Uitwerking puzzel 96-6 **Wobien Doyer**
Damstenen op een rijtje **Lieke de Rooij**

Deze puzzel is een variatie op een oude IMO-opgave uit de 'long list'.
Ze maken rijtjes van enen en nullen (binaire rijtjes) waarbij het verboden is dat er twee enen op onderlinge afstand 2 staan, dus geen deelrijtjes 101 of 111.
Het aantal mogelijke binaire rijtjes is een functie $f(n)$, waarbij n de lengte is van de rijtjes.

Met bovenstaand verbod (geen deelrijtjes 111 of 101) blijkt dat $f(n)$ kan worden uitgedrukt in een recursieve formule, maar ook in Fibonacci-getallen.
En omdat er voor Fibonacci-getallen ook een directe formule bestaat (Formule van Binet), kan $f(n)$ dan ook direct worden berekend als functie van n.

Wij maakten een puzzel met andere verboden deelrijtjes en kozen voorbeelden waar soms ook een directe formule mogelijk is.
Om het wat recreatiever te maken gebruiken we rijtjes van damstenen. We noemen die rijtjes dam-rijtjes. Die kun je noteren als bijvoorbeeld zzwzwwz...., maar je bent natuurlijk vrij om het op binaire rijtjes te houden.

Merk op dat we twee rijtjes die elkaars spiegelbeeld zijn als twee verschillende rijtjes tellen.
Bijvoorbeeld zzzzw en wzzzz zijn twee verschillende rijtjes.
Het is wellicht verrassend dat sommige functies $f(n)$ harder groeien dan andere, ook al lijken de verboden deelrijtjes op elkaar. Dus behalve de opdrachten nog iets om over na te denken?

Er zijn steeds drie niveaus om de vragen op te lossen.
Alle opgaven zijn daarom in onderstaande vorm:

Gegeven een verbod op bepaalde deelrijtjes.
Onderzoek hoeveel verschillende dam-rijtjes van gegeven lengte waar die verboden deelrijtjes niet in voorkomen er bestaan.

a) Bepaal $f(n)$ voor n=1 tot en met n=6.
b) Geef een vermoeden van een recursieve formule, of een gemengde formule, dus bijvoorbeeld $f(n) = f(n-3) + n + 2$ en als dat kan ook een directe formule in n.
c) Bewijs een van de formules die je hebt gevonden bij onderdeel b.

Merk op dat er vaak meerdere verschillende recursieve formules mogelijk zijn, zoals bijvoorbeeld de Fibonacci-rij: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ of
$F(n) = 2F(n-1) - F(n-3)$. Met $F(0) = 0$ en $F(1) = 1$.

Als het aantal toegestane dam-rijtjes met lengte n een functie is van Fibonacci-getallen hoef je de bijbehorende directe formule niet te geven.

Een voorbeeld: Dam-rijtjes waarin geen deelrijtjes zz mogen voorkomen is wellicht bekend: daar komt de rij $F(n)$ van Fibonacci uitrollen:
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, met $f(1) = F(2)$.

Het kan soms handig zijn om voor een gegeven n de toegestane dam-rijtjes te verdelen in groepen afhankelijk van de kleur van de laatste stenen of steen.

Er werden door de inzenders meerdere verschillende notaties en bewijzen geleverd. We noemen er daarvan een aantal:

Gerard Bouwhuis is de enige inzender die in opgave 1 ingaat op de vraag waarom de restricties zzw en wzw dezelfde aantallen oplevert als zww en zwz. Hij doet dat door in beide gevallen te kijken naar het aantal rijtjes beginnend met een w en het aantal beginnend met z. Ook voor opgave 2 gebruikt hij deze methode.

Hans Linders bewijst zijn formules van opgave 1 en 2 door te kijken naar het aantal mogelijke rijtjes van een lengte *n* en *i* zwarte stenen.

Jos Remijn en anderen splitsen de toegestane rijtjes van lengte *x* in rijtjes die op twee manieren verlengd kunnen worden tot een toegestaan rijtje van lengte *x*+1 ("goede rijtjes") en rijtjes waarbij dat maar op één manier kan ("slechte rijtjes").

In de opgaven 1 en 2 zijn er twee verboden rijtjes die dus geen van beide mogen voorkomen. Bij opgave 1 mag je kiezen uit (I) of (II). Je krijgt dus het volle aantal punten als je één van de twee uitwerkt.

