EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Lesson study over de sinus

Vouwen van exponentiële functies

Leerlingen zelf de hoekverdubbelingsformules laten ontdekken

Wiskundig modelleren

NR.3

JAARGANG 97 - DECEMBER 2021

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR3

IN DIT NUMMER

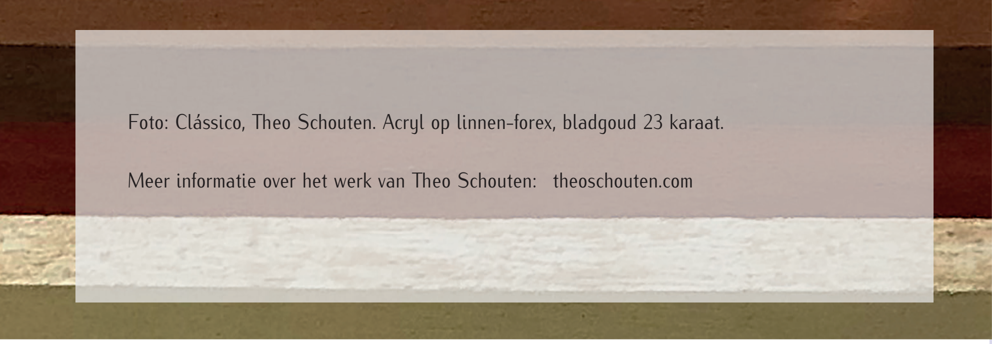


Foto: Clássico, Theo Schouten. Acryl op linnen-forex, bladgoud 23 karaat.

Meer informatie over het werk van Theo Schouten: theoschouten.com

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

Jaarverslagen NVvW en *Euclides*

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 6 november 2021 stonden de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen staan op de site.

vakbladeuclides.nl/973jaarverslag_Euclides_2021
vakbladeuclides.nl/973jaarverslag_NVvW_2021

Rectificatie

In het artikel Recordopbrengst in coronatijd van Jos Remijn, *Euclides* 97-2, blz 43 is te lezen: 'Het veilingaanbod werd nog mooier toen Hans Sterk een levensgroot bordmodel van een rekenliniaal aanbood.' Het was echter niet Hans Sterk, maar Arie Sterk die deze liniaal ter beschikking stelde. Met een woord van excuus aan beiden...

Kort vooraf

We zouden het eens moeten onderzoeken, maar het zou zomaar eens kunnen dat het derde nummer, het 'kerstnummer', het best gelezen nummer van iedere jaargang is. Ik stel me voor dat dit nummer rechtstreeks van de deurmat of brievenbus op de stapel 'vermaak voor in de kerstvakantie' belandt. Zoek dan ook meteen een stapeltje vouwblaadjes, want dan kun je exponentiële verbanden gaan vrouwen, zie het artikel van Jacoliene van Wijk. Of een afleiding van de verdubbelingsformule sin(2x), zoals in het artikel van de docenten van het Utrechts Stedelijk Gymnasium. De vouwsels kunnen vervolgens gerecycled worden als illustratie van het artikel van Martin Kindt: 'Knippen en passen'.
Misschien ben je in de kerstvakantie meer een denker dan een doener. Dan zou je, eventueel tijdens het bedenken van goede voornemens voor volgend jaar, eens kunnen denken aan deelname van je leerlingen aan de International Mathematical Modeling Challenge. Ok, ik geef het toe, hier is sprake van enige belangenverstrengeling: ik zit in de jury voor de Nederlandse inzendingen. Maar ik zie de werkstukken graag komen in het voorjaar. Hoe dat ook al weer zit met modelleren? Bert Zwaneveld en Jacob Perrenet houden er (nogmaals) een warm pleidooi voor.

In 1981 is de NVvW werkgroep Vrouwen & Wiskunde opgericht. Na een periode van stilte heeft deze werkgroep vorig jaar een doorstart gemaakt, omdat er nog steeds op tal van aspecten grote genderverschillen zijn in het wiskundeonderwijs. Op initiatief van de werkgroep wordt een serie artikelen geschreven, waarvan de bijdrage van Hanneke van Mier over reken/wiskundeangst de eerste is. Om over na te denken en er vervolgens iets mee te doen.
Namens de hele redactie wens ik jullie mooie en betekenisvolle feestdagen toe.

Tom Goris

Rogier Bos, Carolien Boss-Reus, Floortje Holten, Fransje Praagman

Verslag van een lesson study

De sinus een zaagtand?

Wat heeft een sinusoïde toch te maken met ‘sinus van een hoek is overstaande zijde gedeeld door schuine zijde’? In een lesson study wordt geprobeerd deze ogenschijnlijk verschillende concepten weer tot elkaar te brengen.

Inleiding

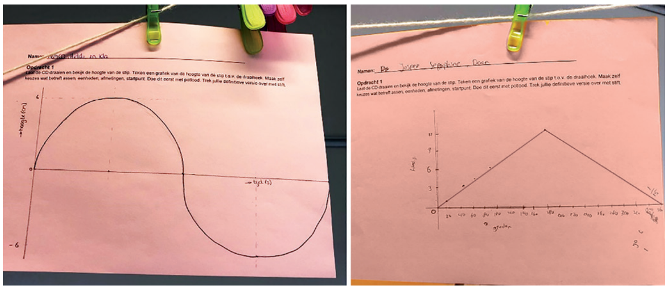
Voor ons is het, net als voor de meeste docenten, lastig tijd vrij te maken of toegekend te krijgen om met sectiegenoten te werken aan vakdidactische verbetering van het onderwijs. Natuurlijk proberen we individueel wel geregeld ideetjes uit, maar dat leidt niet vaak tot duurzame aanpassingen. Dat is veranderd sinds we over de periode 2020 - 2022 deelnemen aan het EU Erasmus+ TIME-project.[1] Hiervoor is in overleg met de schoolleiding geld en tijd vrijgemaakt, zodat we met een deel van de sectie een serie lesson studies[2] kunnen doen. Lesson study is een *framework* van Japanse origine om gezamenlijk een les te ontwerpen, observeren, en te verbeteren.[3] Het meest in het oog springt in deze aanpak de observatieles, waarbij vaak wel 5 tot 25 docenten een les waarnemen om te zien of alles zo gaat als gepland of niet. In Japan is lesson study sterk verankerd in de cultuur: het hele schoolsysteem is erop gericht lesson studies mogelijk te maken.

We hebben de eerste lesson study aangegrepen om het volgende probleem met de sinus – en in het algemeen, goniometrische functies – aan te pakken. De leerlingen ontmoeten de sinus in ten minste vier contexten: eerst in rechthoekige driehoeken (soscastoa), daarna in algemenere hoeken (knop op de rekenmachine), dan in de cirkel (meetkundige definitie), en tot slot als grafiek (sinusoïdes). Het lastige is voor leerlingen om deze perspectieven met elkaar in verband te brengen, om van de ene naar de andere over te gaan. Onze briljante uitleg en flitsende demonstraties in coole apps (GeoGebra) bleken helaas niet te volstaan om hier iets aan te doen. Daarom kozen we in onze lesson study voor een aanpak met old-school middelen waarbij de leerling alles zelf in de hand heeft – letterlijk – en al onderzoekend de cirkel- en grafiekperspectieven ontwikkelt en in verband brengt met het driehoeksperspectief.

De ontworpen les

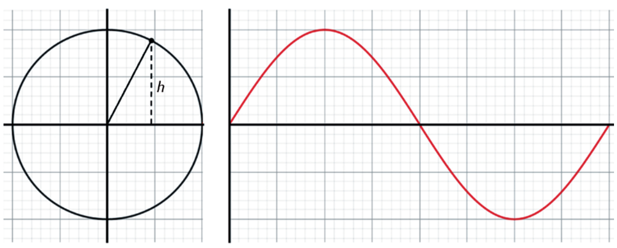
figuur 1 Old-school doe-het-zelf-schijf met stip

De ontworpen les is opgebouwd rond vier taken. Een centrale rol speelt een schijfje met stip (bij ons gemaakt van een oude cd), waarvan ieder groepje leerlingen er een krijgt. De eerste taak is: ‘Maak op een vel papier een grafiek voor de hoogte van de stip tegen de draaihoek’. De docent geeft geen verdere aanwijzingen. In de klas hangt een waslijn waaraan de leerlingen het vel hangen als ze klaar zijn. De bedoeling is de verschillende keuzen en misconcepten zichtbaar te maken. Dat die er zijn blijkt wel als de leerlingen elkaars werk gaan bekijken. Ze discussiëren met elkaar: moet het nou een soort zaagtand zijn, aan elkaar geplakte parabolen, halve cirkels – leerlingen maken de omtrek langs de schijf – of nog iets anders? Begin je met de stip bovenaan of ergens anders? Moet alles boven de x-as of er doorheen? Hoe gaat het ook alweer met graden en radialen?



figuur 2 Grafieken door leerlingen aan de waslijn

Zonder op de zichtbare misconcepten in te gaan – laat de leerlingen daar eerst zelf maar eens over discussiëren – legt de docent vervolgens wel een paar conventies vast: het midden van de schijf is hoogte 0, draaien doen we tegen de klok in, de straal is 1. Taak 2 is vervolgens hetzelfde als taak 1. Met meer structuur en vergelijkingsmateriaal wagen de leerlingen een tweede poging en hangen het resultaat aan de waslijn naast hun eerste werk. Nu komen leerlingen wel aan het woord om een grafiek toe te lichten, gevolgd door een klassikale discussie over welke de correcte oplossing is.
Ook in de tweede ronde blijken sommige groepjes hardnekkig vast te houden aan bepaalde grafieken: halve cirkels tegen elkaar, parabolen, of zaagtanden. Eigenlijk wel logisch dat leerlingen grijpen naar vormen die ze al kennen, maar toch zijn de zaagtand en halve cirkels minder logisch, als je goed geobserveerd hebt. En sommige leerlingen doen dat gelukkig en introduceren de (verticale) snelheid van de stip in de discussie. Uiteindelijk stuurt de docent de discussie naar de juiste oplossing, die dan getoond wordt, zie figuur 3.
In figuur 3 staat ook de volgende taak beschreven.



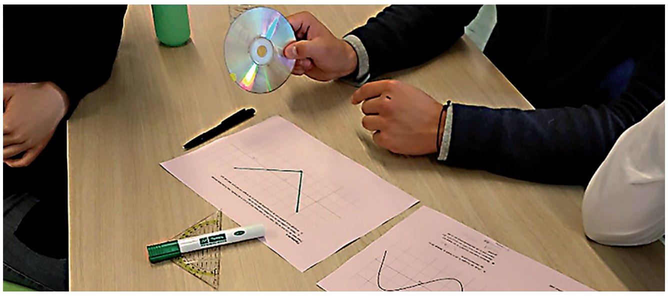
Hierboven zie je de eenheidscirkel en de grafiek van de sinusfunctie naast elkaar.

a. Zet de stip die je op de eenheidscirkel ziet ook in de grafiek. Zet ook de bijbehorende hoek α in de eenheidscirkel en op de horizontale as van de grafie

b. Druk de hoogte h uit in hoek α. Bekijk dit in de eenheidscirkel.

c. Bedenk hoeveel $\sin 90°$ is en waarom. Bereken exact $\sin 135°$ en $\sin 210°$. En teken dat in de eenheidscirkel en in de grafiek.

figuur 3 Werkblad met cirkel en sinusgrafiek



figuur 4 Leerlingen aan de slag met schijf en werkblad

Het was voor ons zeer leerzaam om te zien hoeveel moeite leerlingen hebben met taak b en c. Natuurlijk moeten leerlingen zelf de α en 1 in de cirkel aanbrengen, maar daarna is het een geval van SOS. Natuurlijk is dit geen routinewerk: hier komt het tot de kern van de hele les, namelijk het integreren van de verschillende invalshoeken tot de sinus: driehoeken, cirkel, en grafiek. Ons idee en onze hoop zijn dat de ervaring van het eigen onderzoek, een gezamenlijke discussie en de uiteindelijke bevestiging door de docent leidt tot een stevigere verankering van die samenhang – ondanks dat in iedere klas maar een handjevol leerlingen de taken zelfstandig kan volbrengen.

De afsluitende taak 4 brengt zowel een nieuw element, als een terugblik op de voorgaande taken: onderzoek waar je de cosinus terugvindt in de eenheidscirkel en teken de grafiek – eventueel met behulp van het schijfje.

Reflecties op het proces en verbeteringen

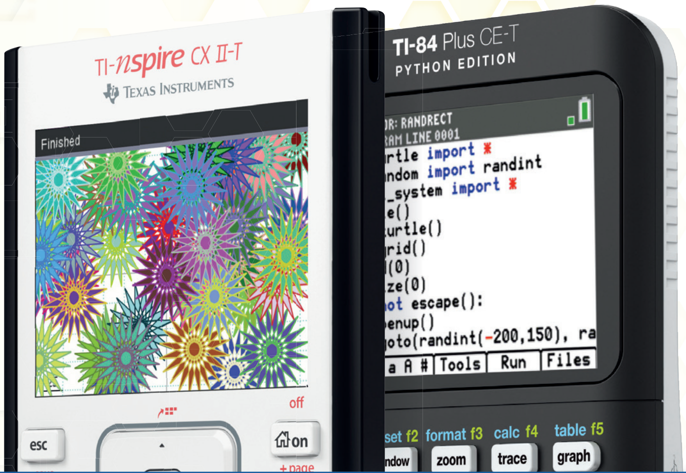
Dat was de uiteindelijke les, maar nu het proces ernaartoe. De les is drie keer gegeven, en iedere keer geobserveerd door twee of drie van ons. Na afloop namen we ten minste een half uur om de observaties te bespreken. Bij lesson study gaan die observaties niet over of de docent het goed gedaan heeft, maar over of de ontwerpkeuzes voor de les goed zijn uitgepakt voor de leerlingen. Op basis daarvan wordt het ontwerp aan-

Stimuleer het probleemoplossend vermogen met computational thinking in de wiskundeles

Zorg ervoor dat je leerlingen ‘toekomstproof’ zijn

Met de handhelds en software van Texas Instruments kunnen je leerlingen eenvoudig zelf in Python programmeren! Volg onze gratis webinars waarin je Python leert gebruiken en tips krijgt voor praktische toepassingen in de les.

python™



Webinars voor leraren

Inmiddels zijn we alweer een paar maanden onderweg met onze tweede TI Python BootCamp. We hebben nog 3 webinars te gaan, waarin de nadruk ligt op programmeertechnieken als basis voor uitgebreidere programmeerprojecten en het oplossen van problemen. Je kunt nog deelnemen aan de volgende webinars, waarin we gebruik maken van Python:

Cellulaire automaat Game of Life
» Donderdag 17 februari 2022 - 19:00

Vlakvullingen
» Donderdag 24 maart 2022 - 19:00

Animaties en simulaties met OOP
» Donderdag 28 april 2022 - 19:00

Noteer deze data vast in je agenda en mis er niet één!

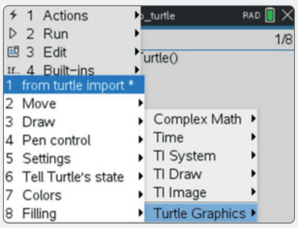
Toch eentje gemist? Geen zorgen. Je kunt ze stuk voor stuk terugkijken.

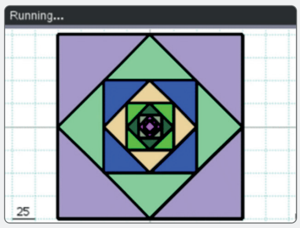
LET OP: Deelnemers die niet bekend zijn met Python raden we aan om als voorbereiding Deel 1 en 2 van de Python BootCamp door te nemen op: [wil-depython.nl]() schrijf je in voor onze webinars op: [resources.t3nederland.nl/webinars]()

AANVULLENDE RESOURCES:

Python-module Turtle

Wist je dat je gratis gebruik kunt maken van de Turtle-module, waarmee meetkunde en algebra meer tot de verbeelding gaan spreken?





Met deze module schrijven leerlingen namelijk scripts om graphics mee te maken. Dit is een leuke lesactiviteit waarmee ze zich ontwikkelen in programmeren, wiskunde en computational thinking. Python-module Turtle is geschikt voor TI-84 Plus CE-T Python Edition en TI-Nspire™ CX II-T-handhelds. En voor zowel beginnende als ervaren programmeurs.

Ontdek er alles over:

[education.ti.com/nl/84Turtle]()

[education.ti.com/nl/NSTurtle]()

Texas Instruments

gepast. Er kwamen kleine en grote zaken aan de orde, te veel om alles op te noemen. Bijvoorbeeld, het gebruik van radialen in de opgave vonden de leerlingen lastig, en dat leidde te veel af van de hoofdzaak – dus volgende keer alleen graden. We zagen dat leerlingen serieus over elkaars grafieken praatten als ze langs de waslijn liepen, maar daarna was er te weinig tijd genomen om leerlingen met elkaar te laten bepalen welke grafiek de juiste was. Dit werd dan aangepast in het lesplan. Ook de formuleringen van de opdrachten werden een aantal keer aangepast, en de grootte van de groepjes ging van vier naar drie. Het maakt elke les extra interessant om te zien of de aanpassingen echt verbeteringen zijn.

Lesson study: ontwerpen en observeren

Het is eigenlijk onbegrijpelijk dat de belangrijkste ingrediënten van lesson study ontbreken in de Nederlandse scholen: *systematisch* gezamenlijk ontwikkelen en *gezamenlijk* lessen observeren. We weten van onze leerlingen dat het maken van producten leidt tot creativiteit en eigenaarschap, hetgeen weer leidt tot – met een ouderwets woord – arbeidsvreugde, nog los van dat je er vaak het meest van leert. Waarom gunnen wij docenten dat onszelf dan niet? Daarnaast, hoe waardevol zou het zijn als een school simpelweg inroostert dat docenten elkaars les observeren, ten minste een paar uur per jaar?[4] Leuk en spannend om te observeren en geobserveerd te worden, maar met name fijn om eens heel geconcentreerd te kijken naar hoe leerlingen aan de slag gaan (of niet), en waarom.

In eerste instantie voelden we wat weerzin om ervoor te gaan met de lesson study. We hadden de indruk dat we er te weinig tijd voor hadden, en bovendien hadden we allen al een manier om dit onderwerp te doceren. Maar de geïnvesteerde tijd betaalde zich terug. Je leert van elkaar tijdens het observeren, discussiëren en schaven aan het lesplan. Bovendien heb je uiteindelijk een uitgekristalliseerde les, die niet alleen jijzelf volgende keer kunt gebruiken, maar ook je collega's... en misschien wel de lezers van *Euclides.*

Het lesplan kun je downloaden via de *Euclides*-site. Leuk om een berichtje te krijgen als je het materiaal gebruikt: *r.d.bos@uu.nl.*

vakbladeuclides.nl/973lessonstudy

Noten

[1] zie *https://time-project.eu/*
[2] zie *https://lessonstudynl.online/*
[3] Zie: Roorda, G. & Goei, S.L. (2018). Lesson study in Japan. *Euclides, 93*(4), pp. 14-18.
[4] Wil je zelf aan de slag met lesson study, kijk dan bijvoorbeeld eens op *https://lessonstudynl.online/* of *https://u-talent.nl/incompany-training/*

Over de auteurs

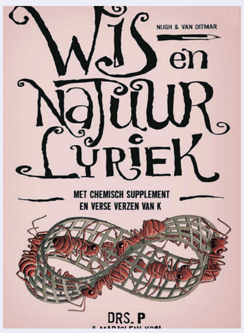
Carolien Boss-Reus, Floortje Holten en Fransje Praagman zijn wiskundeleraren aan het Stedelijk Gymnasium Utrecht. Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan de Universiteit Utrecht en redactielid van *Euclides*.
E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*

Ontsnapping

Net in zijn dodencel kwam het bericht
dat men hem morgen al vonnissen zou.
Prompt kwam de beul met een stalen gezicht
vragen wat hij voor zijn galgenmaal wou.

'Doe maar een frietje.' zo gniffelde hij.
'Goed.' zei de beul en hij pende het neer.
'Dat komt in orde. Wat drinkt u daarbij?'
'Een wijntje uit 2050, meneer!'

Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek *van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. 'Ontsnapping' is een van de nieuwe gedichten.*

Jacoliene van Wijk

Laten we het vouwen

De helft van de helft… wordt dat ooit nul?

Bij het Vaknetwerk Wiskunde gaf Jacoliene van Wijk een workshop over wiskundig vouwen in de bovenbouw, met een aantal praktische vouwopdrachten waar je direct mee aan de slag kunt in de les. Eén van de opdrachten is het vouwen van exponentiële functies, die je zowel op de havo als het vwo kunt geven, bij wiskunde A én B.

Vouwen voor begripsvorming van functies

In *Euclides* 96-3 heb ik een overzicht gegeven van vouwopgaven in *Euclides* door 95 jaargangen heen. Eén van de onderwerpen waarbij wiskundig kan worden gevouwen is 'vouwen voor de begripsvorming van functies'. Vouwen leent zich hier goed voor, omdat het papier de leerlingen een duidelijke, concrete context geeft. Onderschat niet hoeveel focus (een deel van) een A4-tje de leerling geeft bij de opdracht: ze kunnen het papier aanraken, vouwen, er aantekeningen op maken, meten en zelfs scheuren of knippen. Verder mogen de leerlingen bij vouwen letterlijk iets dóen, ze kunnen met hun handen werken en overleggen. En via de vouwbeweging, en het praten erover, ervaren ze letterlijk de stappen die ze later gaan abstraheren tot wiskundige formules. Maar die abstractie laat zich niet direct zien. En dat is óók een groot voordeel van vouwen: vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht, niet iedere leerling wil beginnen aan een opgave uit het boek…

> "Vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht"

Wiskundig vouwen?

