EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Ruimte voor nadenken in de wiskundeles

Normering examens 2021:
Anders dan anders

Bijspijkerkampen van Anderwijs

Piet Vredenduin (1909-1996)
en het wiskundeonderwijs

NR.2

JAARGANG 97 - OKTOBER 2021

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR2

IN DIT NUMMER

RUIMTE VOOR NADENKEN
Nelleke den Braber, Geeke Bruin-Muurling, Ronald Keijzer
4

VERHALEN UIT HET VMBO
RAYAN
Melanie Steentjes
9

CONCURRENTE CEVIANEN
Martin Kindt
10

NORMERING 2021: ANDERS DAN ANDERS
Paul van der Molen
14

WEL OF GEEN SCHEVE ASYMPTOOT
Jan Otto Kranenborg
18

BIJSPIJKERKAMPEN VAN ANDERWIJS
INTERVIEW MET LIESBETH KLEIN KRANENBARG
Tom Goris
22

WITJE: VORMEN EN INHOUD
24

ONTBINDEN IN FACTOREN MET DE KOP-STAARTMETHODE
Simon Biesheuvel
25

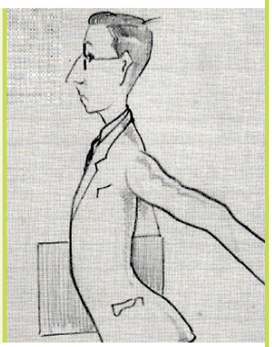
UITDAGENDE PROBLEMEN
AFSTANDSONDERWIJS?
Jacques Jansen
26

WIS EN WAARACHTIG
30

KAARTJES EN KWADRATEN
Hylke Hoogeveen
31

ZO MAAR EEN EXAMENVRAAGSTUK VAN VROEGER
Dick Klingens
34

PIET VREDENDUIN (1909-1996)
MEER DAN 50 JAAR PROMINENT AANWEZIG IN HET WISKUNDEONDERWIJS
Bert Zwaneveld
Dirk De Bock
38



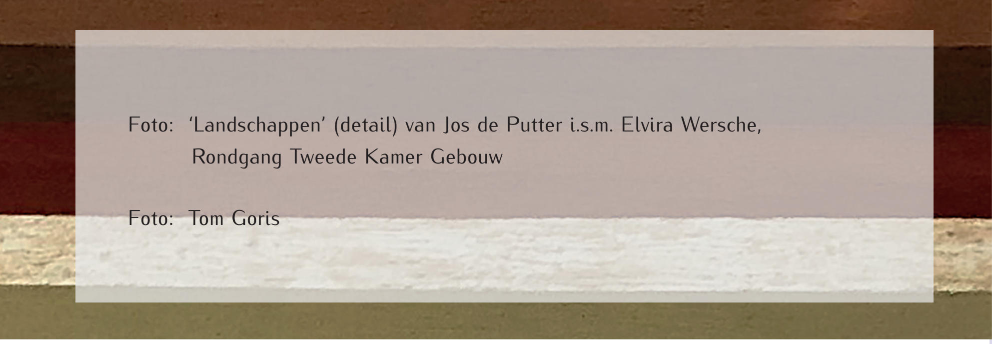


Foto: 'Landschappen' (detail) van Jos de Putter i.s.m. Elvira Wersche, Rondgang Tweede Kamer Gebouw

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

VERENIGINGSNIEUWS
NOTULEN NVVW-JAARVERGADERING 2020
41

WERELDWISKUNDEFONDS
RECORDOPBRENGST BOEKENVEILINGEN IN CORONATIJD
Jos Remijn
43

VASTGEROEST
Ab van der Roest
44

PUZZEL
Esther Bod
45

SERVICEPAGINA
46

Foto: Harm van den Berg - Studio Plancius

Net als het werk in de plenaire zaal, 'Aarde' van Jos de Putter, nodigen de vier panelen uit om opnieuw naar de aarde te kijken. De panelen zijn gemaakt van zand, afkomstig uit de hele wereld en zijn opgebouwd als wereldkaart. De bovenste strook op het linkerpaneel is van zand uit Alaska, de onderste strook van het rechterpaneel is zand uit Nieuw-Zeeland. Deze aarde kent geen andere grenzen dan de markeringen van het zand. Elvira Wersche realiseerde dit werk met zand uit de collectie Sammlung Weltensand.

Kort vooraf

Vanmiddag was ik bij de online boekpresentatie van Erik van Haren. In een heel persoonlijk verhaal vertelde Erik over hoe een dramatisch voorval aan het begin van zijn onderwijscarrière er uiteindelijk toe leidde dat hij het boek *Wiskundeplezier* is gaan schrijven. *Verander je mindset door te durven, doen én begrijpen* luidt de ondertitel. Er gaat ongetwijfeld een recensie over verschijnen in een volgende *Euclides*.

Wiskundeplezier, dat straalt deze *Euclides* ook uit, hoop ik. Onder andere met een bijdrage van Hylke Hoogeveen. Het is moeilijk na te zoeken, maar ik denk dat Hylke de jongste auteur is die ooit voor *Euclides* schreef. Hij was zestien jaar toen hij 'Kaartjes en kwadraten' schreef, een verslag van zijn oplossingsproces van een van de opgaven van de Internationale Wiskunde Olympiade, waar hij een bronzen medaille behaalde. Het plezier in het stoeien met de opgave spat ervan af. Plezier krijgen in leren in het algemeen: dat is ook de doelstelling van Anderwijs. We hielden een interview met de enthousiaste voorzitter van deze vereniging die bijspijkerkampen organiseert. En is het je opgevallen dat we er een nieuwe rubriek bij hebben?
In 'Verhalen uit het vmbo' stelt Melanie Steentjes in ieder nummer één leerling uit het vmbo centraal.
En tot slot nog meer goed wiskundeplezier nieuws. Je treft in deze *Euclides* geen aankondiging aan voor de Matheonkalender. Corona leek ook hier roet in het eten te gaan gooien, maar vanmiddag kwam het verlossende woord van Henny ter Morsche: ook dit jaar kunnen je leerlingen (en jijzelf natuurlijk) weer iedere dag tussen 1 en 24 december een 'vakje openen' van deze adventskalender om er een verrassend vraagstuk aan te treffen.
Plezier gegarandeerd!

Tom Goris

Nelleke den Braber, Geeke Bruin-Muurling, Ronald Keijzer

Ruimte voor nadenken

In het Nederlandse onderwijs speelt het lesboek met daarin opgaven een centrale rol. Het maken van opgaven is een belangrijk middel in het leren van leerlingen. Maar met opgaven is soms iets geks aan de hand: hoe meer je erover nadenkt, hoe groter de kans dat je niet meer op het bedoelde antwoord uitkomt. In dit artikel analyseren we dit fenomeen aan de hand van het concept gemiddelde, in de leerlijn van basis- en voortgezet onderwijs.

Gemiddelde: de praktijk en in school

In het dagelijks taalgebruik geeft het *gemiddelde* vaak weinig reden om te gaan rekenen. De uitspraak '2020 was geenszins een gemiddeld jaar' kent geen getalsmatige onderbouwing, het zegt alleen dat 2020 een jaar is dat anders is dan vele andere jaren. De uitspraak 'In 2020 was de gemiddelde temperatuur op aarde hoger dan in 2019' is weliswaar wél op cijfers gebaseerd, maar er is voor de lezer nog steeds geen directe reden om te gaan rekenen. Eerder reden tot zorg, zoals om die gemiddelde temperatuur die maar blijft stijgen. Daarbij moet de lezer zich realiseren dat zo'n stijgend gemiddelde natuurlijk niet betekent dat alle dagen van het jaar evenveel warmer zijn. Uitschieters kunnen ook zorgen voor een stijgend gemiddelde. Het gemiddelde is een soort slotsom; een samenvatting waarin fluctuaties en ruis worden gedempt. De 'prijs' die we hiervoor betalen is dat we detail kwijtraken. Diezelfde behoefte zie je bij de coronacijfers eind 2020. De dagkoersen zijn vervangen door weekgemiddelden, omdat die de trend beter zichtbaar maken dan de grote schommelingen in aantal positief geteste mensen van dag tot dag. Als mediagebruiker bereken je vaak niet zelf de gemiddelden. Het gaat vooral om interpreteren van de gemiddelde waarde en het redeneren aan de hand van het gemiddelde als concept.

In de (reken-)wiskundeles gaat het daarentegen bij het begrip gemiddelde meestal niet om het beeld van de grote lijnen. In de (reken-)wiskundeles bepaal je het gemiddelde met een formule als: som van de getallen gedeeld door het aantal getallen. Deze vaardigheid lijkt de belangrijkste focus. Een vaardigheid die vraagt om het herkennen van de op te tellen getallen en het vervolgens delen door het juiste getal. Bij lastiger getallen gebeuren deze bewerkingen, zeker in het voortgezet onderwijs, op de rekenmachine.

Aantal goede antwoorden	
Luuk	8
Bram	8
Tess	4
Noor	12

Gemiddelde berekenen:
1 Tel de getallen bij elkaar op.
8 + 8 + 4 + 12 = 32

2 Deel de uitkomst door het aantal getallen.
32 : 4 = 8

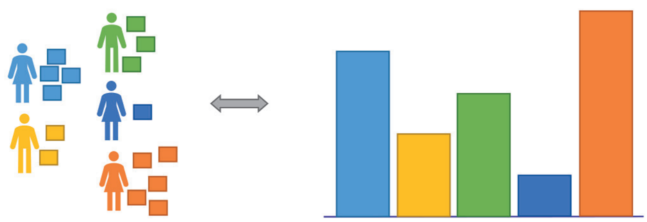
Het gemiddelde van de groep is 8 goede antwoorden.

figuur 1 Wereld in Getallen, groep 7 blok 6FS

In het voorbeeld, zie figuur 1, ligt de nadruk op het uitrekenen van het gemiddelde. Wat het cijfer 8 zegt over de prestatie van deze groep leerlingen, wordt niet besproken.

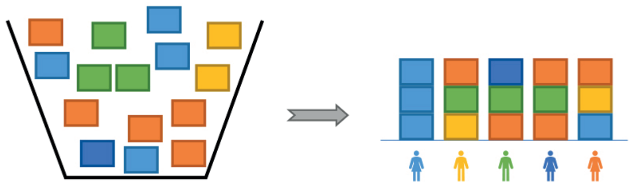
Het gemiddelde als concept

De dagelijkse voorbeelden laten zien dat het concept gemiddelde verschillende kanten heeft. Heb je daarvoor met het aanleren van alleen de procedure voldoende geleerd om uit de voeten te kunnen met het begrip gemiddelde? We bekijken daarom eerst het gemiddelde in meer detail, startend met een aantal meetwaarden, zie figuur 2.



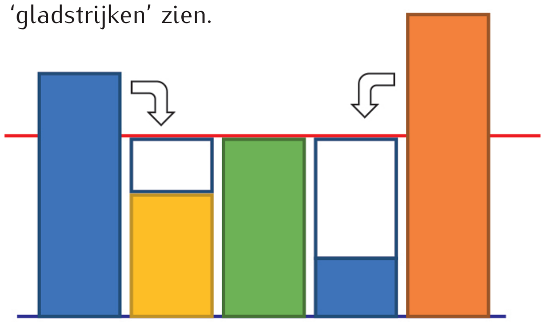
figuur 2 Meetwaarden als basis voor het gemiddelde

Je kunt, zie figuur 3, de formule *som van de getallen gedeeld door het aantal getallen* zien als de opeenvolging van twee stappen: alles bij elkaar leggen (4 + 2 + 3 + 1 + 5 = 15 blokjes) en dan eerlijk verdelen (15 blokjes ÷ 5 personen = 3).



figuur 3 Het gemiddelde als 'eerlijk verdelen'.

Er is ook een andere manier: hoeveel moet aan elkaar gegeven worden om gelijk uit te komen. Figuur 4 laat dit 'gladstrijken' zien.

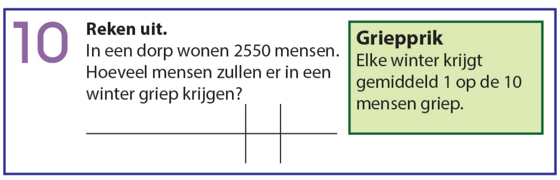


figuur 4 Het gemiddelde als 'geven en nemen' of 'gladstrijken'.

Dit tweede perspectief introduceert het idee van het gemiddelde als een *centrummaat*. Een centrummaat vat als het ware een hoeveelheid aan getallen in één getal samen. Hoe ver die getallen van het gemiddelde afliggen is ook belangrijk, maar die informatie verlies je in het gemiddelde zelf. Je weet alleen dat er boven en onder dat gemiddelde evenveel afwijking is. Je hebt een *spreidingsmaat* nodig om beter inzicht te krijgen in hoe de getallen zich verhouden tot het gemiddelde.

Voorbeeld 1: Griepprik

In figuur 5 staat een opgave voor groep 6, die onderdeel is van een serie opgaven over verhoudingen in de vorm '1 op de ...'.


10 **Reken uit.**
In een dorp wonen 2550 mensen. Hoeveel mensen zullen er in een winter griep krijgen?

Griepprik
Elke winter krijgt gemiddeld 1 op de 10 mensen griep.

figuur 5 Opgave uit Getal & Ruimte Junior – groep 6

Je kunt dit een traditionele redactiesom noemen. Kenmerkend element in de serie waaruit deze opgave komt is de lege verhoudingstabel. Leerlingen moeten de verhouding 1 op de 10 daarin invullen, samen met het totaal aantal mensen. Dan kunnen ze de context loslaten en rekenen. Bij dergelijke redactiesommen leren leerlingen signalen in de tekst te gebruiken om het bedoelde antwoord uit te rekenen. Hier zijn dat 2550, '1 op de 10' én de lege verhoudingstabel. Impliciet leren ze van dergelijke opgaven dat je elementen die de context typeren beter kunt negeren. Hier moeten ze negeren dat het over griep in de winter gaat en dat de mensen in een dorp wonen. Het woord 'griepprik' blijkt niet relevant. En opvallend genoeg ook het woord 'gemiddeld' niet.
Hoe anders is dat als je de context serieus neemt. 1 op de 10 betekent hier dat 10% van de Nederlanders griep krijgt. Dat betekent niet dat dit getal voor elke subgroep zal gelden, zoals een klein dorp. 1 op de 10 is hier een soort gemiddelde over alle gemeentes in Nederland. Het woord 'gemiddeld' duidt waarschijnlijk op het gemiddelde over een aantal winters heen. De angel van de opgave zit in de formulering: 'Hoeveel mensen zullen er in een winter griep krijgen'. Deze duidt op precisie en is daarom veel te stellig. Immers, bij zo'n kleine groep mensen is zelfs de schatting op basis van 10% gemiddeld over Nederland weinig accuraat voor het werkelijke aantal mensen dat griep zou krijgen. We zien dat in een traditionele redactiesom als deze de focus ligt op de aan te leren of geleerde bewerking. Hier is dat een focus louter op het oefenen met eenvoudige verhoudingen. In de opgave staat wel het woord 'gemiddeld', maar dat het hier om een gemiddelde gaat komt eigenlijk niet naar voren. Ga je hier écht nadenken, dan wordt de gestelde vraag met de gegeven informatie onbeantwoordbaar. Het besef dat een verhouding binnen een grote groep niet één-op-één vertaald kan worden naar een kleine deelgroep komt niet aan de orde. Zou je een dergelijke context echter in het dagelijks leven tegenkomen, dan vragen de getallen wel degelijk om een verdere doordenking van de specifieke kenmerken van de context. In dit geval leidt dat tot de conclusie dat je meer moet weten om te modelleren of schatten hoeveel mensen in dat dorp griep zullen krijgen. Aan het gemiddelde heb je hier immers niet genoeg. Je moet meer weten over de context en in hoeverre die bepalend is voor de spreiding. Rekenen in het maatschappelijke verkeer, het functioneel gebruik van je rekenvaardigheden, vraagt dus om meer dan alleen de technische vaardigheid. Wil je ook die kant van het rekenen aan bod laten komen en leerlingen aanleren om kritisch naar een context te kijken, dan is een kleine aanpassing van een opgave vaak genoeg. Figuur 6 is een bewerking van figuur 5. De aanpassingen zorgen ervoor dat je niet alleen op basis van de signaalwoorden in de tekst de opgave kunt maken. De nieuwe opgave lokt zelfs verbazing uit: niemand krijgt griep. Deze blikwisseling zet aan tot het doordenken van de aanduiding 'gemiddeld'. Dat het om een eiland gaat helpt de leerlingen verder op het spoor van afwijkingen van het gemiddelde. En natuurlijk zet deze aangepaste versie nog steeds aan tot dezelfde berekening als het origineel. De vraag hoeveel griepgevallen >

je grofweg zou verwachten op grond van het gemiddelde komt immers als natuurlijk aan bod. Het verschil is dat nu aan de uitkomst van de deling 2550 : 10 door de doordenking van de context wel de juiste betekenis wordt gegeven. Zo kom je dichter bij essenties van het begrip gemiddelde: het berekende aantal griepgevallen is een indicatie, een schatting. Zo kan dan ook nog met leerlingen besproken worden of het berekende gemiddelde aantal ook echt ergens precies zal voorkomen.

Reken uit.
Op een eiland wonen 2550 mensen.
Niemand krijgt deze winter griep.
Zou je dat verwachten?

Griepprik
Elke winter krijgt gemiddeld 1 op de 10 mensen griep.

figuur 6 Aangepaste opgave

De beschouwing over deze griepprik-opgave leert dat het belangrijk is om oog te hebben voor de context waarbinnen je rekent. Immers, dan pas is het mogelijk om betekenis aan de berekening en getallen te geven. Het helpt leerlingen bovendien om het onderliggende wiskundige concept beter te begrijpen en dat hebben ze nodig wanneer zij het flexibel en creatief in andere situaties willen gebruiken. Laten we verder kijken naar het concept 'gemiddelde' en kijken hoe dit in het voortgezet onderwijs onder de aandacht gebracht wordt van de leerlingen.

Voorbeeld 2: Gemiddeld cijfer

In het voortgezet onderwijs komt het gemiddelde terug en daarnaast als centrummaat benoemd, dat later wordt uitgebreid met het *gewogen gemiddelde*. De centrummaten worden uitgebreid met mediaan en modus. Ook wordt de standaardafwijking als spreidingsmaat geïntroduceerd. Figuur 7 toont een voorbeeld van een opgave waarin de context aansluit bij de belevingswereld van de leerlingen: het gewogen gemiddelde van de behaalde wiskundecijfers.

Voor wiskunde heeft Annette uit B1D de volgende cijfers gehaald: 4,9; 7,3; 7,5 en 6,0.
Bereken haar gemiddelde als alle cijfers even zwaar meetellen.
Bereken haar gewogen gemiddelde als het cijfer 7,3 twee keer en het cijfer 6,0 drie keer meetelt.

figuur 7 Opgaven uit Math4all havo/vwo, klas 1/2

Ondanks dat de context betekenisvol is, richt de methode zich ook hier weer sterk op de technische kant. Het gaat nogmaals om de aanpak 'de som van een aantal getallen gedeeld door het aantal ervan'. Rekening houdend met een gewogen gemiddelde geeft dat:
$(4{,}9 + 2 \times 7{,}3 + 7{,}5 + 3 \times 6{,}0) \div 7$. In de methode krijgen de leerlingen nog een vervolgvraag voorgelegd, zie figuur 8. Die kan met dezelfde aanpak worden beantwoord, ofwel $(5{,}1 + 7{,}3 + 7{,}3 + 7{,}5 + 6{,}0 + 6{,}0 + 6{,}0) \div 7$. Om het antwoord vervolgens af te ronden op een geheel getal.

Annette maakt één toets over. Het cijfer 4,9 wordt een 5,1.
Wat wordt nu haar eindcijfer afgerond op een geheel getal?

figuur 8 Vervolgvraag

Bij deze vervolgvraag is echter ook een andere, efficiëntere, aanpak mogelijk. Als je het concept gemiddelde begrijpt voorbij de instrumentele kant van de berekening, dan zie je dat er in totaal 0,2 punt bij komt. Deze wordt eerlijk verdeeld (uitgesmeerd) over zeven cijfers. Als je dat bedenkt, zie je dat het voor het bepalen van het nieuwe gemiddelde genoeg is om $0{,}2 \div 7$ op te tellen bij het al eerder berekende gemiddelde. Ofwel, bij een reeds bestaande verdeling kan een toevoeging worden 'uitgesmeerd' over de bestaande verdeling. Wanneer het onderwijs hier alleen gericht is op het antwoord, zou je kunnen zeggen dat beide manieren goed zijn. Leerlingen zien dan niet elkaars aanpak. Wanneer de gekozen aanpak het gesprek in de klas wordt en aanpakken worden vergeleken dan kan dat van enorme meerwaarde zijn om concepten beter te doorgronden. Zo geeft een gesprek waarom de tweede aanpak mag en zelfs efficiënter is de kans dieper in te gaan op het concept gemiddelde. En dat niet alleen. Als je leert kijken naar het gemiddelde als dat 'uitsmeren' dan zie je in één oogopslag dat in dit geval de verhoging van de 4,9 naar een 5,1 voor het gemiddelde maar heel erg weinig oplevert. Je zou zelfs kunnen beredeneren dat je beter een toets die vaker meetelt kunt herkansen dan een schriftelijke overhoring die maar één keer meetelt. In dit voorbeeld kom je nog steeds uit op hetzelfde antwoord als je gaat nadenken, het gaat dus niet mis zoals in het eerste voorbeeld. Maar ook hier heeft het bieden van ruimte om na te denken een meerwaarde. Het voorbeeld van het uitrekenen van een gemiddelde en het aanpassen van het gemiddelde als een van de cijfers iets wordt verhoogd kan weer aanleiding geven tot het verkennen van het concept 'gemiddelde'. In deze situatie gaat het vooral mis, als deze kansen in het onderwijs niet met beide handen worden aangegrepen.

Wat is wiskunde?

De twee voorbeelden laten zien dat je op verschillende manieren kunt kijken naar de gegeven context in de opgave of naar de wiskundige kern van de opgave. Ze gaan uit van verschillende ideeën over wat wiskunde is. Vanaf de jaren '80 van de vorige eeuw wordt wiskunde gezien als de wetenschap van patronen en structuren. Deze overeenstemming over de aard van het vak biedt overigens nog genoeg ruimte voor verschil van inzicht in wat wiskunde is. Gaat het bij de patronen en structuren puur om de procedurele kant van de wiskunde, om haar procedures, technieken en wiskundige feiten? Of is wiskunde conceptueel, creatief en zelfs ambigu en gaat het over onderliggende structuren en de samenhang tussen onderwerpen? Is wiskunde door de mens bedacht, of bestaat het ook zonder de mens? Is het een formeel bouwwerk of een menselijke activiteit? Hoe je wiskunde ziet heeft invloed op wat je als het doel van het rekenen-wiskundeonderwijs ziet. Byers[1] neemt het leren van wiskundigen als uitgangspunt. Hij onderscheidt twee perspectieven. Je kunt wiskunde zien als een statisch en formeel bouwwerk. Het gaat dan om een vakgebied dat geregeerd wordt door rigide logica, waarin je als je de regels maar netjes uitvoert, altijd bij het goede antwoord uitkomt. Vanuit dat perspectief ligt het voor de hand om het onderwijs zo in te richten dat leerlingen stukje bij beetje zicht krijgen op dit formele bouwwerk. Daar hoort bij dat je leerlingen rekenregels, stappenplannen of een vaste probleemaanpak aanbiedt. De opgave over de griepprik is daar een voorbeeld van. In de reeks opgaven waar deze opgave één van was, worden de leerlingen getraind om de verhoudingstabel te gebruiken om op het oog gelijkwaardige opgaven op te lossen. Na voldoende oefening hebben ze dit op een gegeven moment wel onder de knie. Deze lesaanpak leidt ertoe dat leerlingen getraind zijn de rekenvaardigheid wel in contexten toe te passen, maar zonder betekenis aan die context toe te kennen. Uitgangspunt blijven de signaalwoorden in de tekst én eventueel toegevoegde rekenaanwijzingen zoals een verhoudingstabel onder de opgave. Traditionele redactiesommen binnen deze lesaanpak zijn gericht op het bieden van een context om de bedoelde berekening uit te voeren. Maar verder doet die context er eigenlijk niet toe. Daardoor zijn ze regelmatig niet echt waarheidsgetrouw en verliezen daarmee betekenis als echte toepassing. De opgaven over het gewogen gemiddelde berekenen om achter je gemiddelde cijfer te komen zijn wel betekenisvol en bieden tal van kansen om het concept gemiddelde beter te leren kennen. Maar dan moeten deze kansen wel gegrepen worden. Onze ervaring leert dat dat nauwelijks gedaan wordt. Het onderwijs richt zich in het algemeen in de dagelijkse lespraktijk toch vooral op het intrainen van rekenwijzen en stappenplannen. Byers betoogt dat wiskunde meer is. De kracht van wiskunde ligt juist in het complexe huwelijk tussen deze logische kant én de meer creatieve, ambigue kant van de wiskunde. Het gaat volgens Byers niet om een keuze tussen deze twee, maar over het samenbrengen van vaste werkwijzen én het flexibel omgaan met de wiskunde. Dat veronderstelt dat het nodig is wiskundige concepten goed te leren begrijpen, maar ook dat het belangrijk is dat je leert dat je op meerdere manieren naar een wiskundig concept kunt kijken. We lieten dit aan het begin van dit artikel zien in figuur 2, 3 en 4. In de metafoor van het alles bij elkaar leggen om het daarna eerlijk te verdelen, vonden we de formule voor het gemiddelde. De metafoor van het 'gladstrijken', waarbij de staven allemaal even lang moeten worden, ondersteunt weer andere aspecten van het begrip gemiddelde, zoals centrummaat. Daarvan leer je dat er precies evenveel afwijking van het gemiddelde boven het gemiddelde als onder het gemiddelde ligt. Daar leer je dat als je proefwerkcijfer iets hoger uitvalt, je alleen maar dat verschil hoeft 'uit te smeren' om je nieuwe gemiddelde te vinden. Dit bredere perspectief op wiskunde betekent dat het alleen aanleren van rekenregels, stappenplannen en standaard probleemaanpak niet voldoende is. Een inzicht dat internationaal steeds breder gedragen wordt.

