/9	Groepsovergang
G(11)	9	1	
G(111)	108	12	G(111)=12*G(11)
G(1111)	1107	123	G(1111)=10*G(111)+3*G(11)

Ik ga nu per 2-macht de E-waarden die daarmee kunnen matchen onderzoeken. Daarbij begin ik met de laagste, want daarbij heb ik de minste enen en is ddS het grootst. De ondergrens is 17 want 1 t/m 15 zijn al onderzocht en 16 is een 2-macht.

ddS waarden bij de verschillende 2-machten					
Overzicht van laagste E en dus hoogste ddS bij 2-macht					
Laagste E>15 <> 2-macht	**2-macht**	**ddS = dS/9**	**Benodigde groepen**	**Nodig(E) = Benodigde enen voor ddS**	**Vrij(E)**
E_5=23	32	DdS_5=1	1*G(11)	1*2=2	21
E_6=19	64	ddS_6=5	5*G(11)	5*2=10	9
E_7=20	128	ddS_7=12	1*G(111)	1*3=3	17
E_8=13	256	ddS_8=27	2*G(111)+3*G(11)	2*3+3*2=12	1
E_9=17	512	ddS_9=55	4*G(111)+7*G(11)	4*3+7*2=26	-9
E_{10}=25	1024	ddS_{10}=111	9*G(111)+3*G(11)	9*3+3*2=33	-8
Bij onderstaande 2-machten geldt E_k = 2^(k-6) + 9					
E_{11}=41	2048	ddS_{11}=223	G(1111)+8*G(111)+4*G(11)	1*4+8*3+4*2=36	5
E_{12}=73	4096	ddS_{12}=447	3*G(1111)+6*G(111)+6*G(11)	3*4+6*3+6*2=42	31
E_{13}=137	8192	ddS_{13}=895	**6*G(1111)+12*G(111)+13*G(11) Verdubbelen van E_{12} + 1*G(11)**	**6*4+12*3+13*2=86**	**51**

Schema 4

In Schema 4 staan de opklimmende 2-machten vanaf 32 met de laagste van toepassing zijnde E > 15 en de bijbehorende ddS. Bij 25 hoeven we alleen E=23 te onderzoeken. Daarvoor geldt ddS=1 dus er is een G(11)-groep nodig. Dat kost slechts 2 enen van de 23 dus dat lukt. Daarna volgt E = 32 en dat is een 2-macht. Bij E_6=19 geldt ddS = 5 en daarvoor zijn 5 G(11)-groepen nodig dat kost 10 van de 19 enen, dus ook geen probleem.
(In het vervolg zal ik “G(11)-groep” gewoon aanduiden als “G(11)”, enz.)
Als een bepaalde E voldoet, voldoet dan ook E+9? Bij E+9 neemt ddS af met 1 en komen er 9 enen bij. Als E een G(11) bevat dan geldt Vrij(E+9)=Vrij(E)+11 want er verdwijnt een G(11) en er komen 9 vrije enen bij. Maar als E geen G(11) bevat dan moeten we een G(111) afbreken in 12 G(11)’s om er een te kunnen weglaten en dan geldt:
Vrij(E+9) = Vrij(E)-10. Moet er een G(1111) worden afgebroken dan geldt:
Vrij(E+9) = Vrij(E)-21. Na het afbreken van een G(111) gaat Vrij(E) echter weer 11 keer omhoog zodat het via de laagste E-waarden snel te zien is dat alle grotere E-waarden matchen. In schema 4 is eenvoudig te zien dat alleen E_9=17 en E_{10}=25 niet matchen.
Alle 2-machten behoren tot een van de 6 mogelijke restklassen die in een vaste cycle voorkomen. Dus 2^k behoort tot de zelfde restklasse als 2^{k+6*i}.

Nu kunnen we een belangrijke stap maken door aan te tonen dat we voor E_{13} en hoger geen rekenwerk meer hoeven te doen vanwege het volgende. Uit schema 4 is af te leiden dat voor k>7 geldt **E_{k+1}= 2 E_k -9 en ddS_{k+1}= 2*ddS_k+1 (1)**
Met behulp van (1) kunnen we een waarde voor Vrij(E_{k+1}) afleiden uit Vrij(E_k) ook al is dat waarschijnlijk niet de maximale waarde. Maar als dat oplevert Vrij(E_{k+1}) ≥ Vrij(E_k) dan geldt dat dus ook voor alle hogere waarden van k die daarna niet meer onderzocht hoeven te worden. Dan moet dus gelden E_{k+1} - Nodig(E_{k+1}) ≥ E_k - Nodig(E_k) Toepassen van (1) geeft:
2* E_k - 9 – 2*Nodig(E_k) -1 ≥ E_k - Nodig(E_k) ➔ E_k ≥ Nodig(E_k) +10 en dat geldt vanaf k=12.

Stelling 2

Als E ∈ V2 en N>0, dan is er ook altijd een j en een s ∈ S te vinden zodanig dat s = 2^j.
Dat is dus een aanscherping van stelling 1.

