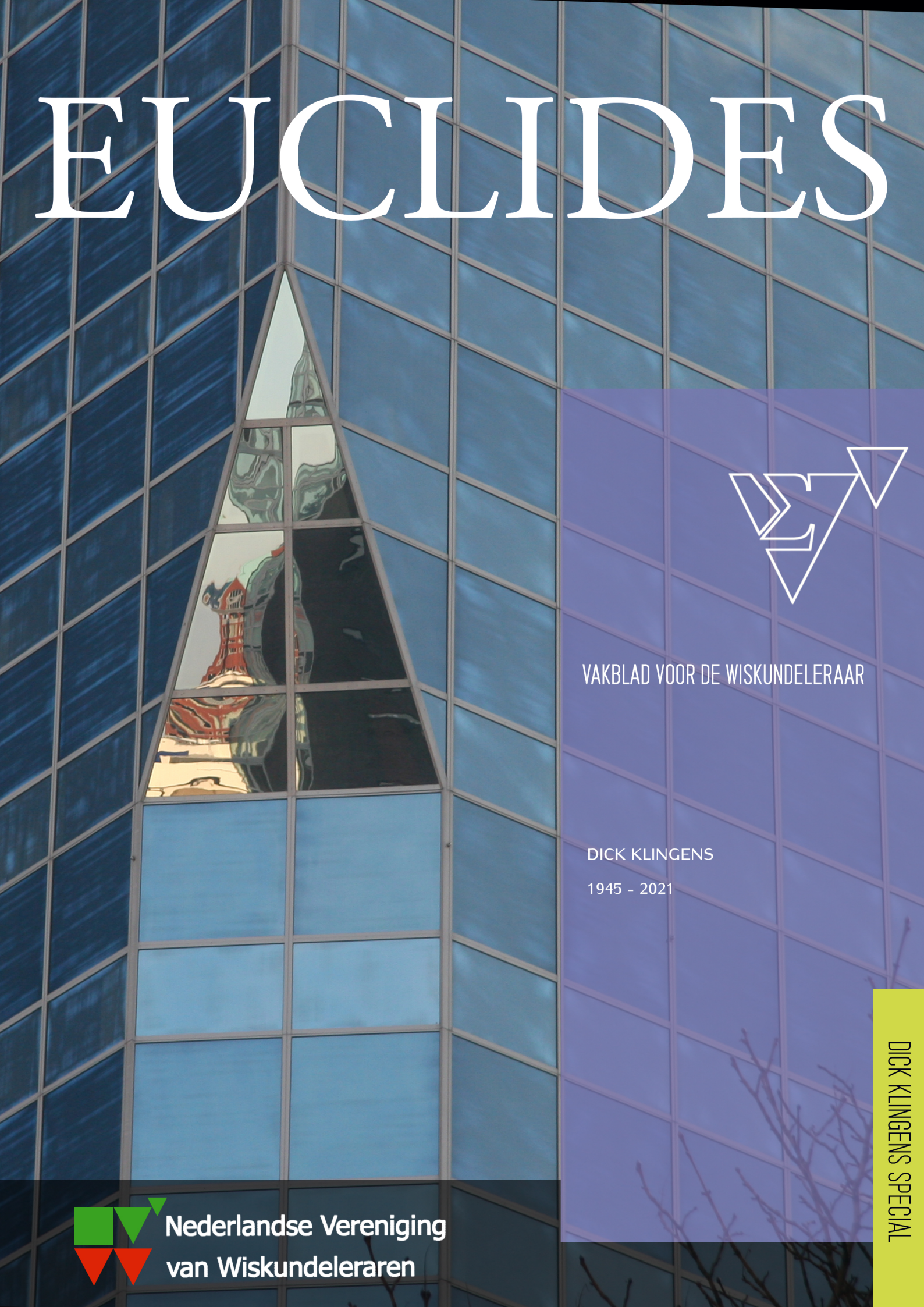


EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

DICK KLINGENS

1945 - 2021

DICK KLINGENS SPECIAL

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

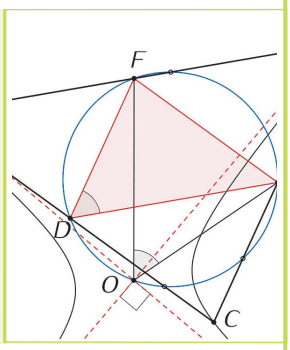
DICK KLINGENS SPECIAL



IN DIT NUMMER

NOG MAAR EENS DE TRISECTIE
Euclides 92-3 december 2016 4

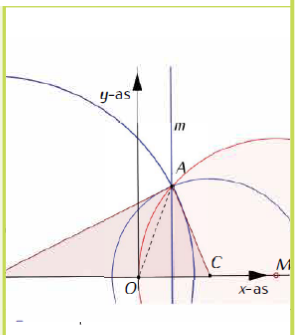
EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE
Euclides 93-2 november 2017 7