Bij wiskundig vouwen heb ik het nu niet over het maken van mooie wiskundige figuren zoals de *hypar*, zie figuur 1[1] en de verschillende figuren die daarmee kunnen worden gemaakt.

figuur 1 Twee 4-hat hypars (foto: auteur)

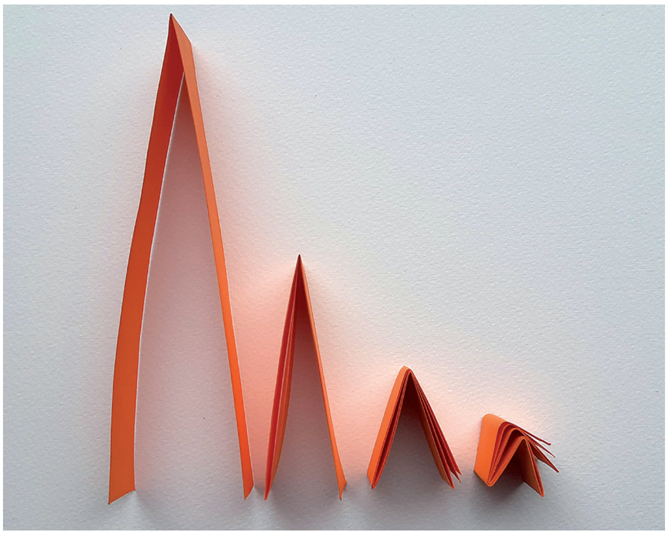
Bij wiskundig vouwen denk ik meer aan de betekenis die Friedma & Rittberg [2] en Nedrenco [3] eraan geven: het gaat om het *proces* van het vouwen, niet om het *resultaat* van het vouwen. Om precies te zijn: wiskundig vouwen is een onderdeel van origami, waarbij de nadruk ligt op het *haptische proces* van vouwen, en zelfs uitvouwen, om vouwlijnen te onderscheiden en *het resultaat wiskundig te analyseren*, in relatie tot het wiskundige probleem. Dat geldt zeker voor de vouwopdracht in dit artikel: grote kans dat aan het einde van de les de papierbak gevuld is met opgefrommelde en verknipte stroken papier…

Vouwklassenmanagement

Ik gaf al aan dat vrijwel iedere leerling wil beginnen aan een vouwopdracht. Het is fijn als dat inderdaad de vouwopdracht is die je voor ogen had in deze les, en dat niet binnen vijf minuten de vliegtuigjes in de plafondplaten vastzitten. Ofwel: goed klassenmanagement is bij vouwen belangrijk. Van het niet toelaten van het vouwen van eigen ontwerpen, tot het opruimen van de tafels en de vloer aan het einde van de les (geef de papierbak maar door!), het helpt als je een goede band hebt met de klas waar je een vouwopdracht gaat geven.

Vouwen van een exponentiële functie – de basis

Bij het vouwen van een exponentiële functie gaat het om herhaald vouwen. Het is daarmee enigszins vergelijkbaar met de begripsvorming van herhaald delen bij logaritmische functies, zoals in het artikel van Vos & Espedal [4]. De basis is als volgt: geef de leerlingen een strook papier, van de lange zijde van een gekleurd A4-papier. De kleur is straks belangrijk bij het maken van een grafiek. Vraag de leerlingen om de strook over de korte zijde dubbel te vouwen, en dit dubbele papier nog een keer dubbel te vouwen, en nog een keer, en nog een keer, zie figuur 2.



figuur 2 Herhaald vouwen van de strook

Als je snel wilt overgaan naar een formule is het handig als de leerlingen direct een tabel invullen met de lengte van de gevouwen strook, na *x*-keer vouwen, zie figuur 3. Dit werkblad staat op de site van *Euclides*.

Meestal is het vouwen na een keer of zes wel gedaan. Het mooie is dat je nu – al dan niet met behulp van de tabel, die de leerlingen verder zouden kunnen voortzetten zonder vouwen – een klassengesprek kunt beginnen over het limietbegrip. Want: hoe vaak je ook vouwt, wordt de lengte van de gevouwen strook papier ooit nul? Waarom wel? Waarom niet? Bij hoeveel keer vouwen zou de lengte korter worden dan 1 millimeter? En wat gebeurt daarna?

Handen uit je mouwen, functies vouwen!

Dit blad is van:..

Wat heb je nodig?
Dit blad en drie stroken papier van ca. 2 bij 30 cm.

Wat ga je leren?
Welke wiskundige verbanden het dubbelvouwen van een strook papier kunnen beschrijven.

Opdracht A: vouwen

1. Je hebt een strook papier gekregen van een vel A4 papier. Vouw deze strook over de korte zijde dubbel. Vouw zo netjes mogelijk!
2. Begin met het invullen van tabel 1:

Aantal vouwen	0	1	2	3	4
Lengte strook					

Tabel 1

3. Vouw de dubbelgevouwen strook die je nu hebt nog een keer dubbel. Herhaal dit dubbelvouwen nog een aantal keer in dezelfde richting. Vul bij iedere stap de tabel in. Als je de strook vier keer hebt gevouwen ben je klaar.
4. Stel dat je tabel 1 zou uitbreiden naar 5, 6, 7, ... etc. vouwen. Zou de breedte van het papier dan ooit 0 worden? Of negatief? Waarom wel of niet?

figuur 3 Werkblad bij het herhaald vouwen

Vervolgens kun je het gesprek brengen op de formule bij het vouwen van deze strip, met groeifactor 0,5, en het begingetal 30.

En weer terug

Het uitvouwen van de strook geeft – afhankelijk van het aantal vouwen – de formule $y = 0{,}46875 \cdot 2^x$. De beginhoeveelheid komt uit het doorrekenen vanaf de afmeting van de 30 cm van de strook via de tabel. Als de leerlingen zelf nauwkeurig doorvouwen en meten dan zullen ze een pakketje – en daarmee beginhoeveelheid – van ongeveer 0,5 cm krijgen, dus dan starten de leerlingen met (een variatie op) $y = 0{,}5 \cdot 2^x$. Als er in de klas verschillende beginhoeveelheden worden gekozen kan het leuk zijn om deze via de GR met elkaar te vergelijken, bijvoorbeeld de uitkomst bij $x = 10$. Persoonlijk vind ik het erg mooi om te merken dat zo'n abstracte formule ook bij havo wiskunde A – met het frommeltje papier in hun hand dat ze uitvouwen – helemaal begrepen wordt. Met name de groeifactor weten ze zelf meestal heel snel.

En weer heen…

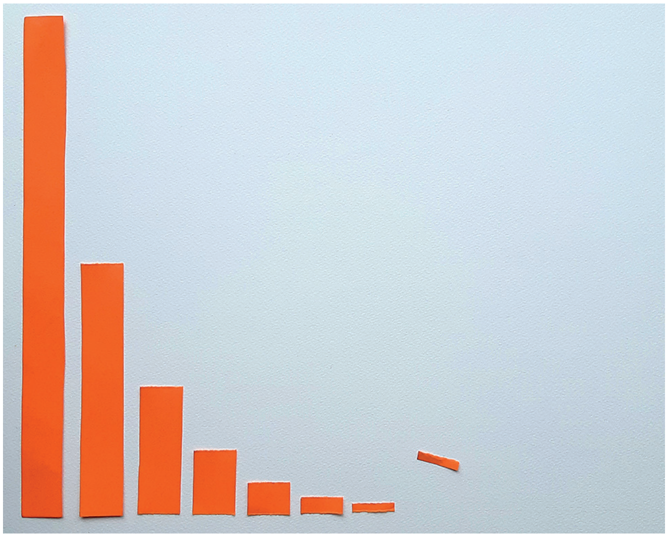
Nu kan er ook een gedachte-experiment worden opgezet om de 'magie' van de snel oplopende getallen bij exponentiële functies nog eens te laten ervaren (zie ook *Euclides* 84-4 en 87-2): stel dat je een oneindig lange strip papier hebt, en het papier is 0,1 mm dik, hoe vaak moet je een velletje dan dubbelvouwen om van hier naar de maan te komen (384.400 km)? NB: het gaat nu om de *dikte* van de

>

gevouwen stapel, niet meer de lengte. Welke formule en vergelijking horen hierbij?

Een grafiek maken

Het vouwen met groeifactor 0,5 leent zich goed om direct een grafiek te maken. Het mooiste resultaat krijg je als je gekleurde stroken papier neemt om te vouwen, en een wit A4-velletje als achtergrond voor de grafiek. Laat de leerlingen een nieuwe strook steeds dubbelvouwen, maar zet de vouwen dit keer extra goed aan, zodat het papier op de vouw kan worden afgescheurd. De steeds kortere stroken die zo worden verkregen kunnen als een staafdiagram naast elkaar gelegd worden, waarna de stap naar een lijngrafiek, én het begrip daarvan, een stuk kleiner is. Het werkt het best als de leerlingen direct ná het afscheuren steeds het strookje naast het vorige strookje leggen, dan zie je de grafiek echt 'groeien', zie figuur 4. Let op dat ook hier het 'restje' papier dat nauwelijks meer gevouwen en gescheurd kan worden ook weer een aanknopingspunt is voor het limietbegrip.



figuur 4 Grafiek van een gevouwen en afgescheurde strip papier

Vouwen van een exponentiële functie – variatie & toenamediagram

Als variatie op het vouwen van $0{,}5^x$ en 2^x kun je natuurlijk ook denken aan $0{,}75^x$ en $0{,}25^x$. Het bijzondere van deze functies is dat als je er een grafiek bij maakt, zoals hiervoor beschreven werd voor $0{,}5^x$, de grafiek nu een toenamediagram is geworden... ook weer een leuke toepassing voor wiskunde A! En kunnen de leerlingen bij deze alternatieven ook een nieuwe formule bedenken bij de grafiek? En wat is dan de samenhang met de functie waarmee werd begonnen?

Zijstap naar logaritmen

Aan het begin van het artikel gaf ik al aan dat er een vergelijking gemaakt kan worden met herhaald delen bij logaritmen. Bij het drie keer dubbel vouwen van een strip bestaat de strip uit acht lagen papier, of, als je de strip uitvouwt, uit acht vakjes: ${}^2\log(8) = 3$. Nog twee keer vouwen geeft 32 lagen papier, ${}^2\log(32) = 5$, of... hebben we hier een route naar het uitleggen van ${}^2\log(8) + {}^2\log(4) = {}^2\log(32)$?

Probeer het eens!

Dit artikel geeft aan hoe je met een paar stroken A4-papier per leerling al snel kunt komen tot het bedrijven van wiskunde, het letterlijk ervaren van een functie en een limiet, van praktisch vouwen naar abstracte wiskunde als functies en een eerste aanzet naar grafieken. Probeer het eens! Zeker als je de stroken van tevoren maakt, zullen er weinig vliegtuigjes opstijgen in de les. Veel plezier!

Voor het werkblad bij deze vouwles zie:

vakbladeuclides.nl/973helftvandehelft

Noten

[1] Demaine, E. D. (2014). *Hyperbolic Paraboloids.* *http://erikdemaine.org/hypar/*

[2] Friedman, M., & Rittberg, C. J. (2019). The material reasoning of folding paper. *Synthese.* *https://doi.org/10.1007/s11229-019-02131-x*

[3] Nedrenco, D. (2018). Learning how to axiomatise through paperfolding. In R. J. Lang, M. Bolitho, & Z. You (Eds.), *Origami 7, The proceedings from the 7th international meeting in origami in science, mathematics, and education. Volume 1: design, education, history and science* (pp. 257–272). Tarquin.

[4] Vos, P., & Espedal, B. (2016). Logaritme, een betekenisvolle aanpak met herhaald delen. *Euclides*, 91(3), 4–6.

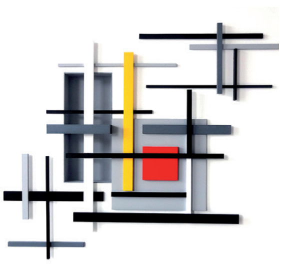
Over de auteur

Jacoliene van Wijk is eerstegraads docent wiskunde aan het Goois Lyceum en doet onderzoek naar wiskundig vouwen in de wiskundeles. Dit onderzoek wordt begeleid door Michiel Doorman (Freudenthal Instituut). E-mailadres: *jvwijk@gsf.nl.* Meer informatie op *www.wiskundigvouwen.nl.*

Henk Rozenhart

Geometrie in Hindeloopen

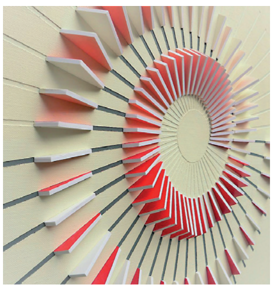
Op de voorkant van dit nummer staat het werk Clássico van kunstenaar Theo Schouten. In het prachtige stadje Hindeloopen woont en werkt Theo Schouten elke dag aan wat hij noemt: 'driedimensionale abstracte geometrische belevingen'. In dit artikel een toelichting op zijn werk.



figuur 1 Cross Lines

Zoeken naar ruimtelijkheid

Theo noemt zichzelf geen kunstenaar, maar ambachtsman. Hij is autodidact en zegt geen wiskundige achtergrond te hebben. Toch straalt zijn werk uit dat hij een geschoold meetkundige is. Theo: 'Het enige wat ik doe is meten en kijken of de verhoudingen goed voelen.' Zijn werk doet zeker, vanwege het kleurgebruik, denken aan De Stijl en Piet Mondriaan, maar door het zoeken naar ruimtelijkheid is zijn werk toch ook heel anders. Door delen weg te laten maakt hij, zoals hij zelf zegt, gebruik van 'de negatieve ruimte'. Op deze manier ontstaat er een krachtig effect van schaduw en diepte. Naast de kleuren blauw, geel en rood spelen ook de kleuren wit en zwart een belangrijke rol in zijn werken. In zijn nieuwste werken speelt ook goudkleur een belangrijke rol.



figuur 2 Come and Go

Intuïtief werken

Om goed te doorgronden hoe de objecten van Theo in elkaar zitten moet je de tijd nemen om de herhaling en de werking van de patronen tot je door te laten dringen. Het overkwam mij dat ik direct op zoek ging naar de wiskundige achtergrond van de patronen die hij gebruikt, maar op mijn vraag hoe een en ander wiskundig in elkaar steekt, bleef hij het antwoord schuldig. Hij zei: 'Ik meet en ik ga verder intuïtief te werk.'
Omdat hij horizontaal werkt, worden sommige effecten pas echt zichtbaar als het werk aan de wand hangt.

Meer zien?

Op de website van Theo [1] zijn nog veel fraaie voorbeelden van zijn werk te vinden en een bezoek aan zijn woonkameratelier is zeer de moeite waard, want de kunstenaar ontvangt graag geïnteresseerde gasten en praat met passie over zijn werk.

figuur 4 Atelier en Galerie Theo Schouten, Achtvoet 22, 8713 JM Hindeloopen

Rest nog de vraag aan de lezers:
'Wie ziet in de werken van Theo Schouten onderliggende wiskunde en welke dan?'

Noot

[1] zie *www.theoschouten.com*

Over de auteur

Henk Rozenhart was wiskundedocent op de Berger Scholengemeenschap. Tot voor kort was hij voorzitter van de redactie van *Euclides*, maar bovenal is Henk kunstliefhebber in hart en nieren. E-mailadres: *henk_rozenhart@hotmai.com*

Michiel Doorman, Carolien Boss-Reus, Floortje Holten, Fransje Praagman, Joke Daemen

De formule voor sin(2x) ontvouwt zich op het USG

Leerlingen zélf de hoekverdubbelingsformules laten ontdekken door middel van het opvouwen van een driehoek, uiteraard gecombineerd met wiskundig denken. Een verslag van een les op het Utrechts Stedelijk Gymnasium.

Inleiding

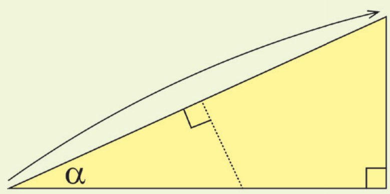
De hoekverdubbelingsformules bij gonio zijn vaak een instrumenteel hulpmiddel, maar kunnen ook een mooie toepassing van wiskundig redeneren zijn. Voor leerlingen blijven het echter meestal moeilijke formules die bij toetsen en op het CE gegeven zijn op een formuleblad, en die plotseling opduiken bij een integraal, vergelijking of hoekberekening. Kun je desondanks leerlingen de formule voor sin($2x$) laten ontdekken, zodat ze deze beter onthouden en bovendien iets van wiskundig onderzoek ervaren? We doen een poging die geïnspireerd is door origami als basis voor wiskundige exploraties.[1]

De start: geldt $f(2x) = 2 \cdot f(x)$?

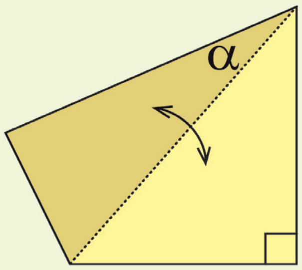
Het lesplan is in eerste instantie uitgewerkt voor een les van circa 60 minuten in 5 vwo wiskunde B en vervolgens geoptimaliseerd tijdens drie lessen op het Utrechts Stedelijk Gymnasium.[2] Het volgende verslag maakt gebruik van ervaringen uit de drie lessen, maar volgt de chronologie van de laatste les. Een van de aanpassingen was bijvoorbeeld de bespreking van de vraag: geldt $f(2x) = 2 \cdot f(x)$? Oorspronkelijk kwam deze halverwege de les aan de orde, maar nu is deze gebruikt als startvraag voor de les.

Aan het begin van de les delen we gekleurde papieren rechthoekige (niet gelijkbenige) driehoeken uit, voor elk persoon binnen een groepje een andere driehoek. De helft van de leerlingen zit thuis in verband met corona. In het lokaal is voldoende ruimte om de leerlingen in groepjes van drie te laten werken en zijn naast de docent nog twee andere docenten en een vertegenwoordiger van de Universiteit Utrecht voor observatie aanwezig. Voordat leerlingen met het opgavenblad aan de slag gaan, wordt de opdracht ingeleid. Eerst wordt klassikaal de vraag gesteld wat de gelijkheid $f(2x)=2 \cdot f(x)$ betekent en of dat altijd waar is? Na uitproberen van een eerder lesplan hebben we ervoor gekozen om met deze vraag direct aan het begin van de les context voor het probleem te bieden. Leerlingen mogen enkele functies, zoals lineaire, kwadratische en logaritmische, noemen en controleren of het klopt. En hoe zit het met sin(x)? Geldt dan dat sin($2x$) $=$ 2sin(x)? Leerlingen krijgen enkele minuten om hierover in hun groepje na te denken. Een aantal groepjes hebben snel een tegenvoorbeeld (bijv. $x = 90^o$). Een leerling: ‘Gevoelsmatig zeg ik nee.’ Een groepsgenoot: ‘Waarschijnlijk is het antwoord ja, anders vragen ze het niet.’ Een groepje vermoedt sin($2x$) $=$ sin^2(x). De plenaire conclusie is: ‘Nee, dat is niet altijd zo’. Dan volgt de centrale vraag voor de les: maar hoe druk je sin($2x$) dan wel uit in sin(x)?
Vervolgens wordt nog even heel kort SOSCASTOA opgefrist in een driehoekje met hoek α, schuine zijde 1 en rechthoekszijden cos(α) en sin(α). Dan worden de werkbladen uitgedeeld en zonder verdere introductie wordt hen gevraagd om de eerste opgaven te maken.

1 Je hebt van gekleurd papier een rechthoekige driehoek voor je liggen. Noem de kleinste hoek α. Meet hoe groot hoek α is.
2 Vouw de kleine hoek α naar de andere hoek zoals hieronder is aangegeven met de stippellijn.



3 Vouw vervolgens langs de zijde die je net verkregen hebt zoals hieronder is aangegeven met de stippellijn. Vouw dan alles weer terug.

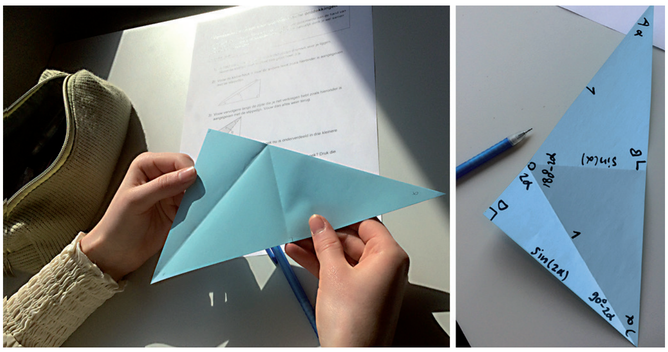


Als het goed is zie je dat je driehoek nu is onderverdeeld in drie kleinere driehoeken.

4 Welke hoeken kun je allemaal nog meer vinden in je driehoek? Druk die hoeken uit in α.
5 Waar zie je het dubbele van jouw hoek α, dus hoek 2α?

Aan het vouwen

Met de aanwijzing om de scherpe hoek α te noemen, gaan ze op zoek naar wat ze van de overige (vouw)hoeken weten en of ze in de driehoek met alle vouwlijnen ook 2α kunnen vinden. Vouwinstructies blijken niet altijd triviaal, maar met elkaar komen ze er goed uit. Elke nieuwe hoek die wordt gevonden voelt als een overwinning. Snel zien ze, door het vouwen, een andere hoek die ook α graden is en vinden ze een hoek met $180 - 2\alpha$ graden. Af en toe denken enkele leerlingen dat ze niet verder kunnen. De docent loopt rond en laat echter duidelijk merken dat ze best nog even zelf kunnen puzzelen. Uiteindelijk lukt het vrijwel ieder groepje om 2α te vinden, zie figuur 1. Is het vouwen hier essentieel? We zijn er wel van overtuigd dat het vouwen hen helpt om rechte hoeken, gelijke hoeken en gelijke zijdes te vinden.

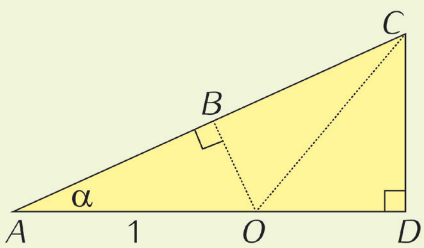


figuur 1 De eerste vouwen

Inmiddels is zo'n twintig minuten verstreken en neemt de docent het woord. Ze tekent de driehoek met de vouwlijnen op het bord en vraagt wat we nu weten over de driehoek. Dit komt precies op het goede moment. Iedereen is voldoende op gang en kan de redeneringen volgen. Hier blijkt dat verschillende groepjes verschillende strategieën hebben gevolgd en die graag delen met de rest van de klas. Ze zijn even eigenaar van hun onderzoek.
We keren terug naar de centrale vraag: Wat weten we over $\sin(2\alpha)$? Dat is de eindopdracht waarvoor de leerlingen twintig minuten krijgen. Een aantal groepjes denken snel klaar te zijn met $\sin(2\alpha) = CD$ (zie het werkblad). De docent: 'Nee, zo snel ben ik niet tevreden. Een formule met gebruik van α en sin en cos. Dat is de uitdaging voor jullie.'

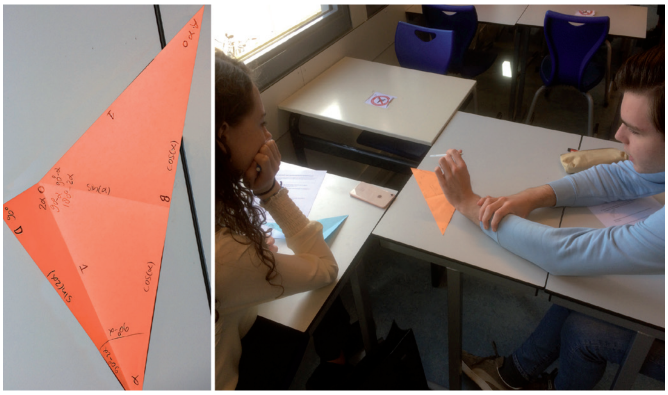
Eindopdracht

Schrijf op jouw zelf gevouwen driehoek dezelfde letters zoals in het voorbeeld hieronder en stel de lengte van AO gelijk aan 1.