Opgave 1) Geef voor (I) of (II) antwoord op bovengenoemde onderdelen a, b en c:
(I): verboden deelrijtjes zzw én wwz.
(II): verboden deelrijtjes zzw én wzw.

Uitwerking opgave 1a (I):
We kunnen alle geldige rijtjes van lengte $n \geq 2$ verdelen in 4 soorten, afhankelijk van de laatste 2 stenen, dus: $f(n) = f_{ww}(n) + f_{zw}(n) + f_{wz}(n) + f_{zz}(n)$, waarin $f_{ww}(n)$ het aantal geldige rijtjes eindigend op ww van lengte n etc.

Merk op dat we uit $f_{ww}(n)$ en $f_{zw}(n)$ en de verboden deelrijtjes bijvoorbeeld $f_{ww}(n+1)$ kunnen bepalen: Zonder verboden deelrijtjes zijn alle $f_{ww}(n)$ geldige rijtjes.

We kunnen nu eenvoudig uit de functies $f_{ww}(n)$, $f_{zw}(n)$, $f_{wz}(n)$ en $f_{zz}(n)$ en de verboden rijtjes de waarden van de functies $f_{ww}(n+1)$, $f_{zw}(n+1)$, $f_{wz}(n+1)$ en $f_{zz}(n+1)$ bepalen (zie uitleg hieronder en het schema "ZZW en WWZ verboden".

Voor $n \geq 2$: $f(n+1) = f_{ww}(n+1) + f_{zw}(n+1) + f_{wz}(n+1) + f_{zz}(n+1)$
met A: $f_{ww}(n+1) = f_{ww}(n) + f_{zw}(n)$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op ww of zw een w zetten dan hebben we een geldig rijtje van lengte $n+1$, want www en zww zijn toegestaan).
B: $f_{zw}(n+1) = f_{wz}(n)$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op wz een w plaatsen levert dat een geldig rijtje, want wzw is toegestaan, maar als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op zz een w plaatsen levert dat een ongeldig rijtje, want zzw is verboden).
C: $f_{wz}(n+1) = f_{zw}(n)$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op zw een z plaatsen levert dat een geldig rijtje, want zwz is toegestaan, maar

als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op ww een z plaatsen levert dat een ongeldig rijtje, want wwz is verboden).

D: $f_{zz}(n+1) = f_{wz}(n) + f_{zz}(n)$

(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op wz of zz een z zetten dan hebben we een geldig rijtje van lengte $n+1$,
want wzz en zzz zijn toegestaan).

We kunnen dat schematisch als volgt weergeven en zo vrij gemakkelijk de waarden van $f(n)$ voor een aantal waarden van n berekenen.

Schema met ZZW en WWZ verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
+W	+W +Z	+W +Z	+Z		
2	1	1	2	6	3
3	1	1	3	8	4
4	1	1	4	10	5
5	1	1	5	12	6

1b (I) Vermoeden: Het schema suggereert natuurlijk: $f(n) = 2n$
1c (I) Bewijs met volledige inductie:
Inductieveronderstelling: stel dat voor zekere i geldt: $f_{zw}(i) = f_{wz}(i) = 1$
en $f_{ww}(i) = f_{zz}(i) = i - 1$ en dus $f(i) = 2 + 2(i-1) = 2i$.

Startwaarden: voor rijtjes van lengte 1 en 2 geldt natuurlijk:
Voor $n = 1$ zijn er 2 mogelijke "rijtjes" : w en z
Voor $n = 2$ zijn er 4 mogelijke rijtjes : ww, wz, zw en zz dus voor $0 < n \leq 2$ geldt $f(n) = 2n$
Bovendien geldt voor $n = 2$: $f_{ww}(2) = f_{zw}(2) = f_{wz}(2) = f_{zz}(2) = 1$ en dus ook:
voor $n = 2$ geldt: $f_{zw}(n) = f_{wz}(n) = 1$ en $f_{ww}(n) = f_{zz}(n) = n - 1$
Dus de inductieveronderstelling is geldig voor $n = 2$

Voor $n = i + 1$:
A: $f_{ww}(i+1) = f_{ww}(i) + f_{zw}(i) = (i-1) + 1 = i$
B: $f_{zw}(i+1) = f_{wz}(i) = 1$
C: $f_{wz}(i+1) = f_{zw}(i) = 1$
D: $f_{zz}(i+1) = f_{wz}(i) + f_{zz}(i) = 1 + (i-1) = i$
en: $f(i+1) = f_{ww}(i+1) + f_{zw}(i+1) + f_{wz}(i+1) + f_{zz}(i+1) = 2i + 2 = 2(i+1)$