Bewijs

In de situatie N=0 hebben we bewezen dat we voor elke ddS getallen i, j en k konden vinden zodanig dat: ddS =i*G(11) +j*G(111)+ k*G(1111) waarbij i,j,k ≥ 0.
Bij N>0 zijn er voor de deelrijen van lengten 2, 3 en 4 (veel) meer mogelijkheden.
Ik zal bewijzen dat ik altijd met gebruik van maximaal hetzelfde aantal enen dezelfde bijdrage aan ddS kan leveren als resp. G(11) en G(111) en dat ik voor een deelrij die dezelfde dds-bijdrage levert als G(1111) hoogstens één 1 extra nodig heb.
We beginnen elke deelrij altijd met 1 en we maken tevens gebruik van het feit dat in de N=0 situatie er altijd minstens één vrije een is. In onderstaand schema werk ik dit uit voor de deelrijen met lengten 2 en 3.
Nog een extra definitie: G'(11) is een deelrij waarin hoogstens 2 enen voorkomen en die dezelde ddS-bijdrage levert als G(11). Analoge definitie voor G'(111).

Begin van rij	Bijdrage aan ddS	Benodigd aantal enen	Aanvulling nodig met	Beschikbare vrije enen	Opmerkingen
G(11)	**1**	**2**		**0**	
G(10)	1	1		1	
Rijlengte 3					
G(111)	**12**	**3**		**0**	
G(100)	11	1	G'(11) = G(10) of G(11)	2	Kan altijd
G(110)	12	2			
G(101)	11	2	G'(11)	1	kan niet altijd, wordt verder uitgewerkt
Voor de laatst situatie zetten we de eerste deelrij van 2 nu apart en vullen rechts weer aan met 2 cijfers. Dat kan altijd want er zijn minstens 4 enen. Dan krijgen we voor de rechtse groep een herhaling van hierboven.					
G(10) G(111)	12	3		0	
G(10) G(100)	11	1	G'(11)	2	Kan altijd
G(10) G(110)	12	2		1	
G(10) G(101)	11	2	G'(11)	1	Kan nu wel want G(10) is beschikbaar

Het is nu eenvoudig na te gaan dat als E begint met een deelstring waarin 3k+1 enen voorkomen, dat we daar dan k aansluitende G'(111)-groepen mee kunnen vormen die mogelijk worden voorafgegaan door één G(10) en worden gevolgd door nul of meer vrije enen. We kunnen daarom dus in schema 4 overal G(11) en G(111) vervangen door G'(11) en G'(111) waarbij het aantal vrije enen dan nooit kleiner kan worden.

Waarschijnlijk is het ook wel mogelijk om volgens dezelfde methode als voor G'(111) te bewijzen dat we een G'(1111) groep kunnen vormen met gebruik van hoogstens 4 enen, maar dat is toch wel een stuk lastiger. Bovendien is zo'n streng bewijs niet nodig omdat we ermee kunnen volstaan aan te tonen dat we een G'(1111) groep kunnen vormen met gebruik van hoogstens 5 enen. In E_{11} is maar één G(1111) nodig en in E_{12} maar drie terwijl we in beide ruim voldoende vrije enen hebben. Hieronder een gelijksoortig schema nu voor rijlengte 4.

Begin van rij	**Bijdrage aan ddS**	**Benodigd aantal enen**	**correctrie nodig met**	**Beschikbare vrije enen**	**Opmerkingen**
G(1111)	**123**	**4**		**0**	
G(1110)	123	3		1	
G(1101)	122	3	+G'(11)	1	Kost hoogstens één vrije 1
G(1100)	122	2	+G'(11)	2	
G(1011)	112	2	+G'(111) – G'(11)	1	Kost hoogstens één vrije 1
G(1010)	112	2	+G'(111) – G'(11)	2	
G(1001)	111	2	+G'(111)	2	Kost hoogstens één vrije 1
G(1000)	111	1	+G'(111)	3	

De actie om een G'(11) weg te kunnen laten is bij E_{11} en E_{12} altijd mogelijk omdat daar voldoende G'(11) groepen aanwezig zijn. Mocht er bij hogere E-waarden geen G'(11) meer aanwezig zijn, dan is het aantal vrije enen inmiddels zo groot dat er probleemloos een G'(111) kan worden gesplitst in 12 G'(11)'s.
Hiermee is nu bewezen dat voor alle $E \in V2$ geldt i=2.

Resteert nog te bewijzen dat voor alle $E \in V3$ geldt i=3.
V3 omvat de elementen 5, 10, 17, 25 en alle 3-vouden.
Dat 5, 10, 17 en 25 niet gematcht kunnen worden op een 2-macht is al aangetoond en voor een drievoud is dat triviaal. Dus voor alle $E \in V3$ geldt i>2.
Daarnaast is het simpel na te gaan dat voor alle $E \in V3$ geldt:
de i-waarde van (E-1) = 2 of de i-waarde van (E-2) =2.
Daarmee is aangetoond dat voor alle $E \in V3$ geldt i=3.
Hiermee is opgave 7 afgerond.