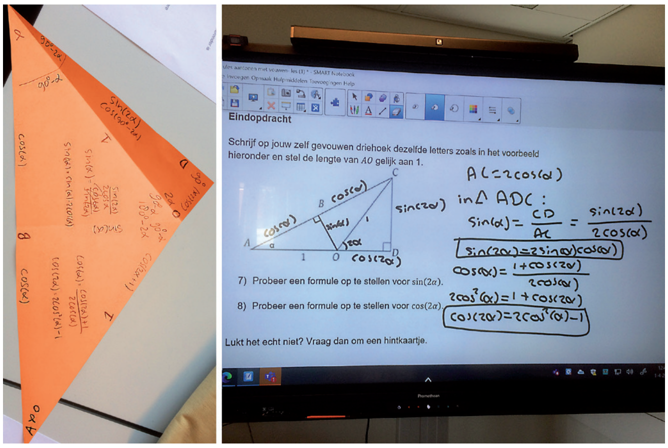
6 Probeer een formule op te stellen voor $\sin(2\alpha)$.
7 Probeer een formule op te stellen voor $\cos(2\alpha)$.

Leerlingen durven na onderling overleg lijnstukken de lengte $\sin(\alpha)$ te geven. In hun zoektocht komen ze steeds dichterbij. Nu is het ook weer goed dat alle individuen eigen driehoeken hebben om te voorkomen dat ze te snel naar concrete getallen/situaties kijken. De groepjes zijn weer allemaal aan het puzzelen. Eén groepje dreigt af te haken. In dat groepje zit een luidruchtige leerling die liever Donald Duck tekent dan een driehoek. Met enkele aansporingen gaan zij weer aan de slag. Het tweetal Isabel en Jasper is druk aan het puzzelen, zie figuur 2. Tijdens dit puzzelen lijkt het weer dat het vouwen helpt bij het vinden van gelijke lengtes van zijden, het benoemen van hoeken en het ontdekken van gelijkvormige objecten. >



figuur 2 Tekenen wat je weet

Afwisselend neemt Isabel of Jasper het initiatief. Na tien minuten lijkt het alsof Jasper een formule voor sin(2α) gevonden heeft. Als hij die probeert uit te leggen aan Isabel gaat hij toch weer twijfelen. Maar dan lukt het Isabel ook om de redenering te produceren en zijn ze zeker en euforisch over hun resultaat. Ze gaan ook nog aan de slag met cos(2α) en binnen vijf minuten hebben ze die ook gevonden. Ze lijken echt erg tevreden met deze succeservaring. Helemaal als blijkt dat ze de 'goede' formule gevonden hebben.
Als de twintig minuten voorbij zijn, neemt de docent weer centraal het woord. Een groepje mag hun afleiding presenteren met de thuiszitters online erbij. Iedereen kan het volgen en de afleiding relateren aan de eigen strategie.



figuur 3 De formule ontvouwen

Voor veel leerlingen is de overgang van $\sin(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2\cos(x)}$ naar de formule sin(2*x*) niet vanzelfsprekend, maar we hebben het gevoel dat het met deze les gelukt is om leerlingen te betrekken bij de ontdekking van de hoekverdubbelingsformule. Ze hebben echt vrijwel allemaal actief meegewerkt! En ze hebben weer eens ervaren dat de sinus een verhouding betreft en niet alleen een lengte in een eenheidscirkel. Heeft deze les effect op hun zelfvertrouwen en creativiteit bij wiskundig onderzoek en op het onthouden van de formules? De tijd zal het leren.
Achteraf vroegen we leerlingen naar hun mening. Zij vonden het een leuke les, alleen duurde het wel lang voor zo'n klein resultaat. Kennelijk hebben we nog niet alle leerlingen overtuigd dat de reis zeker zo belangrijk is als de bestemming...

Het werkblad is te downloaden van de *Euclides*-site
973werkbladsinus(2x)

Noten

[1] Op basis van een werkgroep door Jacoliene van Wijk en Marloes van Hoeve. Zie ook: Hull, T. (2012). *Project Origami: activities for exploring mathematics*. CRC Press.

[2] In een Lesson Study is dit werkblad geoptimaliseerd. Zie ook: het artikel van Jacoliene van Wijk en het artikel van Rogier Bos in dit nummer.

Over de auteurs

Michiel Doorman en Joke Daemen werken bij het Freudenthal Instituut en Carolien Boss-Reus, Floortje Holten en Fransje Praagman zijn werkzaam aan het Utrechts Stedelijk Gymnasium. De auteurs werken samen in het Erasmus+ project TIME (*https://time-project.eu/en*). In dat project ontwikkelen ze met behulp van Lesson Studies wiskundelessen met een actieve rol voor leerlingen.

Melanie Steentjes

Stephanie

Met haar Iron Maiden shirt en blauwe haar viel ze op in een Gooische kaderklas. Al was opvallen wel het laatste wat ze wilde. In ieder geval hoorde ik haar nooit. Ze stelde nooit een vraag. En ik kreeg al snel door dat ze ook niet veel deed in mijn les, behalve Japanse stripfiguren tekenen. Haar cijfers leden eronder: ze haalde de ene onvoldoende na de andere. Op een proefwerk schreef ze: 'Wiskunde haat mij'. Het lukte me niet om haar aan het werk te krijgen en ook steunles hielp niet. Ze kwam wel, maar ik had mijn handen vol aan de anderen, die de ene vraag na de andere vraag op me afvuurden. Stephanie zat er stil bij en ging weer weg zonder er heel veel van opgestoken te hebben.

> "Ik moet het eerlijk toegeven: wiskunde is best leuk... als je het eenmaal snapt."

Het zat me niet lekker, maar het lukte me niet om tot haar door te dringen. Aan het einde van het jaar kreeg ze een persoonlijke begeleider op school, omdat er wel meer dingen speelden bij haar. Deze begeleider nam contact met me op: of ik Stephanie wat extra steunles kon geven, zodat ze wellicht met een beter cijfer voor wiskunde naar de vierde klas overging? De eerste lockdown zat er inmiddels op. De leerlingen kwamen in halve groepen naar school en ik had de tijd om één op één met Stephanie te gaan zitten. Met mij alleen aan het werk leek Stephanie wat te ontdooien. We kregen kleine gesprekjes. Ze vond het te gek dat ik Nirvana ooit live had zien spelen als obscuur bandje, kort voor hun doorbraak. Dat ik het destijds maar een bak herrie vond heb ik voor me gehouden. Procentsommen transformeerde ik naar voorbeelden die haar aanspraken: hoeveel procent van het publiek op het festival gaat naar het optreden van Metallica kijken? Ze begon er plezier in te krijgen. Al kon ik haar altijd op de kast krijgen met de opmerking dat ze wiskunde leuk begon te vinden.

Ze ging over met een iets kleinere onvoldoende voor wiskunde. Maar dat het hard werken werd in de vierde was duidelijk. Ook in de vierde bleef ik haar één op één steunles geven. Ik begon ernaar uit te kijken, vond het echt leuk om met haar te zitten en me in haar belevingswereld in te leven.

Na de laatste toets voor het Centraal Examen moesten de leerlingen van mij een uitlegfilmpje maken van een opgave die ze niet begrepen. Ik had de kale antwoorden gegeven, maar ze moesten zelf de uitwerking bedenken en het helder aan mij uitleggen. Van het filmpje van Stephanie kreeg ik kippenvel. Ze moest uitleggen hoe ze van Deense kronen naar euro's moest rekenen en ze had zelf ontdekt dat het met de verhoudingstabel kon. Het Eureka-moment van Archimedes was er niets bij, ze was er euforisch over: 'Wat een handig iets dit. Ik ben zo blij!!! Ik kan het niet geloven!!!' En ze eindigde met: 'Ik moet het eerlijk toegeven: wiskunde is best leuk... als je het eenmaal snapt.'

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en toetsdeskundige bij Cito in Arnhem.
E-mail: *m.steentjes@hilfertsheem.nl.*

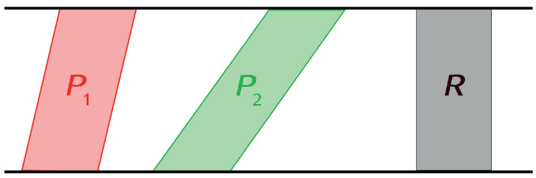
Martin Kindt

Knippen en passen

Kan bij twee veelhoeken met dezelfde oppervlakte de een worden verknipt in een aantal veelhoekige partjes die, als bij een legpuzzel, precies passen in de andere veelhoek? En zo ja, hoe dan?

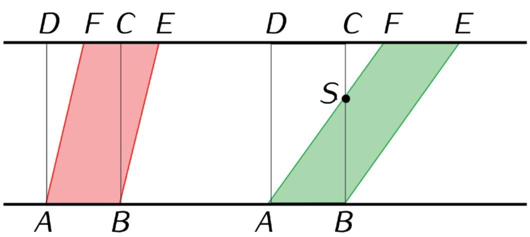
Tussen de rails

In figuur 1 zijn twee (scheve) parallellogrammen en een rechthoek ingeklemd tussen twee evenwijdige lijnen. De drie hebben een even grote basis.



figuur 1

Elke lijn tussen en parallel met de 'rails' snijdt de drie vierhoeken volgens gelijke lijnstukken en dat is een plausibele verklaring voor de bewering dat de drie dezelfde oppervlakte hebben. Wie deze redenering de status van bewijs toekent, bevindt zich in gezelschap van Cavalieri (1598 - 1647), een van de wegbereiders van de infinitesimaalrekening. Voor een elementair aanschouwelijk bewijs van opp. P_1 = opp. P_2 = opp. R, zie figuur 2.

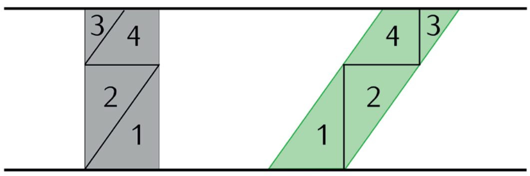


figuur 2

In beide situaties zijn *ADF* en *BCE* elkaars beeld bij een translatie en dus congruent. In de situatie links volgt daaruit meteen dat *ABCD* en *ABEF* gelijke oppervlakte hebben, een zaak van '(weg)knippen en (aan)passen'. In de situatie rechts is het iets lastiger te zien. Als je van de driehoeken *ADF* en *BCE* de overlap (dus *CSF*) wegknipt, houd je twee trapezia over met gelijke oppervlakte. Vul die aan met driehoek *ABS* en klaar is het bewijs.

Deze twee bewijzen zijn (min of meer) terug te vinden in het fraaie boek van de bekende wiskundige Clairaut (1713 - 1765) met de titel *Éléments de Géométrie*. Min of meer omdat Clairaut twee keer twee scheve parallellogrammen tekent en wel net als in figuur 2, het ene paar met een trapezium, het andere met een driehoek als overlap.

In het eerste geval is sprake van een 'knip-en-pas-bewijs': P_1 is met één kniplijn in twee stukken te verdelen die in R passen. Zo'n knip-en-pas-proces heet *dissectie*. In de tweede situatie lukt een dissectie ook, maar zijn er *drie* kniplijnen nodig, zie figuur 3.



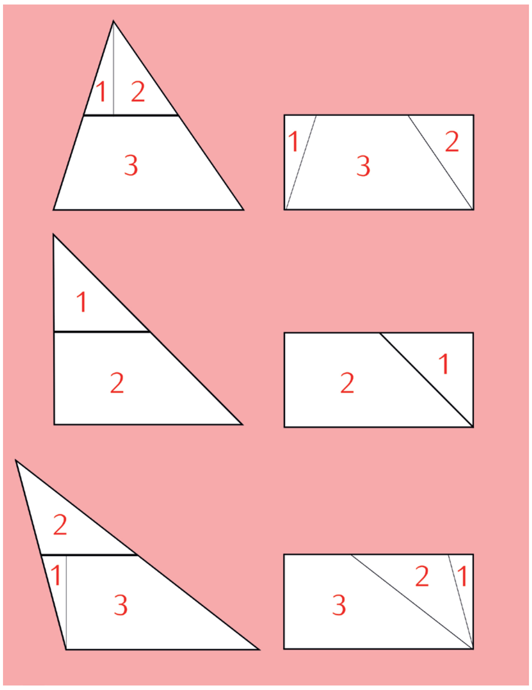
figuur 3

Zo'n plaatje trof ik aan in een oud meetkundeschoolboek.[1] En zou dit ook vandaag de dag niet goed passen in een hoofdstuk over oppervlakten in - zeg - de brugklas? Als het parallellogram nog een stuk schever is heb je meer kniplijnen nodig. Dit kan dan uitnodigen voor een *onderzoek* met de klas!

Driehoek en rechthoek

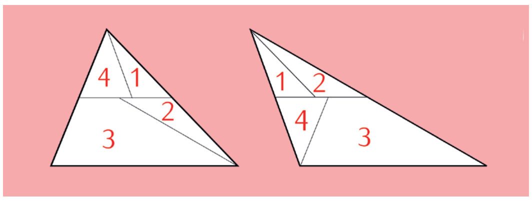
Dat de oppervlakte van een driehoek even groot is als de oppervlakte van een rechthoek met dezelfde basis maar met een half zo grote hoogte kan worden gedemonstreerd via dissectie. Daarbij kan worden volstaan met ten hoogste twee kniplijnen, zie figuur 4, met drie te onderscheiden situaties.

Commentaar: vanwege die halve hoogte ligt het voor de hand om gebruik te maken van de *middenparallel* – kennen we die nog wel op school? – en dat is hier gebeurd.



figuur 4

Bij een rechthoekige driehoek gaat het met slechts één knip, bij een scherp- of stomphoekige driehoek zijn er twee nodig. In de klas zou ik zo'n dissectie laten uitvoeren met schaar en karton: *handelen om het inzicht te ondersteunen!* Bij twee driehoeken met gelijke basis en hoogte zijn drie kniplijnen voldoende. Ook hier is er een rol weggelegd voor de middenparallel. Figuur 5 toont dit voor een scherphoekig-stomphoekig paar.



figuur 5

De lezer kan nagaan dat zoiets ook bij andersoortige paren driehoeken lukt.

Rechthoek en vierkant

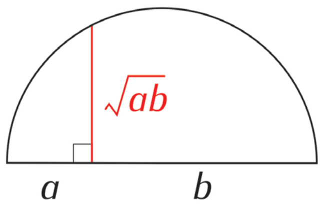
Laat R een rechthoek zijn met ongelijke zijden a en b. Er bestaat een vierkant V dat dezelfde oppervlakte heeft als R, namelijk dat waarvan de zijde gelijk is aan $\sqrt{ab}$.

Dit getal heet het *meetkundig gemiddelde* (of de *middelevenredige*) van a en b, een nuttig en oeroud begrip, dat wat mij betreft meer aandacht in onze schoolboeken moet krijgen!

De constructie van de middelevenredige van twee lijnstukken met lengte a en b is wat je noemt klassiek, zie figuur 6.

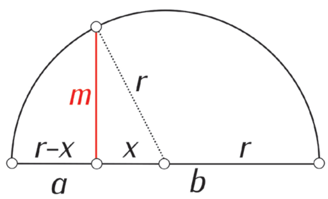
(1) Construeer de halve cirkel waarvan de middellijn de lengte $a + b$ heeft.

(2) Richt in het punt dat de middellijn in stukken a en b verdeelt, het loodlijnstuk op dat de middellijn met de cirkelboog verbindt.



figuur 6

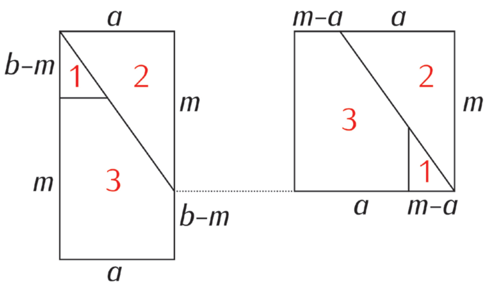
Dit loodlijnstuk heeft dan de lengte $\sqrt{ab}$, wat via de stelling van Pythagoras kan worden bewezen, zie figuur 7.



$$a \cdot b = (r-x)(r+x) = r^2 - x^2 = m^2$$

figuur 7

Zo kan dus bij een gegeven rechthoek met passer en liniaal een vierkant worden geconstrueerd dat dezelfde oppervlakte heeft als die rechthoek. De vraag is nu of en hoe die rechthoek verknipt kan worden zodat de stukjes precies het vierkant opvullen. Figuur 8 toont een oplossing.

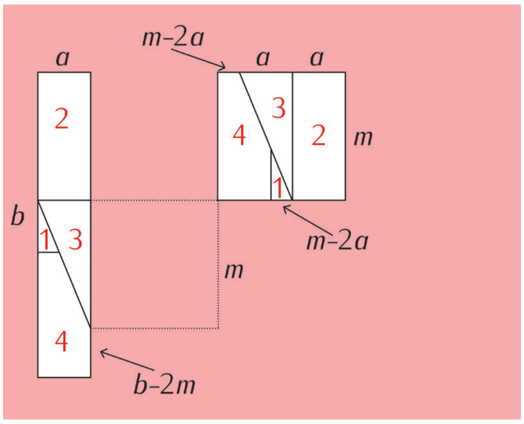


figuur 8

De driehoeken met nummer 2 zijn congruent. Dit geldt ook voor de beide rechthoekige driehoekjes 1 die gelijkvormig zijn met driehoek 2 en die een zijde $m - a$ hebben.
Uit $a : m = m : b$ volgt $a : m = (m - a) : (b - m)$, dus de tweede rechthoekszijde van de driehoekjes 1 is gelijk aan $b - m$. Het is dan duidelijk dat de vijfhoeken met nummer 3 ook congruent zijn.
In de getekende situatie kan dus met twee knippen worden volstaan. Dit komt omdat het verticale lijnstukje $b - m$ binnen het vierkant past: $b - m < m$ ofwel $b < 2m$. Vervang ik m door $\sqrt{ab}$, dan leidt dit tot $b < 4a$.

Als de lengte b van een rechthoek groter is dan de breedte a, maar kleiner is dan 4a, dan kan worden volstaan met twee knippen (drie stukken) om het vierkant met dezelfde oppervlakte als de rechthoek op te vullen.

Merk op: als $b = 4a$, kan de dissectie met één knip worden uitgevoerd. Stel nu $4a < b < 9a$, ofwel $2m < b < 3m$.
In dit geval lukt de dissectie met drie kniplijnen (vier stukken), zie figuur 9.

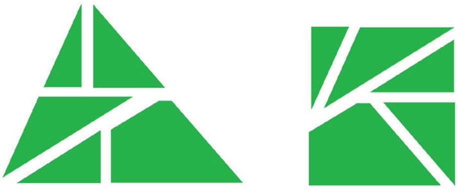


figuur 9

Bedenk hierbij dat $a : m = (m - 2a) : (b - 2m)$.
Als $b = 9a$, dan lukt de dissectie naar het vierkant met twee knippen (drie stukken). Als $9a < b < 16a$, kan vanwege $a : m = (m - 3a) : (b - 3m)$ de dissectie worden uitgevoerd met vier knippen (vijf stukken). Enzovoort, hoe het verder gaat, laat zich raden.

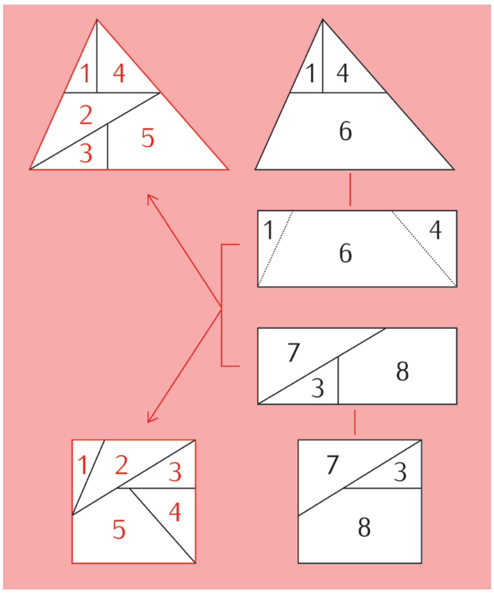
Kwadratuur van de driehoek

Hoe kan een willekeurige driehoek worden verknipt in stukken die precies een vierkant vormen? Zo'n dissectie-kwadratuur kan worden bewerkstelligd door combinatie van twee dissecties: van driehoek naar rechthoek en van rechthoek naar vierkant. Figuur 10 laat het eindresultaat zien.



figuur 10

Figuur 11 toont hoe deze dissectie tot stand is gekomen. De rechthoek daarbij vervult de rol van intermediair. Twee dissecties van de rechthoek zijn als het ware op elkaar gelegd (*superpositie*). Concreet: teken beide dissecties van de rechthoek op transparant papier, leg die op elkaar en de partjes waarin driehoek en vierkant verdeeld zijn, worden zichtbaar. In de getekende situatie lukt het met vier knippen (vijf stukken) maar het hangt van de verhouding tussen hoogte en basis van de driehoek af hoeveel knippen er nodig zijn.



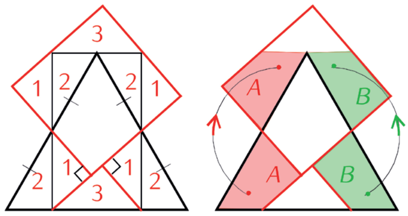
figuur 11

Dissectie-congruent

Laat V_1 en V_2 veelhoekige figuren zijn. V_1 en V_2 noem ik *dissectie-congruent* als de een kan worden verknipt in stukken die samen de andere figuur kunnen opvullen.
Ik noteer dit zó: V_1 ✂ V_2.
Na het voorbeeld van de driehoek en het vierkant zal het duidelijk zijn dat deze relatie tussen veelhoeken *transitief* is, dat wil zeggen:
Als V_1 ✂ V_2 en V_2 ✂ V_3, dan V_1 ✂ V_3 .
In het begin van de 19^de^ eeuw hielden enige meetkundigen zich bezig met de vraag of elk paar veelhoeken met gelijke oppervlakte, 'dissectie-congruent' is. Wallace, Bolyai [2] en Gerwien vonden onafhankelijk van elkaar dat het antwoord 'ja' is.
Het basisidee van een bewijs hiervan is: *verknip twee veelhoeken met gelijke oppervlakte elk in stukjes die een vierkant vormen*. Omdat dissectie-congruent een transitieve relatie is, ben je dan klaar. En dat de dissectie van een willekeurige n-hoek V_n naar een vierkant S met dezelfde oppervlakte mogelijk is, volgt aldus:
(1) V_n is te verdelen in $n-2$ driehoeken.
(2) Elk van die driehoeken is dan dissectie-congruent met een rechthoek met een basis gelijk aan die van de driehoek (zie figuur 4).
(3) Elk van die $n-2$ rechthoeken is dissectie-congruent met een rechthoek waarvan één van de zijden gelijk is aan de zijde van S.
(4) Die nieuwe rechthoeken vullen juist S op.
Bewering (3) vraagt om nadere verklaring. Bij elke rechthoek bestaat er een tweede die dezelfde oppervlakte heeft als de eerste en waarvan een van de zijden een voorgeschreven lengte bezit. De dissectie van de ene rechthoek naar de andere kan worden uitgevoerd op een manier analoog aan de dissectie van rechthoek naar vierkant zoals in de figuren 8 en 9.