Perspectief

We lieten in twee voorbeelden zien wat het oplevert als wiskunde wordt gezien als meer dan slechts een formeel bouwwerk en vaststaande rekenregels. Het voorbeeld van de griepopgave laat zien hoe belangrijk het is om na te denken over de context waarin je rekent, en wat de betekenis van het uitgerekende antwoord is. Het voorbeeld van het gewogen gemiddelde laat zien dat het op meerdere manieren naar het gemiddelde kunnen kijken de leerlingen nieuwe inzichten biedt. Het verdiept het concept en resulteert bovendien in een snelle manier om het nieuwe gemiddelde uit te rekenen. Het beeld dat iemand heeft van wiskunde bepaalt ook de doelen die je wilt stellen in het reken-wiskundeonderwijs. De voorbeelden uit de reken-wiskundemethodes die wij lieten zien, maken dat zichtbaar. Bij zowel de griepprik-opgave als de opgave over proefwerkcijfers is het uitgangspunt dat er gewerkt wordt aan het opbouwen van de wiskunde als een logisch, statisch en formeel bouwwerk. We lieten zien dat er maar weinig aanpassingen nodig zijn om de meer conceptuele kant van de wiskunde in te brengen. Dat is nodig; als we dat doen geven we leerlingen de ruimte om in de reken-wiskundeles na te denken. Sterker nog, we geven het signaal af dat nadenken bij wiskunde hoort, in de hoop dat ze een breed beeld van wiskunde ontwikkelen. Dat is winst, want juist deze creativiteit in denken is wat de samenleving van (jonge) mensen vraagt. Een breder beeld van wat wiskunde is betekent natuurlijk niet dat de wiskunde als formeel bouwwerk uit het zicht verdwijnt. Integendeel, op verschillende manieren kijken naar een wiskundig concept is de meest voor de hand liggende manier om het formele bouwwerk zo sterk mogelijk te maken en te leren kennen op een manier dat je er ook >

Stimuleer het probleemoplossend vermogen met computational thinking in de wiskundeles

Zorg ervoor dat uw leerlingen ‘toekomstproof’ zijn

Met de handhelds en software van Texas Instruments kunnen uw leerlingen eenvoudig zelf in Python programmeren! Volg onze gratis webinars waarin u Python leert gebruiken en tips krijgt voor praktische toepassingen in de les.

Webinars voor leraren

De T³ Python Bootcamp was een succes en dat smaakt naar meer! Daarom organiseren we dit schooljaar een serie webinars, waarin de nadruk ligt op programmeertechnieken als basis voor uitgebreidere programmeerprojecten en het oplossen van problemen.

T³ NEDERLAND

Teachers Teaching with Technology™

Deze serie bestaat uit de volgende onderwerpen en maakt gebruik van Python:

Donderdag 28 oktober 2021 - 19:00
» **Aansturen van een grafisch venster**

Donderdag 25 november 2021 - 19:00
» **Beeldverwerking**

Donderdag 17 februari 2022 - 19:00
» **Cellulaire automaat Game of Life**

Donderdag 24 maart 2022 - 19:00
» **Vlakvullingen**

Donderdag 28 april 2022 - 19:00
» **Animaties en simulaties met OOP**

Noteer deze nu vast in uw agenda en mis er niet één!

LET OP: Deelnemers die niet vertrouwd zijn met Python raden we aan om als voorbereiding Deel 1 en 2 van de Python Bootcamp door te nemen op: **wil-depython.nl**

Bekijk onze reeds gegeven webinars terug of schrijf u in voor nieuwe op: **resources.t3nederland.nl/webinars**

t3nederland.nl

T³ Nederland wordt ondersteund door:

Texas Instruments

iets mee kunt. Dit vraagt om reken-wiskundeonderwijs dat leerlingen aan het denken zet en niet onderwijs waar nadenken eigenlijk niet de bedoeling is of zelfs wordt afgeleerd. Een geruststelling dus voor wie zich wel eens zorgen maakt over de aandacht voor basisvaardigheden bij reken-wiskundeonderwijs waarin het nadenken gestimuleerd wordt. Die krijg je er bij deze brede insteek gewoon, in versterkte vorm, bij.

Dit artikel vormt een duo met ons artikel in het septembernummer van *Volgens Bartjens*. Elk van de artikelen is een bewerking voor vo respectievelijk po.

Noten

[1] Byers, W.P. (2010). *How Mathematicians Think*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[2] Met dank aan Ton van der Heiden voor zijn bijdragen aan discussies die tot dit artikel leidde.

Over de auteurs

Nelleke den Braber is docent-onderzoeker wiskundedidactiek bij de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding van NHL-Stenden Hogeschool. E-mailadres: *nelleke.den.braber@nhlstenden.com* Geeke Bruin-Muurling is zelfstandig vakdidacticus en in allerlei rollen werkzaam in po, vo en mbo. E-mailadres: *G.Bruin-Muurling@hotmail.nl.* Ronald Keijzer is als lector rekenen-wiskunde verbonden aan Hogeschool iPabo, Amsterdam/Alkmaar. E-mailadres: *r.keijzer@ipabo.nl*

Verhalen uit het vmbo

Rayan

Melanie Steentjes

Rayan kwam in de derde in mijn kaderklas. Hij kwam van basis, maar had laten zien dat hij meer in zijn mars had. Op weg naar de Ardennen voor het derdejaars kamp zaten we naast elkaar in de bus. Terwijl klasgenoten achter ons kletsten over de nieuwste games op de PlayStation vertelde Rayan me over zijn vlucht uit Syrië. Uit zijn voorzichtige relaas begreep ik dat alleen opa en oma en hij Nederland hadden bereikt. De rest van het gezin strandde onderweg. Pas na een jaar werd het gezin herenigd in Nederland en zag Rayan zijn vader en moeder weer. Een jongen met zo'n geschiedenis in een doorsnee kaderklas in Hilversum. Hij houdt zich groot en slaat zich er manmoedig doorheen, maar makkelijk zal het niet voor hem zijn. Rayan zit vaak alleen. Een aantal meisjes vindt het leuk als hij hun naam in het Arabisch voor ze opschrijft, maar helaas voor Rayan blijft het daarbij. Hij lijkt zoveel ouder, hij beweegt zich in zo'n andere dimensie dan zijn leeftijdsgenoten.
Hij genoot van de Ardennen. De bergen had hij duidelijk gemist. Toen we een dag gingen kanovaren trof ik Rayan achteroverliggend in zijn kano, kijkend naar de hemel en de bomen en de bladeren boven hem. Toen hij mij zag riep hij uit dat hij het zo mooi vond hier. Niet eerder heb ik een puber de natuur zo zien waarderen als Rayan dat deed. In de klas is Rayan een hele serieuze leerling. Hij wil het zo goed doen. Vlak voor een toets wiskunde bleek het cijfer voor Engels op Magister te staan. Iedereen greep naar zijn telefoon om zijn cijfer te checken. Rayan ook. Ik zag hem bleek wegtrekken. Na de wiskundetoets vertelde hij zijn cijfer, een onvoldoende. 'Mijn ouders zullen zo teleurgesteld zijn mevrouw'. Met dat gevoel had die jongen zijn toets wiskunde zitten maken. Ik vreesde voor zijn wiskundecijfer, maar gelukkig viel het mee. Wiskunde gaat Rayan goed af. Hij haalt mooie cijfers. Soms struikelt hij over woorden. Bij een som over procenten en korting: 'Wat is opruiming, mevrouw?'. Als ik hem complimenteer met zijn cijfers, krijg ik het compliment terug. 'Dat komt door uw prachtige uitleg mevrouw.' Als er één leerling is die in mijn hart is gaan zitten, is het Rayan. En niet alleen bij mij. Bij de rapportvergadering ging een zucht van genegenheid door de ruimte toen hij besproken werd. Een jongen die iedereen het allerbeste gunt. Het is te hopen dat het universum dat ook met hem voor heeft.

Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en toetsdeskundige bij Cito in Arnhem. E-mail: *m.steentjes@hilfertsheem.nl.*

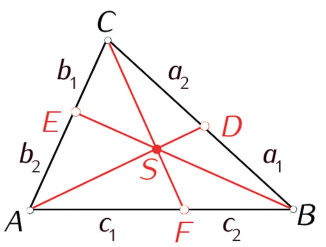
Martin Kindt

Concurrente cevianen

Een lijnstuk dat een hoekpunt van een driehoek met een punt van de overstaande zijde verbindt, wordt in de vakliteratuur een *ceviaan* genoemd. Dit ter ere van Giovanni Ceva (1648-1734) die bekend is geworden door een vruchtbare en naar hem genoemde stelling.

De stelling van Ceva/Al Mu'taman

Het theorema dat algemeen bekend staat onder de naam 'stelling van Ceva' gaat over drie lijnstukken die elk een hoekpunt van een driehoek met een punt van de overstaande zijde verbinden - *cevianen* - en die *concurrent* zijn, dat wil zeggen 'door één punt gaan'.



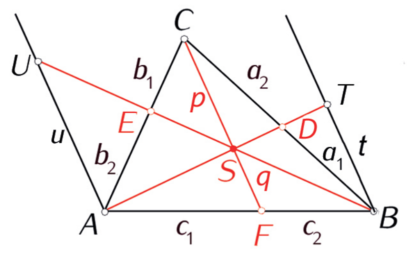
figuur 1

De stelling zegt dat de cevianen *AD*, *BE* en *CF* concurrent zijn, dan en slechts dan als het product van de verhoudingen van de stukken waarin de cevianen de zijden van de driehoek verdelen, cyclisch geordend, gelijk is aan 1. Kortom, zie figuur 1:

$$AD,\ BE \text{ en } CF \text{ concurrent} \leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=1$$

Dat deze stelling aan de aandacht van de oude Grieken is ontsnapt, mag een wonder heten. Maar Yusuf Al'Mutaman, die rond het jaar 1082 de koning van Zaragoza was, vond de stelling zo'n 600 jaar voor Ceva al wel! Zoals wel vaker in de geschiedenis van de wiskunde, heeft een stelling de verkeerde naam gekregen. Een naam die zo vertrouwd is dat ik die in dit artikel tegen beter weten in toch maar blijf gebruiken.

Al'Mutaman bewees de stelling misschien via twee hulplijnen en 'zandlopers'. De hulplijnen *AU* en *BT* zijn parallel met *CF*, zie figuur 2.



figuur 2

Er geldt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t}{p}&=\frac{a_1}{a_2}\\ \frac{p}{u}&=\frac{b_1}{b_2}\\ \frac{u}{t}&=\frac{|AS|}{|ST|}=\frac{c_1}{c_2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=1$$

Het voldoende zijn van de voorwaarde 'het product van de verhoudingen is gelijk aan 1' kan vervolgens uit het ongerijmde, indirect dus, worden aangetoond.
Als het waar is wat wel wordt beweerd over de ontdekking door Ceva, namelijk dat hij zijn argument voor de stelling ontleende aan, zeg maar de mechanica, dan zou hij op *directe* wijze de voldoende voorwaarde hebben ontdekt.

Die redenering zou dan ongeveer zo geweest zijn. Plaats drie massa's μ_A, μ_B, μ_C in de hoekpunten A, B, C van een driehoek en bepaal het zwaartepunt van de drie massa's. Dat kan op drie manieren in twee stappen.
Bepaal eerst het zwaartepunt F van twee massa's μ_A en μ_B. Dit ligt op zijde AB en verdeelt die zijde zó dat:
$|AP| : |BP| = \mu_B : \mu_A$.

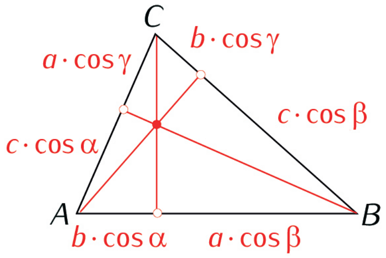
Dit zegt de momentenstelling die in een ver verleden door Archimedes ook werd gebruikt om meetkundige waarheden op te sporen. Het zwaartepunt S van de drie massa's ligt dus op CP (en verdeelt dit lijnstuk in stukken die zich verhouden als $\mu_A + \mu_B$ en μ_C). Net zo ligt S op BE en ook op AD, waarbij E en D de zijden CA en BC verdelen in stukken met respectievelijk de verhoudingen $\mu_A : \mu_C$ en $\mu_C : \mu_B$. Omdat het systeem van de drie massa's één zwaartepunt kent, moeten CF, BE en AD wel door één en hetzelfde punt S gaan, terwijl:

$$\frac{\mu_B}{\mu_A} \cdot \frac{\mu_A}{\mu_C} \cdot \frac{\mu_C}{\mu_B} = 1$$

Ongeveer op deze wijze heb ik ooit als leraar in klas vwo3 de stelling van Ceva behandeld. Dat was in de tijd dat 'vectormeetkunde' in de onderbouw op het programma stond en deze stelling laat zich niet alleen mooi via vectoren (zonder coördinaten!) bewijzen, maar kan de aanleiding zijn voor oefenen met zogeheten 'convexe lineaire combinaties'.[1]

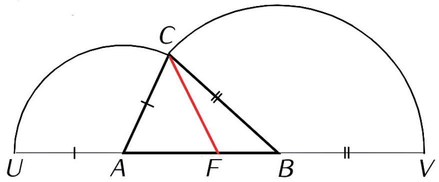
Bijzondere lijnen in een driehoek

Vroeger kon je het wel 'hoogtepunten' in het meetkunde-onderwijs noemen: de drietallen zwaartelijnen, hoogtelijnen en deellijnen van een driehoek zijn stuk voor stuk concurrent. De bewijzen waren mooi, maar leken niet erg op elkaar. De stelling van Ceva stond niet op het menu en kon dus niet worden gebruikt bij de bewijsvoering. Maar dat deze stelling een zeer geschikt instrument is bij bewijzen van concurrentie laat zich raden.



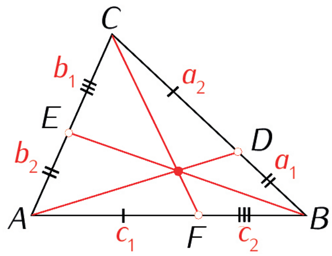
figuur 3

Figuur 3 toont hoe met behulp van een beetje goniometrie en Ceva de concurrentie van de drie hoogtelijnen in een scherphoekige driehoek wordt bewezen. De wetenschap dat een bissectrice van de hoek van een driehoek de zijde tegenover die hoek verdeelt in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden, is genoeg om Ceva in stelling te brengen waaruit dan de concurrentie van de drie bissectrices volgt. En dat de drie zwaartelijnen concurrent zijn, is met Ceva triviaal. Elk van de zwaartelijnen van een driehoek verdeelt de driehoek in twee delen met gelijke oppervlakte. Je zou die zwaartelijnen dus ook *oppervlakte-deellijnen* kunnen noemen. Net zo kun je spreken van *omtrekdeellijnen* van een driehoek. Zo'n omtrekdeellijn is eenvoudig te construeren, zie figuur 4.



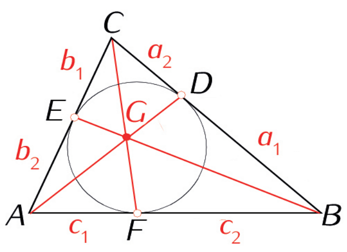
figuur 4

U, V op de verlengden van BA, AB zó dat $|AU| = |AC|$ en $|BV| = |BC|$. F is het midden van UV, dus CF is *omtrek-deellijn* van driehoek ABC. Dat de drie omtrekdeellijnen van ABC door één punt gaan, volgt eenvoudig uit Ceva.



figuur 5

$b + c_1$ en $b + a_2$ zijn beide gelijk aan de halve omtrek van ABC , dus $c_1 = a_2$. Net zo: $a_1 = b_2$ en $b_1 = c_2$, zodat geldt: $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$ ofwel $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$ en er is voldaan aan de Ceva-voorwaarde.
Er is nog een situatie waarbij de zes delen van de zijden van driehoek ABC twee aan twee aan elkaar gelijk zijn, zie figuur 6:

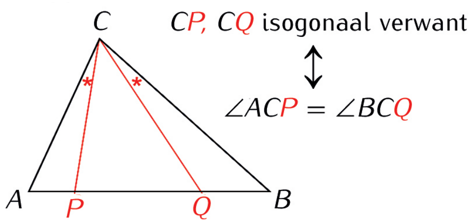


figuur 6

De ingeschreven cirkel van driehoek *ABC* heeft de raakpunten *D*, *E* en *F* met de zijden en er geldt achtereenvolgens $c_1 = b_2$, $a_1 = c_2$ en $b_1 = a_2$ waaruit de Ceva-identiteit volgt. Het snijpunt van de cevianen *AD*, *BE* en *CF* heet hier het punt van Gergonne.[2] Merk op dat *G* alleen in een bijzonder geval het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek *ABC* is.

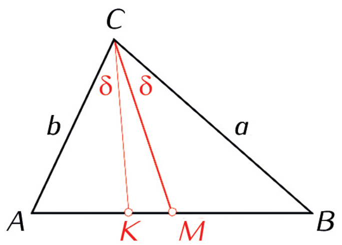
Symmedianen

Twee cevianen *CP* en *CQ* in driehoek *ABC* heten *isogonaal verwant* als de hoek tussen *CP* en *CA* gelijk is aan die tussen *CQ* en *CB*.



figuur 7

De cevianen in een driehoek die isogonaal verwant zijn met de zwaartelijnen worden de *symmedianen* van de driehoek genoemd. Een mooie toepassing van de stelling van Ceva is het bewijs dat in een driehoek de drie symmedianen concurrent zijn.
Het snijpunt *L* van die symmedianen is het zogeheten *punt van Lemoine*.[3] In figuur 8 is de ceviaan *CK* getekend die isogonaal verwant is met de zwaartelijn *CM*. Via de verhouding van de oppervlakten van de driehoeken *AKC* en *BKC* kan worden bewezen dat de lengtes van *AK* en *BK* zich verhouden als b^2 en a^2.



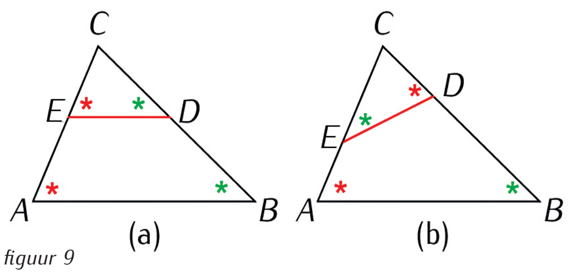
figuur 8

$\angle ACK = \angle BCM = \delta$ en $\angle ACB = \gamma$.
Stel nu $|AK| = c_1$ en $|BK| = c_2$.
De oppervlakten van de driehoeken *AKC* en *BKC* verhouden zich als c_1 en c_2, en ook als $b \cdot \sin(\delta)$ en $a \cdot \sin(\gamma - \delta)$. Uit de gelijkheid van de oppervlakten van driehoeken *AMC* en *BMC* volgt: $b \cdot \sin(\gamma - \delta) = a \cdot \sin(\delta)$ dus $\sin(\gamma - \delta) = \frac{a}{b} \cdot \sin(\delta)$.
Gevolg: $c_1 : c_2 = b \cdot \sin(\delta) : \frac{a}{b} \cdot \sin(\delta) = b^2 : a^2$.

Op dezelfde wijze worden de zijden *BC* en *CA* door de symmedianen uit *A* en *B* verdeeld in stukken met respectievelijk verhoudingen $c^2 : b^2$ en $a^2 : c^2$, zodat de situatie rijp is voor de stelling van Ceva.

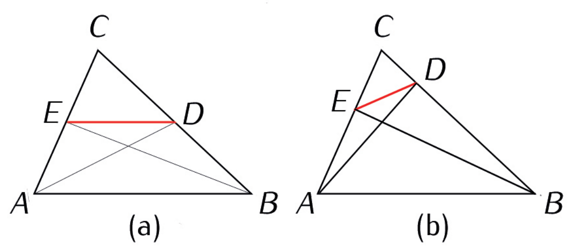
Parallel en antiparallel

Het moet in de tweede of derde klas van het voortgezet onderwijs geweest zijn, dat mijn wiskundeleraar deze twee figuren, zie figuur 9, naast elkaar op het bord tekende.



figuur 9

In figuur 9a zijn *AB* en *ED* parallel, in 9b zijn ze *antiparallel*. Het staat me nog helder voor de geest dat die antiparallelle ligging mij nogal intrigeerde. Om te beginnen de kruislingse gelijkheid van de hoekenparen bij de antiparallel. En net als bij de parallel wordt van driehoek *ABC* een gelijkvormige driehoek afgesneden, maar nu in gespiegelde stand!
Verder: de parallel snijdt van de driehoek een trapezium af en de antiparallel een koordenvierhoek, maar zover waren we toen nog niet. Ik merk op dat in figuur 9b de lijnstukken *AE* en *BD* ook antiparallel zijn: *antiparallellogram* is een mooi synoniem voor koordenvierhoek! Zoals de (midden)parallel in een driehoek verschijnt bij zwaartelijnen, zo doet de antiparallel dat bij hoogtelijnen.

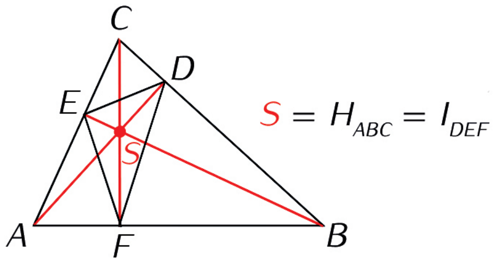


figuur 10

De lengtes van *CD* en *CE* in figuur 10b zijn respectievelijk gelijk zijn aan $b \cdot \cos(\gamma)$ en $a \cdot \cos(\gamma)$ dus *CD* en *CE* verhouden zich als *b* en *a*. Gevolg: de driehoeken *CDE* en *CAB* zijn gelijkvormig en *ED* is antiparallel met *AB*.

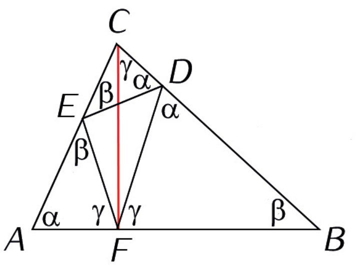
H en I, G en L

In figuur 11 zijn de voetpunten van de drie hoogtelijnen van driehoek *ABC* met elkaar verbonden. Driehoek *DEF* wordt de *voetpuntendriehoek* van driehoek ABC genoemd. De hoogtelijnen AD, BE en CF van driehoek ABC blijken ook de bissectrices van de voetpuntendriehoek DEF te zijn!