Daarmee is bewezen dat als de inductieveronderstelling geldt voor $n = i$, hij ook geldt voor voor $n = i + 1$ en dus geldt voor elke $n \geq 2$: Als zzw én wwz verboden zijn dan geldt voor elke $n \geq 2$: $f(n) = 2n$, en natuurlijk geldt ook $f(1) = 2$, zodat zelfs voor $n \geq 1$ geldt: $f(n) = 2n$

Uitwerking opgave 1 (II): verboden deelrijtjes zzw én wzw.

De functies van de aantallen geldige rijtjes eindigend op ww, wz, zw en zz worden nu:

A: $f_{ww}(n+1) = f_{ww}(n) + f_{zw}(n)$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op ww of zw een w zetten dan hebben we een geldig rijtje van lengte $n+1$,
want www en zww zijn toegestaan).

B: $f_{zw}(n+1) = 0$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op wz of zz een w plaatsen levert dat geen geldig rijtje, want zowel wzw als zzw is verboden.)

C: $f_{wz}(n+1) = f_{ww}(n) + f_{zw}(n)$
(want als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op ww of zw een z plaatsen levert dat een geldig rijtje, want zowel wwz als zwz is toegestaan

D: $f_{zz}(n+1) = f_{wz}(n) + f_{zz}(n)$
(Als we achter een geldig rijtje van lengte n eindigend op wz of zz een z zetten dan hebben we een geldig rijtje van lengte $n+1$,
want wzz en zzz zijn toegestaan).

Het schema en de eerste paar waarden van $f(n)$ worden dan:

Schema met ZZW en WZW verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
2	0	2	2	6	3
2	0	2	4	8	4
2	0	2	6	10	5
2	0	2	8	12	6

1b (II) Vermoeden: Het schema suggereert natuurlijk: $f(n) = 2n$
1c (II) Bewijs: Volledige inductie: op dezelfde manier als bij 1c (I).

Als je toch opgave (I) én opgave (II) hebt gemaakt (hoeft niet) dan zie je dat ze beide dezelfde functie $f(n)$ opleveren. Er valt daar dus nog over na te denken waarom dat zo is.
Uitwerking:
Als we de beide schema's vergelijken dan zien we in beide gevallen dezelfde waarden van $f(n)$, maar een heel verschillend pijlenschema.

We kijken eerst nog eens naar het pijlenschema van opgave (I):

Schema met ZZW en WWZ verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
2	1	1	2	6	3
3	1	1	3	8	4
4	1	1	4	10	5
5	1	1	5	12	6

Er zijn twee kolommen die steeds gelijk blijven, doordat ze beide alleen "voeding" krijgen van elkaar, doordat de beide pijlen die ze daarnaast nog zouden kunnen voeden verboden zijn.
We vragen ons af of datzelfde effect nog op andere manieren te bereiken zijn.
Het eerste idee is: laat de kolommen ww en zz alleen voeding krijgen van zichzelf (en verder geen restricties). Dan krijgen we:

Schema met ZWW en WZZ verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
1	2	2	1	6	3
1	3	3	1	8	4

Met de restricties ZWW en WZZ en inderdaad $f(n) = 2n$. Maar dat restricties ZWW en WZZ hetzelfde aantal geldige rijtjes heeft als de restricties ZZW en WWZ hadden we ook zonder schema kunnen voorspellen: de verboden deelrijtjes in de restricties zijn elkaars omgekeerden, dus het omgekeerde van elk geldig rijtje bij het ene paar restricties komt overeen met een geldig rijtje in het andere paar restricties.

Een tweede idee is om de kolommen ww en wz alleen voeding te laten krijgen van de kolom ww (en verder geen restricties) Dan krijgen we:

Schema met ZWW en ZWZ verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
1	2	1	2	6	3
1	3	1	3	8	4

En dan zijn dus zww en zwz verboden. En natuurlijk levert zww en zwz hetzelfde aantal geldige rijtjes als zzw en wzw: zww en zwz heeft hetzelfde aantal geldige rijtjes als wzz en wzw (wit en zwart verwisselen) en wzz en wzw heeft hetzelfde aantal geldige rijtjes als zzw en wzw (rijtjes omkeren).