Optimale dissectie

Een uitdagend probleem bij dissectie van veelhoek naar vierkant is hoe die kan worden uitgevoerd met een zo klein mogelijk aantal knippen. Neem bijvoorbeeld de dissectie van gelijkzijdige driehoek naar vierkant. Die lukt zeker met vier knippen (zie figuur 11, de daar getekende driehoek kan worden vervangen door een gelijkzijdige). De fameuze puzzelaar Henry Dudeney liet in 1907 zien dat het ook met drie knippen lukt, kijk en zie!

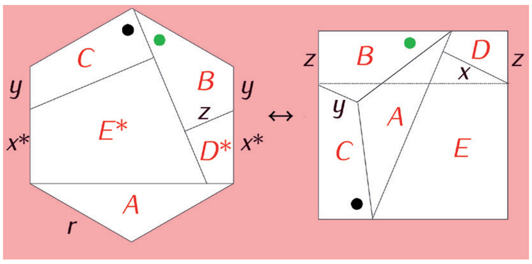


NB. *De vierhoeken A en B zijn niet congruent!*

figuur 12

Als voorbeeld van een minimale dissectie wil ik hier tot slot die van regelmatige zeshoek naar vierkant bekijken. Het lukt om via vijf kniplijnen de dissectie uit te voeren met zes stukjes (splits de zeshoek in twee congruente trapezia, voeg die samen tot een parallellogram, verknip dat tot een rechthoek, ...).

Ik vond er in een boek ook een met vijf puzzelstukjes, zonder verdere uitleg, zie figuur 13. Hoe controleer je of dit goed is? Mijn eerste idee was rekenen, maar daar kwam ik gauw op terug. Goed zoeken naar gelijke hoeken en lengten, leek me bij nader inzien beter.
Driehoek A (120º, 30º, 30º) uit de zeshoek is zo in het vierkant geplaatst dat de lange zijde door het middelpunt van dat vierkant gaat. Van de middelloodlijn van die lange zijde is in het vierkant een stukje getekend: de grens (lengte y) tussen B en C. De grens (lengte x) tussen D en E, in het vierkant, is hiermee evenwijdig en de horizontale hulplijn geeft aan waar die rechts in het vierkant begint. Dat vierhoek B uit het vierkant na rotatie kan worden ingepast in de zeshoek, is duidelijk.



figuur 13

Let nu op de hoeken ● en ● in het vierkant. De som van die hoeken is 120º en daaruit volgt dat C uit het vierkant passend kan worden verplaatst naar de zeshoek. Er moet nu nog worden aangetoond dat D en D^*, evenals E en E^* congruent zijn.

>

Een beetje puzzelen leert dat D en D^* gelijke hoeken (in dezelfde volgorde) hebben, namelijk
90°, 150° – ● , 90°, 30° + ●.

Ook hebben ze beide een zijde met lengte z. Als ik kan aantonen dat $x = x^*$, dan weet ik zeker dat D en D^* congruent zijn.
Daartoe kijk ik naar de oppervlakten van zeshoek en vierkant. Stel de zeshoekszijde $= r$.

De lange zijde van driehoek A is dan $r\sqrt{3}$ en de oppervlakte van de zeshoek is gelijk aan $(x^* + y + \frac{1}{2}r)\,r\sqrt{3}$.
De oppervlakte van het vierkant is gelijk aan die van het parallellogram dat ontstaat als het vierkant wordt doorgeknipt langs de basis van A en de rechterhelft $D \cup E$ wordt vastgeplakt aan de linkerhelft $A \cup B \cup C$ en is dus $(x + y + \frac{1}{2}r)\,r\sqrt{3}$.

Omdat vierkant en zeshoek gelijke oppervlakte hebben, volgt $x^* = x$. Dat E en E^* (want zelfde oppervlakte, even grote hoeken en $x = x^*$) congruent zijn, staat nu ook als een paal boven water.

Nawoord

Max Dehn (1878 – 1952) – hiertoe uitgedaagd door Hilbert in diens befaamde lezing bij de eeuwwisseling – bewees nog in hetzelfde jaar, dat de dissectiestelling van veelhoeken geen analogon in de derde dimensie heeft. Zo kan een tetraëder niet worden verzaagd in stukken die in een kubus met dezelfde inhoud passen. De uitleg daarvan is van een ander (zwaarder) kaliber dan dit artikel.

Noten

[1] Uit een van de didactisch mooie meetkundemethoden van Willem Reindersma (1877 – 1946)

[2] Bedoeld is niet Janos Bolyai, medeontdekker van de hyperbolische meetkunde, maar zijn vader Farkas.

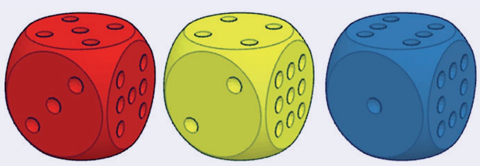
Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

WiTje: Niet-transitieve dobbelstenen

Wiskunde in teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op A-lympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).



figuur 1 Een setje niet-transitieve dobbelstenen

De dobbelstenen in figuur 1 hebben niet de gebruikelijke aantallen ogen: rood heeft 3, 3, 5, 5, 7, 7; geel heeft 2, 2, 4, 4, 9, 9 en blauw heeft 1, 1, 6, 6, 8, 8. Ze zijn bedoeld voor de volgende truc: vraag een onwetende passant (een leerling?) voor een serie potjes 'wie gooit het hoogst?'. De passant mag als eerste een dobbelsteen kiezen en daarna kies jij. Het addertje onder het gras is dat als eerste kiezen helemaal niet gunstig is: bij iedere dobbelsteen is er één te vinden die beter is. Probeer zelf van iedere kleur uit te rekenen welke beter is, met bijbehorende winstkans. Experimenteer en speel het spel digitaal via *http://bit.ly/2fuJMwM.*

Dit is tegen-intuïtief, omdat je verwacht dat als kleur 1 beter is dan kleur 2, en kleur 2 beter dan kleur 3, dat dan ook kleur 1 beter is dan kleur 3; maar die vorm van transitiviteit geldt dus niet. In lijn met de Wiskunde B-dagopdracht 2016 is de uitdaging van dit WiTje: vind een niet-transitief setje van vier dobbelstenen; dus zo dat bij iedere dobbelsteen er ten minste één dobbelsteen beter is.

Bron: Wiskunde B-dag 2016, zie *http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28769/*

Hanneke van Mier

Genderverschillen in de relatie tussen reken/wiskundeangst en reken/wiskundeprestaties

Rekenangst kan ertoe leiden dat leerlingen minder goed presteren op reken- en wiskundetaken. Een negatieve relatie tussen rekenangst en rekenprestatie wordt voornamelijk bij meisjes en vrouwen gevonden. Invloed van werkgeheugen, genderstereotypering, maar ook rekenangst van docenten zijn mogelijke oorzaken voor deze genderverschillen. Welke interventies kunnen rekenangst verminderen? [1]

Inleiding

Bijna alle leerlingen voelen wel een bepaalde spanning of stress als ze een taak moeten uitvoeren waarvan veel afhangt (b.v. een toets of examen) en/of als het een taak is waarin ze minder goed zijn of denken minder goed te zijn. In bepaalde gevallen kan die spanning zelfs leiden tot angst. Een voorbeeld hiervan is rekenangst. Rekenangst wordt omschreven als een negatieve emotionele reactie in situaties waarin met getallen moet worden gewerkt of wiskundige problemen moeten worden opgelost. Rekenangst heeft vaak als gevolg dat iemand minder goed presteert op het gebied van rekenen en/of wiskunde. Het speelt niet alleen een rol in schoolsituaties maar ook in het dagelijks leven bij zowel (jonge) kinderen als volwassenen. Onderzoek heeft aangetoond dat zo'n 20% van de bevolking last heeft van een min of meer grote mate van rekenangst. Dit wil niet zeggen dat een hoge rekenangst altijd leidt tot lage rekenprestaties of andersom. In een recent onderzoek [1] onder 1800 leerlingen in het primair en voortgezet onderwijs werd gevonden dat ruim 75% van de leerlingen met hoge rekenangst gemiddelde tot hoge reken/wiskundescores had, terwijl maar zo'n 20% van de leerlingen met lage scores een hoge rekenangst had. Ook is aangetoond dat rekenangst nauwelijks correleert met IQ of verbale vaardigheden. Niettemin kan rekenangst ertoe leiden dat iemand onder zijn of haar niveau presteert in reken/wiskundetaken.

Effect van rekenangst

In bijna alle onderzoeken wordt een negatieve relatie gevonden tussen rekenangst en reken/wiskundeprestaties: hoe meer rekenangst hoe slechter de prestatie. Onderzoek heeft aangetoond dat dit kan komen doordat iemand die (steeds) slecht presteert op een reken- of wiskundetaak (meer) angst ontwikkelt voor volgende taken of doordat iemand met rekenangst het werkgeheugen belast met zorgen en negatieve gedachten. In het laatste geval is er in het werkgeheugen, dat een belangrijke rol speelt bij het oplossen van reken/wiskundetaken, minder ruimte om aan de oplossing te werken van de taak. Dit beïnvloedt in de meeste gevallen de prestatie negatief. Wellicht spelen beide processen een rol bij de ontwikkeling van rekenangst. Rekenangst kan een effect hebben op rekenprestaties, maar tegenvallende rekenprestaties kunnen ook rekenangst beïnvloeden. Rekenangst kan ertoe leiden dat een leerling minder goed presteert op reken/wiskundetaken en daardoor reken- en wiskundesituaties gaat vermijden net als studies waarbij rekenen en wiskunde van belang zijn. Dit laatste kan als gevolg hebben dat iemand niet in aanmerking komt voor exacte en technische carrières. Saillant gegeven is dat vrouwen juist ondervertegenwoordigd zijn in deze vakgebieden. Campagnes voor meisjes zoals 'Kies Exact' hebben (nog) niet het gewenste effect opgeleverd. Een factor die daarbij een rol kan spelen is het gegeven dat rekenangst bij meisjes en vrouwen een groter effect heeft dan bij jongens en mannen.

Genderverschillen bij rekenangst

Recent onderzoek laat zien dat er in landen waarbij meisjes en jongens hetzelfde onderwijs krijgen, er weinig of geen genderverschillen zijn in reken/wiskundeprestaties. Toch onderschatten meisjes en vrouwen hun rekenprestaties en rapporteren zij meer rekenangst. Op grond van onderzoek in het basis tot en met het hoger en wetenschappelijk onderwijs, is berekend dat vrouwen ongeveer 0,3 SD hoger scoren op rekenangstschalen dan mannen, met een piek tijdens de middelbare schooljaren. Longitudinaal onderzoek bij jongens en meisjes van groep 7 van de basisschool tot en met de vierde klas van de middelbare school heeft laten zien dat het niveau van rekenangst gedurende deze periode vrij stabiel bleef voor meisjes ten opzichte van jongens, ongeacht hun prestaties. Als meisjes eenmaal rekenangst hadden ontwikkeld, bleven ze die houden, ook al waren hun prestaties goed. >

Onderzoek bij leerlingen van de basisschool laat meestal geen of weinig verschil zien in rekenangst tussen jongens en meisjes, hoewel zelfs al op jonge leeftijd jongens denken beter te zijn in rekenen dan meisjes. Over het algemeen wordt echter alleen bij meisjes een significante negatieve correlatie tussen rekenangst en rekenprestatie gevonden. Longitudinaal onderzoek heeft laten zien dat alleen voor meisjes rekenangst in groep 3 leidde tot een negatieve prognose voor rekenvaardigheden in groep 6. Ook in ons eigen onderzoek vonden we alleen bij meisjes dat een hoger niveau van rekenangst een negatieve voorspeller was van rekenprestaties.[2] Onderzoekers hebben ook gevonden dat zelfs competente en hoog functionerende vrouwen in banen waarin ze geregeld rekenen en wiskunde gebruiken vaak onderpresteren vanwege rekenangst.

Werkgeheugen

Zoals al eerder is opgemerkt, speelt het werkgeheugen een grote rol bij het oplossen van reken/wiskunde-problemen. Het werkgeheugen is een kortetermijngeheugen-systeem waarin informatie tijdelijk wordt opgeslagen, zodat het bewerkt kan worden. Het werkgeheugen kan maar een bepaalde hoeveel informatie bevatten en verwerken. Als een deel van het werkgeheugen belast is met negatieve gedachten en zorgen is het moeilijk om je op de taak te focussen. Ook blijft er minder geheugen over om reken/wiskundetaken op te lossen. Er wordt dan vaak gekozen voor een eenvoudigere of minder efficiënte reken-methode, met als gevolg dat de prestatie vaak minder is en/of dat het meer tijd kost om de taak op te lossen. Dit heeft dan weer nadelige gevolgen in situaties waarin je onder tijdsdruk moet presteren (bv. tijdens toetsen of examens). Onderzoek heeft aangetoond dat als rekentaken onder tijdsdruk moeten worden uitgevoerd de reken-prestatie voornamelijk minder is bij meisjes met rekenangst. Het kan ook zijn dat rekenangst meer negatieve gedachten en zorgen veroorzaakt bij meisjes en vrouwen dan bij jongens en mannen, of dat de laatsten beter negatieve gevoelens kunnen onderdrukken en zo meer werkgeheugen beschikbaar hebben. Een andere oorzaak die genoemd wordt, is dat mannen meer gebruik maken van het visueel-spatieel werkgeheugen en vrouwen van het verbaal werkgeheugen en dat rekenangst met name het verbaal werkgeheugen beïnvloedt.

Genderstereotypering

Een vaak genoemde oorzaak van een hogere rekenangst bij vrouwen is blootstelling aan genderstereotypen. Genderstereotypen zijn denkbeelden over bepaalde gedragingen en kenmerken die bij de verschillende genders horen. Deze kunnen angst oproepen in situaties waarin iemand bang is om een negatieve stereotypering te bevestigen over een groep waartoe hij/zij behoort. Over het algemeen worden rekenen en wiskunde gezien als het domein van mannen met als stereotype dat mannen er beter in zijn dan vrouwen. Gevonden is dat jonge meisjes al gevoelig zijn voor het impliciete genderstereotype dat jongens beter zijn in rekenen, nog voordat dit stereotype bevestigd is en ze zich er expliciet bewust van zijn.
Al op de basisschool associëren kinderen rekenen meer met jongens dan met meisjes. Dit genderstereotype kan nadelige effecten hebben op het rekenzelfbeeld van meisjes en vrouwen en zo rekenangst in de hand werken. Als vrouwen denken dat hun rekenprestaties het stereo-type bevestigen, kan dit negatieve gedachten en emoties oproepen en het werkgeheugen nadelig beïnvloeden en leiden tot slechtere prestaties wat weer (meer) rekenangst kan veroorzaken. Een ander effect kan zijn dat vrouwen gaan voldoen aan de verwachting van dit stereotype. Zo werd gevonden dat vrouwen minder goed presteerden op een rekentaak als de onderzoekers hen vertelden dat ze wilden onderzoeken waarom vrouwen slechter presteren op dergelijke taken dan mannen (genderstereotypering). Er werd geen verschil gevonden tussen mannen en vrouwen als er uitleg werd gegeven over genderstereotypering in relatie tot rekenangst. Een opmerkelijk onderzoeks-resultaat is dat vrouwen alleen slechter presteerden dan mannen op een rekentaak als die als rekenprobleem werd omschreven, niet als dezelfde taak werd omschreven als een probleemoplostaak. Als verteld werd dat mannen beter zijn in rekenen omdat ze harder werken, presteerden vrouwen beter op een rekentaak dan wanneer hun werd verteld dat mannen beter zijn omdat ze van nature beter rekenkundig zijn onderlegd. Deze voorbeelden laten zien dat als meisjes en vrouwen voelen dat ze goed moeten presteren vanwege stereotypering dit kan leiden tot rekenangst, wat weer kan leiden tot lagere prestaties.

Leerkrachten en docenten

Genderstereotypering speelt ook een rol bij leerkrachten, die tegenvallende rekenprestaties vaak anders beoor-delen voor meisjes dan voor jongens. Bij meisjes wordt ervan uitgegaan dat dit komt doordat ze minder talent voor rekenen hebben, bij jongens doordat ze minder inzet vertonen. Deze vaak onbewuste vooroordelen kunnen ervoor zorgen dat leerkrachten zich anders inzetten voor jongens en meisjes. Er wordt dan meer aandacht gegeven aan jongens die vaker geholpen worden dan meisjes. Steeds meer onderzoek toont aan dat als leerkrachten zelf rekenangst hebben, dit een negatieve invloed heeft op reken/wiskundeprestaties van hun leerlingen. Hoewel het meeste onderzoek is gedaan bij leerkrachten in het primair onderwijs, laten studies met docenten uit het voortgezet onderwijs hetzelfde effect zien. Gevonden is dat docenten met rekenangst, ook wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs, de voorkeur geven aan traditionele en rigide onderwijsvormen, meer de nadruk leggen op memoriseren dan op conceptueel denken en minder vaak aandacht besteden aan de vragen van hun leerlingen en zelfs geïrriteerd reageren als hun leerlingen hulp vragen. Er is evidentie gevonden dat leerkrachten met rekenangst lagere verwachtingen hebben betreffende reken/wiskunde-prestaties van hun leerlingen. Hoogstwaarschijnlijk is dit, omdat ze hun rekenangst projecteren op hun leerlingen. Aangetoond is dat adolescenten minder presteerden als ze les kregen van een docent met rekenangst. Als meisjes het idee hebben dat hun leerkracht denkt dat goed zijn in rekenen/wiskunde voornamelijk een aangeboren vaardigheid is die is weggelegd voor jongens in plaats van een vaardigheid die net zo goed door meisjes geleerd kan worden, kan dat hun kijk op rekenen en wiskunde negatief beïnvloeden en rekenangst verhogen. Dit effect was het grootst bij vrouwelijke leerkrachten, omdat meisjes zich vaak identificeerden met hun vrouwelijke leerkracht die het traditionele genderstereotype dat vrouwen niet goed zijn in rekenen en wiskunde daarmee bevestigden.

Interventies

Zoals het voorgaande al liet zien, is het belangrijk om te voorkomen dat leerlingen rekenangst ontwikkelen en als die al is ontstaan zoveel mogelijk te verminderen, met name bij meisjes. Rekenangst kan weggenomen of verminderd worden door bepaalde interventies die erop gericht zijn genderstereotypering te verminderen. In die context is het van belang dat door docenten wordt uitgedragen dat rekenen/wiskunde geen aangeboren vaardigheid is, maar een vaardigheid die geleerd kan worden en dat falen en fouten maken van belang is voor het leerproces. Docenten kunnen meisjes helpen door reken/wiskundetaken niet als een bedreiging te zien, maar als een uitdaging, waardoor negatieve gedachten en zorgen over de rekentaak gecontroleerd kunnen worden en het werkgeheugen zoveel mogelijk gebruikt kan worden voor het oplossen van de taak. Onderzoek heeft aangetoond dat dit ook bewerkstelligd kan worden door meisjes vooraf te laten praten of schrijven over hun negatieve gevoelens ten opzichte van rekenen en wiskunde. Ook leerlingen hun rekenangst anders laten interpreteren verhoogde de prestatie. In de betreffende studie kregen leerlingen voor een toets een tekst te lezen dat de meeste mensen angstig zijn voor een rekentoets, maar dat onderzoek heeft laten zien dat dit juist de prestatie kan verbeteren. Interventies waarbij de moeilijkheid van reken/wiskundetaken werd aangepast aan het niveau van de leerling hebben laten zien dat dit de rekenprestatie verhoogde, met een effect dat groter was voor meisjes dan voor jongens. Ook is gevonden dat rekenangst verminderd kan worden door tutoring, zoals bij leerlingen in het voortgezet onderwijs die elkaar in groepjes van twee hielpen. De leerlingen gaven aan dat ze hierdoor veel meer plezier hadden in wiskunde. Het grootste effect werd gevonden als ze beiden zowel tutor als leerling waren. Motivatie is een factor die van belang is bij elk soort leren. Een veelbelovende interventie is om de motivatie van leerlingen te verhogen door het nut van rekenen en wiskunde te benadrukken en te laten zien hoe rekenen en wiskunde een rol kunnen spelen in het verwezenlijken van hun toekomstplannen. Het ontwikkelen en inzetten van interventies die ervoor zorgen dat leerlingen rekenen en wiskunde als een uitdaging gaan zien waardoor hun mindset verandert van 'ik kan dit niet' naar 'ik kan dit' lijkt vooral de rekenangst bij meisjes te verminderen en hun prestaties te verhogen.

Noten

[1] Dit artikel is geschreven op verzoek van de NVvW werkgroep Vrouwen en Wiskunde en is de eerste van een reeks die gaat volgen. Zie *https://nvvw.nl/werkgroepen/vrouwen-en-wiskunde/*

[2] Devine, A., Hill, F., Carey, E., & Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology, 110*, 431-444.

[3] Van Mier, H.I., Schleepen, T.M.J. & Van den Berg F. (2019). Gender differences regarding the impact of math anxiety on arithmetic performance in second and fourth graders. *Frontiers in Psychology, 9*, 2690, 1-13.