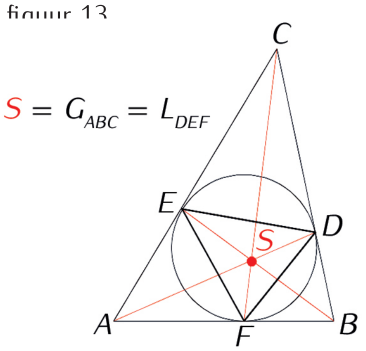
figuur 11

Het punt S is blijkbaar niet alleen het hoogtepunt H van driehoek ABC maar ook het middelpunt I van de ingeschreven cirkel van driehoek DEF. Inderdaad: de drie antiparallellen maken twee aan twee gelijke hoeken met de zijden, zie figuur 12, en bijvoorbeeld de hoogtelijn CF maakt dan gelijke hoeken van $90^o - \gamma$ met de lijnen DF en EF.



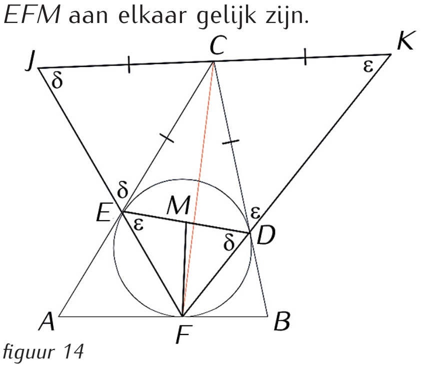
figuur 12

Dit mag een fraaie toepassing van het begrip antiparallel worden genoemd.
Hier komt er nog een. De lijnen die de hoekpunten van driehoek ABC verbinden met de raakpunten D, E en F van de ingeschreven cirkel op de zijden van ABC, zijn tevens (dragers van) de drie symmedianen van driehoek DEF, zie figuur 13.



figuur 13

Het punt S is dus niet alleen het Gergonne-punt van driehoek ABC, maar ook het punt van Lemoine van driehoek DEF. Voor het bewijs kan ik me beperken tot het aantonen dat de lijn FC isogonaal verwant is met de zwaartelijn uit F in driehoek DEF. In figuur 14 is M het midden van DE. Ik wil nu bewijzen dat de hoeken DFC en EFM aan elkaar gelijk zijn.



figuur 14

Daartoe heb ik door C de hulplijn getekend die anti-parallel is met DE en die de lijnen FD en FE respectievelijk snijdt in K en J. Uit een stelling over 'hoeken en bogen' volgt $\angle AEF = \angle EDF = \delta$.
Dan geldt ook $\angle CEJ = \delta$ en vanwege de anti-parallelliteit van JK en DE weet ik ook dat $\angle CJE = \delta$ zodat de lijnstukken CE en CJ even lang zijn. Net zo voor CD en CK en daar CE en CD raaklijnstukken zijn aan de ingeschreven cirkel van ABC, dus ook even lang zijn, volgt hieruit dat C het midden is van KJ. De gelijkvormigheid van driehoeken FDE en FJK zorgt voor de rest. Daaruit volgt namelijk dat $\angle EFM = \angle KFC$, dus de lijn FC is drager van de symmediaan uit F in driehoek DEF!

Noten

[1] Een vector $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ is een convexe lineaire combinatie van $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als de getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ niet negatief zijn en als hun som gelijk is aan 1.

[2] J.D. Gergonne (1771-1859) was aanvankelijk artillerieofficier, werd later hoogleraar wiskunde aan de universiteit van Montpellier. Hij richtte zijn eigen wiskundig tijdschrift op: *Annales de Mathematiques pures et appliqués*.

[3] E.M.H. Lemoine (1840-1912) was civiel ingenieur en docent wiskunde. Hij werkte onder meer aan wat in de 19de eeuw moderne meetkunde werd genoemd.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Paul van der Molen

Normering 2021: Anders dan anders

In *Euclides* 92-6 is in het artikel ‘N-term in werking’ uitgelegd hoe de N-term tot stand komt. Die werkwijze kon in het bijzondere examenjaar 2021 niet gehanteerd worden. Paul van der Molen legt uit hoe dit jaar de N-termen zijn vastgesteld.

Inleiding

De normering van de centrale examens in 2021 is anders verlopen dan in het verleden gebruikelijk was. In de aanloop naar de centrale examens heeft de minister besloten dat leerlingen een extra herkansing kregen en de resultaten van een vak mochten wegstrepen. Deze maatregelen kwamen voort uit een behoefte om rekening te kunnen houden met de ongewone, bij sommige leerlingen gebrekkige, voorbereiding op de centrale examens. Bij het nemen van deze extra maatregelen heeft de minister ook gesteld dat de eisen bij elk vak zoveel mogelijk gehandhaafd moesten worden. De normering moest dus op zo’n manier worden uitgevoerd dat de norm uit het verleden, gegeven de omstandigheden, zo goed mogelijk kon worden gehandhaafd. Dit artikel vertelt hoe de N-termen bij het vak havo wiskunde A tot stand zijn gekomen. De andere wiskundevakken hebben hetzelfde proces doorlopen.

Uitzonderlijke situatie

De toevoeging ‘gegeven de omstandigheden’, zoals hierboven vermeld, laat al doorschemeren dat we in 2021 te maken hadden met een uitzonderlijke situatie. Er is een aantal redenen waarom de werkwijze uit het verleden dit jaar niet goed paste.
Om te beginnen zou in 2021 de populatie die in mei examen zou doen wel eens minder representatief kunnen zijn voor de hele populatie dan in voorgaande jaren.
Dit zou met name opgaan wanneer substantieel minder leerlingen, of minder scholen, aan het eerste tijdvak zouden deelnemen. De examenpopulatie van 2021 zou daardoor niet goed te vergelijken zijn met de populaties in eerdere jaren.
Ook kunnen we in 2021 niet voor alle vakken onze normhandhavingsinstrumenten zoals pre- of posttesten inzetten. De reden hiervoor is dat deze instrumenten er last van hebben als onderdelen van het examenprogramma niet in dezelfde mate aandacht in de voorbereiding hebben gehad als in voorgaande jaren, met name als één onderdeel relatief minder aandacht heeft gehad. Ook als de vaardigheidsontwikkeling bij vakken sterk verschilt ten opzichte van andere vakken, en die verschillen zijn niet in lijn met eerdere jaren, dan geeft dat problemen bij de normhandhaving. Deze factoren veroorzaken een grotere onzekerheid in de uitkomsten.

De basis van de normering

In de winter en het voorjaar hebben normeringsspecialisten van Cito en CvTE beschreven welke informatie beschikbaar zou moeten zijn tijdens de normering en hoe deze gebruikt zou worden. Hiermee werd de basis gelegd voor de normering van 2021. Deze basis is in januari in een docent-informatiewebinar gepresenteerd. Zie *Examenblad.nl*[1], waar je meer gedetailleerde informatie vindt over de normering inclusief een informatieve animatie.
De basis voor de normering bestond uit vier stappen: in stap 1 werd de voorlopige technische N-term zodanig bepaald dat een ‘representatieve steekproef’ een vergelijkbaar gemiddeld cijfer kreeg als in de jaren 2014 - 2019. In stap 2 werd het oordeel van docenten gebruikt om na te gaan of de norm uit stap 1 wel goed overeenkomt met de norm uit het verleden. Docenten geven niet allemaal hetzelfde oordeel. Daarom werden de docenten in drie gelijke groepen verdeeld en was het interval van de middelste groep leidend voor de vergelijking in stap 2 (er werd dus gewerkt met het 33/67-percentiel-interval). Ten slotte werd in stap 3 vergeleken of de voorlopige N-term wel in lijn was met de gebruikelijke moeilijkheid van het examen van dat vak (historische N-term). De gedachte hierachter is dat het erg onwaarschijnlijk is dat de moeilijkheid van het examen in 2021 opeens erg ver afwijkt van deze waarden. Daartoe is een 90% betrouwbaarheidsinterval gemaakt op basis van het gemiddelde en de standaarddeviatie van de N-termen in de afgelopen zes

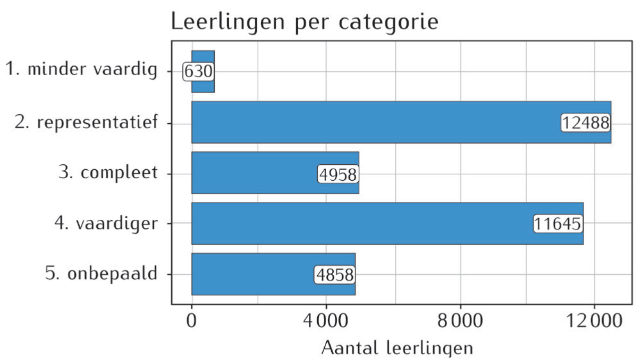
jaar. Bij vakken waar de voorlopige N-term na stap 2 buiten het historisch N-terminterval ligt, werd de N-term aangepast tot in dit historisch interval. De N-term mocht daarbij maximaal worden opgeschoven tot de grenzen van het 10/90-percentiel-interval van de docentoordelen. Tot slot werd in stap 4 nog gekeken of er sprake was van fouten of andere onvolkomenheden waarvoor compensatie via de N-term nodig was.

De docentvragen

Op voorhand was niet duidelijk welke leerlingen in mei examen zouden doen. Stel dat van elke klas de zwakste leerlingen pas in juni voor het eerst examen zouden doen, dan is de mei-populatie sterker dan het landelijk gemiddelde. Daarom hebben we docenten via het programma Wolf de vraag gesteld of de groep die in mei examen had gedaan, wel representatief was voor de hele klas.
De andere vraag die we via Wolf aan de docenten voorlegden was: '... Cito en CvTE willen graag weten waar volgens u de grens tussen voldoende en onvoldoende prestatie ligt op dit examen, wanneer u het vergelijkt met andere jaren. Bij welke totaalscore past dan volgens u op dit examen het cijfer 5,5?'. Hiermee probeerden we een link met de norm in het verleden te maken. De score die de docent had doorgegeven hebben we omgerekend naar een N-term. Uit de resultaten werd duidelijk dat sommige docenten het examen makkelijker inschatten dan andere docenten. Omdat we (zeker bij wiskunde) van honderden docenten het oordeel hebben ontvangen, ontstond een goed beeld van de verdeling van de oordelen.

Tijdvak 1

In Wolf hebben 501 scholen de gegevens van 34 579 leerlingen doorgegeven die het examen havo wiskunde A gemaakt hadden. Volgens de vraag over representativiteit zaten 12 488 leerlingen in een representatieve groep en zaten 4 958 leerlingen in een klas die voor 100% deelnam in mei, zie figuur 1. Er werden dus 17 446 leerlingen in de steekproef opgenomen.



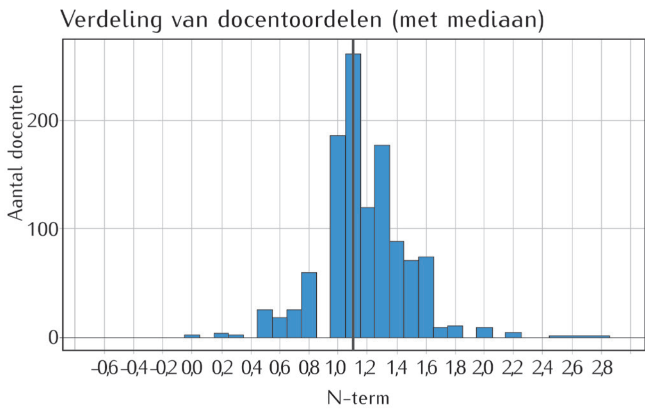
figuur 1

De 17 446 leerlingen zaten op scholen die in het verleden gemiddeld even vaardig waren als het landelijk gemiddelde. Het gemiddelde cijfer 2017 – 2019[2] was een 6,4 volgens een intern afgesproken berekeningswijze. Met behulp van een zogenaamde normeringstabel kan gevonden worden bij welke N-term het gemiddeld cijfer een 6,4 is, zie tabel1.

N-term	Gemiddeld cijfer	Percentage onvoldoende
0,8	6,2	27,8
0,9	6,3	25,2
1,0	6,4	25,2
1,1	6,5	22,8
1,2	6,6	20,5

tabel 1

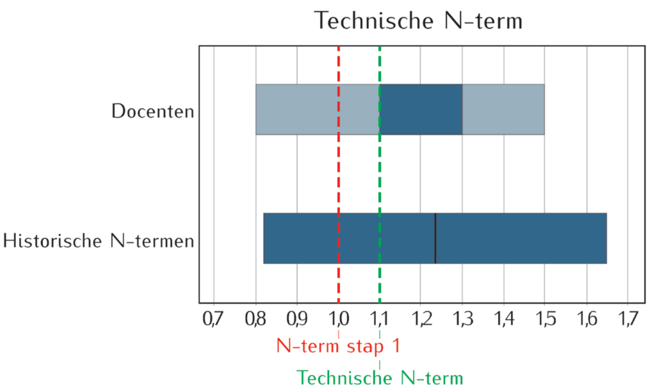
Hieruit volgt dat na stap 1 de voorlopige technische N-term een 1,0 was. Vervolgens werd gekeken of dit overeenkwam met de docentoordelen. De verdeling van de docentoordelen is weergegeven in figuur 2.



figuur 2

Hieruit valt af te lezen dat de docenten (over het algemeen) het examen moeilijker inschatten dan een examen met N = 1,0. Het frequentiediagram van figuur 2 is omgezet naar een soort boxplot. Zie de bovenste balk in figuur 3. Het 33/67-percentiel-interval is donkerblauw weergegeven en het 10/90-percentiel-interval lichtblauw. De voorlopige technische N-term na stap 1 ligt niet in het 33/67-percentiel-interval dat loopt van 1,1 tot en met 1,3. We kiezen nu voor een N-term die wel in dit interval ligt en wel zo dicht mogelijk bij de N-term na stap 1: De N-term na stap 2 werd daarmee een 1,1.

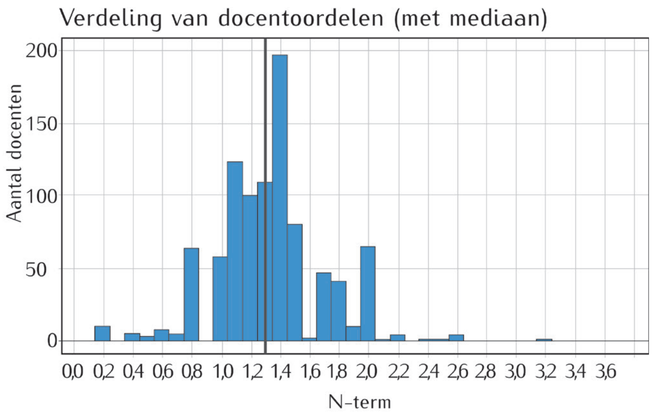
Vervolgens is in stap 3 gekeken naar de historische N-termen. Bij havo wiskunde A betrof dit dus alleen 2017, 2018 en 2019. De N-termen waren toen 1,5; 1,2 en 1,0. Omdat er slechts drie jaren werden meegenomen, werd deze stap met enige voorzichtigheid uitgevoerd. Bij dit vak viel de technische N-term na stap 2 vrijwel middenin het 90% betrouwbaarheidsinterval en was er dus geen reden tot verdere bijstelling van de technische N-term. De hele procedure die leidt tot de technische N-term van 1,1 is zichtbaar in figuur 3. Ten slotte (stap 4) is op basis van signalen van docenten en op basis van de toets- en itemanalyse besloten om de N-term met 0,1 te verhogen in verband met mogelijke tijdnood. Opgemerkt wordt dat de techniek al voorziet in compensatie voor tijdnood. Doordat groepen leerlingen die de leerstof wel voldoende beheersen meer dan gemiddeld last gehad kunnen hebben van de tijdnood, is hier toch besloten voor een (kleine) extra compensatie. Dit alles leidde ertoe dat voor het mei-examen van havo wiskunde A geldt:
N = 1,2. Het gemiddeld cijfer dat de leerlingen in tijdvak 1 behaalden was daarmee een 6,6 en 20% van de leerlingen haalde een onvoldoende.



figuur 3

Tijdvak 2

Ook in tijdvak 2 keken we naar de 'representatieve scholen'. Representatieve scholen zijn de scholen die in tijdvak 1 hadden aangegeven dat hun groep leerlingen die in mei examen deed, representatief was voor de hele klas. Het ligt dan voor de hand dat de groep leerlingen die in juni voor het eerst examen deed ook representatief was voor de hele klas. Er waren 615 leerlingen die in juni voor het eerst examen deden die aan deze steekproef-criteria voldeden. Op dezelfde manier als in het eerste tijdvak werd de N-term na stap 1 berekend. Omdat de scores op dit examen heel erg laag waren, werd dit een 2,3. De docenten beoordeelden het examen wel als iets moeilijker dan het examen in tijdvak 1, maar niet als heel veel moeilijker. De verdeling van de docentoordelen is te zien in figuur 4. Dit leverde een 33/67-percentiel-interval op van [1,2 ; 1,4]. De N-term na stap 2 werd daarmee 1,4. Stap 3 gaf geen bijstelling en dus werd de technische N-term op basis van de scores van de 'eerstekansers' 1,4.



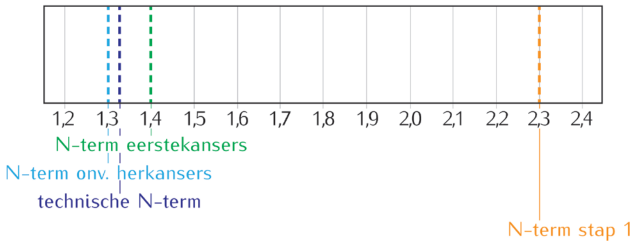
figuur 4

In tijdvak 2 waren er ook herkansers. Ook op basis van hun scores kan een N-term worden geschat. Dit werd gedaan op een vergelijkbare manier die we in het verleden gebruikten voor het tweede tijdvak.

Tweede-tijdvakvergelijking

Bij de tweede-tijdvakvergelijking wordt gekeken naar de procentuele scores van de leerlingen die op het examen in mei een onvoldoende scoorden en in juni herkansten (onvoldoende herkansers). Op basis van regressie naar het gemiddelde en een kleine leerwinst verwacht je bij twee examens die precies even moeilijk zijn, een lichte verhoging van de procentuele score. Elke afwijking van deze lichte verbetering is een indicatie van een verschil in moeilijkheid tussen de twee examens. Bijvoorbeeld, bij een daling van de procentuele score is dit zeer waarschijnlijk het gevolg van het feit dat het tweede tijdvakexamen moeilijker is.

Er waren in het tweede tijdvak 1 585 onvoldoende her-kansers. De scores van deze leerlingen lieten zien dat het tweede tijdvak 0,2 cijferpunt moeilijker was dan het eerste tijdvak. Deze 0,2 werd bij de technische N-term van tijdvak 1 opgeteld. Dit leidde tot een N-term van 1,3. We hebben nu op basis van twee verschillende datasets een N-term voor het examen geschat. Deze twee schattingen werden gecombineerd door een gewogen gemiddelde te nemen op basis van het aantal kandidaten. De hele normering van het examen in tijdvak 2 is samengevat in figuur 5.

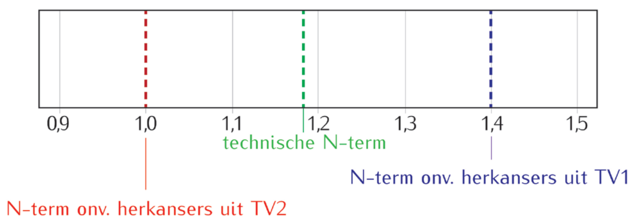


figuur 5

Omdat er meer herkansers waren dan eerstekansers weegt deze uitkomst zwaarder en werd een N-term van 1,3 vastgesteld. Het gemiddelde cijfer van de leerlingen die tijdvak 2 maakten werd hiermee een 5,2 en 56% van de leerlingen haalde een onvoldoende.

Tijdvak 3

In tijdvak 3 waren er 370 onvoldoende herkansers die hun eerste kans in tijdvak 1 hadden gedaan en 445 onvoldoende herkansers die hun eerste kans in tijdvak 2 hadden gedaan. Op basis van de scores van deze twee groepen is de N-term op twee manieren geschat.
In figuur 6 zijn de resultaten in een overzicht te zien.



figuur 6

Het gewogen gemiddelde van de twee groepen was (afgerond) N = 1,2. Deze N-term leidde tot een gemiddeld cijfer 4,7 en 72% onvoldoende.

Nabeschouwing

Goed normeren is niet eenvoudig. Dit heeft vooral te maken met de onzekerheid van de uitkomsten van de schattingen. Door het betrekken van meerdere informatiebronnen kan deze onzekerheid verkleind worden. Het toevoegen van het docentoordeel, zoals we dat dit jaar voor het eerst gedaan hebben, is waardevol gebleken.
De normeringen geven nog geen volledig beeld van de vaardigheid van de populatie 2021. Om dit beeld volledig te beschrijven zijn aanvullende analyses nodig. In november zullen CvTE en Cito deze analyses afronden. We verwachten dat deze analyses belangrijke informatie opleveren die meegenomen zullen worden bij de evaluatie van de centrale examens 2021.

Noten

[1] zie: *https://www.examenblad.nl/nieuws/20210219/normering-centrale-examens-2021/2021*

[2] Alleen de jaren 2017, 2018 en 2019 werden meegenomen in de berekening omdat het examen havo wiskunde A vanaf 2017 gebaseerd is op een nieuw examenprogramma.

Over de auteur

Paul van der Molen is oud-docent wiskunde, oud-examenmaker wiskunde en sinds 2014 manager normering (verantwoordelijk voor het technisch normeringsadvies van Cito bij de centrale examens VO).
E-mailadres: *Paul.vandermolen@cito.nl*

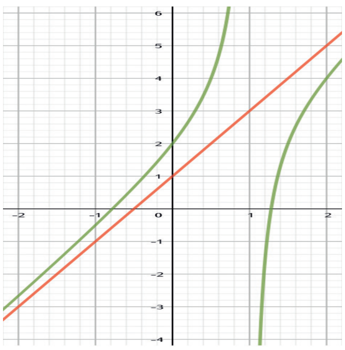
Jan Otto Kranenborg

Wel of geen scheve asymptoot

Scheve asymptoten spreken tot de verbeelding, maar wanneer heeft een functie nu wel of niet een scheve asymptoot? Jan Otto Kranenborg heeft dat voor ons uitgezocht, geïnspireerd door een vraag van een van zijn leerlingen.

Inleiding

Bij de behandeling van een scheve asymptoot rees in de klas de vraag bij welke functies een scheve asymptoot zou bestaan. In eerste instantie gaf ik het voorbeeld van een quotiëntfunctie en werkte die uit. Dat gaf direct het nodige gedoe, omdat ik de techniek van de staartdeling gebruikte en die was zeker niet bij iedereen bekend.
Ik besloot om eerst maar eens een functie te laten zien die een scheve asymptoot bevat. Dus dan maar geen staartdeling en later de nodige algebra. Ik koos als voorbeeld de volgende functie $f(x)=\frac{2x^2-x-2}{x-1}$ · En ik zette GeoGebra in. Het plaatje vonden de leerlingen zeer illustratief, zie figuur 1.



figuur 1

Algebraïsch

Om te laten zien dat de grafiek van de functie zich op den duur als een rechte lijn gedraagt, geldt

$$\frac{2x^2-x-2}{x-1}=\frac{2x(x-1)+x-2}{x-1}=2x+\frac{x-2}{x-1}=$$
$$2x+\frac{x-1-1}{x-1}=2x+\frac{x-1}{x-1}+\frac{-1}{x-1}=2x+1+\frac{-1}{x-1}$$

Er volgt dan dat de lijn k: $y = 2x + 1$ de scheve asymptoot is aangezien voor de restterm geldt

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1}{x-1}=0$ als ook $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-1}=0$.

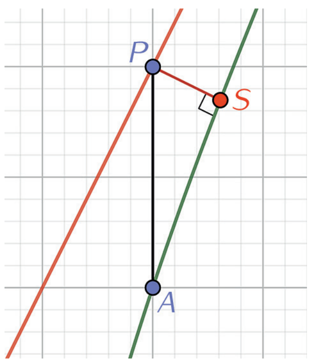
Zo'n deling kan dus uitgevoerd worden als de graad van de teller één hoger is dan die van de noemer.
En dan toch maar de definitie van een scheve asymptoot:
(1) Een functie f heeft een scheve asymptoot k: $y = ax + b$ als $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ en/of als

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

Plat gezegd: de grafiek van de functie komt op den duur steeds dichter bij een lijn te liggen.

Afstand?