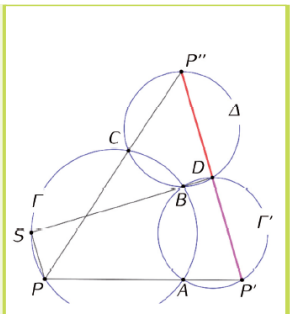
EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN
Euclides 93-6 mei 2018 11

SCHERP, RECHT, STOMP ...
Euclides 94-1 september 2019 15

MET EN/OF ZONDER COORDINATEN...
Euclides 94-5 maart 2019 17



TWEE MEETKUNDIGE MINIATUREN
Euclides 94-6 mei 2019 21



(HET GEVOLG VAN) KRASSEN MET FORMULES
Euclides 95-3 december 2019 25

DE STELLING VAN STEWART
Euclides 95-5 mei 2020 27

OVER EEN EIGENSCHAP VAN EEN ELLIPS
Euclides 96-3 december 2020 32

DE BISSECTRICESTELLING EN WAT ER ZO BIJ KOMT KIJKEN
Euclides 96-7 juni 2021 35

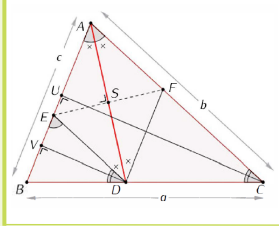




Foto:
Gebouw Rijkswaterstaat 'de Maas', Rotterdam.

Voor Dick,
die zowel van Rotterdam
als van driehoeken hield.
Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

ZO MAAR EEN EXAMENVRAAGSTUK VAN VROEGER
Euclides 97-2 oktober 2021

MEETKUNDE - EENVOUDIG, OF TOCH NIET
Euclides 97

RAKING, ÓÓK EEN KLASSIEK PROBLEEM
Euclides 97

IMO EN GVA
Euclides 97

Kort Vooraf

Tom Goris

Mijn eerste officiële 'daad' voor *Euclides* was het jaarlijkse redactiediner en daar kwam ik naast Dick te zitten. Het was zijn afscheidsdiner, dat een aantal keer was uitgesteld. Ik kende Dick uiteraard van naam en faam, maar hemzelf eigenlijk niet. Hij vertelde ontwapenend en innemend over zijn genezingsproces, en dat hij eindelijk weer 'wiskunde kon bedrijven'. En wat dat voor hem betekende (alles), maar dat eigenlijk ook weer wist te relativeren (niets).

Dick beloofde me dat hij weer voor een al dan niet regelmatige toestroom van artikelen zou gaan zorgen. Ik moest ze maar bewaren en zien in welke *Euclides* ze terecht konden komen. Als voormalig eindredacteur wist hij natuurlijk als geen ander hoe fijn het is om dit soort tijdloze 'wisselgeld-artikelen' op de plank te hebben liggen. Die beloofde toestroom is gebundeld in deze *Euclides*-special. Van Dicks zoon Pim begrepen we dat een van de laatste dingen die Dick deed het corrigeren van de drukproef van de 'bissectricestelling' was. Met een haviksoog voor detail. En heb je als docent wel eens ouders op de ouderavond gehad die zelf in het onderwijs zitten? Zo is het ongeveer als je Dick de drukproeven laat corrigeren... Maar met hetzelfde doel voor ogen: een mooie *Euclides* maken.

Er liggen nog vier bijdragen van Dick op de plank. Met toestemming van Pim publiceren we deze postuum. De eerste daarvan verschijnt in nummer 2, de overige drie in de loop van deze jaargang. Deze Dick Klingens special gaat dus nog groeien.