Over de auteur

Hanneke van Mier was tot aan haar pensioen in 2021 universitair hoofddocent bij de faculteit Psychologie en Neurowetenschappen aan de Universiteit Maastricht.
Daar heeft zij o.a. samen met Tamara Schleepen onderzoek gedaan naar effecten en genderverschillen m.b.t. rekenangst bij kinderen. E-mailadres: *h.vanmier@maastrichtuniversity.nl*

Wis en Waarachtig

Den Bosch wint weer in Nijmegen

Het Stedelijk Gymnasium 's Hertogenbosch heeft voor de derde achtereenvolgende keer het wiskundetoernooi van Nijmegen gewonnen. Was vorig jaar de winst te danken aan een uitstekend middagdeel, dit jaar werd de basis van de zege gelegd tijdens het ochtenddeel, de *Estafette*. Hierin bleken de Bosschenaren het sterkste (400 punten), op de voet gevolgd door Lek en Linge uit Culemborg (380 punten) en op een iets grotere afstand door het Varendonck College uit Asten (330 punten). In de middag werd de *Sum of Us* gewonnen door het Wolfert Tweetalig (Rotterdam, 400 punten), het Thomas a Kempiscollege (Arnhem, 390 punten) werd hierin tweede. De 350 punten die het team uit Den Bosch nu scoorde was voldoende voor de winst in het totaalklassement. Voor de complete uitslag, de opgaven en de uitwerkingen verwijzen we naar onderstaande bron.
Bron: https://www.ru.nl/math/media/mathematics-tournament/editie-2021/uitslag/

In ruim 20.000 kilometer alle rijksmonumenten zien

De wiskundige William Cook (Waterloo, Canada) en informaticus Keld Helsgaun (Roskilde, Denemarken) hebben de optimale route langs alle 57.912 rijksmonumenten in Nederland berekend. Als je dat via omwegen wilt doen, dan leg je een afstand van 20.253.062 meter af. Het duo maakte gebruik van data die werden geleverd door een adviesbureau in Eindhoven, CQM, dat gespecialiseerd is in het oplossen van logistieke vraagstukken. De route is een voorbeeld van het 'handelsreizigersprobleem', waarbij gevraagd wordt naar een kortste rondrit langs een aantal locaties. Eind vorige eeuw ontwierp Cook samen met een aantal collega's een algoritme, Concorde. In theorie kan Concorde het handelsreizigersprobleem oplossen, maar wel met een extreem hoge complexiteit: bij een lineaire toename van het aantal locaties stijgt de rekenduur exponentieel. De optimale monumentenroute werd gevonden door 320 computerprocessoren tegelijk te laten werken. Op een enkele computer zou de berekening 90 jaar hebben geduurd.
Bron: NRC 10 september 2021

Record palindroompriemgetal

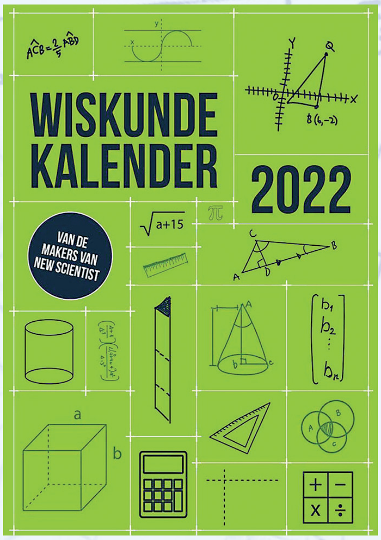
'Lepel' en 'parterretrap' zijn overbekende voorbeelden van palindromen: woorden die van voor naar achter en van achter naar voor identiek zijn. Het langst bekende palindroom ter wereld is het Finse 'saippuakivikauppias', hetgeen 'speksteenhandelaar' betekent. Er zijn ook palindroomzinnen en zelfs hele palindroomverhalen, maar er zijn getallenliefhebbers die zoeken naar palindroompriemgetallen. Een lang voorbeeld is 142.840.628.019.121.910.826.048.241, maar dat is zeker niet het langste palindroompriemgetal. Deze zomer vond de Japanse softwareontwikkelaar Makoto Morimoto een palindroompriemgetal van 490.001 cijfers: in het midden 7.383 drieën, aan weerszijden geflankeerd door 241.308 nullen en aan beide uiteinden een 1. Een nieuw record.
Overigens is er maar één palindroompriemgetal met een even aantal cijfers, namelijk 11. Wil je dat bewijzen? Misschien helpt dan de volgende hint. Neem enkele palindroomgetallen met een even aantal cijfers en zoek uit wat hun gemeenschappelijke deler is. Er bestaat een handige truc waarmee je zó inziet dat alle palindroomgetallen met een even aantal cijfers deze deler hebben.
Bron: *NRC* 2 september 2021

Verloren gewaande tekening van Rubens na vier eeuwen terug

De Vlaamse Gemeenschap heeft een verloren gewaande tekening van Peter Paul Rubens aangekocht voor een bedrag van 307.400 euro. Het gaat om een ontwerp dat Rubens maakte in opdracht van de familie Moretus voor een illustratie in het boek *Opticorum libri sex* van de wiskundige en fysicus Franciscus Aguilonius. Dat natuurkundige werk over optica werd in 1613 uitgegeven door Plantijns uitgeverij. De *Opticorum libri sex* – oftewel *Zes boeken over optica* – van de jezuïet Franciscus Aguilonius (1567-1617) was een van de allereerste publicaties van de Plantijnse uitgeverij waaraan Rubens zijn medewerking verleende. Het boek geeft een uitvoerig overzicht van de toenmalige kennis van optica. Behalve de titelpagina, ontwierp Rubens ook de titelvignetten voor de zes delen van het boek. Op de recent ontdekte tekening, een ontwerp voor het laatste boekdeel over projecties, knielt een geleerde met een armillarium –

oftewel een hemelglobe voorzien van metalen ringen die de belangrijkste cirkels van de hemel voorstellen. Een putto verlicht met een brandende toorts de globe. De schaduw van de ringen op de grond wordt bestudeerd door twee andere putti. In zijn boek beschrijft Aguilonius de vele mogelijke toepassingen van projecties in wetenschap en kunst.
Bron: https://www.vvwl.be/verloren-gewaande-tekening-van-rubens-komt-na-vier-eeuwen-terug-thuis/

Wiskundekalender 2022



Hoe vind je de kortste route op een kubusvormige aarde? Waarom werd ons huidige getallenstelsel ooit verboden? Hoe komt het dat je bijna altijd in de langste wachtrij staat? Waarom zijn putdeksels rond? *New Scientist* heeft voor komend jaar een wiskundekalender uitgebracht. Hierboven staan enkele van de onderwerpen op deze kalender, die je elke dag trakteert op een opmerkelijk wiskundig feitje, bijzonder bewijs, gek gedachte-experiment en nog veel meer. Ook scheur je langs pittige puzzels en raadsels om je tanden in te zetten. Goed voor 365 dagen met oneindig veel wiskundeplezier, dus een mooi kerstcadeau voor de wiskundeleraar. De kalender kost € 15,99 en is verkrijgbaar in de boekhandel of via onderstaande bron. Als NVvW-lid bestel je de Wiskundekalender met maar liefst €3,14 korting. Gebruik de code wiskal21 bij het afrekenen.
Bron: https://newscientist.nl

Lezing 'Black Heroes of Mathematics' Nederlands ondertiteld

Op uitnodiging van ICMS Edinburgh gaf Dr. Nira Chamberlain (voorzitter van The Institute of Mathematics and its Applications (IMA) in Engeland) in juli 2020 de lezing 'Black Heroes in Mathematics'. Dit verhaal over moed, doorzettingsvermogen en toekomstdromen biedt inspiratie voor iedereen! Een prachtige lezing om bijvoorbeeld te tonen tijdens wiskundeles op middelbare scholen. De lezing is nu in het Nederlands ondertiteld door Linda Karssies (Begonia Translations), mogelijk gemaakt door Meromorf Press. Klik op 'CC' -> Dutch om de Nederlandse ondertiteling te activeren.
Meer informatie: *https://media.ed.ac.uk/media/The+Black+Heroes+of+Mathematics/1_vc4v7njt*
Bron: Wiskunde PersDienst

KWG WINTERSYMPOSIUM

Zwarte gaten: abstractie in het heelal

Zaterdag, 15 januari 2022, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein)
Tijd: 10.30 – 16.00 uur

- Observations of black holes using gravitational waves. Dr. Tanja Hinderer (Universiteit Utrecht)
- Zwarte gaten en het werk van Roger Penrose. Prof. dr. Klaas Landsman (Radboud Universiteit)
- Einsteins zwarte gat. Prof. dr. Jeroen van Dongen (Universiteit van Amsterdam).
- Zwarte gaten simuleren met supercomputers. Prof. dr. Simon Portegies Zwart (Universiteit Leiden)

Daarnaast is er een markt. Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde. Ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn.

Voor het volledige programma en inschrijving: *www.wiskgenoot.nl.* Meer informatie: Rogier Bos, *r.d.bos@uu.nl,* tel. (06)28787000.

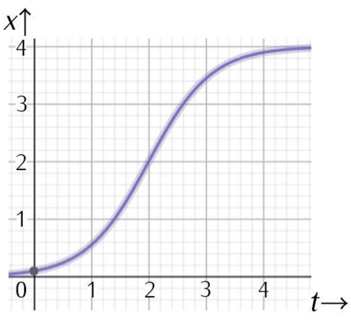
Bert Zwaneveld, Jacob Perrenet

Een pleidooi voor wiskundig modelleren

Dagelijks zijn de coronarekenmodellen van het RIVM in het nieuws. Bert Zwaneveld en Jacob Perrenet vinden dat iedereen deze modellen op waarde moet kunnen schatten en dat je dat het beste kunt leren in de wiskundeles.

Wiskundige modellen

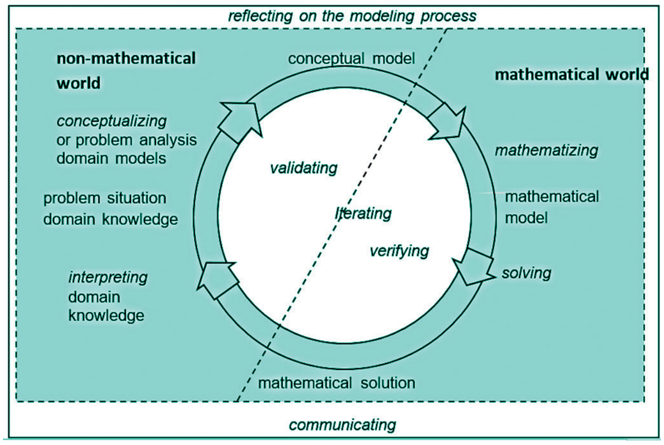
Een wiskundig model is een wiskundige, vereenvoudigde beschrijving van een situatie in de reële wereld. Het wordt ontworpen om problemen uit die situatie op te lossen. In het kader van de verspreiding van corona, zijn bijvoorbeeld de volgende vragen relevant: hoe zal het aantal geïnfecteerde personen zich ontwikkelen?, wanneer zal het aantal nieuw geïnfecteerde personen gaan afnemen?, hoeveel besmette personen zullen tegelijk in een ziekenhuis zijn opgenomen of op de intensieve zorg? Dagelijks wordt het publiek over de actuele situatie geïnformeerd. Maar er worden ook voorspellende grafieken gepresenteerd, die op een wiskundig model zijn gebaseerd. In figuur 1 staat bijvoorbeeld het globale verloop van het totaal aantal geïnfecteerde personen op het moment dat er nog geen sprake van vaccinatie is.



figuur 1 Het globale verloop van het totaal aantal besmette personen. Horizontaal de tijd, verticaal het aantal geïnfecteerde personen, eenheden zijn niet gespecificeerd

Didactiek van wiskundig modelleren: de modelleercyclus

Ongeveer tien jaar geleden[1] ontwikkelden wij de modelleercyclus met de voorkomende modelleeractiviteiten, zoals afgebeeld in figuur 2. De modelleercyclus is een geïdealiseerde weergave van de modelleeractiviteiten. Daarbij is een logische volgorde gekozen. In de praktijk zullen ook andere volgordes voorkomen. Ook hoeven niet altijd alle activiteiten plaats te vinden. De modelleercyclus is niet bedoeld om door de leerlingen als een soort algoritme te worden toegepast. Hij is bedoeld voor de docent, zodat die activiteiten van zijn leerlingen kan plaatsen en adequaat ondersteuning kan bieden. We lichten de activiteiten toe.



figuur 2 De modelleercyclus (Perrenet & Zwaneveld, 2012)

De schuine stippellijn verdeelt de activiteiten in vragen die bij de probleemsituatie horen en de typisch wiskundige vragen. Door de probleemsituatie en het probleem te analyseren komt men tot een lijst van relevante aspecten en de verbanden daartussen: het conceptuele model. Het geeft de contouren van het wiskundige model. Dat ontstaat door de elementen en de verbanden van het conceptuele model in wiskundige objecten te vertalen: het mathematiseren. Daarbij wordt het oorspronkelijke probleem in een wiskundig probleem omgezet. Daarna wordt het wiskundige probleem opgelost. En dan wordt die oplossing in de oorspronkelijke probleemsituatie geïnterpreteerd: is het oorspronkelijke probleem voldoende opgelost, is de oplossing realistisch? Dit kan aanleiding zijn om het ontwikkelde model te verbeteren, dan wel zelfs helemaal te

vervangen door een beter model. Met andere woorden: de modelleercyclus wordt (deels) opnieuw doorlopen. Wat nu ook kan gebeuren, is dat je de wiskundige oplossing verifieert: zijn er geen fouten gemaakt? Verder kun je proberen het model te valideren, bijvoorbeeld door te onderzoeken of andere gegevens het model ondersteunen.
Wat bij het hele modelleerproces niet vergeten mag worden zijn de twee activiteiten die boven en onder, buiten de modelleercyclus staan. Dat zijn communiceren en reflecteren. Bij communiceren leg je aan belanghebbenden uit wat je hebt gedaan en waarom. Reflecteren op het proces doe je om lessen te trekken: wat ging goed/fout, wat is er gedaan om bij vastzitten weer op gang te komen, is het model na eventuele aanpassingen ook in andere probleemsituaties te gebruiken, kan het model veralgemeniseerd worden? Ook communiceren en reflecteren kunnen aanleiding zijn om te itereren.
We geven twee modellen over de verspreiding van een virus. Het eerste is bruikbaar in het basisonderwijs en de onderbouw van het voortgezet onderwijs, het tweede in de bovenbouw van havo of vwo. Het eerste voorbeeld is gebaseerd op een bijdrage van Ad Meskens in het blad van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.[2]

Exponentiële groei

Vooraf merken we op dat hierbij een spreadsheetprogramma ondersteunend kan zijn voor de leerlingen.
Op een cruiseschip met 500 passagiers aan boord is één passagier besmet. We nemen aan dat elke besmette passagier alleen gedurende één dag besmettelijk is en dan twee andere, niet-besmette passagiers besmet. Men zegt dat de reproductie- of besmettingsfactor 2 is. Dit is een versimpeling van de werkelijkheid. In werkelijkheid is die besmettingsfactor een gemiddelde, besmettingen vinden niet op precies één dag plaats. Door deze versimpeling heeft de conceptualisering via de gegevens al plaatsgevonden. De vraag is nu: na hoeveel dagen zijn alle passagiers besmet? Voor de mathematisering presenteert Meskens tabel 1.
In feite is tabel 1 het model en kan de vraag beantwoord

dag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal nieuw besmette personen	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
totaal aantal besmette personen	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047

tabel 1 Dagelijks nieuw besmette personen en het totaal aantal besmette personen bij besmettingsfactor 2. Personen zijn één dag besmettelijk.

dag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
primaire besmettingen	0	2	4	12	36	108	324	972	2916	8748	26244
secundaire besmettingen			2	4	12	36	108	324	972	2916	8748
tertiaire besmettingen				2	4	12	36	108	324	972	2916
...					...	...	...	...	...	...	...
aantal nieuw besmette personen	0	2	6	18	54	162	486	1458	4374	13122	39366
totaal aantal besmette personen	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

tabel 2 Dagelijks nieuw besmette personen en het totaal aantal besmette personen bij besmettingsfactor 2. Personen blijven besmettelijk.

>

worden. De docent kan overwegen nog wat vragen bij de tabel te stellen: wat is het verband tussen de twee onderste rijen, of hoe *bereken* je uit het dagnummer de twee getallen eronder? De overige modelleeractiviteiten van de modelleercyclus lijken hier niet nodig. Meskens adviseert om de leerlingen zelf dit modelleerproces nog eens te laten uitvoeren voor besmettingsfactor 3.
Vervolgens maakt Meskens zijn model een beetje realistischer. Een besmet persoon blijft besmettelijk en besmet elke dag twee nog niet-besmette personen. Misschien kan de leerlingen gevraagd worden een met tabel 1 vergelijkbare tabel te maken. Maar misschien is enige steun voor de conceptualisering/mathematisering nodig. Meskens doet dat op de volgende manier. Noem de eerste besmette persoon P_0. De op de eerste dag primair door P_0 besmette personen noemt hij $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$. Op dag 2 besmet P_0 weer twee personen: de secundair door P_0 besmette personen. Ook op dag 2 besmetten $P_{1,1}$ en $P_{1,2}$ ieder twee personen: hun twee primair besmette personen. Op dag 2 zijn er dus $2 + 4 = 6$ nieuw besmette personen. Zo doorgaande leidt dit tot tabel 2: het model van deze probleemsituatie in tabelvorm.

En weer kan gevraagd worden het model in tabelvorm te maken voor de besmettingsfactor 3 in plaats van 2. Ook kan weer gevraagd worden hoe het aantal nieuw besmette personen en het totaal aantal besmette personen uit het dagnummer berekend kunnen worden.

Voor het voortgezet onderwijs is nu zeker een interessante vraag of besmettingsfactoren alleen natuurlijke getallen kunnen zijn. Uit een discussie hierover kan naar voren komen dat niet iedere besmette persoon per se elke dag een onbesmet iemand besmet. Door wel een vaste periode, bijvoorbeeld een dag of een paar dagen, te kiezen, kan de besmettingsfactor met een vast getal worden benaderd: gemiddelde aantal mensen dat besmet is in die periode. Veronderstel dat 100 besmette personen gemiddeld dagelijks 130 personen besmetten, bijvoorbeeld omdat niet ieder van deze 100 mensen dagelijks hetzelfde aantal contacten heeft. Dan kan '100 besmette personen besmetten gemiddeld 130 niet-besmette personen' uitgedrukt worden met de besmettingsfactor 1,3. En dan is het handig voor de besmettingsfactor de variabele R te gebruiken. Natuurlijk is dit een soort mini-modelleringsproces: hoe kun je het besmettingspatroon met één getal weergeven? In de discussie hierover kan ook aan de orde komen wat $R = 1$ en $0 < R < 1$ betekenen voor de verspreiding. En vervolgens kan dan gevraagd worden te modelleren – hier: in een formule weer te geven – wat het aantal nieuw besmette personen op dag n bij besmettingsfactor R is en wat het totaal aantal besmette personen op die dag is, als er op dag 0 één besmette persoon is.
Meskens bespreekt ook wat de invloed van quarantaine is in de situatie waarbij $R = 2$ en een besmet persoon

dagnummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
primaire besmettingen	0	2	4	8	16	48	144	432	1296	3888	11664
secundaire besmettingen			0	0	8	16	48	144	432	1296	3888
tertiaire besmettingen				0	0	8	16	48	144	432	1296
...					...	...	...	...	...	....	...
aantal nieuw besmette personen	0	2	4	8	24	72	216	648	1944	5832	17496
totaal aantal besmette personen	1	3	7	15	39	111	327	975	2919	8751	26247

tabel 3 Dagelijks nieuw besmette personen en het totaal aantal besmette personen bij besmettingsfactor 2. Personen worden na twee dagen in quarantaine geplaatst

besmettelijk blijft. Maar er wordt steeds na twee dagen vastgesteld dat iemand besmettelijk is en daarom in quarantaine wordt geplaatst. Dit levert tabel 3.
En nogmaals kunnen de eerdergenoemde vragen opgeworpen worden.

Logistische groei

Bij een validatie van het exponentiële model kunnen of zullen de volgende zaken naar voren komen. Na een bepaalde periode voldoet het niet meer. Het aantal personen dat nog besmet kan worden is eindig en daalt snel. Er zijn meer serieuze bedenkingen naast de al genoemde. Besmettingen vinden alleen plaats als er een 'ontmoeting' van een besmet iemand met een onbesmet persoon plaatsvindt en dan nog is een besmetting niet zeker. Vanwege het feit dat een besmetting op elk moment kan plaatsvinden, lijkt een continu model meer voor de hand te liggen dan de tot nu besproken discrete modellen. En omdat er op den duur steeds minder niet-besmette personen zijn, moeten we naar een model gaan, waarbij het aantal nieuwe besmettingen op een zeker moment afneemt. Het nu volgende model vereist meer wiskundige kennis, met name differentiaal- en eventueel ook integraalrekening, en is daarom voor de bovenbouw van havo en vwo bestemd. De elementen van de conceptualisering staan hiervoor. Daarbij hoort nu dus dat niet alleen het aantal besmette personen een rol speelt, maar ook het aantal niet-besmette en het aantal contacten tussen een besmet en een niet-besmet persoon. We mathematiseren dit als volgt, waarbij we opmerken dat dit waarschijnlijk niet van de leerlingen zelf verwacht kan worden. De docent kan dit voordoen of besluiten een tekst voor de leerlingen te schrijven met de nodige hulp. Om die mathematisering kort en bondig te beschrijven voeren we wat notaties is, waarbij we in eerste instantie nog van de discrete situatie uitgaan: x_n voor het totale aantal besmette personen op dag n, Δx_n het aantal nieuw besmette personen op dag n, een parameter a: het gemiddeld aantal personen dat een besmet persoon infecteert. Om het model verder op te tuigen, nemen we voor de parameter a aan dat die evenredig is met de kans op een ontmoeting met een niet-besmet persoon. Die kans modelleren we met de fractie $(m - x_n)/m$, waarbij m het maximaal aantal besmette personen is en $m - x_n$ het aantal niet-besmette personen op dag n is. Voor m de totale omvang van de populatie nemen ligt voor de hand. We komen hierop terug. Door nu niet langer uit te gaan van een tijdsinterval van een dag, maar van een willekeurig (klein) interval Δs en Δx door Δs te delen en Δs naar 0 te laten gaan krijgen we de volgende vergelijking met c het aantal genoemde contacten en x het totaal aantal besmette personen op tijdstip t – we zouden dus $x(t)$ in plaats van x moeten schrijven; het gezochte model, een vergelijking die het verband tussen de afgeleide van x en x zelf weergeeft:

$$x' = cx\left(\frac{m-x}{m}\right) = cx\left(1-\frac{x}{m}\right)$$

Bij de bespreking van dit model kan opgemerkt worden dat voor waarden van x dicht bij 0 x' bijna evenredig is met x en net zo voor waarden van x dicht bij m. Hiermee wordt het model (enigszins) gevalideerd. De waarde van c moet uit de waargenomen data afgeleid worden. Over parameter m kan het volgende opgemerkt worden. Een mogelijke waarde voor m is de omvang van de totale populatie, maar deskundigen hebben hiervoor het volgende bedacht, dat op zich ook weer een voorbeeld van een modellering is. Veronderstel dat bij het begin van de epidemie ieder besmet persoon R_0 niet-besmette personen besmet. Dit getal R_0 heet de *basis*besmettingsfactor. Voor Covid-19 neemt men aan dat $2 < R_0 < 3$. De besmettingsfactor is echter niet constant gedurende de uitbraak, maar hangt af van de fractie niet-besmette-personen, net als x'. We noteren deze fractie met $S = \frac{m-x}{m} = 1 - \frac{x}{m}$. We vinden zo het volgende model voor R: $R = R_0 \cdot S$

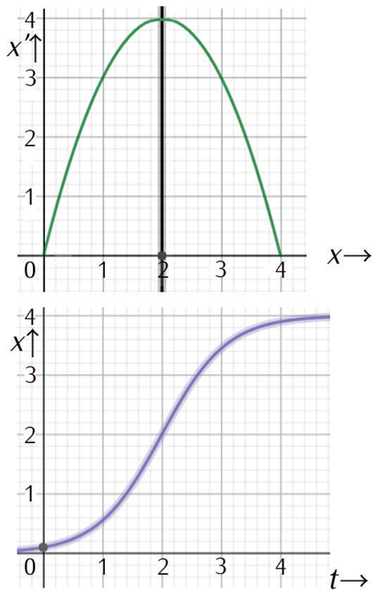
Omdat $R = 1$ de grens tussen toe- en afname van de epidemie aangeeft, betekent deze grens dat $S = 1/R_0$. Uit $2 < R_0 < 3$ volgt dat $\frac{1}{3} < S < \frac{1}{2}$, bijvoorbeeld $S = 0{,}4$. Bij deze waarde van S is $x/m = 0{,}6$. De epidemie neemt af noch toe als het totale aantal besmette personen x gelijk is aan 60% van de populatie. Als deze 60% besmette personen wordt benaderd spreken epidemiologen van groepsimmuniteit. In een interview met een krant, gepubliceerd in mei 2020, benadrukte Jaap van Dissel dat de waarde van R een schatting is, gebaseerd op het aantal positief geteste personen.
Met wiskundige technieken waarop we hier niet verder ingaan, is uit het model (de hiervoor gegeven vergelijking) de volgende expliciete formule voor x af te leiden:

$$x(t) = \frac{m}{1 + \frac{m - m_0}{x_0} e^{-ct}}$$

Met deze formule is de grafiek van figuur 1 gemaakt met $m = 4$, $c = 1{,}83$ en $x_0 = 0{,}1$. Maar ook zonder deze expliciete formule zijn uit de relatie tussen x' en x eigenschappen van x af te leiden. We vermelden ze slechts. De grafiek van x' als functie van x is een bergparabool met nulpunten 0 en m en symmetrieas bij $x = m/2$.
Voor $0 < x < m$ geldt dat x' positief is, dus x is een stijgende functie van t. Voor x in de buurt van 0 of van m is de stijging vrijwel 0, dus horizontale asymptoten.