Maar, zo merkte een leerling op, in zo'n definitie staat niet de afstand van een punt P op de grafiek tot zo'n lijn. Immers, je kijkt naar een verticale afstand PA in plaats van de echte afstand PS.
Daar moest ik wel even over nadenken.
Figuur 2 maakt direct duidelijk dat PS kleiner is dan PA.
Maar, dat is nog geen bewijs. Dus ging ik van start.



figuur 2

Laat punt P op de grafiek van f liggen, dus $P(p, f(p))$.
Dan is de afstand van P tot lijn k: $y = ax + b$ gelijk aan

$$d(P,k)=\frac{|ap-f(p)+b|}{\sqrt{a^2+1}}\ .$$

En dan geldt dat

$$\frac{|ap-f(p)+b|}{\sqrt{a^2+1}}<|ap-f(p)+b|=|f(p)-(ap+b)|\ .$$

En daarmee is dan aangetoond dat $d(P, k) = PS$ kleiner is dan PA. (Of korter, m.b.v. de stelling van Pythagoras geldt $PS=\sqrt{(PA^2-AS^2)}<PA$.

Welke functies hebben zo'n scheve asymptoot?

Maar de vraag bleef: welke functies hebben zo'n scheve asymptoot, en hoeveel zijn er eigenlijk mogelijk?
Om met het eerste te beginnen, bekijk ik de 'wortelfunctie'

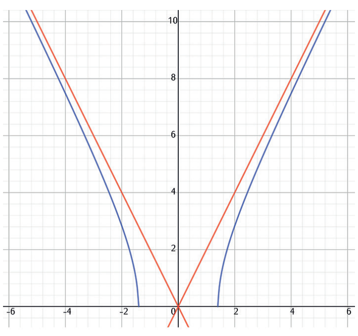
$f(x)=\sqrt{(4x^2-8)}$, zie figuur 3.

f heeft als domein $\langle\leftarrow, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \rightarrow\rangle$, dus heeft het zin om te praten over het gedrag van f als x naar plus of min oneindig gaat. f heeft twee scheve asymptoten:
de lijn $y = 2x$ als $x \to \infty$; $y = -2x$ als $x \to -\infty$.
Voor $x \to \infty$ wordt er voldaan aan definitie (1); als $x \to -\infty$ gaat het bewijs vrijwel analoog.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(4x^2-8)}-2x\right)\cdot\frac{\sqrt{(4x^2-8)}+2x}{\sqrt{(4x^2-8)}+2x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-8-4x^2}{\sqrt{(4x^2-8)}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8}{\sqrt{(4x^2-8)}+2x}=0$$

In deze berekening is met een 'geschikte 1' vermenigvuldigd.



figuur 3

Dit voorbeeld laat zich generaliseren.
De bewering is:
(2) de functie $f(x)=\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ met $a > 0$ heeft twee scheve asymptoten die te schrijven zijn als

$$y=\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}} \quad \text{als } x \to \infty \text{ en}$$

$$y=-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}} \quad \text{als } x \to -\infty.$$

Het bewijs van bewering (2) gaat met het nodige rekenwerk:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

Waarbij $D = b^2 - 4ac$.
Omdat

$$\sqrt{(ax^2+bx+c)}=\sqrt{\left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}\right)}\approx$$

$$\sqrt{\left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)}=\sqrt{a}\cdot\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

kom ik op het idee dat voor de scheve asymptoot geldt $y=\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ als $x \to \infty$.

Het bewijs is technisch en gaat in grote lijnen als het voorbeeld hierboven.

$$\left(\sqrt{(ax^2+bx+c)}-\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right)\cdot\frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$=\frac{(ax^2+bx+c)-\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$\frac{(ax^2+bx+c)-\left(ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}\right)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$=\frac{c-\frac{b^2}{4a}}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(\sqrt{a}\cdot x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$\frac{-\frac{D}{4a}}{x\left(\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\left(\sqrt{a}+\frac{b}{2x\sqrt{a}}\right)\right)}\to 0 \quad \text{als } x \to \infty.$$

>

En voor $x \to -\infty$ gaat de berekening iets anders (bedenk dat nu $\sqrt{x^2}=|x|=-x$):

$$\left(\sqrt{(ax^2+bx+c)}-\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right)\cdot\frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$=\frac{(ax^2+bx+c)-\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$\frac{(ax^2+bx+c)-\left(ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}\right)}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$=\frac{c-\frac{b^2}{4a}}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}+\left(-\sqrt{a}\cdot x-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)}=$$

$$\frac{-\frac{D}{4a}}{-x\left(\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}+\left(\sqrt{a}+\frac{b}{2x\sqrt{a}}\right)\right)}\to 0$$

Hieronder wordt het domein van de functie $f(x)=\sqrt{(ax^2+bx+c)}$ beschreven; evenzo of er scheve asymptoten bestaan. Laat x_1 en x_2 de oplossingen van zijn van $ax^2 + bx + c = 0$, zie tabel 1.

		Domein van f	scheve asymptoten
$a < 0$	$D < 0$	bestaat niet	geen
	$D = 0$	$\{x_1 = x_2\}$	geen
	$D > 0$	$[x_1, x_2]$	geen
$a = 0$		$[-b/c, \rightarrow\rangle$ als $b > 0$ $\langle\leftarrow, -c/b]$ als $b < 0$	geen
$a > 0$	$D < 0$	$\mathbb{R}$	ja, twee
	$D = 0$	$\mathbb{R}$	ja, twee; valt samen met $f(x)$
	$D > 0$	$\langle\leftarrow, x_1] \cup [x_2, \rightarrow\rangle$	ja, twee

tabel 1

Alternatief

Een andere manier die niet meer zo gebruikelijk is, is de volgende. Nodig en voldoende voor het hebben van een scheve asymptoot is dat in elk geval:

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ of $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ moet bestaan; noem deze limiet a.

(4) Onderzoek vervolgens of $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ dan wel $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$ bestaat; noem deze limiet b. Daarmee is dan de scheve asymptoot k: $y = ax + b$ gevonden.

Als er bijvoorbeeld wel voldaan wordt aan (3) maar niet aan (4) dan is er geen scheve asymptoot: neem $f(x) = x + \ln(x)$, dan is

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$, maar

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}(\ln(x))=\infty$$

en die bestaat dus niet.

En wat het aantal scheve asymptoten betreft:
Omdat het functiegedrag in $+\infty$ of $-\infty$ bekeken wordt, is het beter om te zeggen dat het aantal horizontale en scheve asymptoten nul, één of twee is.
Een voorbeeld van één scheve asymptoot is de volgende: $f(x) = x + e^{-x}$. Het is gemakkelijk na te gaan dat de lijn k: $y = x$ aan (1) voldoet (en ook aan (3) en (4)).

De vraag of er nog andere functies een scheve asymptoot hebben, is nog niet beantwoord. Ik ging verder op zoek en zocht naar derdemachtswortels. Door een aantal van de volgende functies te plotten, kom je op een idee (hetzij met de grafische rekenmachine of met behulp van GeoGebra).
Zo lijkt het dat de functie $f(x)=\sqrt[3]{(x^3+x)}$ de scheve asymptoot k: $y = x$ heeft, maar dat de functie $g(x)=\sqrt[3]{(x^3+x^2)}$ een andere scheve asymptoot heeft: l: $y = x + ⅓$.
Het bewijs verloopt anders dan bij de tweedemachtswortel. Allereerst merk ik op dat geldt
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, waaruit direct volgt

(5) $$a-b=\frac{(a^3-b^3)}{(a^2+ab+b^2)}.$$

$$f(x)-x=\sqrt[3]{(x^3+x)}-x=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{(x^3+x)}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x)}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x)}\cdot x+x^2}=$$

$$\frac{x^3+x-x^3}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x)}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x)}\cdot x+x^2}=$$

$$\frac{x^3+x-x^3}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x)}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x)}\cdot x+x^2}=$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{(x^6+2x^4+x^2)}+x\cdot\sqrt[3]{(x^3+x)}+x^2}=$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{(x^3+x)}+x}$$

Limietovergang $x\to\infty$ levert dan dat de restterm van $f(x) - x$ naar 0 gaat.

Nu kijk ik naar de restterm van $g(x)=\sqrt[3]{(x^3+x^2)}$ met zijn scheve asymptoot l: $y = x + ⅓$.

$$\sqrt[3]{(x^3+x^2)}-\left(x+\tfrac{1}{3}\right)=$$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)}\right)^3-\left(x+\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)}\right)^2+\sqrt[3]{(x^3+x^2)}\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$\frac{(x^3+x^2)-\left(x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}\right)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2)}\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2)}\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}=$$

$$\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}}{\sqrt[3]{x^6+2x^5+x^4}+\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt[3]{(x^3+x^2)}+\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)}=\tag{6}$$

Delen we teller en noemer door x^2, dan gaat deze uitdrukking (6) over in

$$\frac{-\frac{1}{3x}-\frac{1}{27x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{(x^3+x^2)}+\left(1+\frac{2}{3x}+\frac{1}{9x^2}\right)}.\tag{7}$$

Nu is

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{(x^3+x^2)}=$$

$$\frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{3x}\right)\cdot\sqrt[3]{(x^3+x^2)}=\left(1+\frac{1}{3x}\right)\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Maar dan gaat (7) over in

$$\frac{-\frac{1}{3x}-\frac{1}{27x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\left(1+\frac{1}{3x}\right)\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\left(1+\frac{2}{3x}+\frac{1}{9x^2}\right)}\tag{8}$$

Voor $x\to\infty$ gaat de teller van (8) naar 0, terwijl de noemer naar 3 convergeert.

Tot slot

De vraag welke functies een scheve asymptoot hebben, is zeker nog niet afdoende beantwoord. Wat wel duidelijk is, is het feit dat bij de leerboeken van *Getal & Ruimte* alsook bij *Moderne Wiskunde* eigenlijk alleen gebroken functies aan de orde komen, terwijl er nog veel machtsfuncties met hun scheve asymptoot onbehandeld blijven. En of dat komt vanwege het algebraïsche karakter dan wel de overladenheid van het wiskunde-B-programma weet ik niet; feit is wel dat er heel aardige wiskundige 'uitstapjes' gedaan kunnen worden.

Probeer zelf tot slot ook eens:

(a) $f(x)=\sqrt[4]{(x^4+x^3)}$ en $g(x)=\sqrt[4]{(x^4+x^2)}$

(b) $h_p(x)=\sqrt[p]{(x^p+x^{p-1})}$

En mocht je nog zin hebben, dan heb ik nog een aardige limiet:

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x^3+x^2)}-\sqrt[4]{(x^4+x^3)}\right)$

Handig hierbij is het gegeven dat $(a^n - b^n)$ voor elke n deelbaar is door $(a - b)$.

Immers: $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1}$

Over de auteur

Jan Otto Kranenborg was docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle. Na zijn pensionering is hij nu tijdelijk docent wiskunde aan de RSG Tromp Meesters te Steenwijk. E-mailadres: *jokranenborg@hotmail.com.*

Tom Goris

Interview met Liesbeth Klein Kranenbarg
Bijspijkerkampen van Anderwijs

In de sfeer van een zeil- of scoutingkamp spelenderwijs leren. Dat typeert de bijspijkerkampen van Anderwijs. Doel is om leerlingen te laten ervaren dat leren leuk is. De resultaten volgen dan meestal vanzelf. Een gesprek met wiskundedocent Liesbeth Klein Kranenbarg, voorzitter van Anderwijs.

Anderwijs

Inleiding
Anderwijs is een vereniging die in vakanties en lange weekenden bijspijkerkampen organiseert voor leerlingen van alle niveaus en voor alle vakken. De leerlingen ervaren tijdens zo'n kamp dat leren ook leuk kan zijn.
Anderwijs is een vereniging zonder winstoogmerk die in 1985 is opgericht en volledig gerund wordt door vrijwilligers. Het zijn voornamelijk studenten en pas-afgestudeerden, ongeveer de helft met een onderwijsachtergrond. Ouders betalen een minimale inkomensafhankelijke bijdrage voor de kampen. De vrijwilligers krijgen alleen hun onkosten vergoed, want alle middelen worden ingezet om de kampen te kunnen organiseren.
De vrijwilligers krijgen vooraf een training om elkaar te leren kennen: je bent als team van zes verantwoordelijk voor zo'n vijftien deelnemers met wie je alles samendoet in zo'n week. Dus niet alleen het 'schaduwonderwijs', maar ook gezamenlijk eten, schoonmaken, spelletjes doen et cetera. In die training gaat het ook over reflectie, zelfontwikkeling, feedback geven, didactiek en pedagogiek. Kernvraag is: hoe ga je met kinderen om? Voor mijzelf was die training ook reden om mee te blijven doen omdat ik daar zoveel uithaal. Het kamp is voor mij een gratis vakantie: ik word er gewoon gelukkig van. Dat geldt voor alle vrijwilligers en dat straalt af op de deelnemers: we hebben allemaal de ideologische instelling dat iedereen recht heeft op goed onderwijs.

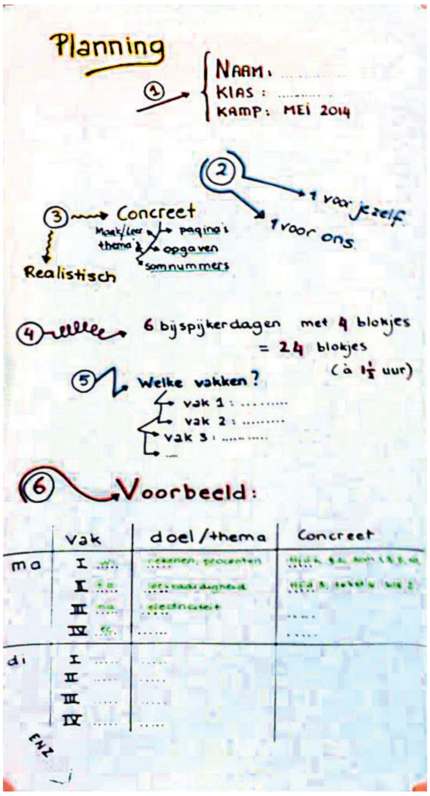
Hoe typeer je Anderwijs?
We noemen de kampen heel bewust 'bijspijkerkampen' en geen 'bijleskampen'. Wij staan wat verder af van de lessen en het curriculum. We gaan met de leerling aan de slag met een programma op maat, geen huiswerkbegeleiding maar meer een algemene ondersteuning bij specifieke vakken. Vijftien tot twintig leerlingen (deelnemers) uit het voortgezet onderwijs gaan samen met zes tot acht begeleiders een week naar een ruime locatie om samen te leren. De deelnemers zijn van alle niveaus en alle leeftijden. Zes uur per dag zijn we bezig met leren in de meest brede zin van het woord: niet alleen heel specifiek voor een vak, maar ook met de attitude ten aanzien van leren. We gaan op zoek naar oorzaken van individuele leerproblemen en proberen waar mogelijk oplossingen aan te dragen.
Dit alles in de sfeer van een vakantiekamp: naast het leren is er voldoende ruimte voor vertier. De leermomenten zijn individueel of in een twee- of drietal met een begeleider. Alle andere activiteiten doen we met de hele groep. Deelnemers en begeleiders leren elkaar daardoor goed kennen, wat we uitermate belangrijk vinden voor het 'groepssfeergevoel'. Anderwijs opereert vanuit de gedachte dat leren leuk is. We geloven dat een vrijwillige deelname, ontspannen sfeer, gelijkwaardigheid, persoonlijke aandacht en een alternatieve aanpak het plezier in leren kunnen vergroten.

figuur 1 Sfeerbeeld van het kamp

Ranja en memory

'Je probeert de deelnemers verder te helpen. Ze lopen ergens tegen aan en je hebt ook echt de tijd om samen naar een oplossing te zoeken. En dat is vaak niet de oplossing die een deelnemer verwacht. Scheikunde uitleggen met ranja, wiskunde met papier en een schaar of Grieks met een memoryspel. Ik vind het vooral leuk om te zien dat ik een deelnemer iets kan uitleggen of een andere manier van leren kan meegeven, waardoor hij of zij een stuk gemotiveerder aan het werk gaat.'

Iris, begeleider, 23 jaar



figuur 2 Voorbeeld van een planning

Wat vinden de deelnemers van Anderwijs?

De kinderen hebben achterstanden, bijvoorbeeld door een langdurige ziekte, of kinderen die in de klas niet helemaal goed tot hun recht komen, bijvoorbeeld door adhd of autisme. Sleutelwoord is flexibiliteit: er hoeft niets af te zijn aan het eind van de week. Als een leerling zich niet goed blijkt te kunnen concentreren, dan gaan we daarmee aan de slag. We onderbreken de les voor andere activiteiten: tafeltjes leren op een springkussen, het gebouw opmeten, alles kan. We gaan voor het langetermijneffect en we zien ook dat er veel deelnemers terugkomen omdat ze ervaren dat leren ook leuk kan zijn. Het motto is 'leren en vakantie in één'. Vergelijk het maar met een zeilkamp: overdag leer je zeilen en 's avonds zijn er gezellige activiteiten en reflecteren we op de dag. Met de begeleiders bespreken we creatieve manieren om de leerlingen op maat van dienst te kunnen zijn. Ook is er veel ruimte voor individuele gesprekken over school, leren, beroepskeuze, et cetera. Bij de aanmelding geven de deelnemers de vakken op waar ze in bijgespijkerd willen worden. We stellen de leiding dan zo samen dat het 'past'. Op de eerste dag maken we een planning in een soort intakegesprek: de deelnemer heeft de schoolboeken bij zich en geeft zelf aan hoeveel tijd hij aan een bepaald vak wil werken. Deelnemers die voor het eerst meedoen hebben nog wel eens het gevoel op een soort 'strafkamp' gestuurd te zijn door hun ouders. Door op de eerste dag voornamelijk bezig te zijn met kennismaken en spelletjes proberen we dat gevoel snel te laten verdwijnen. Door de ontspannen sfeer, de persoonlijke aandacht en het flexibele programma is een veelgehoorde reactie van deelnemers aan het eind van de week: 'ik wist niet dat leren ook leuk kon zijn…'

Superrelaxed en leerzaam

'Je komt binnen in een groep met veel onbekenden. Op mijn eerste kamp kende ik bijvoorbeeld niemand. De leiding, die het net zo spannend vindt als jij, ontvangt je op een leuke manier. Al snel vinden de eerste kennismakingspelletjes plaats en worden zelfs de eerste vrienden gemaakt. De dagen dat je aan het studeren bent zijn superrelaxed. Per dag heb je enkele blokjes, die echt snel voorbijgaan, omdat het leren echt leuk is (ik kon dit ook niet geloven). De leiding maakt het leren leuk door bijvoorbeeld spelletjes te gebruiken: 'Wie ben ik?' tijdens Engels, memory en goede gesprekken. Koekjes en limonade helpen natuurlijk ook goed. De blokjes zijn erg leerzaam, zo heb ik bijvoorbeeld bij Duits naamwoorden geleerd. Waar ik dat schooljaar niet hoger scoorde dan een 3, haalde ik na Anderwijs een dikke 8.

Dagmar, 14 jaar, 3 havo

Wat heb je zelf geleerd van Anderwijs?

Tijdens zo'n kamp hoor je veel beter van leerlingen wat hun problemen zijn. Bijvoorbeeld: stress voor een toets. Door gesprekken daarover leer je pas echt goed wat dat voor een leerling betekent. Die ervaring neem ik mee in mijn reguliere wiskundelessen. En je kunt daardoor veel beter je mentorrol vervullen. >

Voor welke leerlingen is Anderwijs geschikt?

Er zijn eigenlijk twee soorten deelnemers. Ten eerste leerlingen die om wat voor reden dan ook een achterstand opgelopen hebben en die veel moeten inhalen in korte tijd, maar die daar zelf ook gemotiveerd voor zijn. Ten tweede de leerlingen die in de klas 'net niet genoeg aan bod komen' en die daardoor hun plezier in leren zijn kwijtgeraakt. Leerlingen die net wat meer aandacht zouden moeten krijgen wat in het reguliere onderwijs niet altijd kan of lukt. Door de inspirerende leeromgeving die Anderwijs biedt lukt het vaak deze leerlingen weer gemotiveerd te krijgen. Daarnaast is Anderwijs ook een uitkomst voor leerlingen van wie de ouders minder te besteden hebben. Door de inkomensafhankelijke korting willen we het kamp betaalbaar maken voor iedereen.

Hoe typeer je vrijwilligers van Anderwijs?

Je moet een passie hebben voor onderwijs en een oprechte interesse in de belevingswereld van je leerlingen, een idealist die gelooft in gelijke kansen voor iedereen en dat je dit op basis van vrijwilligerswerk wilt realiseren. En uiteraard moet het 'kampgebeuren' je aanspreken, waarin je in een team samenwerkt. Ervaring met het geven van bijles of het organiseren van kampen mag, maar eisen wij niet. We vinden het namelijk belangrijk dat Anderwijs juist de plek is waar je die ervaring kunt opdoen en jezelf kunt ontwikkelen. Door de training vooraf en hulp van ervaren leiding ben je altijd voldoende uitgerust om mee te gaan op kamp.
Voor meer informatie: *https://www.anderwijs.nl/*

Over de auteur en geïnterviewde

Liesbeth Klein Kranenbarg is voorzitter van Vereniging Anderwijs en docent wiskunde op het Beekdal Lyceum te Arnhem. E-mailadres: *l.kleinkranenbarg@beekdallyceum.nl*
Tom Goris is lerarenopleider bij Fontys Lerarenopleidingen Tilburg en hoofdredacteur van *Euclides*. E-mail: *t.goris@nvvw.nl*

WiTje: Vormen en inhoud

Wiskunde in teams

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Je kunt niet altijd direct zien in wat voor vorm de meeste inhoud past. Van een vel A4-papier kun je een koker rollen, waarbij je de uiteinden tegen elkaar houdt. Dat kun je op twee manieren doen: over de lengte, en over de breedte. Wanneer heb je de grootste inhoud? Als je nu een rechthoek neemt met andere afmetingen dan A4, geldt dat dan ook? Zoek uit hoe de relatie is tussen de zijden van een rechthoek en de grootste inhoud, en schrijf het resultaat van je onderzoek op.

Een video waarin getoond wordt welke koker de meeste inhoud bevat vind je op *https://youtu.be/dWZZ8L-cFceU*.

Bovenstaande opdracht is onderdeel van de opdracht van de OnderbouwWiskundeDag 2016, bedoeld voor 3 havo/vwo. In deze opdracht, getiteld 'Glazen, kokers en tennisballen' ging het om vorm en inhoud. De opdracht start met een onderzoekje naar de inhoud van verschillende soorten glazen (waarbij duidelijk wordt dat je eerste idee vaak niet klopt!); de eindopdracht behelst het ontwerpen van een papieren verpakking met zo min mogelijk verpakkingsmateriaal voor een vast aantal tennisballen. Je vindt de opdracht met bijbehorende docentenhandleiding hier: *http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28431/*

Wiskunde in Teams 2021-2022

Deze WiTjes zijn allemaal gebaseerd op opdrachten die voor Wiskunde in Teams ontworpen zijn. Al die opdrachten zijn vrij te gebruiken voor iedereen, je vindt ze op *wiskundeinteams.sites.uu.nl*. Laat je inspireren en kijk eens of je jouw leerlingen ook aan Wiskunde in Teams wilt laten meedoen.
De voorronde van de Alympiade en de Wiskunde B-dag vinden plaats op vrijdag 12 november 2021, de Onderbouw Wiskundedag op 16 februari 2022.
Via *https://wiskundeinteams.sites.uu.nl/aanmelden/ kun je je aanmelden.*

Ontbinden in factoren met de kop-staartmethode

Simon Biesheuvel

De vergelijking $7x^2 - 12x - 4 = 0$ is met een soort som-en-productmethode te ontbinden. 7 noemen we de kop en -4 noemen we de staart van de vergelijking. Als je 7 met -4 vermenigvuldigt, dus kop maal staart, krijg je -28. Zoek nu twee getallen waarvan de som -12 is en het product -28. De getallen die hierbij horen zijn 2 en -14. Splits de middelste term in $2x$ en $-14x$. Je krijgt dan $7x^2 + 2x - 14x - 4 = 0$. Haal zoveel mogelijk buiten haakjes bij de eerste twee termen: $x(7x + 2)$ … … … = 0. Zorg ervoor dat je bij de laatste twee termen ook de factor $(7x + 2)$ krijgt. Dit laatste is altijd eenvoudig te vinden. Huiswerk: bewijs dat dit altijd kan ☺…
Dus $x(7x + 2)$ … … $(7x + 2) = 0$. Dit wordt natuurlijk $x(7x + 2) - 2(7x + 2) = 0$. Dan volgt $(x - 2)(7x + 2) = 0$. En de oplossing is $x = 2$ of $x = -\frac{2}{7}$.
Natuurlijk moet het ook lukken als je de getallen omkeert en -14 en 2 gebruikt. Dan wordt de ontbinding $(7x + 2)(x - 2) = 0$. Opgaven die op te lossen zijn met de gewone som-en-productmethode hebben gehele getallen als oplossing. Opgaven die met de kop-staartmethode zijn op te lossen hebben een breuk en een geheel getal of twee breuken als oplossing. Kunnen deze twee methodes niet, dan bevat het antwoord een wortel.