Opgave 2) Idem met verboden deelrijtjes zzw én wzz.
Uitwerking opgave 2a
We maken weer een schema, dit maal is ook de Fibonacci-reeks relevant:

Schema met ZZW en WZZ verboden						
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n	$F(n)$
1	1	1	1	4	2	1
2	1	2	1	6	3	2
3	2	3	1	9	4	3
5	3	5	1	14	5	5
8	5	8	1	22	6	8

2b Vermoeden: Het zou, op basis van de aantallen in het schema, kunnen zijn:
$f(n) = f(n-1) + f(n-2) - 1$. Bij deze recursieve formule hoort natuurlijk een aanloop: $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ en $f(3) = 6$, en voor $n > 3$ de recursie.

Een tweede mogelijkheid, gebruik makend van de Fibonacci-reeksen in het schema:
$f(n) = 2F(n) + F(n-1) + 1$

2c Bewijs: Volledige inductie: op dezelfde manier als bij 1c (I).

Opgave 3) Idem met verboden deelrijtje met *k* keer een *z* achter elkaar. Voor onderdeel a geldt *k*=3, dus met verbod op deelrijtje zzz, maar bij onderdelen b en c zoeken we een algemeen antwoord voor elke *k*.

Uitwerking opgave 3a
Het schema wordt nu:

Schema met ZZZ verboden					
f_{ww}	f_{zw}	f_{wz}	f_{zz}	$f(n)$	n
1	1	1	1	4	2
2	2	2	1	7	3
4	3	4	2	13	4
7	6	7	4	24	5
13	11	13	7	44	6
24	20	24	13	81	7

3b: Een vermoeden uitspreken over *k* keer een *z* achter elkaar op grond van dit rijtje natuurlijk wel erg speculatief.

Voor k=3 zouden we kunnen gokken op $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$ en dat zou je kunnen proberen te veralgemenen met $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + \cdots .. f(n-k)$.

Jos Remijn merkt op dat deze reeks (volgens www.oeis.org) de Tribonacci-reeks is.

3c: Bij een verbod op deelrijtjes bestaand uit k keer z achter elkaar kunnen we niet meer toe met de indeling naar de laatste 2 stenen in het rijtje dat we hierboven hanteerden. In plaatst daarvan maken we een verdeling naar het aantal opvolgende zwarte stenen aan het eind van het rijtje. Omdat k keer z achter elkaar verboden is kan dat aantal varieren tussen 0 en $k-1$.

We kunnen de toegestane rijtjes dus verdelen als:

$f(n) = f_0(n) + f_1(n) \ldots \ldots f_{k-1}(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(n)$,

waarin $f_i(n)$het aantal toegestane rijtjes van lengte n eindigend op i keer z.

Als $n < k$ zijn natuurlijk alle rijtjes toegestaan, dus als $n < k$ dan is $f(n) = 2^n$.

Voor $n = k$ is er precies één verboden rijtje, dus $f(k) = 2^k - 1$

Als $n > k$ dan bestaan de rijtjes in $f_i(n)$ uit: $n - i - 1$ damstenen waarin geen deelrijtjes van i x k voorkomen, dan 1x een witte damsteen, en dan i x z

Er geldt dan dus: $f_i(n) = f(n-i-1)$ (want we kunnen een geldig rijtje van lengte $n-i-1$ op precies 1 manier verlengen met één witte gevolgd door i zwarte stenen).

Dus hebben we: $f(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i-1)$

Als $n > k$ kunnen we dus $f(n)$ berekenen als de som van zijn k voorgangers. Dat komt overeen met het vermoeden dat we noteerden in 3b.
Datzelfde geldt voor $n = k$: $\sum_{i=0}^{k-1} f(k-i-1)$=$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$, dus hebben we:

Als $n \geq k$ dan $f(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i-1)$

Desgewenst kunnen we de formule anders schrijven als volgt:

Uit $f(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i-1)$ en dus $f(n+1) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i)$ vinden we:
$f(n+1) - f(n) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i) - \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i-1) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-i) - \sum_{i=1}^{k} f(n-i) =$
$f(n) - f(n-k)$ en dus:

$f(n+1) = 2f(n) - f(n-k)$

Harm Bakker laat zien dat het voor $k = 3$ en $k = 4$ mogelijk moet zijn een directe formule te vinden.