>

Bij $x = m/2$ bereikt x' zijn maximale waarde. Daar is de stijging het grootst: een buigpunt van de grafiek van x als functie van t.
Uit de symmetrie van de grafiek van x' ten opzichte van $x = m/2$ volgt dat de grafiek van x puntsymmetrisch is ten opzichte van dit buigpunt. We merken op dat dit model ook aanleiding kan zijn nieuwe wiskundige begrippen te ontwikkelen, zoals het buigpunt. In figuur 3 is dit weergegeven voor dezelfde waarden voor de parameters als die van figuur 1. De bovenste grafiek geeft x' als functie van x met $0 \leq x \leq 4$, het onderste plaatje geeft x als functie van t, en is gelijk aan figuur 1; figuur 1 is hier herhaald om de relaties tussen de bovenste en onderste figuur, zoals de plaats van het buigpunt, zichtbaar te maken.



figuur 3 De grafiek van x' als functie van x (boven) en de grafiek van x als functie van t (onder)

Tot slot

We besluiten deze bijdrage met een opsomming van wat iedereen over modelleren zou moeten weten.

— Modellen zijn benaderingen van probleemsituaties in de echte wereld. Een gevolg is dat conclusies op basis van modellen altijd een onzekerheid hebben.
— Een model voor een probleemsituatie heeft een doel: iets wat men te weten wil komen.
— Elk model kent beperkingen, bijvoorbeeld omdat niet alle aspecten van de situatie meegenomen zijn of kunnen worden.
— Voor sommige situaties liggen discrete modellen voor de hand, en voor andere situaties continue modellen.
— De getallen die bij modelleren voorkomen zijn vrijwel altijd geschatte getallen en geen exacte.

Noten

[1] Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modelling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
[2] Meskens, A. (2020). COVID-19 in de klas. *Wiskunde & Onderwijs*, 182, 3-8.

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus-hoogleraar van de Open Universiteit. E-mailadres: *zwane013@planet.nl*
Jacob Perrenet heeft als gepensioneerde een actieve relatie behouden met de Technische Universiteit Eindhoven; samen met Bert heeft hij daarnaast nog enkele didactische onderzoeksprojecten. E-mailadres: *j.c.perrenet@tue.nl.*

Vacature: redacteur *Euclides*

De redactie van *Euclides* zoekt versterking. Vind je het leuk om mee te denken over de inhoud en de toekomst van *Euclides*? Dan is deze functie iets voor jou. De redactie vergadert drie keer per jaar, online en in Utrecht. Tijdens de vergaderingen bespreken we de koers van het blad. We zoeken een redacteur die werkzaam is in het voortgezet onderwijs: vmbo, havo of vwo.

We willen graag meer aandacht besteden aan het vmbo in *Euclides*, dus ben je werkzaam in het vmbo, dan hebben we je extra hard nodig!

Voor meer informatie, mail naar Liesbeth Coffeng (eindredacteur): *l.coffeng@nvvw.nl*

Vastgeroest

Ab van der Roest

Ze zijn er nog!

Fractals

Soms somber ik wat over mijn leerlingen: gemakzuchtig, weinig nieuwsgierig, consumerend en geen initiatief nemend. En dan denk ik zelfs af en toe dat het vroeger beter was. Een totale misgedachte en ik verklaar dat die ontstaat, omdat je de mooie dingen het langste onthoudt. Zo had ik eens een groepje leerlingen dat fractals wilde programmeren. Het was toen de pc nog in de IBM-schoenen stond en programmeren nog veel door leerlingen werd gedaan. Ze wisten niet wat ze met complexe getallen moesten. We maakten een dealtje: ik zou complexe getallen uitleggen en zij zouden het programmeren aan mij uitleggen. Menig vrijdagmiddag op school met hen gezeten en docent en leerling genoten.

Een stapje meer

Maar, ze zijn er ook nu nog. Bij wiskunde B heb ik de *abc*-formule bewezen met behulp van kwadraat afsplitsen en toen kwam de vraag of er ook zo'n soort formule voor derdegraads vergelijkingen bestaat. 'Jawel, de formule van Cardano, maar die valt buiten de lesstof en het is best een beetje lastig om die zomaar te bewijzen', was mijn reactie. 'Maar ik wil dat wel een keer doen voor de geïnteresseerde leerlingen in een extra uur', zei ik in de veronderstelling dat niemand dat zou willen. Tot mijn grote verbazing waren er vier leerlingen die daar graag wat extra tijd voor over hadden. Ze zijn er dus nog, die leerlingen die best een stapje meer willen doen.

Cardano

Bij de voorbereiding op deze lessen sla ik mezelf een paar keer voor mijn hoofd. Misschien herken je het wel: jarenlang weet je al iets, maar een net andere kijk geeft meteen een mooi inzicht. Het gaat over het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$. De oplossingen zijn eenvoudig te vinden: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nu kun je bij het afleiden van de formule van Cardano gebruiken dat de som van de oplossingen $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en het product $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Dit is eenvoudig na te gaan en vóór de Mammoetwet was het gewone schoolkost. Maar nu pas keek ik eens beter naar de som en het product. Natuurlijk heb je daar de *abc*-formule helemaal niet voor nodig.
Bij ontbinden krijg je $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2$.
Het herleiden van $ax^2 + bx + c = 0$ geeft meteen $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ waaruit je meteen de som en product kunt aflezen. Geen schokkende ontdekking, maar wel schokkend dat ik me dit pas na ruim 40 jaar realiseer. 'Ze zijn er nog!' slaat in eerste instantie op die leerlingen, maar ook op de, voor velen van ons vanzelfsprekende, weetjes die ik nu pas ontdek.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Oproep: auteurs Giraf-reeks

Heb jij altijd al je eigen boek of spel willen uitbrengen? De Giraf-reeks biedt jou deze kans! De Giraf-reeks is een boeken- en spellenreeks door de NVvW, waarbij wiskunde op creatieve, hedendaagse manier wordt aangeboden aan onderbouwleerlingen op het vmbo, havo en vwo. Er zijn al twee delen verschenen over statistiek en cryptografie en er is behoefte aan een deel dat specifiek vmbo-leerlingen aanspreekt. Het onderwerp mag je zelf bedenken! Daarom zoeken we:

Een creatieve vmbo-wiskundedocent die ook goed kan schrijven!

Wat bieden we jou?

- dé kans om een eigen boek of spel uit te brengen!;
- begeleiding in het creatieproces door ervaren collega's,
- een breed publiek door publicatie in bijvoorbeeld *Euclides*, nieuwsbrieven en op studiedagen;
- een kleine financiële auteursvergoeding.

Wie zoeken we?

- een creatieve docent met ervaring op het vmbo.
- een goede schrijver die vmbo-leerlingen weet aan te spreken.
- een doorzetter.

Herken jij je in deze omschrijving en wil je graag een boek of spel uitbrengen? Neem dan contact op met Els Franken(*e.franken@nvvw.nl*) voor meer informatie.

Henk van der Kooij, Ruud Stolwijk

IM^{2}C: de internationale uitdaging voor zeer gemotiveerde leerlingen

IM^{2}C, de International Mathematical Modeling Challenge, is een modelleerwedstrijd waarin teams vijf dagen lang aan de slag gaan met een open opdracht. Er doen ruim 30 landen mee, waaronder Nederland vanaf het begin in 2015. Nu nog betrekkelijk klein in Nederland, maar wellicht komt daar verandering in.

Inleiding

De International Mathematical Modeling Challenge (IM^{2}C) wordt sinds 2015 georganiseerd door het International Program Committee (IPC), onder aanvoering van initiatiefnemer Sol Garfunkel (Comap, USA). In het IPC zitten vertegenwoordigers uit Australië, China, Hong Kong, Denemarken, Nederland, Rusland en Singapore. Alle betrokkenen hebben expertise op het gebied van (wiskundig) modelleren en sommigen ook met het organiseren van wiskundewedstrijden voor teams.
De jaarlijkse opgave wordt, onder toeziend oog van het IPC, gecomponeerd en beoordeeld door het International Expert Panel (IEP). Hierin zitten vertegenwoordigers uit de VS, China, Australië, Nederland, Mexico, Hong Kong en Rusland.
Doel van IM^{2}C is het wereldwijd stimuleren van (docenten in) landen om modelleren een plek te geven binnen het wiskundecurriculum van het voortgezet onderwijs. In Nederland, Denemarken, Duitsland en nog een paar Europese landen, gebeurde dat al wel min of meer. Buiten Europa was dat, vanaf 2000, eigenlijk alleen het geval in Singapore, de VS en China via (inter)nationale wiskundewedstrijden.
Veel landen hebben zo langzamerhand, voornamelijk vanwege de mondiale roep om STEM onderwijs (Science, Technology, Engineering and Mathematics), het besef dat ze iets aan toepassingen en modelleren zouden moeten gaan doen. IM^{2}C moet dan ook gezien worden als stimulans voor docenten en leerlingen om te ervaren dat wiskunde daadwerkelijk veel kan betekenen in de huidige complexe maatschappij. Met opzet is gekozen om de C van IM^{2}C als Challenge (uitdaging) neer te zetten en niet als Contest of Competition. Uitgebreidere berichtgeving over doel, opzet van en deelname aan IM^{2}C is te vinden op de website.[1] Daar zijn ook alle opgaven vanaf 2015 te vinden, met de resultaten van alle teams en mooie uitwerkingen van deelnemende teams.

De impact van IM^{2}C internationaal

De start van IM^{2}C in 2015 was bedoeld als een try-out met landen van de IPC-leden aangevuld met een paar andere landen (zoals België en Slowakije die toen ook al deelnamen aan de Wiskunde B-dag). De daaropvolgende jaren was er eerst een groei in Azië en Oceanië te zien (nu totaal 16), Noord-Amerika (2) en Europa (11). Daarna volgden Midden- en Zuid-Amerika (4), Nabije Oosten (5) en ten slotte Afrika (2). In tabel 1 is de groei te zien, die helaas werd omgebogen in 2020 vanwege corona.

Jaar	Deelname (#landen, #teams)
2015	(10, 17)
2016	(23, 40)
2017	(27, 49)
2018	(30, 55)
2019	(33, 57)
2020	(30, 54)
2021	(27, 51)

tabel 1 Deelname IM^{2}C vanaf 2015. Elk land mag maximaal twee papers aanbieden voor jurering.

Met name in Azië is de impact van IM²C op het onderwijs groot. Een certificaat van IM²C biedt voordelen bij aanmelding aan een universiteit. In Greater China (Mainland China, Hong Kong, Macau en Taiwan) worden op grote schaal (na)scholingscursussen georganiseerd rond modelleren. Daar, maar ook in Japan en Singapore, worden de Challenges gebruikt om beleidsmakers en politiek te beïnvloeden bij te maken keuzes voor het curriculum. Ook in Australië en de VS wordt IM²C gebruikt om docenten wegwijs te maken op het gebied van modelleren als onderdeel van het wiskundecurriculum. Australië heeft een grote organisatie met een eigen website[2] met als doel: 'The resources are designed to meet at least two purposes:

1. To support students, parents and team supervisors as they prepare for the International Mathematical Modeling Challenge (IM²C).
2. To encourage and support the greater use of mathematical modelling more generally as part of mathematics teaching and learning in schools.'

In de VS en Greater China worden sinds 1999 wedstrijden voor teams gehouden waar zo'n 700 (VS) en 3000 (China) teams jaarlijks aan meedoen.[3] Daarvan worden de beste 60 (VS) en 600 (China) uitgenodigd om deel te nemen aan IM²C. Vervolgens bepaalt een nationale jury welke twee werkstukken worden opgestuurd voor de internationale jurering.

In de meeste landen worden overigens met name elitescholen (met alleen maar sterke wiskundeleerlingen) uitgenodigd om deel te nemen.

De impact van IM²C in Nederland

Sinds de invoering van Wiskunde A op het vwo in 1985 kennen we in Nederland al het gebruik van toepassingen als context om het leren van wiskundige kennis en inzicht te ondersteunen en als bron voor (examen)opgaven. Het modelleren van realistische probleemsituaties was prachtig mogelijk binnen de onderwerpen grafen & matrices en lineair programmeren. Helaas maken deze twee mooie onderwerpen geen deel meer uit van het huidige programma wiskunde A. Als keuzeonderwerp of bij wiskunde D kan en mag dit natuurlijk wel degelijk aan de orde komen in de klas.
In 1989 nam Jan de Lange (als directeur van het Freudenthal Instituut) het initiatief om de Wiskunde A-lympiade te starten, omdat een aantal belangrijke leerdoelen van Wiskunde A (zoals kritisch redeneren, samenwerken en communiceren over wiskunde) niet in een centraal examen zijn te toetsen. In 1999 volgde de Wiskunde B-dag. Veel scholen gebruiken een of beide om daarmee de praktische opdracht een mooie vulling te geven, of leerlingen een idee te geven hoe wiskunde in de praktijk werkt. Internationaal zijn deze twee fenomenen ook bekend, vandaar dat wij (Henk was jarenlang voorzitter Wiskunde B-dag en Ruud is voorzitter Wiskunde A-lympiade) gevraagd zijn voor IPC respectievelijk IEP van IM²C.

Een docent over IM²C:
"IM²C is een leuke uitdaging voor leerlingen die weinig problemen hebben met het reguliere wiskundeprogramma. Doordat ze met behulp van een wiskundig model een actueel probleem oplossen, leren ze veel over het nut en de beperkingen van wiskundige modellen. Ze kunnen zich een week lang helemaal onderdompelen in een onderwerp, wat een hele nieuwe ervaring is. Leerlingen geven aan het intensief te vinden, maar ook ontzettend leuk en leerzaam."
Fransje Praagman (USG, docent team 2019)

Modelleren in het wiskundeonderwijs is in Nederland dus al een tamelijk vertrouwd beeld en daarom is deelname aan IM²C geen absolute noodzaak. De twee wedstrijden (B-dag en A-lympiade) genieten redelijk grote belangstelling. Daarbij komt dat IM²C een team vijf dagen aan het werk zet en houdt en dat is geen geringe druk op de lessen en de leerlingen. Toch zijn er ook in ons land gelukkig scholen die IM²C aanbieden en stimuleren voor hun meest enthousiaste wiskunde B- en D-leerlingen.
De deelname vanuit Nederland vanaf het begin, zie je in tabel 2. In Nederland bepaalt een jury welke twee werkstukken worden ingezonden. De jury bestaat uit Bert Zwaneveld, Michiel Doorman, Tom Goris, Sonia Palha, Wim Caspers en John Poppelaars (expert bij uitstek omdat hij werkzaam is in Operations Research Consultancy,) en Henk van der Kooij (aansturing). Hoewel de prestaties van alle Nederlandse teams prijzenswaardig zijn, willen we toch twee teams er uitlichten, omdat zij prestaties van wereldformaat leverden: het USG-team van 2019 en het HWC-team in 2021. In 2019 waren er geen Outstanding teams, maar wel vijf Meritorious teams, waaronder het USG-team. De best presterende teams worden uitgenodigd om hun werk te komen presenteren op een internationale conferentie. In 2019 was dat de conferentie in Hong Kong van ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modeling and Applications). Op de foto in figuur 1 staat het USG-team, met een van de twee docenten Fransje Praagman.

>

figuur 1 vlnr: Ties Bloemen, Daniel Kunenborg, Lucas Baas, Guido Siers, Fransje Praagman, Henk van der Kooij

Bij het HWC wordt al meerdere jaren meegedaan met meer dan één team. In 2021 waren er 'slechts' vijf leerlingen die graag mee wilden doen. Omdat het maximum vier is per team, zijn ze de uitdaging aangegaan om twee teams te vormen: een team met drie meisjes en een met twee jongens. Op de foto in figuur 2 zijn de twee teams te zien, met hun docent Ploni Nijhoff en modelleer-begeleider Frits Hidden.

figuur 2 vlnr: Frits Hidden, Gabrielle Bitang, Emile Zevenhuizen, Roos Koerts, Lucia Folkers, Floris Huiskers, Ploni Nijhoff

Twee leerlingen over IM^{2}C:
"Meedoen aan de IM^{2}C is de uitdaging aangaan om al je wiskundekennis toe te passen op een werkelijk vraagstuk en daarnaast een manier om samen te werken met studenten die net zo enthousiast en gemotiveerd zijn als jij."
Floris en Emile (team HWC 2021)

Naast het feit dat een tweetal internationaal zo hoog scoort, wil ik zeker ook de mening van het Russische jurylid noemen. Hij meldde dat hij in al de jaren van IM^{2}C-jurering nog nooit een team had gezien dat zo professioneel het modelleerproces had doorlopen en zeer helder had gecommuniceerd. Voor hem verdiende hun werk dus het predicaat Outstanding! Vermoedelijk werd het Meritorious omdat één onderdeel niet expliciet was behandeld.

Zoals te zien in tabel 2 is het aantal Nederlandse scholen beperkt. Wat ons betreft gaan meer docenten/scholen de

Jaar	Deelname NL (#scholen, #teams)	Internationale resultaten NL teams	
2015	(5, 5)	Utrechts Stedelijk Gymnasium	M
		Penta College	S
2016	(4, 4)	Hermann Wesselink College	M
		Chr. College Nassau-Veluwe	H
2017	(6, 8)	Utrechts Stedelijk Gymnasium	H
		Utrechts Stedelijk Gymnasium	H
2018	(4, 6)	Hermann Wesselink College	H
		Hermann Wesselink College	H
2019	(5, 8)	Utrechts Stedelijk Gymnasium	M
		GSG Leo Vroman	H
2020	(2, 2)	Marianum	H
		Utrechts Stedelijk Gymnasium	S
2021	(2, 4)	Hermann Wesselink College	M
		Hermann Wesselink College	S

tabel 2 Nederlandse deelname (De vier kwalificaties: O(utstanding), M(eritorious), H(onorable mention) en S(uccessful participant)

uitdaging aan om enthousiaste leerlingen (bij voorkeur met wiskunde D omdat een brede wiskundige belangstelling bij IMMC zeker voordelen biedt) de gelegenheid te bieden om vijf dagen lang te ervaren hoe wiskundig modelleren kan worden ingezet om problemen uit de realiteit aan te pakken. Ben je geïnteresseerd geraakt? Zoek dan contact met Ruud Stolwijk of Henk van der Kooij voor nadere informatie.

Beeld van een opgave

Om een idee te geven van het soort opgaven bij IM^{2}C, is hier de opgave van 2019; heel compact en heel open.

Problem: What is the Earth's carrying capacity for human life?

1. Identify and analyze the major factors that you consider crucial to limiting the Earth's carrying capacity for human life under current conditions.
2. Use mathematical modeling to determine the current carrying capacity of the Earth for human life under today's conditions and technology.
3. What can mankind realistically do to raise the carrying capacity of the Earth for human life in perceived or anticipated future conditions? What would those conditions be?

Note that IM^{2}C is aware of available resources and references that address and discuss this question. It is not sufficient to simply re-present any of these models or discussions, even if properly cited. Any successful paper must include development and analysis of your model.

Your submission should consist of:
— One-page Summary Sheet.
— Your solution of no more than 20 pages, for a maximum of 21 pages with your summary.
— A complete list of references with in-text citations.
Note: Reference list and any appendices do not count toward the 21-page limit and should appear after your completed solution.

Glossary:

Carrying Capacity: The carrying capacity of a biological species in an environment is the maximum population size of the species that the environment can sustain indefinitely, given the food, habitat, water, and other necessities available in the environment.

Een docent over IM^{2}C:
"Ik zie vaak dat leerlingen graag hun wiskundige talenten inzetten bij het benaderen van tal van concrete, niet-triviale vraagstukken uit een hen aansprekende leefwereld. Dat kleine zetje geven en de stimulans van teamwork, gecombineerd met een meewerkende schoolorganisatie levert de basis voor soms prachtige prestaties. Meedoen aan IM^{2}C biedt daarom onze leerlingen een mooie ervaring."
Frits Hidden, gepensioneerd HWC-docent. Frits begeleidt nog graag leerlingen op het pad van modelleren

Noten

[1] zie: *immchallenge.org*
[2] https://www.immchallenge.org.au/
[3] zie: https://www.comap.com/highschool/contests/himcm/

Over de auteurs

Ruud Stolwijk is voorzitter van de A-lympiadecommissie en lid van het International Expert Panel van IM^{2}C. Daarnaast werkt hij als toetsdeskundige bij Cito en als wiskundedocent op de Vrije School te Zutphen.
E-mailadres: *ruud.stolwijk@cito.nl*
Henk van der Kooij is met pensioen, werkte bij het Freudenthal Instituut en is lid van het International Programme Committee van IM^{2}C.
E-mailadres: *henkvanderkooij@gmail.com*

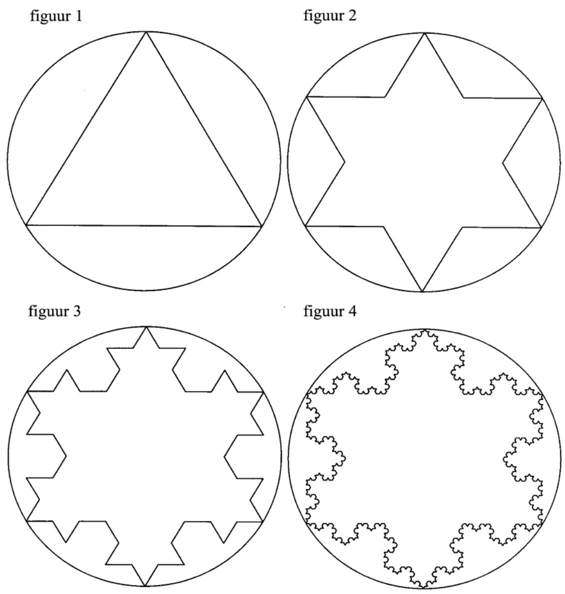
Jacques Jansen

Uitdagende problemen

Sneeuwvlokken en de hoorn van Gabriël

Het heelal schijnt oneindig groot maar begrensd te zijn. Is zoiets te begrijpen? Ofwel: paradoxen in kerstsfeer. Met sneeuwvlokken en de aartsengel Gabriël, die we toch ook kennen van de aankondiging van de komst van het kerstkind.