De kop-staartmethode leerde ik veertig jaar geleden van een oudere collega en zo hebben we een aantal jaren het aan al onze leerlingen geleerd. Daarna zijn we ermee gestopt omdat het programma te vol werd (of zo iets). Het was toch een extra uitleg. Leerlingen doen dit soort opgaven nu met de *abc*-formule. Maar voor de liefhebbers in vwo4, 5 en 6 wiskunde B laat ik nog wel eens zien dat de gewone som-en-productmethode ook werkt bij breuken. We nemen weer $7x^2 - 12x - 4 = 0$ en delen door 7 geeft $x^2 - \frac{12}{7}x - \frac{4}{7} = 0$. Nu kan $\frac{4}{7}$ het product van 4 en $\frac{1}{7}$ zijn, ook van 2 en $\frac{2}{7}$ of van 1 en $\frac{4}{7}$. Wel iets met noemer 7 omdat die in de som $-\frac{12}{7}$ voorkomt. Veel mogelijkheden zijn er vaak niet. De gevraagde getallen zijn -2 en $\frac{2}{7}$ en de ontbinding wordt dus
$(x - 2)(x + \frac{2}{7}) = 0$.

Er zijn elk jaar wel enkele leerlingen die ik deze methode zie gebruiken. Gewoon omdat het leuk is als het lukt. Zelf gebruik ik de kop-staartmethode nog wel eens als ik in een les snel een opgave op het bord wil zetten die geen gehele getallen als oplossing heeft, maar wel minstens een breuk.

Ik begin bijvoorbeeld met $3x^2$ … … $- 6 = 0$ waarbij het product van de kop en de staart -18 is. Dat is ook -2 maal 9. Dus moet de vergelijking $3x^2 + 7x - 6 = 0$ aan mijn wensen voldoen. Nog geen idee wat er uitkomt, maar het gaat lukken!

Terwijl ik dit opschrijf bedenk ik opeens een veel leukere methode dan som-en-product met breuken.
Neem weer $7x^2 - 12x - 4 = 0$. Ik zoek twee getallen met product -28 en som -12.
Dus bij $7x^2 - 12x - 4 = 0$ vind ik de getallen -14 en 2.
Deel nu *alles* door 7, ook de gevonden getallen.
Dit geeft $x^2 - \frac{12}{7}x - \frac{4}{7} = 0$ met de getallen $-\frac{14}{7}$ en $\frac{2}{7}$ (dus -2 en $\frac{2}{7}$). Dus wordt het nu de ontbinding $(x - 2)(x + \frac{2}{7}) = 0$. Doordat er geen breuken in staan bij product -28 en som -12 zijn nu de getallen eenvoudiger te vinden. Huiswerk: bewijs dat dit altijd werkt ☺…
Het zal al vast wel eerder bedacht zijn, maar voor mij is dit nieuw.

Komende week even in een klas uitproberen…

De uitwerkingen van het huiswerk zijn te vinden op de *Euclides*-site

vakladeuclides.nl/972ontbinden

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

Jacques Jansen

Uitdagende problemen
Afstandsonderwijs?

Jacques Jansen vat de term afstandsonderwijs letterlijk op en gaat aan de slag met verschillende interpretaties van het begrip ‘afstand’. Zo kun je je leerlingen dichter bij de schoonheid van de wiskunde brengen.

Inleiding
Het lijkt zo gewoon. In de wiskundelessen ben je vaak met je leerlingen afstanden aan het uitrekenen. Sowieso waren én zijn we veel bezig geweest met social distance. Freek de Jonge laat in zijn show ‘Asociale afstand’ de anderhalve meter zien. En verder hebben we ons afstandsonderwijs.

figuur 1

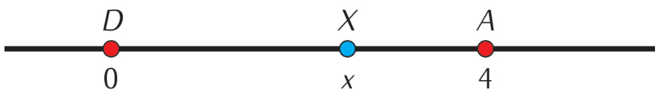
Wat is afstand eigenlijk? Onbewust werken we met de *euclidische afstand*. Om van punt A naar punt B te komen, is meestal de snelste manier via een recht verbindingslijnstuk. De lengte van dat lijnstuk is dan de afstand die we moeten afleggen. Die vlieger gaat niet altijd op, zoals we zien in figuur 2 [1]. Kun je spreken van dé afstand? Of is afstand een relatief begrip?

figuur 2 Puenta Laguna Garzón, Uruguay

Misschien hebben jouw leerlingen bij wiskunde D of voor hun profielwerkstuk iets gedaan aan *taximeetkunde*. Dan krijg je te maken met het begrip *taxiweg*. Het begrip afstand in een Amerikaanse stad is ineens iets heel anders dan we gewend zijn. Verderop gaan we hier dieper op in. Bij bolmeetkunde maak je gebruik van lengte- en breedtecirkels om afstanden te berekenen. Denk maar aan de kortste afstand tussen twee steden op het aardoppervlak. Jan Aarts bespreekt in zijn boek *Meetkunde*[2] wat een *paarden(sprong)afstand* is. Hij daagt de lezer uit - we zijn nu in de schaakwereld - om een *loperafstand* te definiëren.

Absolute waarde en afstand
Een collega, vroeg aan mij ‘kun je betekenis en een context geven aan het symbool $|x^3 - 2x|$ als afstand’? Probeer het eerst maar eens! Sommige leerlingen vinden het symbool $|x|$ al lastig. Laat staan wat je bijvoorbeeld met de uitdrukking $|x - 1| + |x - 7|$ moet doen? Minimaliseren misschien? Kijken we naar een getallenlijn met onder andere het getal nul en een willekeurig getal x dan stelt $|x|$ een afstand voor van het punt waar x bijstaat tot het punt waar 0 bijstaat. Getal en punt identificeren we met elkaar in het vervolg. Zo kunnen we zeggen dat $|x - 7|$ de afstand is van x tot 7 en $|x + 13|$ is de afstand van x tot -13. Is gegeven dat $|x - 7|$ gelijk is aan 5 dan zoeken we een getal x waarvan de afstand tot het getal 7 gelijk is aan vijf. Dat getal kan rechts liggen van 7 op de getallenlijn en dan is het 12 maar ook links van 7 en dan is het getal 2. Er zijn precies twee oplossingen. In het boekje *Functies en grafieken* [3] staat een betekenisvol model met flats en een bushalte.

Torenflats en bushalte
Langs een weg, we leggen er een getallenlijn langs, bevinden zich twee torenflats: A op plaats 4 en D op plaats 0. Als eenheid kiezen we 100 meter. Verdere bebouwing ontbreekt. Men wil een bushalte X langs die weg plaatsen zó dat de som van de afstanden tot die flatgebouwen minimaal is, zie figuur 3.

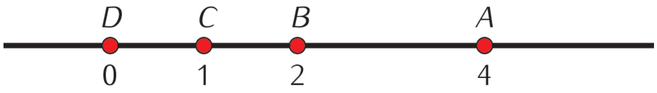


figuur 3

Het gaat dus om het minimaliseren van $|x-0|+|x-4|$. Het is niet zo verstandig om die bushalte X te plaatsen links van punt D of rechts van punt A. Tussen de punten A en D, de punten zelf ook meegerekend is de beste optie. Je ziet meteen dat de minimale som van de afstanden gelijk is aan vier.
We plaatsen nog een flat C bij 1. We minimaliseren de som van de drie afstanden $|x-0|+|x-1|+|x-4|$. Het zal je niet verbazen om de bushalte te zetten bij punt C. De minimale som is vier voor $x=1$.

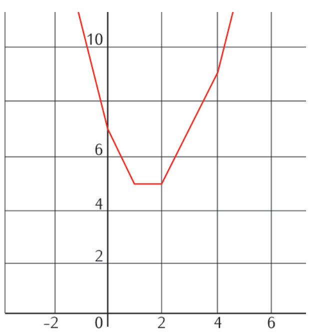
Betekenis geven aan..

Welke betekenis kun je geven aan $|x|+|x-1|+|x-2|+|x-4|$? We kiezen weer ons model en plaatsen er nog een flat bij. Flat B op plaats 2, zie figuur 4.



figuur 4

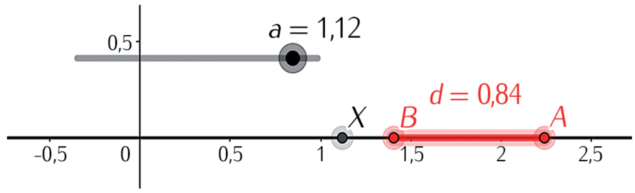
De betekenis van $|x|+|x-1|+|x-2|+|x-4|$ is de som der afstanden van de flats tot de bushalte X. Dit kunnen we minimaliseren. Het probleem wordt: waar moet de bushalte langs de weg geplaatst worden? De plaats van de bushalte geven we aan met X. Heb je een grafiek nodig van de afstandensomfunctie $d(x)=|x|+|x-1|+|x-2|+|x-4|$? Neen, de oplossing is om de bushalte te plaatsen tussen 1 en 2. Het minimum wordt bereikt voor $1 \leq x \leq 2$.
Wil je toch even naar de grafiek kijken? Zie figuur 5.
Opgave: je kunt ook nog generaliseren met een even of oneven aantal flats. Wat vind je dan? Welk patroon?



figuur 5

Betekenis geven aan het getal $|x^3-2x|$

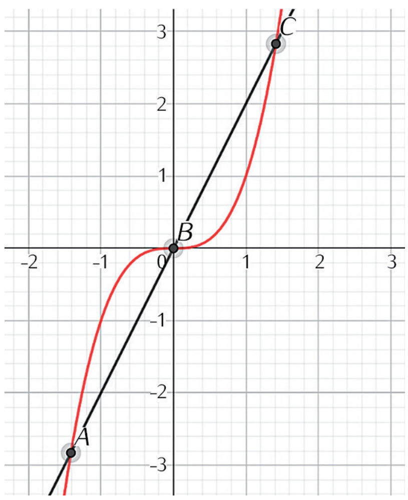
We proberen het met de getallenlijn. We nemen een getal x en beelden de afstand tussen $2x$ en x^3 uit. Die afstand kan nul zijn en dat is het geval in drie situaties die je makkelijk kunt achterhalen: $x=0$, $x=-\sqrt{2}$ en voor $x=\sqrt{2}$. Dat uitbeelden doen we met GeoGebra en schuifparameter a. We voeren de volgende punten in: $X(a, 0)$, $A(2a, 0)$ en $B(a^3, 0)$. We kijken naar de lengte van lijnstuk AB en onderzoeken voor welke waarde van a die lengte het grootst is waarbij $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$, zie figuur 6.



figuur 6

Op deze manier krijgen we wel ongeveer de grootste waarde van lengte d in beeld maar niet de exacte waarde. We gaan over naar een andere aanpak, met grafieken.

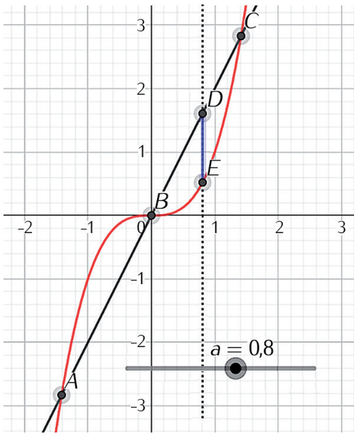
Wellicht denk je aan de grafieken van een derdegraads kromme en een rechte lijn met achtereenvolgens de formules $y=x^3$ en $y=2x$.
De 'sociale afstand' zie je in de snijpunten A, B en C. Ga maar na dat: $A(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $B(0, 0)$ en $C(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, zie figuur 7.



figuur 7

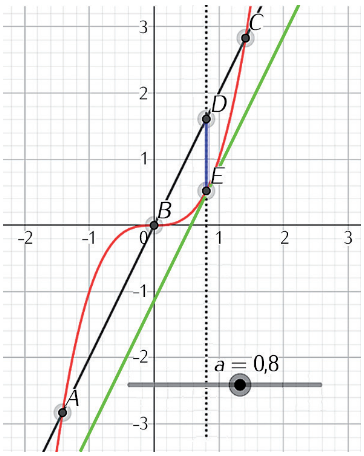
We bekijken steeds twee punten op de grafieken die precies onder elkaar liggen. We zetten GeoGebra in met schuif. Noem die punten D en E, zie figuur 8.

>



figuur 8

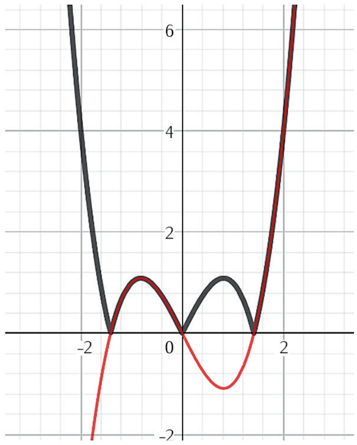
Schuif de verticale lijn *DE* in horizontale richting. Probeer de positie van lijn *DE* te vinden zodat de lengte van lijnstuk *DE* zo groot mogelijk is. Het getallenpaar van punt *D* is $(x, 2x)$. Van punt *E* is dat (x, x^3). Punt *E* kan onder punt *D* liggen of andersom. De afstand tussen punt *D* en punt *E* geven we aan met het positieve verschil van de y-coördinaten: $|x^3 - 2x|$.
Bekijk dat deel van $y = x^3$ tussen de punten *A* en *C*. Want rechts van punt *C* en links van punt *A* loopt het uit de hand met de afstand. Let op de raaklijn in punt *E*, zie figuur 9.



figuur 9

Je ziet dat de lengte van *DE* het grootst is als de helling van de groene raaklijn gelijk is aan de helling van lijn $y = 2x$. Dus als de raaklijn evenwijdig is met lijn $y = 2x$.
De helling van de groene raaklijn in punt E is $3x^2$.
Ga dat na! Dus los op: $3x^2 = 2$.
De oplossingen zijn $x = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ en $x = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.
Je kunt nagaan dat de grootste lengte van *DE* is:
$4/9 \cdot \sqrt{6} \approx 1{,}089$.
Merk op dat de lengte van *DE* voorbij punt *C* oneindig groot wordt. Dat geldt ook links van snijpunt *A*.

We kunnen ook kijken naar de grafiek van $y = |x^3 - 2x|$. Teken eerst de grafiek van $y = x^3 - 2x$. Dat deel van de grafiek onder de x-as klap je dan om. Het resultaat is te zien in figuur 10. Met behulp van differentiëren kunnen we de grootste waarde vinden voor $|x^3 - 2x|$ als $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Maar wat vind je van deze aanpak?

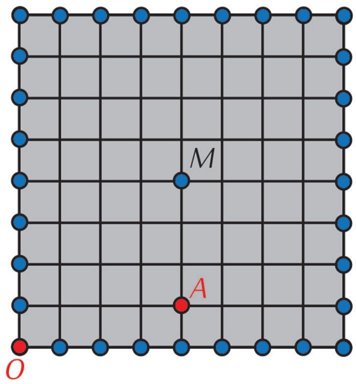


figuur 10

Er zijn meer soorten afstanden, taxi-afstand hebben we genoemd.

Taximeetkunde

We verplaatsen ons naar een stad waarvan de straatplattegrond ons doet denken aan een dam- of schaakbord. De huizen liggen overal in even grote vierkanten. We hebben alleen noord-zuidverbindingen en oost-westverbindingen. De afstand tussen twee punten is de kortste verbindingsweg tussen de twee punten om de huizenblokken heen. De afstand van *O*(0, 0) tot *A*(4, 1) gaat via vier horizontale lijnstukken en een verticaal lijnstuk en is dus 5; verschillend van hemelsbreed $\sqrt{17}$, zie figuur 11.



figuur 11

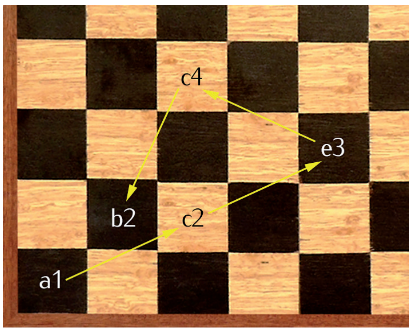
Eigenlijk hebben we hier te maken met een *metrische ruimte*, dat is een verzameling waarvan de elementen ook punten worden genoemd tezamen met een afstandsfunctie. Die afstandsfunctie, die we aanduiden met *d*, moet voldoen aan vier eigenschappen voor alle punten X, Y en Z:

$d(X, Y) \geq 0$
$d(X, Y) = 0$ dan en slechts dan als $X = Y$
$d(X, Y) = d(Y, X)$ (wisseleigenschap)
$d(X, Y)$ moet kleiner of gelijk zijn aan $d(X, Z) +$
$d(Z, Y)$ (driehoeksongelijkheid).

De eerste drie eigenschappen zijn triviaal. Bij eigenschap 4 zul je denken dat via een omweg je meer afstand of dezelfde afstand aflegt. Er is veel te onderzoeken. Hoe ziet een taxicirkel eruit? Bijvoorbeeld een taxicirkel met straal 2 en middelpunt $M(4, 4)$ bestaat uit precies acht punten. En heeft de taxicirkel een ronde of vierkante vorm? Ga dat maar eens na. Welke vorm heeft een taxi-ellips? Of als je twee punten in gedachte neemt is de euclidische afstand altijd kleiner of gelijk aan de taxi-afstand?

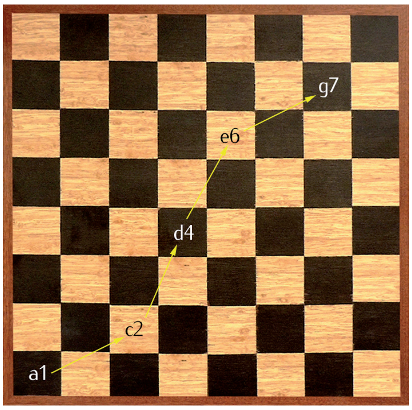
Paardensprongafstand

Daarvoor gaan we naar het schaakbord. Ook dit kunnen we opvatten als een metrische ruimte. De punten zijn nu velden. De paardensprongafstand tussen twee velden is het kleinste aantal sprongen met het paard dat nodig is om van het ene veld naar het andere te komen. We gebruiken de schaakbordcodes. Een voorbeeld: d(a1, b2) = ?



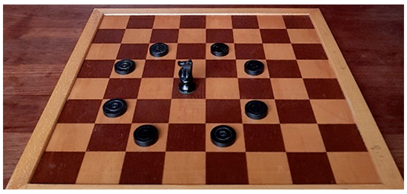
figuur 12

In figuur 12 is in beeld gebracht de afstand van veld a1 tot veld b2. Je zou het misschien niet verwachten maar die afstand is 4, de euclidische afstand is nul. Je gaat van a1 naar c2. Dan volgen de sprongen van c2 naar e3, van e3 naar c4 en tenslotte van c4 naar b2.
Er geldt ook dat d(a1, b2) = D(a1, g7). Van a1 maak je een sprong naar c2, dan een sprong naar d4, dan naar e6 en tenslotte naar g7, zie figuur 13.



figuur 13

Er zijn natuurlijk veel vragen te bedenken zoals de cirkel te vinden met als middelpunt d4 en met straal 1. Zoek dus de velden die een paardensprong verwijderd zijn van veld d4, zie figuur 14. Merk op dat de paardencirkel bestaat uit acht punten.



figuur 14

Tot slot

En ja, je moet wel even nagaan of de paardensprong-afstand voldoet aan de vier kenmerken van een afstands-functie. Een schaker zal bij kenmerk 4 waarschijnlijk zeggen: 'dat is toch logisch'. Nog een belangrijke uitdaging! We hebben aangenomen dat je via paardensprongen van een willekeurig veld een ander willekeurig veld kan bereiken. Een formeel bewijs zal geen sinecure zijn. Hebben we hier grafentheorie bij nodig?

Noten

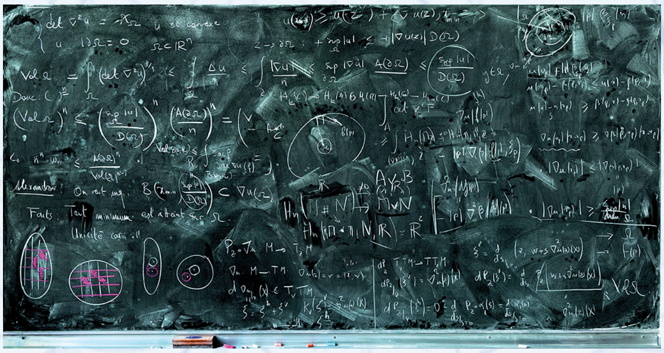
[1] zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Laguna_Garz%C3%B3n_Bridge*
[2] Aarts J.M. (2000). *Meetkunde. Facetten van de planimetrie en steriometrie.* Amsterdam: Epsilon.
[3] Kindt, M. & Lange, J. de (1984). *Functies en Grafieken.* Culemborg: Educaboek.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

Wis en Waarachtig

Is wiskunde op krijtborden kunst?



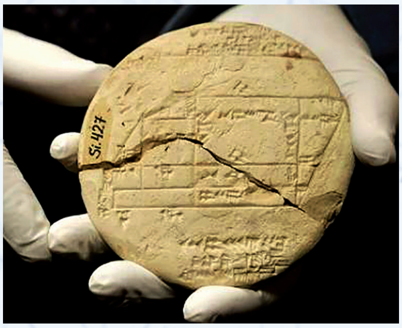
Voor fotografe Jessica Wynne misschien wel. Hoewel ze de wiskunde niet begrijpt, kan ze de volgeschreven krijtborden wel waarderen uit esthetisch oogpunt: 'Het is eenzelfde soort gevoel als wanneer ik kijk naar een abstract schilderij. Maar het wordt interessanter als je weet dat de krabbels iets betekenen, dat ze iets van de universele waarheid proberen te onthullen.' Sinds 2018 fotografeert zij krijtborden van wiskundigen over de gehele wereld, waarbij de diverse stijlen haar opvielen. 'Sommige zijn schoon, netjes en bedachtzaam beschreven, andere waren chaotisch. De borden leken wel een portret van de wiskundige te zijn.' Veel van haar foto's worden opgenomen in een binnenkort te verschijnen boek van Princeton University Press: *Do Not Erase: Mathematicians and Their Chalkboards.*
Bron: *ideahuntr.com/the-art-of-mathematics-in-chalk/*

Waarom kun je zonder wiskunde je telefoon niet opladen?

Op het moment dat jij je oplader in het stopcontact steekt, worden er aan de andere kant van dat stopcontact talloze berekeningen gemaakt. En niet alleen bij jou, maar ook bij jouw huisgenoot en bij je buurman (en tel daar maar alle stopcontacten van de overige 17 miljoen Nederlanders bij op). In dit college legt numeriek wiskundige Marieke Kootte (TU Delft) uit hoe je met die enorme bergen data efficiënt kan rekenen. Dit college is te zien bij de Universiteit van Nederland.
Bron: *https://www.universiteitvannederland.nl/college*

Babyloniërs gebruikten Pythagoras om grond te verdelen

Uit een oeroud kleitablet, de zogenaamde Si.427, blijkt dat de Babyloniërs rechthoekige driehoeken gebruikten om landbouwgrond te verdelen. Het kleitablet bevat allerlei verschillende rechthoekige driehoeken en rechthoeken. Volgens wiskundige Daniel Mansfield van de Universiteit van New South Wales in Sydney waren de rechthoeken op andere kleitabletten altijd wat wiebelig omdat het slechts een benadering zou zijn. Maar op Si.427 zijn de rechthoeken perfect omdat pythagorese drietallen werden gebruikt.



Op de voorkant van kleitablet Si.427 is met een diagram de verdeling van een stuk grond aangegeven. Beeld: UNSW Sydney

Het is het oudst bekende voorbeeld van toegepaste geometrie. Mansfield denkt hiermee een antwoord te hebben gevonden op de vraag waarom de Babyloniërs de stelling van Pythagoras beheersten. Si.427 werd in 1894 in Irak opgegraven en is nu te zien in de Istanbul Archaeology Museums.
Bron: www.newscientist.nl

Wiskundestudenten leveren bijdrage aan coronavaccinatie-planning

Tara Zver, Berend Markhorst, Nina Malbašić, Renze Dijkstra en Daan Otto, masterstudenten Business Analytics aan de VU, hebben met behulp van wiskunde een lastig praktijkprobleem opgelost. Met financiële ondersteuning vanuit de VU, Centrum Wiskunde en Informatica (CWI) en GGD GHOR zijn de vijf studenten aan de slag gegaan met het ontwikkelen van een wiskundig model om de vaccinatieplanning te verbeteren. Sinds begin juni wordt het ontwikkelde model nu operationeel ingezet voor het slimmer verdelen van de vaccins over de verschillende GGD-priklocaties, waardoor de Nederlandse bevolking sneller is gevaccineerd. Bovendien leidde de vernieuwde aanpak tot meer gelijkheid in het vaccinatietempo tussen de verschillende GGD-regio's. Momenteel denken de verschillende partijen ook al aan vervolgstappen, zoals de aanpak van toekomstige vaccinatiecampagnes. Zo wordt er bijvoorbeeld nagedacht over het verbeteren van de plaatsing van priklocaties met behulp van wiskundige modellen. Wat in januari nog slechts een studentenproject was, is nu uitgemond in een oplossing die op nationaal niveau wordt gebruikt en bijdraagt aan de Nederlandse volksgezondheid.
Bron: www.cwi.nl /

Hylke Hoogeveen

Kaartjes en kwadraten

Afgelopen zomer zou de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaatsvinden in Sint-Petersburg. Vanwege de coronapandemie konden de deelnemers niet naar Rusland afreizen en hebben ze de olympiade in hun eigen land als wedstrijd-op-afstand gemaakt. Hylke Hoogeveen won een bronzen medaille en bespreekt een van de opgaven.

Afgelopen juli heb ik samen met vijf anderen meegedaan aan de IMO. Het Nederlandse team zat in Egmond aan Zee, een minder spectaculaire locatie dan Sint-Petersburg maar niet minder leuk. Om aan de IMO mee te kunnen doen hebben we allemaal veel getraind in de trainingsgroep van de wiskundeolympiade. Daarom was iedereen heel blij dat we ons door alle wedstrijden hadden heengeslagen en (allemaal voor de eerste keer) mee mochten doen aan de IMO. Dit was al mijn derde jaar in de trainingsgroep. Ik was als vijfde geëindigd bij de selectiewedstrijden, waardoor het nog even spannend was. Ik was dan ook blij verrast dat ik een bronzen medaille had gewonnen bij de IMO, wat betekende dat ik bij de beste helft zat van alle deelnemers over de hele wereld.
Opgave 1 luidde als volgt:

IMO 2021 62nd International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia

Opgave 1. Zij $n \geq 100$ een geheel getal. Kira schrijft de getallen n, $n+1$, ..., $2n$ op kaarten, ieder getal op een andere kaart. Zij schudt deze $n+1$ kaarten en verdeelt ze over twee stapels.

Bewijs dat ten minste één van de stapels twee kaarten bevat zodanig dat de som van hun getallen een (perfect) kwadraat (van een geheel getal) is.

Hoe te beginnen

Je moet natuurlijk op een manier aan deze opgave beginnen. Voordat je de opgave kunt oplossen moet je eerst een gevoel krijgen van wat er aan de hand is. Het mantra van de wiskundeolympiade is om te beginnen met kleine gevallen, kleine waarden invullen, zodat je iets concreets hebt wat je simpel kunt oplossen waardoor je ideeën krijgt voor het algemene geval. Bij deze opgave gaat dat echter niet, omdat de enige variabele n groter dan of gelijk aan honderd moet zijn. Bij veel kleinere waarden van n klopt de opgave niet, waardoor je daar niks aan hebt. Hierdoor kun je je kleine gevallen niet gebruiken om ideeën te krijgen, want het geval $n = 100$ is veel te moeilijk. Bij deze opgave is het precies andersom: je moet eerst slimme ideeën voor het algemene geval bedenken, die je dan kunt checken bij het geval $n = 100$.
Ik was daarom zelf aan deze opgave begonnen met wat algemene observaties, door bijvoorbeeld te bedenken wat ik wist van kwadraten in combinatie met dingen optellen. Dit gaf mij echter nog geen ideeën waarmee ik direct veel verder kwam. Daarom gebruikte ik een andere handige strategie van de wiskundeolympiade: terugwerken. Hierbij begin je met het gevraagde en kijk je op welke manieren je dat zou kunnen bewijzen. Soms kom je er dan op uit dat iets anders al genoeg is om te bewijzen, wat een stuk makkelijker of fijner is. Bij deze opgave is het genoeg om te bewijzen dat er drie kaarten zijn waarvan elk tweetal samen een kwadraat is. Omdat er logischerwijs altijd twee van deze kaarten in dezelfde stapel moeten zitten, volgt daaruit het gevraagde. Dit idee maakt de opgave een stuk makkelijker en duidelijker, want we kunnen nu het hele verhaal met de stapels en de kaarten weglaten. Het lijkt dus een goed idee om dit te proberen te bewijzen, alhoewel we nog niet zeker weten of het klopt.
We beginnen met een definitie: we noemen een drietal van gehele getallen (x, y, z) *kwadratisch* als voor zekere gehele getallen c, d en e geldt dat $x + y = c^2$, $y + z = d^2$ en $z + x = e^2$. Het is nu dus voldoende om te bewijzen dat er altijd een kwadratisch drietal bestaat uit de getallen n tot en met $2n$. Dit is een stuk concreter dan de oorspronkelijke opgave en het is dus een stuk duidelijker waar we naartoe willen werken. Het lijkt dat we op het goede spoor zitten.

Even een stap terug

Meestal is het handig om bij een idee eerst even een stap terug te zetten voordat je eraan gaat werken. Het helpt >

vaak om vermoedens en ideeën eerst te testen in kleine gevallen. Je kunt dan checken of je vermoeden echt klopt en je krijgt dan goed door wat er precies gebeurt bij je idee. Alhoewel $n = 100$ niet echt klein is, is het toch de moeite waard om dit idee te testen. Omdat dit al een erg groot en ingewikkeld geval is, moeten we wel iets slims gaan bedenken om de kwadratische drietallen te vinden of ze te kunnen uitsluiten. Op zo'n moment is het dan ook handig om terug te kijken wat je nog meer weet van de opgave. Omdat je vrijwel nooit direct met het juiste idee begint, zijn er meestal wel andere nuttige dingen die je eerder hebt ontdekt. Ik had bijvoorbeeld eerder al bedacht dat het eigenlijk vooral gaat om de kwadraten tussen $2n$ en $4n$, want dat zijn alle kwadraten die gemaakt kunnen worden door de getallen van twee verschillende kaarten bij elkaar op te tellen. Daarnaast is het logisch dat hoe kleiner n is, hoe minder kwadraten er tussen $2n$ en $4n$ zijn. Voor kleine gevallen van n (bijvoorbeeld $n = 100$) hebben we dus maar een beperkt aantal kwadraten voor onze kwadratische drietallen. Dit zien we inderdaad terug bij $n = 100$, want dan zitten er maar vijf kwadraten tussen $2n$ en $4n$ (en $4n$ zelf is 20 in het kwadraat).

We weten dat er voor ons idee van de kwadratische drietallen drie kwadraten nodig zijn, namelijk c^2, d^2 en e^2, en dat een kwadratisch drietal wordt vastgelegd door die drie kwadraten. Aangezien we bij $n = 100$ maar beperkte mogelijkheden hebben voor de drie kwadraten hoeven we dus alleen nog maar de mogelijke combinaties langs te gaan. Als we bijvoorbeeld de kwadraten van 15, 16 en 18 bekijken, dan krijgen we $x + y = 225$, $y + z = 256$ en $z + x = 324$. Door de eerste en de derde vergelijking van elkaar af te trekken, vinden we dan dat y en z een verschil van 99 en een som van 256 hebben, dus ze moeten 78,5 en 177,5 zijn. Dit kwadratische drietal gaat dus niet werken. Door elke keer op deze manier y (de kleinste) en z (de grootste) te bepalen vinden we met een beetje rekenwerk dat de drie kwadraten 289, 324 en 361 worden gemaakt door het enige kwadratische drietal 163, 126 en 198. Dit kwadratische drietal voldoet natuurlijk ook voor alle n tot en met 126. Nu we zien dat ons idee klopt voor $100 \leq n \leq 126$ en we ook al het een en ander hebben gevonden van wat er gebeurt bij deze kwadratische drietallen, kunnen we kijken of we het idee van de kwadratische drietallen ook in het algemeen kunnen bewijzen.

Het kleine geval veralgemeniseren

Als je in het algemeen wilt bewijzen dat iets (bijvoorbeeld een kwadratisch drietal) altijd bestaat dan moet je daar meestal een constructie voor geven. Je geeft dus een manier waarop je een drietal kunt maken en vervolgens laat je zien dat het drietal kwadratisch is en binnen de grenzen n tot $2n$ zit. We willen dus de drie getallen x, y en z op een of andere manier definiëren. We kunnen nu gebruikmaken van wat we bij ons kleine geval hebben gedaan. We weten daardoor namelijk dat het fijn werkt om de drie kwadraten te geven die het kwadratische drietal maken. We moeten nu wel onze kwadraten handig kiezen, zodat we er een kwadratisch drietal binnen de grenzen uit krijgen. Hiervoor hebben we bij het nagaan van de combinaties voor $n = 100$ al het een en ander ontdekt:

1. Kwadraten dicht bij de grenzen $2n$ en $4n$ lijken niet te werken omdat de getallen van het kwadratisch drietal dan snel te klein of te groot zijn.
2. De verschillen van de kwadraten zijn gelijk aan de verschillen van het kwadratisch drietal.
3. De som van de drie kwadraten moet even zijn.

We kunnen de tweede en derde regel makkelijk in het algemeen bewijzen uit de vergelijkingen $x + y = c^2$, $y + z = d^2$ en $z + x = e^2$. De tweede regel krijgen we door twee vergelijkingen van elkaar af te trekken. Als we alle drie de vergelijkingen bij elkaar optellen, dan krijgen we dat de som van de drie kwadraten gelijk is aan twee keer de som van het kwadratisch drietal. Daarom moet de som van de kwadraten altijd even zijn.

We willen nu drie kwadraten nemen waaruit een kwadratisch drietal komt waarvan de getallen tussen n en $2n$ liggen. Vanwege de eerste regel willen we dan dus kwadraten nemen die ongeveer in het midden tussen $2n$ en $4n$ liggen. Hier kunnen we nu niet direct iets mee, maar het is wel handig om dit in ons achterhoofd te houden, want misschien moeten we hier iets mee bij het bewijzen van de grenzen. Als de getallen van het kwadratische drietal grote verschillen hebben, dan hebben ze een grotere kans om niet aan de grenzen voldoen. We willen dus vanwege de tweede regel ook dat de drie kwadraten zo klein mogelijke verschillen hebben, het liefst dat het drie opeenvolgende kwadraten zijn. Er geldt dan vanwege de derde regel dat de middelste van de drie kwadraten even moet zijn. We kunnen dit concreet zeggen als dat we de kwadraten van de getallen $2a - 1$, $2a$ en $2a + 1$ kiezen. We denken dat we hiermee altijd een kwadratisch drietal kunnen vinden en willen verdergaan met deze getallen, omdat we dan een stuk concreter kunnen werken. We zoeken nu dus een drietal x, y, z zodat $x + y = (2a - 1)^2$, $y + z = (2a)^2$ en $z + x = (2a + 1)^2$. Hieruit krijgen we op dezelfde manier als bij het kleine geval het kwadratisch drietal $x = 2a^2 + 1$, $y = 2a^2 - 4a$ en $z = 2a^2 + 4a$.

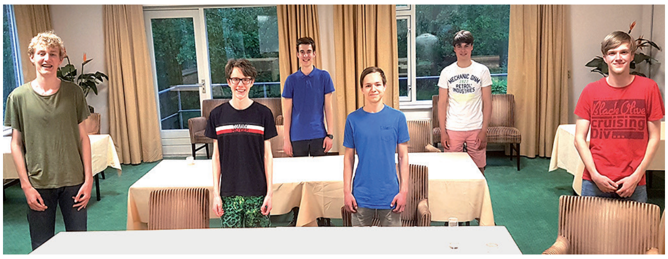
Door hierin $a = 9$ in te vullen krijgen we precies ons kwadratisch drietal voor het geval $n = 100$, dus het lijkt dat we op de goede weg zitten.

De grenzen checken

We moeten nu alleen nog op een of ander manier laten zien dat we a altijd zo kunnen kiezen dat de drie getallen van ons kwadratische drietal tussen n en $2n$ zitten. Dit betekent dat we moeten bewijzen dat er voor elke n een a bestaat zodat $n \leq 2a^2 - 4a$ en $2n \geq 2a^2 + 4a$. We waren bezig met de kwadraten tussen $2n$ en $4n$ en dus is het het fijnst als we dit ook daarmee kunnen bewijzen, in plaats van dat we weer wat nieuws moeten bedenken. Het lijkt dus handig om de ongelijkheden maal 2 te doen, want dan krijgen we ook weer precies die grenzen terug. We krijgen dan dat we moeten bewijzen dat er een a is zodat $2n \leq 4a^2 - 8a = (2a - 2)^2 - 4$ en $4n \geq 4a^2 + 8a = (2a + 2)^2 - 4$. We zien nu dus dat we moeten bewijzen dat de kwadraten van $2a - 2$, $2a - 1$, $2a$, $2a + 1$ en $2a + 2$ allemaal tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ liggen. Hierin zien we weer terug dat de kwadraten van $2a - 1$, $2a$ en $2a + 1$ dus in het midden moeten zitten. We hoeven dus a alleen maar zo te kiezen dat $4a^2$ een van de middelste kwadraten tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ is, maar hiervoor moeten we wel bewijzen dat zo'n $4a^2$ bestaat. Dit volgt als we kunnen bewijzen dat er altijd zes kwadraten tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ liggen, want dan kunnen we van de middelste twee gewoon degene die even is als $4a^2$ kiezen. Door weer even terug te gaan naar onze kleine gevallen zien we dat er bij $n = 98$ geen zes van zulke kwadraten zijn. Ons kwadratisch drietal van het kleine geval werkt ook precies bij $n = 98$ niet meer, dus dit lijkt inderdaad te kloppen met wat we hebben en met de opgave. Het bewijs blijkt dan ook niet zo moeilijk te zijn: Door een bewijs uit het ongerijmde (het tegenovergestelde aannemen en dan laten zien dat dat niet kan) te gebruiken kun je aannemen dat er een b is zodat $b^2 < 2n + 4$ en $(b + 6)^2 > 4n + 4$. Door het verschil van deze twee ongelijkheden te nemen, geldt dan dat $12b + 36 > 2n$. Anderzijds geldt voor $b \geq 15$ dat $b^2 - 12b = (b - 12)b \geq 3b > 40$, zodat $12b + 40 < b^2$. Dus dan is $12b + 36$ kleiner dan $b^2 - 4$, wat weer kleiner is dan $2n$, wat tot een tegenspraak leidt. Als 15^2 dus niet tussen $2n + 4$ en $4n + 4$ zit, dan volgt het gevraagde. We hoeven nu dus alleen nog de n kleiner dan 111 af te gaan. Gelukkig hadden we al deze waarden van n al opgelost in ons kleine geval dus is het bewijs compleet.

Conclusie

Bij deze opgave bleek uiteindelijk het bedenken van het eerste idee om te kijken naar kwadratische drietallen het moeilijkst. Zonder dit idee was de opgave namelijk niet op te lossen. Ook bleken kleine gevallen erg nuttig te zijn, ook al kon je er in het begin niks mee. Het oplossen van het geval $n = 100$ gaf al een goed idee voor de oplossing en het bleek dan ook al twee van de zeven punten waard te zijn. Ik had dit zelf niet gedaan, waardoor ik het een stuk moeilijker had om het tweede deel van het bewijs te bedenken. Gelukkig heb ik wel de maximale score van 7 punten weten te halen. Ook was het bij deze opgave erg belangrijk om zorgvuldig te werken. Er zat namelijk veel rekenwerk in de opgave, wat meestal erg foutgevoelig is. Op de wedstrijd moesten we alles ook nog netjes opschrijven en bij een rekenfout klopte het bewijs niet helemaal, wat een punt aftrek was. Helaas is dit twee mensen van ons team overkomen. Uiteindelijk hadden vier van ons deze opgave opgelost, waardoor we in totaal als team 29 punten voor deze pittige opgave hebben gehaald.



Het Nederlandse Olympiadeteam. Van links naar rechts: Hylke Hoogeveen, Casper Madlener, Kevin van Dijk, Jelle Bloemendaal, Kees den Tex en Thian Tromp

Over de auteur

Hylke Hoogeveen zit in de vijfde klas van het Openbaar Lyceum Zeist. Hij zit sinds de tweede klas in de trainingsgroep van de wiskundeolympiade. Dit was zijn eerste deelname aan de IMO; hij kan de komende twee jaar nogmaals meedoen.
E-mailadres: *hylkehoogeveen117@gmail.com*

Dick Klingens

Zo maar een examenvraagstuk van vroeger

Na alle recensies van de examens van dit jaar in *Euclides 97-1* is het interessant om te kijken naar een examen van 63 jaar geleden, weliswaar niet uit het voortgezet onderwijs, maar van de docentenopleiding.

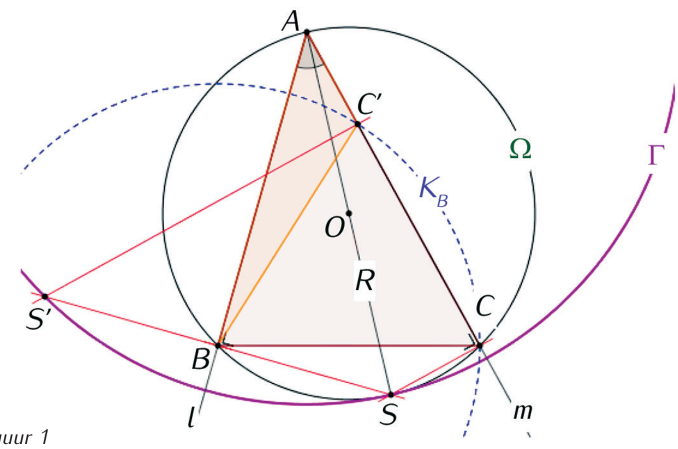
Examen Wiskunde L.O. 1958 Planimetrie (vraagstuk 3 van 3)

Van driehoek ABC is hoek A in ligging en grootte, de zijde BC in grootte gegeven.
De loodlijnen in B en C respectievelijk op AB en AC getrokken snijden elkaar in S.
a. Bepaal de meetkundige plaats van het punt S.
b. Bepaal de meetkundige plaats van het hoogtepunt van driehoek ABC.

Toelichting

- 'In ligging en grootte' betekent voor een meetkundig object dat het een vaste positie in het vlak heeft en een vaste (gegeven) grootte. Is een object alleen 'in grootte' gegeven, dan houdt dat in dat het object een vaste (gegeven) grootte heeft en ook zo in het vlak kan worden verplaatst, dat daarbij die grootte niet verandert.
- Onder 'bepalen' moet hier worden verstaan:
  1 duidelijk aangeven welke meetkundige figuur door het punt S c.q. het hoogtepunt wordt doorlopen (rechte lijn, cirkel, ... of delen daarvan), en ook:
  2 in de toelichting/uitwerking laten blijken welke stappen zijn gezet om tot het bedoelde onder punt a en b te komen.
- Zie verder de noten [1, 2].

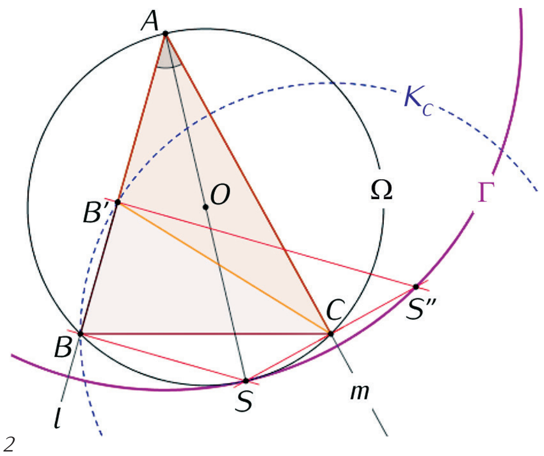
Analyse bij vraag a



figuur 1

In figuur 1 staat een eerste schets. De benen van hoek A zijn de halve lijnen l en m. Ik ga er, om te beginnen, van uit dat voor de grootte α van hoek A geldt: $0 < \alpha < 90^\circ$.
Omdat α en de lengte van BC $(= a)$ constant zijn, volgt uit $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ (uitgebreide sinusregel in driehoek ABC) dat ook de straal R van de omcirkel Ω van de driehoek constant is.
Omdat vierhoek $ABSC$ een koordenvierhoek is (de hoeken B en C van die vierhoek zijn immers beide gelijk aan 90°), ligt het punt S eveneens op Ω.
Voorlopige conclusie: de meetkundige plaats (verder afgekort tot mpl) van het punt S is Γ = Cirkel(A, $2R$), of die mpl is een deelverzameling van Γ.
Zie nog steeds figuur 1. Er is een punt C' op m waarvoor $BC' = a$. De punten C en C' zijn de snijpunten van K_B = Cirkel(B, a) met de lijn m. Het punt C' geeft uiteraard ook een punt S' (op Γ) dat element is van de gezochte mpl.

De punten S en S' liggen symmetrisch ten opzichte van de lijn l, omdat die lijn een middellijn is van K_B.
In figuur 2 is het punt C als uitgangspunt genomen.
De punten B en B' zijn de snijpunten van de lijn l met K_C = Cirkel(C, a). Het punt B' geeft met de loodlijn in B' op l en opnieuw die in C op m het punt S'' (dat uiteraard ook op Γ ligt.
En in dit geval liggen de punt S en S'' symmetrisch ten opzichte van de lijn m.

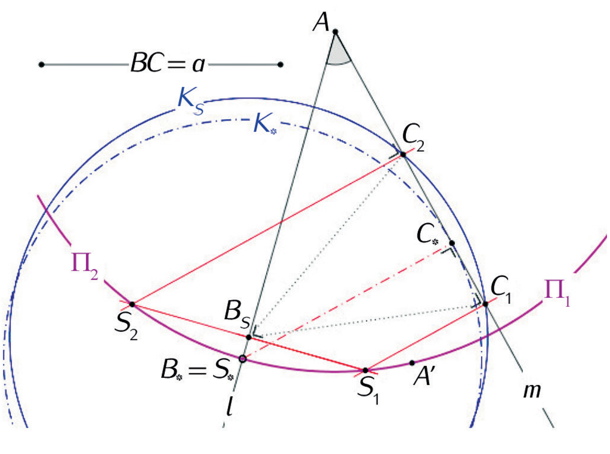


figuur 2

Het is duidelijk dat de punten B en C, en daarmee de lijnen l en m, voor een verder onderzoek kunnen worden verwisseld. In de volgende paragraaf ga ik uit van variabele punten B op de lijn l.

Het punt B beweegt

Ik kies nu een punt B_s op de lijn l als 'sturend punt' van de gezochte mpl, met daarbij K_s = Cirkel($B_{s'}$, a) waarmee ik de punten C_i (met $i = 1, 2$) op de lijn m vastleg.
Vervolgens heb ik *GeoGebra* de mpl van de punten S_i ($i = 1, 2$) laten tekenen, zie figuur 3.[3]



figuur 3

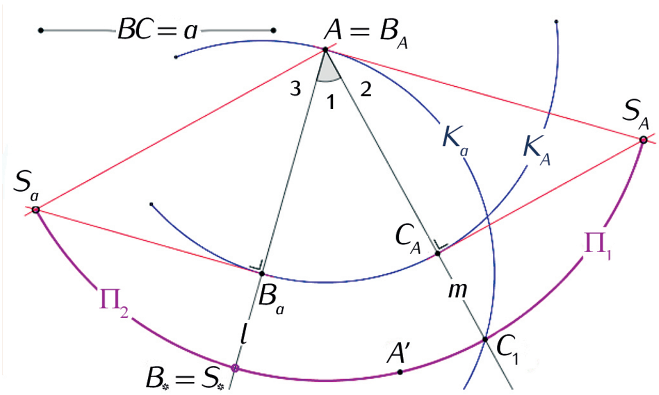
Deze mpl bestaat uit twee delen, Π_1 en Π_2. Dit zijn bogen op de hierboven genoemde cirkel Γ:

— het punt S_1 is het 'beschrijvende punt' van de boog Π_1;
— het punt S_2 is het 'beschrijvende punt' van de boog Π_2.