Sneeuwvlokkromme van Von Koch



In figuur 1 is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm en de omgeschreven cirkel getekend. Deze figuur noemen we het nulde model.
Uit een model ontstaat het volgende model volgens onderstaande procedure:
a Verdeel elke zijde van de veelhoek in drie gelijke stukken.
b Teken tegen elk middelste stuk een gelijkzijdige driehoek (aan de buitenkant van de veelhoek).
c Laat vervolgens elk middelste stuk uit het oorspronkelijke model weg.

Als deze procedure één keer is toegepast ontstaat het eerste model; de gelijkzijdige driehoek wordt een ster (zie figuur 2).
Pas hierop weer dezelfde procedure toe en je krijgt het tweede model (zie figuur 3). Zo kan men doorgaan, op den duur gaat de kromme steeds meer op een sneeuwvlok lijken (zie figuur 4).

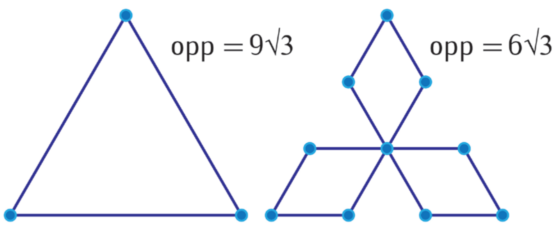
figuur 1 Havo B-examen 1996, tweede tijdvak

De ontwerper van de sneeuwvlokkromme is Helge von Koch, een Zweedse wiskundige (1879-1924). Het is alweer lang geleden dat deze fractale kromme zijn intrede deed in het voortgezet onderwijs. Zo komen we hem bijvoorbeeld tegen in het havo B-examen van 1996, zie een deel van de opgave in figuur 1. Zagen we in deze opgave al iets van dynamische meetkunde? In ieder geval heeft de sneeuwvlokkromme een zeer interessante eigenschap. Wat gebeurt er door het toepassen van de procedure met de vorm van de kromme, de lengte van de vorm en de omsloten oppervlakte? Het is de vraag of de examenkandidaten zich dat goed hebben gerealiseerd. Wat meteen opvalt, is dat de vorm binnen de omgeschreven cirkel van de gelijkzijdige driehoek blijft, zie het nulde model. Belangrijk zijn bij dit onderzoek de formules voor de lengte en de oppervlakte van de gesloten kromme. Als je de twee formules zelf wilt opstellen dan moet je even niet verder lezen. De examenmakers gaven de formules prijs. Blijkbaar durfden ze dat niet aan de kandidaten over te laten. Bij de omtrek had dat best gekund. Ik geef je ze nu: P_n is de omtrek van de veelhoek in het n-de model. Een beter woord voor model is misschien fase. Er geldt: $P_n = 18 \cdot (\frac{4}{3})^n$. Immers het aantal lijnstukjes wordt bij elke toepassing van de procedure vier keer zo groot, maar de lengte van een lijnstukje wordt drie keer zo klein.
O_n is de oppervlakte van de veelhoek in het n-de model. $O_n = (1{,}6 - 0{,}6(\frac{4}{9})^n) \cdot 9\sqrt{3}$ Bij de afleiding van de oppervlakte let je op de driehoekjes die er steeds bijkomen. Het aantal wordt steeds vier keer zo groot maar de oppervlakte wordt negen keer zo klein. We hebben dan een meetkundige rij (rij met een exponentieel verband) vanaf het eerste model van n termen. Als we de factor $9\sqrt{3}$ (oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek) even buiten beschouwing laten krijgen we de optelling van het getal 1 en nog n termen: $1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + (\frac{4}{9})^2 \cdot \frac{1}{3} \ldots\ldots (\frac{4}{9})^n \cdot \frac{1}{3}$.

Met de somformule kun je het verder uitschrijven.
Uit deze formules leiden we af dat de lengte van de kromme, bijbehorende groeifactor is groter dan 1, oneindig groot wordt. De oppervlakte van de kromme nadert tot $1{,}6 \cdot 9\sqrt{3} \approx 25\text{cm}^2$. Er is sprake van begrensde groei. Kijken we naar de verhouding van de oppervlakte van het n-de model ten opzichte van de oorspronkelijke oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek $(1{,}6 - 0{,}6(\frac{4}{9})^n)$, dan nadert dit op den duur de waarde 1,6. Zijn er nu meer krommen van oneindige lengte en begrensde oppervlakte? Jazeker, de *Antisneeuwvlokkromme*.

Antisneeuwvlokkromme

Hoe construeer je deze kromme? Beschouw weer het nulde model, de gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm.
In plaats van het middelste derde deel van een zijde te vervangen door twee dezelfde lijnstukken naar buiten gericht, kunnen we die ook naar binnen richten. Zie figuur 2 voor het nulde en eerste model. Dit procedé kun je oneindig voortzetten. Voor de leerlingen is het aardig om het tweede model te construeren. Misschien ook nog het derde model?



figuur 2

Merk op dat het aantal lijnstukken net als bij de sneeuwvlokkromme vier keer zo groot wordt én dat de lengte van de figuur $\frac{4}{3}$ keer zo groot wordt. Maar hoe zit het nu met de formule van de oppervlakte? Gaat die formule er heel anders uitzien dan $O_n = (1{,}6 - 0{,}6(\frac{4}{9})^n)\cdot 9\sqrt{3}$, die van de sneeuwvlokkromme dus? Heeft het de volgende vorm $A_n = (a - b\cdot(\frac{4}{9})^n)\cdot 9\sqrt{3}$, als we ervan uitgaan dat er sprake is van een begrensd groeiproces? Laten we ervan uitgaan, hoewel we het niet zeker weten. A_n staat voor de oppervlakte van het n-de model bij de antisneeuwvlokkromme. De oppervlakte van het nulde model is $9\sqrt{3}$ en dat levert als eis: $a - b = 1$.
De oppervlakte van het eerste model is $\frac{2}{3}\cdot O_0 = 6\sqrt{3}$ (ga maar na!). Dit geeft de tweede eis: $a - \frac{4}{9}b = \frac{2}{3}$. Voor b substitueren we vanwege $b = a - 1$. Dat geeft dan $a = \frac{2}{5}$ en $b = -\frac{3}{5}$ met als resultaat de oppervlakteformule
$A_n = (\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{9})^n)\cdot 9\sqrt{3}$.
Deze formule kun je natuurlijk ook op die andere manier afleiden. De oppervlakte van het n-de model ten opzichte van de oorspronkelijke oppervlakte van de gelijkzijdige driehoek nadert op den duur 0,4. Ook dit is een voorbeeld van een kromme met een oneindige lengte en een eindig oppervlak.

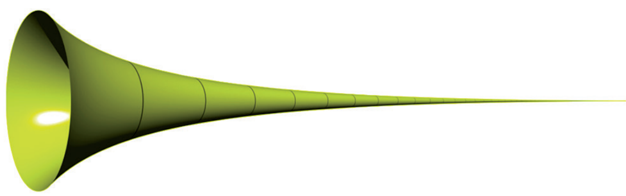
Hebben we nu zoiets vergelijkbaars in de driedimensionale ruimte? Is er een vorm met een oneindig oppervlak en een eindig volume? Hiervoor kijken we eerst, wellicht verrassend, naar een schilderij waarin onder andere trompetten te zien zijn.

De hoorn van Gabriël

De naam verwijst naar het religieuze verhaal van de dag des oordeels, waarop aartsengel Gabriël op de trompet blaast. *Het laatste oordeel* is een door Michelangelo geschilderd fresco, dat te zien is in de Sixtijnse kapel in Vaticaanstad. Diverse trompetten zijn in het schilderij waar te nemen, zie figuur 3.

figuur 3 Het laatste oordeel, 1541. Fresco door Michelangelo, Sixtijnse kapel in Vaticaanstad.

Het oneindige wordt met het goddelijke in verband gebracht. Maar wat is oneindig aan de hoorn? Laten we de vorm van de hoorn nader bekijken en vervolgens de inhoud en de oppervlakte ervan.

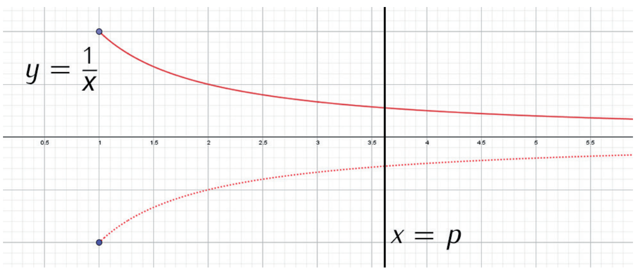


figuur 4 Hoorn van Gabriël of trompet van Torricelli

De hoorn van Gabriël wordt ook wel de trompet van Torricelli genoemd. Het is een ruimtelijk lichaam dat bedacht is door de Italiaanse wis- en natuurkundige Evangelista Torricelli (1608-1647).
De vorm kunnen we verkrijgen door de grafiek van $y=\frac{1}{x}$ met domein $[1, \rightarrow\rangle$ te wentelen om de x - as, zie figuur 5.
De inhoud kunnen we zien als een optelling van de inhouden van cirkelvormige plakjes met dikte Δx : $\sum \pi \cdot y^2 \cdot \Delta x$. Dat noteren we nu als

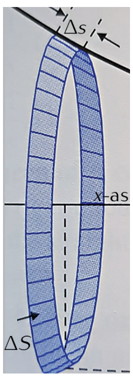
$$\lim_{p\to\infty} \int_1^p \pi \cdot (\frac{1}{x})^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \lim_{p\to\infty} (-\frac{1}{p}+1) = \pi$$

De hoorn heeft een eindige inhoud.



figuur 5

Hoe pakken we nu de berekening van de oppervlakte van het omwentelingslichaam aan? Grofweg - belangrijk voor de leerlingen - kunnen we dat zien als een aaneenschakeling van hele dunne cilindermantels, zie figuur 6. De oppervlakte van zo'n manteltje geven we aan met ΔS. Het is de omtrek van een cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte van het cilindertje.



figuur 6

Op positie x is $\Delta S = 2\pi \cdot \frac{1}{x} \cdot \Delta s$ waarbij Δs een stukje booglengte is, dat we kunnen benaderen met een recht lijnstukje. Dat lijnstukje kun je zien als de schuine zijde in een rechthoekige driehoek met rechthoekzijden Δx en Δy.
Met de stelling van Pythagoras vinden we:
$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Dit vraagt om de afgeleide van $y = \frac{1}{x}$ te gebruiken. We delen Δs door Δx en herschrijven:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \rightarrow \Delta s = \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \cdot \Delta x$$

De oppervlakte van het omwentelingslichaam is de som van de oppervlakten van al die cilindermanteltjes:

$$\sum \Delta S = \sum 2\pi \cdot (\frac{1}{x}) \cdot \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \cdot \Delta x \, .$$

Merk op dat $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ waarbij $f(x) = \frac{1}{x}$.
Laten we de smalheid van een cilindermanteltje naar nul naderen ($\Delta x \rightarrow 0$), dan schrijven we $\int_1^p 2\pi \cdot (\frac{1}{x}) \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \mathrm{d}x$.
Maar dit getal – let op de integrand – is groter dan $\int_1^p 2\pi \cdot (\frac{1}{x}) \mathrm{d}x$ waarvan de waarde gelijk is aan $2\pi \cdot \ln(p)$.
Laten we p oneindig groot worden, dan zien we dat de oppervlakte van het omwentelingslichaam oneindig groot wordt. Je zou dus kunnen zeggen dat je oneindig veel verf nodig hebt om de oppervlakte van de hoorn te schilderen terwijl de hoeveelheid verf om de inhoud van de hoorn te vullen beperkt is. We maken ons even niet druk om de grootte van een verfmolecuul. De conclusies bij de berekeningen gaan wellicht tegen je gevoel in. Paradoxaal?

Tot slot

Er is een leuk boekje verschenen van Margriet van der Heijden *De Wiskunde Trompet en andere verhalen over vormen en getallen*. Zij schreef jarenlang in de *NRC* een wiskundecolumn voor de jeugd. Hierin behandelt ze onder andere voor leerlingen in de onderbouw de *trompet* met behulp van een taart met verdiepingen. Dit boekje kan ik je aanraden, trompetter het rond.

Bronnen

[1] Wells, D. (1993). *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde.* Amsterdam: Bert Bakker.
[2] Lamúa, A. (2016). *Het boek der oneindigheid.* Kerkdriel: Librero.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*.

Peter Kop

Formules schetsen om symbol sense te bevorderen II

Hoe kun je het inzicht van leerlingen in formules bevorderen? En kunnen ze daarmee ook beter algebraïsche problemen oplossen? Op deze vragen zocht Peter Kop een antwoord in zijn promotie. In twee artikelen laat hij zien hoe het schetsen van formules via herkennen en redeneren daarbij kan helpen.

Inleiding

In het eerste artikel in *Euclides* 96-7 werden de lessenserie voor vwo 5 wiskunde B, de instrumenten en de resultaten van het onderzoek beschreven. In dit tweede artikel wordt een onderbouwing van de lessenserie vanuit de literatuur gegeven. Daarnaast worden voorbeelden van taken gegeven die het leren redeneren met en over formules bevorderen en eenvoudig in de klas gebruikt kunnen worden.

Waarom het schetsen van formules met de hand?

Voor veel leerlingen zijn algebraïsche formules abracadabra, ze kunnen geen betekenis geven aan formules en/of structuur zien in die formules. In het reguliere onderwijs heeft het manipuleren van algebraïsche expressies een prominente rol: leerlingen moeten via dat algebraïsch manipuleren van expressies inzicht in formules ontwikkelen. Dat lijkt geen succesvolle weg. Steeds laat onderzoek zien dat deze route slechts in beperkte mate leidt tot symbol sense.[14, 15]

In de literatuur wordt aangegeven dat betekenis geven aan algebraïsche formules kan gebeuren door die formules te koppelen aan andere representaties van functies, zoals grafieken en realistische contexten.[16] Lineaire en exponentiële functies kunnen goed gekoppeld worden aan realistische contexten die als denkcontext kunnen fungeren. In schoolboeken zien we daar voorbeelden van. Voor andere functies is het koppelen aan een realistische context lastiger. Het kan natuurlijk wel via modelleren waar bij een context/probleemsituatie zelf een formule gemaakt moet worden. Maar het zelf modelleren lijkt voor veel leerlingen een extra hobbel en dus niet geschikt om inzicht in formules te leren. Daarom kozen wij ervoor om formules te koppelen aan grafieken door het schetsen van formules. Grafieken zijn voor de meeste mensen toegankelijker dan formules en visualiseren het 'verhaal' dat een functie vertelt in een enkel beeld. Daarmee benadrukt de grafiek meer het objectkarakter van een functie, terwijl de formule meer het proceskarakter benadrukt. Deze proces-objectdualiteit, het vermogen om functies zowel als proces (aan een onafhankelijke variabele wordt een afhankelijke variabele gekoppeld) als object (een functie is een entiteit) te zien, is volgens de theorie een belangrijk obstakel in het leren over functies. Bij het schetsen van formules wordt op een natuurlijke wijze aandacht besteed aan deze dualiteit, omdat zowel het proces- als het objectkarakter een rol speelt.

In de literatuur wordt geadviseerd om gebruik te maken van technologie bij het leren over functies, waarmee formules eenvoudig omgezet kunnen worden in grafieken.[17] Goldenberg [18] heeft echter gesuggereerd dat studenten het verband tussen formule en grafiek beter leggen als zij grafieken met de hand tekenen. De noodzaak van pen-en-papier activiteiten, naast het gebruik van technologie, werd later door anderen onderschreven.[3] Dit is de reden dat we kozen voor het schetsen van formules met de hand.

Bij het leren van calculus blijkt *covariational reasoning* een belangrijk aspect te zijn. Covariational reasoning gaat over de relatie tussen de verandering van invoer en verandering van uitvoer van een functie, en kan in een aantal ontwikkelingsstappen beschreven worden: van de notie van 'y verandert als x verandert', via het stijgen/dalen van functies, naar de mate van verandering, naar de gemiddelde verandering en de momentane verandering.[19] Vooral de eerste niveaus spelen een rol bij het schetsen van formules.

GQR-ontwerp

De lessenserie (GQR-ontwerp (Graphing formulas through recognition and qualitative reasoning, zie deel1) is gebaseerd op de theorie van Galperin, die in zijn sociaal-constructivistische aanpak gebruik maakt van >

basiseenheden, principes voor identificatie, die expliciet worden uitgelegd, het verbaliseren door leerlingen, en een geleidelijke internalisatie van denkprocessen.[20] In onze lessenserie staat de meta-heuristiek 'bevragen van de formule' centraal. Deze meta-heuristiek stimuleert leerlingen een houding aan te nemen waarin aandacht besteed wordt aan 'wat herken ik' en 'wat zou ik kunnen gaan doen' in plaats van direct te starten met berekeningen. Ook wordt expliciet denkgereedschap in de vorm van een repertoire van functiefamilies en kwalitatief redeneren aangeleerd. Tijdens de lessen werken leerlingen voornamelijk in twee- en drietallen om ze te verleiden om hun gedachten en argumenten te verwoorden. Daarnaast zijn er reflectievragen waarin leerlingen gedwongen worden om zelf voorbeelden te bedenken, zoals de opdracht 'bedenk drie functies waarvoor geldt dat je eenvoudig de top (toppen) kunt aflezen.'

Bij de opzet van de lessenserie is er nadrukkelijk voor gekozen om de leerstof te beperken. Symbol sense, omschreven door o.a. Arcavi[1] is een breed concept dat in bijna alle fasen van het oplossen van realistische problemen een rol speelt. We kiezen ervoor slechts een enkel aspect van symbol sense, namelijk het inzicht in formules, te onderwijzen. Ten tweede kiezen we ervoor om een beperkt algebradomein te behandelen, namelijk het koppelen van formules en grafieken. Door het onderwijzen van expert-strategieën en door deze beperking zijn leerlingen in staat een zekere expertise in dit beperkte algebradomein te ontwikkelen. Daarmee kunnen ze vertrouwen opbouwen in hun eigen denken en redeneren. Die expertstrategieën, het bevragen van formules, het herkennen van structuur en bouwstenen van formules, en het kwalitatief redeneren, blijken essentiële aspecten van symbol sense, die ook in een andere situatie, namelijk bij het oplossen van niet-standaard algebraproblemen, gebruikt kunnen worden. Onze aanpak integreert verschillende leerdoelen zoals houding, een samenhangende kennisbasis en redeneren. Natuurlijk realiseren we ons dat algebraïsche expertise vaak breder is. Vooraf is vaak niet duidelijk of een probleem enkel met herkennen en redeneren op te lossen is. Maar om leerlingen uit de 'rekenmodus' te halen en in de 'redeneermodus' te krijgen kiezen we voor opgaven die zonder (veel) algebraïsch manipuleren op te lossen zijn.

Ons ontwerp onderscheidt zich van andere benaderingen door de systematische aanpak, de focus op herkennen en redeneren in plaats van manipuleren van expressies, het expliciet aanleren van denkgereedschap, het gebruik van basisfunctiefamilies als bouwstenen, en door het expliciet aanleren van kwalitatief redeneren. Het gebruik van basisfunctiefamilies als bouwstenen voor formules in plaats van variabelen, volgt Davis' suggestie om direct grotere denkeenheden te gebruiken om de structuur van formules beter te kunnen herkennen.[21] Kwalitatief redeneren, gekenmerkt door een focus op de globale vorm van de grafiek, globale beschrijvingen, en verwaarlozing van wat niet relevant is in de probleemsituatie, is belangrijk en wordt door experts constant gebruikt, maar wordt in het reguliere onderwijs nauwelijks expliciet onderwezen.[22]

Hoe verder?

Deze lessenserie werd na ons onderzoek meerdere keren gebruikt, twee keer in 5 vwo wiskunde B-klassen en twee keer in afgeslankte vorm in vwo wiskunde A-klassen. Steeds met vergelijkbare resultaten: in de pre-test scoorden leerlingen heel matig, tijdens de lessen werkten de leerlingen in groepjes (redelijk) gemotiveerd aan de opdrachten, vaak werd er geredeneerd en werden met armgebaren grafieken uitgebeeld, en na afloop gebruikten de leerlingen meer herkenning en kwalitatief redeneren. Als aanvulling van een mogelijk vervolg op deze lessenserie zou meer aandacht besteed kunnen worden aan derde- en vierdegraads polynoomfuncties, het optellen en vermenigvuldigen van sub-formules, en het combineren van herkennen en redeneren met het manipuleren van formules. Na de lessenserie zagen de leerlingen $y = -x^4 + 6x^2$ vaak nog als een optelling van de bouwstenen $y = -x^4$ en $y = 6x^2$ en niet als een lid van de vierdegraads polynoomfuncties. Kleine bouwstenen zorgen vaak voor meer werk en mogelijk voor een overbelasting van het werkgeheugen. In de toekomst zullen we ook aandacht moeten besteden aan hoe het algebraïsch manipuleren van formules in een uitbreiding van de lessenserie aan bod kan komen. Dit manipuleren kan een probleem soms eenvoudiger maken, bijvoorbeeld bij het schetsen van $y = -x^4 + 6x^2$ geeft $y = x^2(-x^2 + 6)$ eenvoudig de nulpunten. Soms is algebraïsch manipuleren noodzakelijk om een oplossing te krijgen, zoals bij 'hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $3{,}6(1 - e^{-2{,}5t}) = 10t$?'

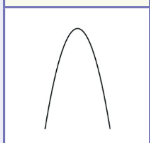
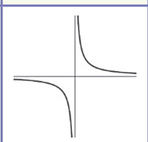
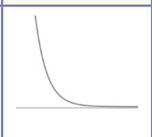
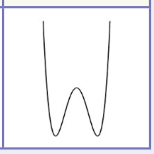
Het GQR-ontwerp is ontwikkeld voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs en er wordt van uitgegaan dat leerlingen via regulier onderwijs al een eerste kennismaking hebben gemaakt met de diverse functiefamilies als lineaire, exponentiële, logaritmische, machts-, gebroken en wortelfuncties. Maar ook voor de onderbouw zou een dergelijke aanpak mogelijk zijn. Lineaire en exponentiële functies kunnen heel goed aangeleerd worden met behulp van realistische contexten die als denkgereedschap kunnen fungeren. Een sponsorloop met een bedrag per ronde en een eventueel startbedrag exploreren leidt tot formules van de vorm $y = a \cdot x + b$ en bijbehorende grafieken. Exploreren van het aantal nieuwe besmettingen per periode van vijf dagen door middel van het R-getal leidt tot formules van de vorm $y = b \cdot g^x$ en bijbehorende grafieken. Onze suggestie zou zijn om bij het leren over de andere functiefamilies te starten met het koppelen van formules aan grafieken. Daarbij kan technologie als GeoGebra een belangrijke ondersteunende rol spelen. Zo kunnen een repertoire van basisfunctiefamilies, die direct gevisualiseerd kunnen worden, en strategieën als onderzoek van oneindig gedrag als denkgereedschap aangeleerd worden.