Als de afstand van het punt B_s tot de lijn m kleiner is dan a, dan bestaan de punten C_1, C_2 *niet*; immers, de cirkel K_s snijdt dan de lijn m niet. Als die afstand evenwel *gelijk* is aan a, dan vallen de punten C_1, C_2 samen (dit is het punt C_* in de figuur). Er is dan uiteraard slechts één punt S. In figuur 3 valt dit punt (hier met de naam S_*) samen met het punt B_*, d.w.z. met het snijpunt van de halve lijn l met de cirkel Γ (zie ook de paragraaf 'Raking?').

De eindpunten van de mpl

Zie nu figuur 4. Het linker eindpunt van de mpl, het punt $S_{a'}$ wordt gevonden als het punt C_2 samenvalt met het punt A. In dit geval ligt B_s zo op l dat $AB_s = a$;
deze positie wordt in de figuur aangeven door het punt B_a (op l). Het rechter eindpunt van de mpl, het punt $S_{A'}$ wordt gevonden als het sturende punt B_s samenvalt met het punt A. De cirkel $K_{A'}$ met middelpunt A ($\equiv B_A$) en straal a, snijdt dan de lijn m in het punt C_A.



figuur 4 NB: Het punt C_1, dat een snijpunt is van de lijn m met K_a = (Ba, a), ligt niet op Π_1

Conclusie bij vraag a

Uit de overwegingen in de voorgaande paragrafen kan nu worden geconcludeerd:

— de in onderdeel a van het vraagstuk bedoelde mpl — ik geef die mpl de naam Π – is een boog van de cirkel $\Gamma = (A, 2R)$. De grootte van die boog is gelijk aan $(180^\circ - \alpha)$;
— $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$.

>

En verder. Die boog bestaat uit *drie* eenvoudig te onderscheiden delen, namelijk:

— de boog binnen hoek A met een grootte gelijk aan α (immers hoek A is een middelpuntshoek van Γ;

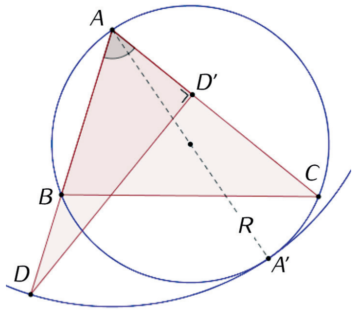
— twee bogen met elk een grootte van $(90^\circ - \alpha)$, die rechts en links aansluiten op de boog waarop hoek A staat.

In figuur 4 zijn de bij de drie bogen behorende middelpuntshoeken benoemd als A_1, A_2, A_3.

Raking?

In de paragraaf 'Het punt B beweegt' is alleen vermeld dat $K_* = \text{Cirkel}(B_*, a)$, waarbij B_* het snijpunt is van l met Γ, raakt aan de lijn m (in het punt C_*).
Deze bewering moet natuurlijk bewezen worden! Ik formuleer de te bewijzen eigenschap, (enigszins) onafhankelijk van het vraagstuk, in het volgende lemma.

Lemma 1. Van driehoek ABC is R de straal van de omcirkel. Is D het snijpunt van de halve lijn AB met de cirkel$(A, 2R)$ en is D' de loodrechte projectie van D op de zijde AC, dan is $BC = DD'$.



figuur 5

Bewijs. In driehoek ABC is volgens de sinusregel:

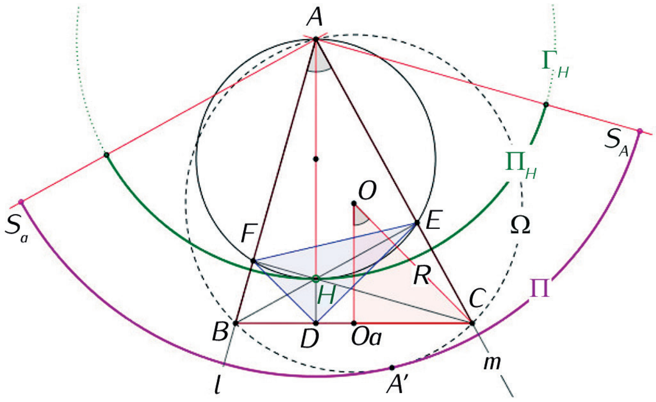
$\dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ zodat $BC = 2R\sin\alpha$.

In de D'-rechthoekige driehoek $D'AD$ is:

$\sin\alpha = \dfrac{DD'}{AD} = \dfrac{DD'}{2R}$ zodat $DD' = 2R\sin\alpha$. Hieruit volgt dan onmiddellijk het gestelde.

Analyse bij vraag b: de mpl van H

Als een vraagstuk op de manier wordt voorgelegd zoals hier het geval is, dan ligt het voor de hand te veronderstellen dat er een verband is tussen de vragen a en b, te meer omdat er ook enige overkomst is tussen de ontstaanswijze van de beide mpl'en.



figuur 6

In figuur 6 wordt het hoogtepunt H immers gevonden als snijpunt van de loodlijnen in de punten E en F, op de lijnen AC en AB, waarbij die punten dus de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek op de benen van hoek A zijn. Daarom veronderstel ik, en bewijs ik vervolgens:

Lemma 2. Als in de onderhavige configuratie (punt A is vast, hoek A is constant, BC is constant), dan is EF constant.

Bewijs. In figuur 6 is het lijnstuk EF een zijde van de zogeheten voetpuntsdriehoek[4] DEF van driehoek ABC.
De projectie O_a van het middelpunt O van de omcirkel Ω van driehoek ABC op de zijde BC is het midden van BC.
Verder is in driehoek OO_aC:

— $OC = R$ (straal van Ω) en $\angle O_aOC = \alpha$. Dan is in driehoek OO_aC: $\cos\alpha = \dfrac{OO_a}{R}$ zodat $OO_a = R\cos\alpha$.
Volgens een bekende eigenschap[5] is ook:
$AH = 2 \cdot OO_a$. Zodat:

— $AH = 2R\cos\alpha$ (met andere woorden: AH is constant).
Toepassing van de sinusregel in driehoek AEF (een deel van de koordenvierhoek $AFHE$) geeft nu:

— $\dfrac{EF}{\sin\alpha} = 2R_{\Delta AFE} = AH$, zodat:

— $EF = AH \cdot \sin\alpha = 2R\cos\alpha \cdot \sin\alpha = R\sin(2\alpha)$.

Maar R en α zijn beide constant, en daarmee is ook EF constant. Wat te bewijzen was.

Door de geldigheid van lemma 2 is de situatie voor de mpl Π_H van het hoogtepunt van de driehoek(en) ABC analoog aan die voor de mpl van het punt S bij vraag a.

Conclusie bij vraag b

— de mpl Π_H van het hoogtepunt H van de driehoeken ABC is het door de lijnen AS_A en AS_a begrensde boogdeel van de cirkel$(A, AH) = \Gamma_H$;

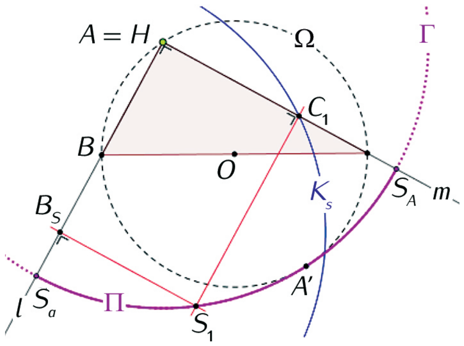
— conform de conclusie in de paragraaf 'Conclusie bij vraag a' is de grootte van deze boog gelijk aan $(180^\circ - \alpha)$.

En ook:

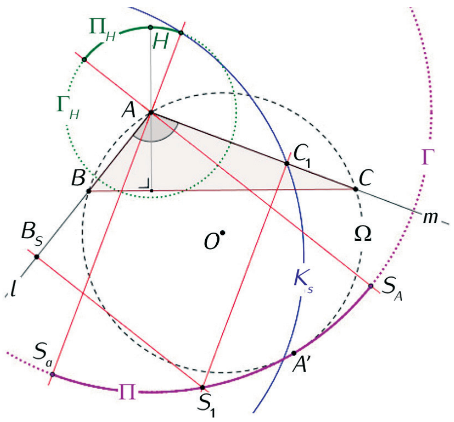
— de mpl Π_H is de *productfiguur* van de mpl Π bij een vermenigvuldiging met de factor ($\cos\alpha$) met het punt A als centrum.

Hoek A: recht en stomp

Na het voorgaande zal het niet moeilijk meer zijn in te zien hoe het zit met de bedoelde mpl'en als de hoek A van de driehoeken recht of stomp is; zie de figuren 7a en 7b.



figuur 7a Hoek A is recht. Dan is $\Pi_H \equiv A \equiv H$.



figuur 7b Hoek A is stomp ($\cos\alpha < 0$).

Conclusie

— ook als hoek A recht is of stomp, is Π een deel van Γ, begrensd door de lijnen AS_a en $AS_{A'}$;

— in beide gevallen is de grootte van de boog weer ($180^o - \alpha$). En verder:

— als $\alpha = 90^o$ is, is de mpl Π_H ontaard in een *enkel* punt, namelijk het punt A, omdat elke beschouwde driehoek A-rechthoekig is (dan is $A \equiv H$). Het punt H komt daardoor bij het verplaatsen van het punt B_s over de lijn l niet van zijn plaats.

— Ik merk nog op dat in dit laatste geval de vermenigvuldigingsfactor van Π naar Π_H gelijk is aan 0 ($= \cos 90^o$).

En na dit alles, te bedenken dat in 1958 de deelnemers aan het examen voor het maken van de toelichtende tekening(en) slechts beschikten over potlood (met scherpe punt), passer, liniaal en, niet te vergeten, een vlakgom...

Noten

[1] De akte LO-wiskunde behoort volgens mij tot het Nederlandse 'onderwijserfgoed'. Het programma van die akte (LO staat voor lager onderwijs) bestond uit: algebra, planimetrie, gonio- en trigonometrie, stereometrie, didactiek en methodiek. De wiskundige inhoud daarvan is vergelijkbaar met het wiskundeprogramma van het programma voor vhmo (gymnasium, hbs) van voor 1968. Het was inhoudelijk echter een stuk zwaarder. Het examen Wiskunde-LO kende een schriftelijk en een mondeling deel. Zie ook: K.A. Blom (2000). *Van de Acten van Bekwaamheid*. In: *Honderd jaar wiskundeonderwijs* – Een jubileum boek. Leusden: NVvW; pp. 89–104. En eventueel ook: *https://nl.wikipedia.org/wiki/LO-akten*

[2] Bron: H.G.A. Verkaart (H. Herreilers, R. Kooistra, eds.): *Gids voor het Examen Wiskunde L.O.* Groningen: P. Noordhoff N.V., 8e druk, 1960; pp. 5-9, p. 43.

[3] In figuur 3 (en volgende) is het punt A' het tegenpunt van het punt A op de omcirkel van een van de (mogelijk niet weergegeven) driehoeken ABC.

[4] De voetpuntsdriehoek van een driehoek D is de driehoek waarvan de hoekpunten de voetpunten zijn van de hoogtelijnen van D.

[5] Voor een bewijs van die eigenschap zie stelling 2 in:D. Klingens (2004): Twee (belangrijke) eigenschappen van het hoogtepunt van een driehoek en een gevolg daarvan. *https://www.pandd.nl/downloads/eigenshoogtepunt.pdf*

Over de auteur

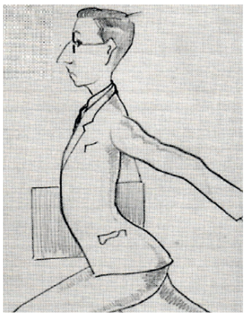
Dick Klingens overleed in mei 2021. Dit is een van de laatste artikelen die hij de redactie van *Euclides* stuurde. Dick was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).

Bert Zwaneveld, Dirk De Bock

Piet Vredenduin (1909-1996)

Meer dan 50 jaar prominent aanwezig in het wiskundeonderwijs

25 jaar geleden overleed Piet Vredenduin. Voldoende aanleiding voor deze bijdrage met aandacht voor zijn jeugd, studie, werkzame leven, maar ook voor zijn inzet om de ontwikkelingen in het Belgische, later Vlaamse wiskundeonderwijs in Nederland bekendheid te geven.[1]



figuur 1 Tekening van Piet Vredenduin uit 1935, gemaakt door een medestudent [2]

Jeugd

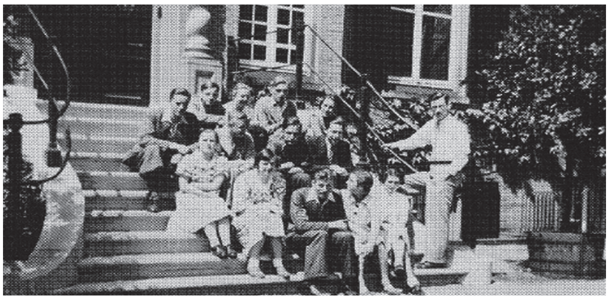
Piet (Pieter Gaele Johannes) werd 18 januari 1909 in Amsterdam geboren als zoon van tamelijk arme ouders, een leraar en lerares op een basisschool. Piet had geen broers of zusters. Zijn middelbare school was de openbare Vierde Vijfjarige hbs in Amsterdam, waar Schogt, samen met Wijdenes oprichter van *Euclide*s, een van zijn wiskundeleraren was.

Studie wiskunde

Op advies van een van zijn wiskundeleraren ging Piet wiskunde studeren in Utrecht, want daar was de studie wiskunde didactisch beter. Piet zei daarover tegen Goffree[2] : 'Het zal je verbazen, dat ik in mijn studietijd niets over grondslagen gehoord heb. Ook niet over wiskundige structuren, niet over groepen, niet over lichamen, niet over lineaire algebra, niets van dat alles. Het enige moderne onderwerp dat in die vijf jaar werd aangesneden, was puntverzamelingen. Alle moderne zaken heb ik later zelf moeten leren'. Gedurende de doctoraalfase volgde Piet onder andere colleges ethiek en filosofie. Daarover zei hij[2]: 'Ik snapte er geen donder van. Ik vond het ontzettend moeilijk. Later pas heb ik begrepen waarom ik het zo moeilijk vond. Een wiskundige gaat namelijk uit van axioma's en hij definieert zijn begrippen. Verder gaat het dan wel. In de filosofie heeft elk begrip pas betekenis in relatie tot het andere. Neem bijvoorbeeld de begrippen 'geldigheid', 'waarheid' , 'uitspraak', 'begrip' en 'betekenis'. Kun je over een uitspraak spreken als je niet weet wat een begrip is? En als je niet weet wat geldigheid is, of waarheid of betekenis? En kun je over betekenis spreken als je niet weet wat een uitspraak is, en waarheid, en een begrip? En kun je over waarheid spreken als je niet weet wat een uitspraak is? Dat kan niet. Alles krijgt eerst betekenis in de totale context.' In het laatste jaar van de doctoraalfase las Piet Fraenkels boek *Mengenlehre*. Zonder iemand iets te zeggen besloot hij Fraenkels theorie op de getaltheorie toe te passen. Na achttien dagen was hij klaar en gaf hij het aan een van zijn professoren met de woorden: '"Professor, ik heb mijn dissertatie af." Ik schrok me naar van zijn antwoord: "Dat is goed, laat maar drukken". "Wilt u het dan niet eerst lezen?" vroeg ik. Nee, dat was niet nodig, maar na enig aandringen was hij toch bereid het in te zien.' Na een paar dagen kreeg Piet antwoord: 'Het is geen gemakkelijke lectuur; laat maar drukken'. Zijn dissertatie *Axiomatische opbouw der verzamelingenleer, in het bijzonder der getallentheorie* besloeg 48 bladzijden.

Mammoetwet

Na het verdedigen van zijn proefschrift op 30 november 1931 begon Piets professionele leven als wiskundeleraar aan het Stedelijk Gymnasium Arnhem. Omdat er in die tijd nog geen lerarenopleiding bestond, bereidde hij zich enigszins voor op het leraarschap via een stage bij het natuurkundepracticum van de universiteit. Piet bleef iets meer dan veertig jaar verbonden aan het Stedelijk Gymnasium.



figuur 2 Vredenduin met zijn klas in 1937 [2]

In de jaren dertig voelde Piet zich meer wetenschapper dan leraar. Hij besloot op eigen kracht filosofie op universitair niveau te gaan studeren. Piet had nadien hoogleraar kunnen worden, maar hij vond dat niet sociaal genoeg. Er kwam iets anders op zijn pad: schoolboeken schrijven voor gymnasium en hbs. In 1968, met de invoering van de 'Mammoetwet', 'verdwenen' de schooltypen mulo, hbs en gymnasium. Daarvoor in de plaats kwam de huidige structuur, op de kleine wijzigingen na die sindsdien zijn doorgevoerd. In de voorbereiding en uitvoering van het wiskundeonderwijs in de nieuwe structuur speelde Piet een belangrijke rol. Piet herschreef al zijn schoolboeken voor de nieuwe structuur, nu zonder enige medeauteur. Het werd echter geen succes. Hij had zich niet, althans onvoldoende gerealiseerd dat in de nieuwe structuur andere leerlingen zaten. Een vwo'er was niet zonder meer gelijk aan een gymnasiast of hbs'er van vroeger. Een paar jaar later kreeg Piet het aanbod om samen met een team van auteurs een methode voor de nieuwe structuur te schrijven: *Sigma,* en die werd een groot succes.

Experimenten

De foto van figuur 3 is genomen in 1948 tijdens een bijeenkomst van de Wiskunde Werkgroep. Deze werkgroep, voorgezeten door Freudenthal, hield zich kritisch bezig met het wiskundeprogramma van gymnasium en hbs. Piet was actief in deze werkgroep. In genoemde bijeenkomst merkte een van de aanwezigen op dat het wiskundeprogramma voor de leerlingen van gymnasium A met algebra en meetkunde niet erg geschikt was. Zij gaan immers vooral vakken als geschiedenis, rechten, economie, psychologie, sociologie studeren. Statistiek is voor hen veel geschikter. Piet stelde toen voor aan Bunt, hoofd van de afdeling Didactiek van het Pedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit Utrecht, om een experiment met deze leerlingen te doen met onderwijs in de geschiedenis van de wiskunde (ten koste van een deel van het programma voor meetkunde). Bunt stemde in, maar alleen als er ook een experiment kwam met statistiek, waar hij voorstander van was (ten koste van een deel van de algebra). Bunt organiseerde en leidde beide experimenten. Het ene experiment leverde het schoolboek *Van Ahmes tot Euclides* op, het andere het schoolboek S*tatistiek voor het VHMO* (Voorbereidend Hoger (gymnasium) en Middelbaar Onderwijs (hbs)). Het laatste verscheen in 1957, het eerste in 1954. Piet was medeauteur van beide schoolboeken.

Wiskundedidactiek

In 1964 werd Piet docent didactiek van de wiskunde aan de Technische Universiteit Delft naast zijn leraarschap en conrectoraat aan het Stedelijk Gymnasium Arnhem. Piet[2]: 'In 1964 waren er überhaupt nog geen didactici. Er waren wel goede wiskundeleraren die didactiek gaven.' Piet had

figuur 3 De Wiskunde Werkgroep tijdens de bijeenkomst van 13 en 14 november 1948. Piet Vredenduin staat op de voorlaatste rij, tweede van rechts [3]

als uitgangspunt bij zijn didactiekcolleges: 'Als een leraar iets van wiskunde aan een klas wil uitleggen, moet hij zorgen dat hij het eerst zelf donders goed weet. En als hij het helemaal goed weet, dan moet hij het uiteraard niet zo uitleggen, want dat is te moeilijk voor de klas. Maar vanuit zijn inzicht is hij dan in staat de wiskunde voor de kinderen op verantwoorde wijze duidelijk te maken. In Delft heb ik altijd tegen de studenten gezegd: "Denk eraan, als je lesgeeft, moet je water bij de wijn doen. Maar je kunt geen water bij de wijn doen als je geen wijn hebt".'
Piet voelde zich geen wiskundedidacticus, zo bekende hij[2]. Pas na zijn pensionering in 1974 in Arnhem 'kon ik ook meer tijd aan de didactiek gaan besteden. In die tijd heb ik een onmetelijke steun gehad van mijn vriend Joop van Dormolen. Van hem heb ik eigenlijk didactiek geleerd'. Na zijn pensionering in Arnhem bleef Piet nog vijf jaar didacticus in Delft. Van 1970 tot 1979 was hij lid van de sectie voortgezet onderwijs van de Onderwijsraad.

'Nieuwe wiskunde': de implementatie van 'Royaumont'

Na de Tweede Wereldoorlog gingen in allerlei landen stemmen op om het wiskundeonderwijs op de middelbare school te vernieuwen. De belangrijkste redenen daarvoor waren dat men vond dat er een te grote discrepantie tussen de schoolwiskunde en de universitaire wiskunde was ontstaan en dat nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde, die tijdens de oorlog extra impulsen hadden gekregen, ook een plaats in het wiskundeprogramma moesten krijgen: lineair programmeren, statistiek en andere toepassingen. De Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling, organiseerde in 1959 in Royaumont, nabij Parijs, een seminarie over de vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Nederland was vertegenwoordigd door Vredenduin, Bunt en Leeman. Leeman werd in 1961 voorzitter van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) die het op 'Royaumont' gebaseerde leerplan moest formuleren, ermee>

experimenteren en de invoering begeleiden. De CMLW telde vijftien leden, onder wie Piet en Bunt.
Aanvankelijk richtte de CMLW zich vooral op het leerplan van gymnasium en hbs, later ook op dat van de mulo. Internationaal maar ook binnen de CMLW was er veel discussie over de richting van het nieuwe leerplan. Internationaal bepleitte met name de didactici uit België, Frankrijk en Spanje dat elk wiskundevak vanuit axioma's opgezet moest worden. De gedachte hierachter was dat de afstand tussen de wiskunde van de middelbare school en de universiteit verkleind moest worden. Hoe Piet hierover dacht, kan worden opgemaakt uit zijn vele bijdragen die hij in de periode van de CMLW in *Euclides* schreef. In de jaren 1961-1968 waren dat er 85, ongeveer een derde van al zijn bijdragen. (Hij was al vanaf 1940 medewerker en vanaf 1956 redacteur van *Euclides*.) In die bijdragen legde hij vaak op wiskundige wijze de wiskunde achter een nieuw onderwerp uit. Maar hij voegde altijd voor het onderwijs in dat onderwerp relevante opmerkingen toe. De volgende of een vergelijkbare passage komt veelvuldig voor. 'Zoals ik het hier beschrijf moet je het natuurlijk niet aan je leerlingen presenteren. Wel kan het als volgt ...'

Logica en de fundamenten van de wiskunde

Piets derde bijdrage aan *Euclides*, al ver voor de CMLW, *Strengheid en Inzicht* (1952, jaargang 27, nr 5/6), geeft een goed idee van zijn didactische inzichten. Zijn uitgangspunt is dat strenge wiskundige definities zeker nodig zijn, bijvoorbeeld om op terug te vallen bij misconcepties, maar dat is lang niet altijd per se nodig, want dan kan strengheid inzicht in de weg zitten. De bijdrage van Piet aan *Euclides* (1953, jaargang 28, nr 6) over het gelijkteken maakt dit duidelijk. In veel schoolboeken over algebra, ook dat waarvan hijzelf medeauteur was, komen drie verschillende soorten gelijktekens voor: in een berekening, in een identiteit van twee algebraïsche uitdrukkingen en bij het oplossen van een vergelijking. Volgens Piet hebben de leerlingen daar geen behoefte aan, als maar duidelijk is om welk van deze drie situaties het gaat. In 1959 (jaargang 34, nr 7) schrijft Piet over de problemen die leerlingen hebben met de woorden 'of' en 'en' bij het opschrijven van de oplossingen van vergelijkingen en ongelijkheden. Hij geeft het volgende voorbeeld: is het $x^2 - 5x + 4 > 0$, $x < 1$ *of* $x > 4$, of $x < 1$ *en* $x > 4$? Piet beargumenteert dat het eerste logisch juist is, maar verschilt van de situatie bij de vergelijking $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$ *en* $x_2 = 4$. Hij wijst op het verschil tussen de taal van de logica en de natuurlijke taal. Zijn advies: doe het logisch correct en gebruik de natuurlijke taal om dat toe te lichten. Tot slot een voorbeeld uit de na-CMLW-periode. In 1976 analyseert Piet in *Euclides* (jaargang 51, nr 9) beweringen die waar zijn voor sommige waarden van de voorkomende variabele, voor andere onwaar en voor weer andere geen betekenis hebben. Voorbeeld: $1/x > 0$ is waar voor $x > 0$, onwaar voor $x < 0$ en zonder betekenis voor $x = 0$. Hij suggereert betekenisloze uitdrukkingen als onwaar te kwalificeren en in dit geval een notatie te gebruiken als $\exists y : \frac{1}{x} = y \;\&\; y > 0$.

Trait d'union tussen Nederlandse en Vlaamse wiskundeonderwijs

In 1974 werd de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren opgesplitst in twee verenigingen, één in het Frans- en één in het Nederlandssprekend deel, elk met hun blad. In Vlaanderen werd dat de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars met *Wiskunde & Onderwijs* als orgaan. Piet streefde ernaar om zowel de Vlamingen over de ontwikkelingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs te informeren, als de Nederlandse wiskundeleraren van de ontwikkelingen in Vlaanderen. Hij schreef in totaal 62 bijdragen in *Euclides* over de Vlaamse (Belgische) ontwikkelingen, de meeste waren boekbesprekingen of verslagen van bijeenkomsten die hij in België had bijgewoond. Veel aandacht gaf Piet aan het werk van Georges Papy en diens vrouw Frédérique, die een belangrijke rol speelden in de implementatie van 'Royaumont' in België, en voor wie Piet veel waardering had. Met name in zijn bijdragen over de ontwikkelingen in België/Vlaanderen tussen 1960 en 1980 vergeleek Piet die met die in Nederland. In België werd in grote mate de axiomatische aanpak gevolgd, mede onder invloed van Papy, terwijl in Nederland voor een meer intuïtieve aanpak werd gekozen, mede onder invloed van het 'realistisch wiskundeonderwijs' zoals gepropageerd door Freudenthal. Misschien verrassend, koos Piet toch steeds beargumenteerd voor de Nederlandse aanpak. Omgekeerd schreef Piet 29 bijdragen voor het Vlaamse pendant *Wiskunde & Onderwijs*, waarvan ongeveer de helft gelijk was aan een bijdrage voor *Euclides*.

figuur 4 Frank Laforce (rechts), voorzitter van de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars, bedankt Piet Vredenduin (links) voor zijn openingsvoordracht op het congres van de Vereniging op 1 juli 1983 (collectie Lieve Simons)

Conclusie

Wat opvalt is dat Piet heel veel op eigen initiatief en vrijwel alleen op eigen kracht geleerd heeft en tot een goed einde bracht. Voor ons is hij een selfmade man. Op Goffrees vraag of hij zichzelf een didacticus vond, antwoordde Piet: 'Nee, zeker niet gedurende een groot deel van mijn professioneel leven. Later leerde ik wat wiskundedidactiek betekent door de ideeën van Skemp te bestuderen, zoals in Nederland geïntroduceerd door Joop van Dormolen en door de niveautheorie van Pierre van Hiele.' Aan Piet het laatste woord: 'Men heeft me wel eens gevraagd waarom ik altijd leraar ben gebleven. Had je geen aspiraties om rector, inspecteur, of zelfs hoogleraar te worden? ... Nee, een rectoraat wilde ik beslist niet. Ik ben het een jaar geweest, heb het met plezier gedaan maar verlangde er niet naar terug, integendeel. Hoogleraar, dat heb ik in het begin verteld, wilde ik in het begin wel worden. Na de oorlog is die kans er ook wel geweest, maar toen was de aspiratie er niet meer. Het onderwijs had me toen op een dergelijke manier te pakken, dat ik het niet meer los wilde laten'.[2]

Noten

[1] Als bronnen voor dit artikel hebben vooral gediend het hoofdstuk over Piet Vredenduin in Fred Goffrees boek Ik was wiskundeleraar [2] en Piets talloze bijdragen aan Euclides en Wiskunde & Onderwijs, de Vlaamse pendant van Euclides.

[2] Goffree, F. (1985) Ik was wiskundeleraar. Hoofdstuk IV, Piet Vredenduin, wiskundeleraar te Arnhem, 137 - 186. Enschede: SLO.

[3] Wij danken Fred Goffree en Lieve Simons voor het beschikbaar stellen van de foto's in deze bijdrage.

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus-hoogleraar aan de Open Universiteit. E-mailadres: zwane013@planet.nl
Dirk De Bock is als hoogleraar verbonden aan de Faculteit Economie en Bedrijfswetenschappen van de KU Leuven. E-mailadres: dirk.debock@kuleuven.be

Verenigingsnieuws

Notulen NVvW Jaarvergadering 2020

Vanwege corona is het dit jaar niet mogelijk om grote bijeenkomsten te houden. De leden kunnen de jaarvergadering en de daaraan gekoppelde studiedag online volgen en reageren via een chatfunctie. In een ruimte van de Universiteit Utrecht zijn de voorzitter, enkele bestuursleden en technici aanwezig. Van hieruit wordt de jaarvergadering live gestreamd. Bepaalde onderdelen van de agenda zijn al voorafgaand aan deze vergadering op video opgenomen om het aantal mensen dat tegelijkertijd op een plek samenkomt beperkt te houden. Er is geprobeerd om de gangbare orde van de vergadering zoveel mogelijk te volgen. De vele positieve reacties van leden via de chat op bepaalde agendapunten zijn door het bestuur geïnterpreteerd als instemmingen met de betreffende voorstellen.

Opening

Bij aanvang van de vergadering zijn ongeveer 150 leden online aanwezig. De voorzitter, Ebrina Smallegange, opent de vergadering en heet de aanwezigen welkom. In het bijzonder wordt het erelid Joop van Dormolen verwelkomd die vanuit Israël deze bijeenkomst kan meemaken. Door bijzondere omstandigheden waaronder de vergadering plaatsvindt gaan bepaalde zaken anders dan we gewend zijn.

Jaarrede

In de jaarrede benadrukt de voorzitter het belang om, juist in deze tijd, als wiskundedocenten contact te kunnen houden met elkaar. De website wordt vernieuwd om meer mogelijkheden te creëren voor online ontmoetingen en het >

uitwisselen van kennis. In het afgelopen jaar is het dossier rekenen afgesloten en zijn bouwstenen voor een nieuw curriculum opgeleverd. De vmbo vakvernieuwingscommissie is ingesteld en werkt momenteel aan een curriculum met rekenen en wiskunde voor alle leerlingen. Voor de overige schoolrichtingen (primair onderwijs, onder- en bovenbouw van havo/vwo) start het vervolgproces van Curriculum.nu dit najaar. Er worden nieuwe kerndoelen voor de onderbouw geformuleerd en nieuwe eindtermen voor de bovenbouw. De vakverenigingen worden nadrukkelijk betrokken bij dit proces. De opdracht om te komen tot een kerncurriculum van 70% van het huidige curriculum knelt en baart zorgen. De NVvW maakt deel uit van de FvOv. Voor leden wordt dit met name zichtbaar wanneer zij rechtspositionele hulp nodig hebben, maar ook door peilingen over vakbondsgerelateerde onderwerpen. Het bestuur heeft enkele bestuurscommissies ingesteld met (bestuurs)leden die zich specialiseren in diverse thema's en het bestuur daarover adviseren. De bestuurscommissie vakbondszaken is er daar een van. Daarnaast is er een commissie ingesteld rond bevoegdheden. Voor de toekenning van projecten en voor de ontwikkeling van een nieuwe website zijn ook aparte commissies aan het werk.

Notulen van de jaarvergadering van 2019

Deze zijn ongewijzigd vastgesteld.

Jaarverslagen 2019/2020

Zowel het jaarverslag van de NVvW, als het jaarverslag van *Euclides* worden ongewijzigd vastgesteld.

Financiën

In de toelichting op de begroting benadrukt de penningmeester dat de vereniging er financieel gezien goed voor staat. Het eigen vermogen is met 15.000 euro toegenomen als gevolg van lagere kosten voor vergaderingen en lagere Govak (Georganiseerd Overleg voor Vakbondswerkzaamheden) gelden. Het Vredenduinfonds is aangevuld met opbrengsten uit de verkoop van Zebra-boekjes en het projectfonds is aangevuld, zodat er jaarlijks voldoende middelen beschikbaar zijn om projecten te kunnen ondersteunen. Voor het 100-jarig jubileum en een *Euclides*-special zijn eveneens middelen gereserveerd. Als gevolg van de toename van het aantal seniorleden en afname van het aantal instituutsabonnementen wordt rekening gehouden met lagere contributie-inkomsten.

De kascontrolecommissie heeft geconstateerd dat de stukken op de juiste wijze verantwoord zijn en zij stellen voor de penningmeester te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. Onlinereacties ondersteunen dit voorstel van de kascontrolecommissie. De penningmeester bedankt de kascontrolecommissie en meldt dat de nieuwe kascontrolecommissie zal bestaan uit J. Pil en H. Bakker. Gezien de gezonde financiële situatie waarin de vereniging verkeert is er geen reden om de contributie te verhogen.

Bestuursverkiezing

Hester Vogels treedt af. De voorzitter bedankt haar voor haar inspiratie en bijdragen, in het bijzonder t.b.v. curriculum.nu, de Facebookgroep Wiskundeleraar en de voorbereiding van de nieuw te ontwikkelen website. Hester blijft via de onderwijscommissie van PWN betrokken bij diverse vernieuwingen.

Claudia Konert wordt verwelkomd als nieuw lid van het bestuur. Ebrina Smallegange en Kees Garst worden herkozen voor een derde termijn.

Presentatie nieuwe Giraf

Desiree van den Bogaart presenteert de nieuwe Giraf met de titel *Cryptografie, een doeboek vol codes en geheimtaal*. De schrijver van dit tweede deel in de Girafreeks, Paul Durenkamp, ontvangt het eerste exemplaar.

Erelidmaatschap

In een vooraf opgenomen filmpje wordt getoond hoe Peter Kop thuis verrast wordt door de voorzitter en initiatiefnemer Marcel Voorhoeve, met de mededeling dat het bestuur voornemens is om hem, namens de leden, het erelidmaatschap van de NVvW aan te bieden.

In de loop der jaren is hij, als lid van de NVvW, nauw betrokken geweest bij opeenvolgende vernieuwingen van het wiskundecurriculum (Hewet, Hawex, cTwo). Daarnaast heeft hij zich bij Cito en CvTE ingespannen voor examens en is hij een van de initiatiefnemers van de succesvolle Zebrareeks. Zijn bijdragen op het gebied van didactiek zijn een bron van inspiratie voor veel docenten binnen en buiten de vereniging. In een reactie zegt Peter vereerd en verrast te zijn door dit initiatief. Bij deze is Peter benoemd als erelid.

Rondvraag

Er zijn geen vragen binnengekomen. Opmerkingen die via de chat zijn binnengekomen worden, indien nodig, beantwoord.

Sluiting

De voorzitter dankt iedereen die aanwezig heeft kunnen zijn en spreekt de hoop uit dat we elkaar tijdens de jaarvergadering van 2021 weer fysiek kunnen ontmoeten.

Jos Remijn

Recordopbrengst boekenveilingen in coronatijd

Laatste nieuws

Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) bestaat inmiddels 27 jaar. Als werkgroep van de NVvW, opgericht door leden met een hart voor ontwikkelingslanden, ondersteunen we sindsdien projecten voor het wiskundeonderwijs in veel verschillende landen. We ontvangen van veel leden van de NVvW elk jaar de extra donatie van € 2,50. Dit levert jaarlijks een bedrag van ongeveer € 5000 op. Voor deze jaarlijkse steun bedanken we iedereen van harte. In 2020 hadden we maar heel weinig nieuwe projecten, doordat overal in de wereld de boel stilviel vanwege de coronapandemie. We hadden daardoor ineens een stuwmeer aan geld. Gelukkig konden we vanaf eind 2020 weer projecten starten in Indonesië (ontwikkelen van enkele online leermodules voor wiskunde), Zambia (aanschaf wiskundeboeken, passers en geodriehoeken) en Oeganda (aanschaf wiskundeboeken en rekenmachines). Ook hebben we een project op de Filipijnen en een paar projecten in Kenia. In Burkina Faso hadden we nog niet eerder een project. Nu heeft een agrarische school aldaar geld gekregen voor wiskundeboeken en rekenmachines.

Bestuur

We namen in het najaar van 2020 afscheid van voorzitter Evert van de Vrie. Vanaf 2009 was hij bestuurslid van het WwF en vanaf 2013 voorzitter. Evert beëindigde zijn werk bij de Open Universiteit om van zijn pensioen te gaan genieten en dat was voor hem ook het moment om bij het WwF te stoppen. We danken Evert voor zijn werk voor het WwF. Monica Woldinga heeft het voorzitterschap van hem overgenomen. Betty Straatman, aanjager van veel projecten in Kenia, is met haar werk voor het WwF gestopt. Momenteel bestaat het bestuur van het WwF naast voorzitter Monica Woldinga uit de leden Heleen van der Ree (namens de NVvW), Hans van de Lagemaat, Dédé de Haan, Annemiek van Leendert, Jelger Pil en Jos Remijn.

Boekenverkoop

De verkoop van gebruikte wiskundeboeken loopt erg goed. We krijgen veel gebruikte wiskundeboeken aangeboden. Vaak door docenten of universitaire medewerkers die rondom hun pensionering hun boekenverzameling opruimen. En omdat er voortdurend belangstelling blijkt te bestaan voor oude wiskunde studie- en schoolboeken, boeken over de geschiedenis van de wiskunde, recreatieve wiskunde en algemene (natuur)wetenschappelijke onderwerpen, zijn de opbrengsten op de twee jaarlijkse internetveilingen uitstekend. Samen met onze aanwezigheid op de jaarlijkse studiedag van de NVvW en op de Nationale Wiskunde Dagen levert de boekenverkoop de laatste jaren maar liefst zo'n € 7000 à € 8000 per jaar op.

Oktoberveiling 2020 en meiveiling 2021

De jaarlijkse oktoberveiling in 2020 leverde een recordbedrag van € 3361 op. Dat was al een geweldig resultaat natuurlijk. Maar we waren nog niet klaar. Omdat de studiedag van de NVvW wegens de coronamaatregelen online zou worden gehouden, besloten we met de honderd mooiste boeken die we op voorraad hadden een kortlopende 100-boekenveiling te houden die zou eindigen tijdens de studiedag, op 7 november om 17.00 uur. Het veilingaanbod werd nog mooier toen Hans Sterk een levensgroot bordmodel van een rekenliniaal aanbood. Het werd dus een 100 + 1-veiling. De rekenliniaal bracht € 75 op en de veiling in totaal € 1148. Een daverend succes waarvoor we alle bieders en kopers van de boeken hartelijk bedanken. Helaas was er dit voorjaar niet de mogelijkheid om met een boekenstand op de NWD in Noordwijkerhout te staan. Maar gelukkig heeft een online veiling geen last van de coronamaatregelen. Op de meiveiling van 2021 stonden zo'n 700 boeken gereed. We behaalden deze keer wederom een recordopbrengst. Er werden 3633 biedingen uitgebracht op de boeken, waardoor de prijzen soms spectaculair opliepen. Op de eerste druk van L.E.J. Brouwers boek *Over de grondslagen der Wiskunde* uit 1907 werd maar liefst 54 keer geboden. Het boek ging voor € 103 weg. De totale opbrengst van de meiveiling was € 4709.

Aanvragen van een nieuw project

Het WwF ontvangt regelmatig aanvragen voor nieuwe projecten. Soms komen de aanvragen vanzelf, soms moeten we actief in ons netwerk speuren. Omdat wij kleinschalige projecten financieren met veelal een Nederlandse contactpersoon, zou het voor ons waardevol zijn om aan te haken bij de contacten die sommige Nederlandse middelbare scholen al hebben met scholen elders. Binnen een sponsor- of samenwerkingsproject zijn er dan wellicht mogelijkheden voor het WwF om op deze middelbare school in een land in ontwikkeling bij te dragen aan leermiddelen voor wiskunde. Informatie hierover op onze website bij '*Nieuwe projecten aanvragen*'.

Over de auteur

Jos Remijn is de veilingmeester van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: *wwf@nvvw.nl*
Website WwF: *www.wereldwiskundefonds.nl*
Veilingwebsite: *veiling.wereldwiskundefonds.nl*

Vastgeroest

Achteruitdenken

Ab van der Roest

Deze week kwam ik er in de les weer eens achter dat hoe ik denk, niet gewoon is voor de leerlingen. Hierdoor komt het nogal eens voor dat ik ergens overheen stap, zonder dat ik in de gaten heb dat de leerling een probleem heeft. Een leermoment in het bijna laatste jaar docentschap. Maar het spreekwoord zegt dat we hier nooit te oud voor zijn.

Wat ik met 'achteruit denken' bedoel zal ik proberen te illustreren met een voorbeeld.

Gonio

In 4 vwo heb ik met gonio de formule $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ uitgelegd. Ik doe dat altijd met de eenheidscirkel en spiegel dan een driehoekje uit het eerste kwadrant in de y-as. Leerlingen zien wat er gebeurt en geven aan dat ze het begrijpen. Totdat ze dit zelf moeten toepassen. In een bijles behandelde ik $\cos(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi) = -\cos(x)$. Ik herleidde de vergelijking tot $\cos(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(\pi - x)$ om daarna de argumenten aan elkaar gelijk te stellen en tegengesteld te maken. Jo-Anne sputterde heftig bij de eerste stap. 'Waarom mag dat?' Ik schetste de eenheidscirkel met de driehoek en zijn spiegelbeeld en zei dat daaruit blijkt dat $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$. Volgens Jo-Anne had het niets met de opgave te maken. Toen bedacht ik pas, dat ik de gevonden formule beter kon schrijven als $-\cos(x) = \cos(\pi - x)$. Het achteruit denken, dat je de vergelijking van achteren naar voren mag gebruiken, was voor Jo-Anne duidelijk een stap te veel, want toen ik het laatste opschreef was het haar meteen duidelijk wat ik deed.

Derdegraadsfuncties

Een tweede voorbeeld was ook in 4 vwo wiskunde B. De leerlingen moesten aan een praktische opdracht werken over derdegraadsfuncties. De moeilijkste vraag was: 'een derdegraadsfunctie heeft drie snijpunten met de x-as; neem twee van de nulpunten en bereken het gemiddelde, zeg m; bewijs dat de raaklijn aan de grafiek in het punt met $x = m$, door het derde snijpunt gaat.'

Groot probleem is dat de derdegraadsfunctie lastig is te ontbinden in factoren. Dus starten met $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is niet zo handig. Wat wel kan is dat je begint met $f(x) = a(x - b)(x - c)(x - d)$ en zo je nulpunten alvast een naam geeft. De meeste leerlingen kwamen hier niet aan toe. Snijpunten met de x-as dus $f(x) = 0$ is geen enkel probleem, maar snijpunten geven en zo een functievoorschrift maken is duidelijk een andere opdracht. Ook hier is het achteruit denken te lastig.

Ik leerde deze week dus weer heel veel en ga dat de komende tijd jaar in praktijk brengen.
Overigens was de uitwerking bij de praktische opdracht bij de meeste leerlingen fout. Ik denk dat ze internet afgespeurd hebben en toen vonden ze:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ heeft als nulpunten $x = a \vee x = b \vee x = c$. Uitgaande van de eerste twee nulpunten is $x_m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ en dan maken we de raaklijn in bijbehorend punt. Deze heeft de vergelijking $y = ax + b$.

Nu weten we dat de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax + b$ drie oplossingen heeft, waarvan er twee dezelfde zijn (raakpunt) en zo kon bewezen worden dat de raaklijn precies door het derde snijpunt gaat. Er is nog veel uit te leggen want de driedubbele rol van a, b en c wordt duidelijk niet herkend.

Anders denken: voor een wiskundeleraar is meteen duidelijk wat hier staat, maar een leerling zal hierover na moeten denken

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Olympiadepuzzel 97-2
Toernooi

Esther Bod

PZZL

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl.*

Aan een groot toernooi doet een aantal deelnemers mee. Iedere deelnemer speelt eenmaal tegen elke andere deelnemer. De winnaar van een wedstrijd krijgt 3 punten, de verliezer 0 punten en bij gelijkspel krijgen beide deelnemers 1 punt. Aan het einde van het toernooi wordt een ranglijst opgemaakt. Het blijkt dat er in totaal 2021 punten zijn behaald en dat de winnaar met grote voorsprong op de rest van het deelnemersveld is geëindigd.

Na afloop van het toernooi wordt bekend dat de winnaar doping heeft gebruikt. Hij wordt geschorst en uit de uitslag geschrapt. De punten die andere deelnemers in wedstrijden tegen hem hebben behaald, tellen nog wel mee (de score voor wedstrijden die in gelijkspel zijn geëindigd, blijft 1 punt).

Door de schorsing daalt de gemiddelde score per deelnemer (exclusief de geschorste deelnemer) met exact 1 punt. Hoeveel punten had de geschorste deelnemer behaald?

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 26 november naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 7

Voor de puzzel Kaartspel hebben we acht inzendingen ontvangen.
De puzzel ging over een kaartspel en de vraag hoeveel kaarten Quintijn moest hebben om gegarandeerd te winnen. De meeste inzenders zagen al snel in dat Birgit zelfs met drie kaarten nog kon winnen, mits ze de juiste kaarten heeft. Door zorgvuldig alle mogelijkheden af te gaan, kon vervolgens bewezen worden dat als Birgit slechts twee kaarten heeft, Quintijn altijd het spel kan winnen. Nu is het voor Quintijn alleen nog hopen dat Birgit dit niet ook uitgevogeld heeft en dat ze instemt met de verdeling van de kaarten.

(Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.)

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de zeven inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Gé Groenewegen.

Vakbladeuclides.nl/972olympiadepuzzel

Top 10 ladderstand t/m puzzel 96-6

1	G. Bouwhuis	139
2	M. Woldinga	132
3	S. Zondervan	132
4	H. Huisman	117
5	F. Göbel	114
6	H. Bakker	104
7	J. Meerhof	84
8	F. van der Hoeve	77
9	D. Dopheide	62
10	L. Cizkova	61

We feliciteren Gerard Bouwhuis van harte met de ladderprijs.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2021

Za 06/11

Jaarvergadering en studiedag

De jaardag van de NVvW zal dit jaar hopelijk live plaats kunnen vinden, maar zal in elk geval doorgaan op 6 november
organisatie: NVvW

Za 12/11

LANDELIJK

Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag
Organisatie: Freudenthal Instituut

2022

Ma 17/01 Do 27/01

LANDELIJK

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Vr 28/01 Za 29/01

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Wo 16/02

LANDELIJK

OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 11/03

Onderwijs meets onderzoek

OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 97

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	14 december 2021	11 oktober 2021
4	25 januari 2022	15 november 2021
5	15 maart 2021	03 januari 2022
6	03 mei 2022	28 februari 2022
7	21 juni 2022	25 april 2022

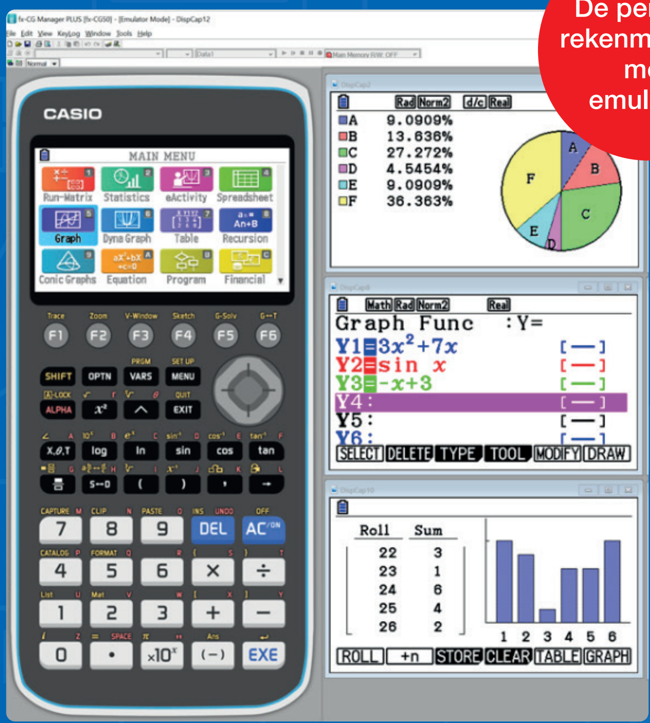
CASIO

Op Casio kunt u rekenen

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken

Casio fx-CG50

De perfecte rekenmachine met emulator!



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.