Andere ideeën om symbol sense te bevorderen

Naast de systematische aanpak via de beschreven lessenserie zijn er natuurlijk ook 'losse' opdrachten die de symbol sense van leerlingen kunnen bevorderen. Friedlander en Arcavi [23] hebben een *framework* geformuleerd met cognitieve processen voor algebra, waaronder *reverse thinking*, *global comprehension*, *constructing examples*, *informal thinking*, met daarbij mooie voorbeeldopgaven. Kindt[2] geeft vele voorbeelden van productief oefenen in algebra. Net als de taken in ons onderzoek bevorderen dit soort (formatieve) taken de symbol sense door een focus op een samenhangende kennisbasis, op herkennen en op redeneren. Hieronder volgen enkele voorbeelden van dit soort taken.

Voorbeeld 1

Een categoriseringstaak voor 5/6 vwo. Dit is een van de taken die we in het onderzoek gebruikten. Gegeven veertig formules en vier grafieken. Categoriseer deze formules op basis van hun grafiek: formules die een vergelijkbare grafiek hebben komen in eenzelfde categorie. Gebruik zoveel categorieën als nodig.

$2x\sqrt{x}$	$(100x)^{\frac{1}{2}}$	$2\cdot(\sqrt{2})^x$	$\sqrt{8-x^2}$
$100-e^x$	$4\sqrt{10-x}$	$3(8-\frac{x}{5})$	$3x^{-2}$
			

tabel 1

Dit soort taken kunnen zowel individueel als in tweetallen gedaan worden en geven veel informatie over het denken van leerlingen. Dit soort categoriseringstaken worden veel gebruikt door o.a. Mason en Swan.

Voorbeeld 2

In de brochure 'Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten voor de onderbouw'[24] worden hele taken gebruikt met als doel dat leerlingen exploreren om te structureren, leren problemen op te lossen, en leren om te redeneren en te abstraheren.

Opdracht 5.2.1.2.a Exploreren met GeoGebra

Formules die een x^2 bevatten noemen we kwadratische formules en de bijbehorende grafiek is een parabool. Een parabool heeft een top (het hoogste of laagste punt), heeft een symmetrieas, snijdt de y-as en kan de x-as snijden in de nulpunten.
Er zijn verschillende vormen van een kwadratische formule, namelijk
$y = a(x-d)(x-e)$ $\quad y = a(x-p)^2+q$ $\quad y = ax^2+bx+c$

a. Zoek met GeoGebra voor elk type formule systematisch die punten en onderzoek hoe je die coördinaten uit de formule kunt afleiden.
b. Zet op een rijtje wat je hebt ontdekt en geef daar voorbeelden bij.
c. Hoe kun je uit de formule $y = a(x-p)^2+q$ de nulpunten berekenen?

figuur 1 Exploreren voor structuur

Oefening 5.3.3.1.f Wie wint het?

De ene grafiek stijgt of daalt veel sneller dan de andere. Dat hangt natuurlijk af van de formule.
Ga bij de volgende tweetallen formules na welke het op de duur wint, dus als $t \to +\infty$.

a. $V = 2500t$ en $K = 0{,}001t^2$
b. $P = t^3$ en $Q = 1{,}5^t$
c. $L = \dfrac{3t+9}{t}$ en $M = \dfrac{t+1000}{t}$

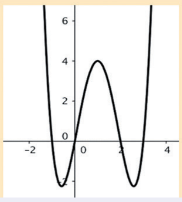
figuur 2 Probleem oplossen

Oefening 5.2.1.1.h Even wat anders

Je hebt gevonden dat je bij een kwadratische formule in de ontbonden vorm snel de nulpunten van de bijbehorende grafiek kunt berekenen.
Dat geldt niet alleen voor kwadratische formules en parabolen.
a. Schets de grafiek bij de formule $y = (-x+5)(x-7)(x-4)$. Bereken eerst de nulpunten en maak een tabel totdat je weet hoe die grafiek loopt.
b. Doe hetzelfde voor de formule $y = (-x+4)(x-3)(x-1)(-x-1)$.

Oefening 5.2.1.1.i Een formule zoeken

Bedenk bij deze grafiek een formule.



figuur 3 Redeneren en abstraheren

In de wiskunde A-methode van de GSG Leo Vroman die op dit moment ontwikkeld wordt gebruiken we ook opdrachten die symbol sense kunnen bevorderen.

Voorbeeld 3

Omcirkel de formules die gelijkwaardig zijn met $y = \dfrac{60}{x}$; x is steeds positief.

$y = 12x^{-1}\cdot 5$; $\quad y = \dfrac{12}{x^2}\cdot 5x$; $\quad y = \dfrac{60+x}{x^2}$; $\quad y = 60\cdot\dfrac{1}{x}$;

$y = \dfrac{6}{x}\cdot\dfrac{10}{x}$; $\quad y = \dfrac{6}{x}+\dfrac{54}{x}$; $\quad y = \dfrac{30}{x}\cdot 2$

Voorbeeld 4

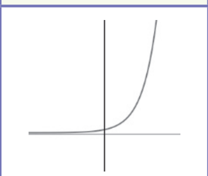
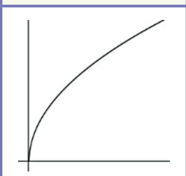
Kijk op verschillende manieren naar een formule.
Het aantal diersoorten op een eiland (S) is o.a. afhankelijk van de oppervlakte van het eiland (A). Voor een bepaald gebied geldt: $S = 3{,}2 \cdot A^{0{,}3}$, waarbij S het aantal soorten en A de oppervlakte in km^2. In deze opgave kijken we nu naar de formule: $G = \dfrac{3{,}2 \cdot A^{0{,}3}}{A}$.

Beschrijf in eigen woorden wat G in deze context betekent.

- Schets de grafiek van S en van G.
- De formule van G kan ook anders geschreven worden.
- Schrijf een aantal gelijkwaardige formules voor G op.
- Onderzoek hoe G verandert als A tweemaal zo groot wordt. Maak eventueel eerst een tabel voor G.

Voorbeeld 5

Welke hoort er niet bij? (gebaseerd op Burkhardt en Swan [13]).

a.	$y_1 = 4x^{-1} \cdot 2x^{-1}$	$y_2 = 6x^{-2}$	$y_3 = 8x^{-2}$
b.	$y_1 = 6x^{-1} + x^{-1}$	$y_2 = 6x^{-2}$	$y_3 = 7x^{-1}$
c.	$y_1 = \dfrac{6x^{-2}}{x^{-1}}$	$y_2 = \dfrac{6}{x}$	$y_3 = 6$
d.		$y = 0{,}12x^{1{,}2}$	$y = 3 \cdot 1{,}2^t$
e.	$y = 7{,}22x^{0{,}2}$		$7 \cdot 0{,}72^t$

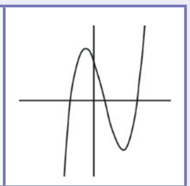
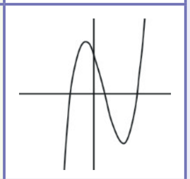
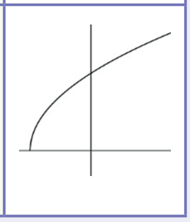
tabel 2

Voorbeeld 6

Categoriseringstaak voor 4 havo, nadat lineaire en exponentiële functies aan bod zijn geweest.
Orden de onderstaande formules in drie categorieën: lineair, exponentieel, geen van beide.
$y = 100 - 2^t$; $y = 100 \cdot 1{,}9^t$; $P = 3{,}6^x$; $A = 5 \cdot 1{,}2^p$; $R = 120 - 0{,}6t$; $y = 3(x + 2) - 9$; $z = 100(4 \cdot 0{,}9)^t$; $P = 3{,}2^{x+4}$; $R = \frac{120 - 1{,}6t}{4}$; $H = \frac{4}{2t}$; $F = 5 \cdot 1{,}2^{-t}$; $B = 120 + 3t(t + 2)$; $C = 120 - (t + 2)$; $D = \frac{4}{2^t}$; $2x + 3y = 10$; $K = 5 \cdot t^{1{,}4}$; $L = 100 \cdot R^{0{,}5}$

Voorbeeld 7

Kwalitatief redeneren voor 5 havo. Hier volgen steeds een formule en een grafiek. Jij moet zonder GR, met behulp van de uitkomst bij $x = 0$ en het oneindig gedrag, controleren of de grafiek bij de formule kan passen. Geef steeds een toelichting als de grafiek niet bij de formule kan passen.

$y = 2x + (x + 2)$	
$y = 4 + \dfrac{2}{x}$	
$y = 3\sqrt{x - 6}$	

tabel 3

Voorbeeld 8

Redeneren met formules voor 6 vwo.
Geef steeds een redenering aan de hand van de formule of schets een grafiek (zonder GR).

a Het aantal verschillende diersoorten op een bepaald eiland kan benaderd worden door $A = \dfrac{300}{2 + 3 \cdot 0{,}87^t}$ waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 2000. Wat vertelt deze formule over het aantal verschillende diersoorten op dit eiland in de loop van de tijd?

b De formule $W = 750P - 25000\sqrt{P}$ geeft de winst W in dollars bij een productie P; de productie P is in tonnen per jaar. Wat vertelt deze formule over de winst W als de productie P toeneemt?

c Het gewicht (in kg) van een bepaalde vissoort kan benaderd worden met behulp van de formule

$G = 2{,}9(1 - 0{,}93 \cdot 0{,}908^t)^3$, waarbij t de leeftijd in jaren. Wat vertelt deze formule over het gewicht G als t toeneemt?

d Het percentage water dat ververst wordt, kan berekend worden met de formule $W = 100(1 - \frac{10}{t+10})$, waarbij W het percentage water is dat ververst wordt en t de tijd in dagen. Wat vertelt deze formule over het percentage W als t toeneemt?

Tot slot

Deze opdrachten die overal en altijd kunnen worden ingezet om symbol sense te bevorderen focussen vooral op het doorzien van formules, ordenen van kennis en redeneren. Ons advies is om leerlingen hierbij te laten samenwerken, zodat zij gedwongen worden met elkaar te overleggen en hun gedachten en argumenten onder woorden te brengen. We pleiten ervoor om leerlingen meer te laten 'kijken' naar formules, te redeneren met en over deze formules en ze de mogelijkheid te geven betekenis toe te kennen aan de formules, bijvoorbeeld via de link met grafieken. En dat vanaf de start van het algebra-onderwijs. Daarmee stellen we ook de overheersende rol van het manipuleren van expressies/formules in het reguliere onderwijs ter discussie, zowel met betrekking tot het ontwikkelen van inzicht in formules als met betrekking tot manipuleren als doel van algebra onderwijs *an sich*. Verder onderzoek naar de balans in het onderwijs tussen het manipuleren van formules en het leren doorzien van formules en het redeneren met en over formules is nodig. We eindigen met de constatering dat het onderwijzen van het schetsen van formules op basis van GQR-ontwerp lijkt te helpen bij het systematisch bevorderen van inzicht in formules en het gebruik van symbol sense voor het oplossen van algebrataken. Daarnaast kan ook, op incidentele basis, aandacht besteed worden aan symbol sense via (formatieve) taken waarbij de focus is op denkactiviteiten zoals ordenen/categoriseren, redeneren, generaliseren.

Noten

De noten bij dit artikel vind je op de website van *Euclides*. *vakbladeuclides.nl/967symbolsense*

Over de auteur

Peter Kop is vakdidacticus bij ICLON, lerarenopleiding in Leiden, docent aan de GSG LeoVroman, en redactievoorzitter van de Zebrareeks.
E-mailadres: *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl*

Uitslag Nederlandse Wiskunde Olympiade 2021 en inschrijving 2022

Op vrijdag 12 november werden tijdens de prijsuitreiking aan de Technische Universiteit Eindhoven de winnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2021 bekendgemaakt. De vijf leerlingen (in elk van drie categorieën) die over drie rondes de beste prestatie hebben geleverd, ontvingen geldprijzen van 50 tot 250 euro, beschikbaar gesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De prijswinnaars en natuurlijk ook hun wiskundedocenten mogen erg trots zijn op deze fantastische resultaten!

Prijswinnaars klas 6

1	Casper Madlener	Leo Kannercollege	Leiden
2	Kees den Tex	Gem. Gymnasium	Hilversum
3	Lars Pos	Stadslyceum	Groningen
4	Rikkie Gieler	Spinozalyceum	Amsterdam
5	Jelle Bloemendaal	Corlaer College	Nijkerk

Prijswinnaars klas 5

1	Hylke Hoogeveen	Openbaar Lyceum	Zeist
2	Lance Bakker	Katholieke SG	Hoofddorp
3	Jeroen Schrader	Van der Capellen	SG Zwolle
4	Daniël van Westreenen	Stanislascollege	Delft
5	Mads Kok	Utrechts Stedelijk Gymnasium	Utrecht

Prijswinnaars klas 4 en lager

1	Allie Zong	Lorentz Casimir Lyceum (4 vwo)	Eindhoven
2	Meck Verhoogt	Gerrit Rietveld College (4 vwo)	Utrecht
3	Michiel van der Luit	Develstein College (4 vwo)	Zwijndrecht
4	Felix Hamoen	Leidsche Rijn College (4 vwo)	Utrecht
5	Yanniek Nitescu	Christiaan Huygens College (4 vwo)	Eindhoven

Een nieuwe jaargang van de Wiskunde Olympiade start in januari. Elke school kan zelf een geschikte dag en tijd kiezen in de periode van 17 t/m 27 januari 2022. Aanmelden kan tot 6 januari 2022.

Zie *www.wiskundeolympiade.nl* voor meer informatie. Wie weet behoort volgend jaar wel een van uw leerlingen tot de prijswinnaars!

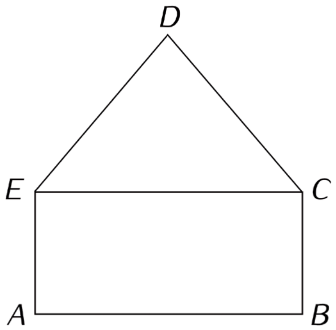
NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Puzzel 97-3

Middellijnen

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel is naar een idee van Gerard Bouwhuis. Hierbij worden meetkundige figuren door een rechte lijn in twee stukken verdeeld, zodanig dat die twee stukken gelijke omtrek en oppervlak hebben. Zoals Gerard schrijft is dit onderwerp voor driehoeken al aardig afgegraasd en is het te vinden op internet. In de literatuur wordt het vaak *triangle equalizer* of splitter genoemd.[1] Maar Gerard keek ook naar andere meetkundige figuren zoals een cirkel. En dan is het duidelijk: elke middellijn voldoet. En omdat bij een driehoek blijkt dat zo'n lijn altijd door het middelpunt van de ingeschreven cirkel gaat, noemde hij zo'n lijn 'middellijn'. Hij keek ook naar een symmetrische vijfhoek met twee rechte hoeken, ofwel een huisje, zie figuur 1. Met name opgave 1a is ook geschikt voor leerlingen die de stelling van Pythagoras hebben geleerd.



figuur 1

Opgave 1a: Er is precies één 'huisje' waarbij behalve de symmetrielijn ook de dakgoot (CE) het oppervlak en omtrek in twee gelijke delen verdeelt. Hierbij is echter geen sprake van een ingeschreven cirkel. Bepaal de afmetingen van zo'n huisje.

We gaan nu op zoek naar huisjes die wel een ingeschreven cirkel hebben. We kunnen het huisje van opgave 1a hoger maken zonder de vorm van het dak te veranderen en er zo een raaklijnenvijfhoek van maken. De lijnen die omtrek en oppervlakte halveren blijken dan door het middelpunt van de ingeschreven cirkel te gaan, zodat we ze met recht middellijnen mogen noemen. Het zijn er oneindig veel, waarvan één horizontaal.

Opgave 1b: Bepaal de afmetingen van dit huisje met ingeschreven cirkel en hetzelfde dak als in opgave 1a en geef aan welke middellijnen er zijn. Onderbouw je conclusies. Bij opgave 1c en 1d mag het dak een andere hellingshoek hebben.

Opgave 1c: Toon aan dat het huisje van 1b ook de enige is die een horizontale middellijn heeft, nu onafhankelijk van de helling van het dak.

Opgave 1d: Bij oneindig veel andere raaklijnenhuisjes (met dus een andere hoek van de daklijnen) blijken er precies één (de symmetrielijn) of drie middellijnen door het midden van de ingeschreven cirkel te zijn. Wat kun je zeggen over de helling van het dak als er precies drie middellijnen zijn? Geef een bewijs. Tip: Twee van die lijnen snijden dan het dak en de vloer.

Vervolgens keek Gerard naar de middellijn(en) van driehoeken. We geven een aantal eigenschappen zonder bewijs. Sommige zijn niet moeilijk te bewijzen en ze zijn te vinden op internet.

— Elke middellijn gaat door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

— Als een middellijn PQ bij hoekpunt A een driehoek PAQ afsnijdt, met P op $c = AB$ en Q op $b = AC$, dan is de lengte van $p = AP$ en $q = AQ$ te berekenen met:

$p, q = \dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 2bc}}{2}$ waarbij s = halve omtrek van de driehoek. P en Q mogen dan natuurlijk niet buiten de driehoek vallen. Deze formule is af te leiden uit het feit dat $s = p + q$ en $bc = 2pq$.

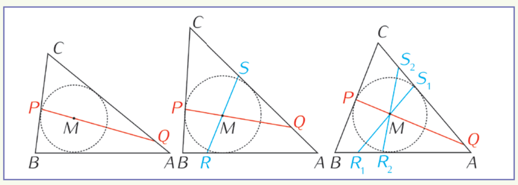
Als A de scherpste hoek is van de driehoek, dan geldt afhankelijk van het deel onder de wortel:

Als s^2 -$2bc < 0$: de driehoek heeft precies één middellijn.

Als s^2 -$2bc = 0$: de driehoek heeft precies twee middellijnen.

Als s^2 -$2bc > 0$: de driehoek heeft precies drie middellijnen.

Daarbij wordt het hoekpunt met de grootste hoek nooit door een middellijn afgesneden. Zie figuur 2, waarin steeds A de kleinste hoek is en B de grootste.



figuur 2

— Als voor een lijn er van onderstaande drie voorwaarden twee voldoen is er sprake van een middellijn.
   a) De lijn verdeelt de omtrek in twee gelijke delen.
   b) Die lijn verdeelt het oppervlak in twee gelijke delen.
   c) Die lijn gaat door het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Deze gegevens mag je zonder bewijs gebruiken in de uitwerkingen van de opgaven.

Opgave 2a en 2b gaan over gelijkbenige driehoeken. Je mag kiezen uit 2a en 2b.

Opgave 2a: Er zijn precies twee gelijkbenige driehoeken waarbij minstens een van de middellijn(en) evenwijdig is/zijn aan een zijde. Bepaal de afmetingen van zo'n driehoek.

Opgave 2b: Er zijn oneindig veel gelijkbenige driehoeken waarbij alle middellijnen (of de enige middellijn) loodrecht staat/staan op een zijde. Bepaal de afmetingen van zo'n driehoek.

Ten slotte gaf Gerard een leuk voorbeeld van een rechthoekige driehoek met zijden 20, 21 en 29, waarbij hij de lengte van de middellijnen bepaalde. Er zijn er drie, waarvan twee een lengte hebben van $7\sqrt{5}$ en één van $5\sqrt{7}$.

Opgave 3a: Toon aan dat de rechthoekige driehoek met zijden 20, 21 en 29 middellijnen heeft van $7\sqrt{5}$ en van $5\sqrt{7}$. (Je hoeft niet aan te tonen welke lengte twee keer voorkomt, maar wel dat de middellijnen bestaan)

Een bekende formule voor pythagoras tripletten is: elke rechthoekige driehoek met geheeltallige zijden is te schrijven met behulp van een zekere $m > n$ als:
$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$. Als $\mathrm{GGD}(m, n) = 1$ en van m en n is er één even (en dus de ander oneven) dan genereert de formule alle onvereenvoudigbare (primitieve) pythagoras tripletten.
Met $m = 5$ en $n = 2$ krijg je het voorbeeld van Gerard: 20, 21, 29. Zou het toevallig zijn dat de lengte van de middellijnen dan $(m+n)\sqrt{m} = 7\sqrt{5}$ en $m\sqrt{m+n} = 5\sqrt{7}$ zijn?

Opgave 3b: Onderzoek of er meer primitieve pythagoras tripletten bestaan waarbij de middellijnen lengtes hebben van $m\sqrt{m+n}$ en $(m+n)\sqrt{m}$. (Dan hebben dus de lengtes van de drie zijden geen gemeenschappelijke deler en ook m en n niet. Bovendien zijn m en n niet allebei oneven.)

Tip: Hierbij kan het handig zijn de cosinusregel te gebruiken in de driehoek APQ om PQ te berekenen en alles uit te drukken in m en n.

Extra opgave:

Zijn er meer geheeltallige rechthoekige driehoeken, niet congruent aan het voorbeeld van Gerard waarbij er middellijnen zijn met lengtes $s\sqrt{t}$, en $t\sqrt{s}$ met s en t gehele getallen (die dus ook kwadratische factoren mogen bevatten)?
Tip: Let wel op dat je moet controleren of de snijpunten P en/of Q niet buiten de driehoek vallen. Het kan nuttig zijn om na te denken over hoe je een driehoek moet vermenigvuldigen zo dat het kwadraat van de lengtes van de middellijnen de vorm heeft van s^2t en st^2.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 25 januari 2022 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 97-1:
vakbladeuclides.nl/973puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Sjoerd Zondervan van harte met de ladderprijs.

Top 10 ladderstand t/m puzzel 97-1		
1	S. Zondervan	147
2	M. Woldinga	132
3	H. Bakker	124
4	H. Huisman	117
5	F. Göbel	114
6	J. Meerhof	103
7	F. van Hoeve	94
8	H. Linders	77
9	J. van Doorn	76
10	B. Dopheide	73

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2022

Ma 17/01 Do 27/01
LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Vr 28/01 Za 29/01
NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Wo 16/02
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 11/03
Onderwijs meets onderzoek
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: NVvW

Vr 11/03
12 NEDERLANDSE UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 97

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	25 januari 2022	15 november 2021
5	15 maart 2021	03 januari 2022
6	03 mei 2022	28 februari 2022
7	21 juni 2022	25 april 2022

NIEUW!

Vanaf schooljaar 22/23
Moderne Wiskunde
onderbouw 13e editie

Met
introductievideo's
bij ieder
hoofdstuk!

Bestel je beoordelingsmateriaal vanaf 1 november 2021
of neem alvast een kijkje op **modernewiskunde.noordhoff.nl**

Noordhoff

Brengt je verder