Dick is er niet meer. De afgelopen jaren was dit het onderschrift van zijn mails, daar heb ik niets aan toe te voegen:

```
URL: http://www.pandd.nl
Earth: N51.920 / E4.610
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
Alles blijft
Alles gaat voorbij
Alles blijft voorbijgaan
~~~~
Jules Deelder
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
```

NOG MAAR EENS DE TRISECTIE

Dick Klingens

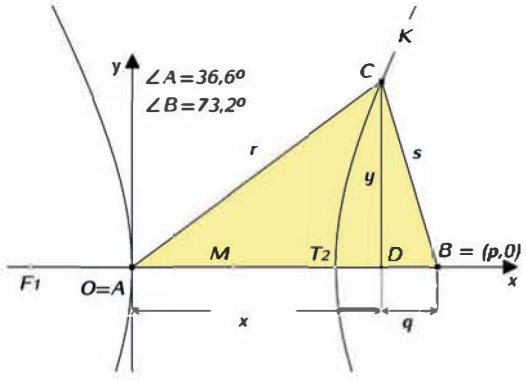
Dat de trisectie van een hoek niet te construeren is, dat weet iedereen wel. In *Geogebra* zit dan ook geen knop 'verdeel de hoek in drie gelijke delen'. Maar de constructie kan wél met de knoppen van *Geogebra*. Zonder de hoek op te meten, wel te verstaan. Dick Klingens laat zien hoe dat gaat en waarom de methode klopt.

Meetkundige plaats

We beginnen met een niet zo eenvoudig probleem uit de (analytische) meetkunde. Nadat we het hebben opgelost, zullen we hetgeen we hebben gevonden, gebruiken bij een 'oud probleem' (ach, de kop van dit artikel verraadt het al).

Opgave. In een gegeven driehoek ABC is hoek B twee keer zo groot als hoek A. Bepaal (de vergelijking van) de meetkundige plaats K van de punten C (bij veranderlijke hoek A).

Het is direct duidelijk dat hoek A kleiner moet zijn dan 60º. Hoek B is in dat geval immers kleiner dan 120º, en samen zijn ze nu kleiner dan 180º (en dat moet in een driehoek).
Voor de oplossing van het probleem plaatsen we de driehoek in een orthonormaal assenstelsel xOy (zie figuur 1), waarvan de x-as de drager is van het lijnstuk AB en waarvan het punt O samenvalt met het punt A. We stellen de coördinaten van het punt B gelijk aan $(p, 0)$ en die van het punt C gelijk aan (x, y).
En dan proberen we een relatie te vinden tussen die x en y (uiteraard is die afhankelijk van p), waarbij we kiezen voor een goniometrische aanpak.



figuur 1

We stellen de grootte van hoek A gelijk aan θ.
Verder is ook, met D als projectie van C op de x-as, zie figuur 1:

$OD = x$, $CD = y$, $DB = q$, $AC = r$ en $BC = s$ (en daarmee geldt $p = x + q$)

In driehoek ADC gelden nu onder meer de volgende relaties:

$$x = r \cdot \cos\theta,\ y = r \cdot \sin\theta$$

zodat in driehoek BDC geldt:

$$\angle B = 2\theta \Rightarrow \frac{y}{s} = \sin(2\theta) \Rightarrow s = \frac{y}{\sin(2\theta)} = \frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}$$

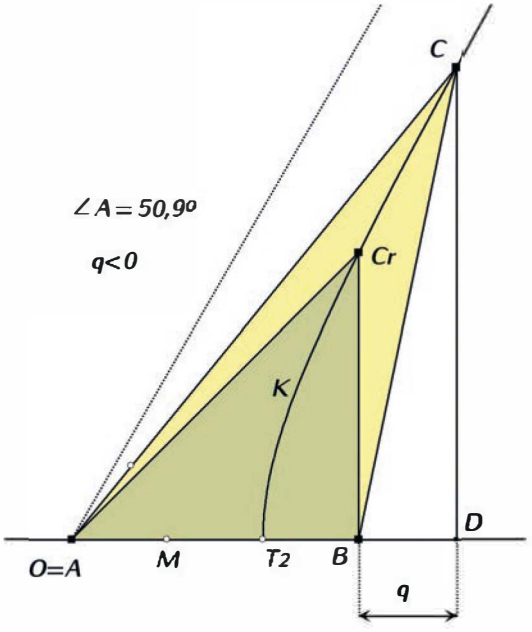
Volgens de stelling van Pythagoras geldt in die driehoek ook de relatie $q^2 = s^2 - y^2$.
En daaruit vinden we door substitutie en verdere uitwerking:

$$q^2 = \left(\frac{r\sin\theta}{\sin(2\theta)}\right)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2\sin^2\theta \cdot \left(\frac{1}{\sin^2(2\theta)} - 1\right)$$

$$= r^2\sin^2\theta \cdot \frac{1-\sin^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)} = r^2\sin^2\theta \cdot \frac{\cos^2(2\theta)}{\sin^2(2\theta)}$$

Hieruit volgt: $q = r\sin\theta \cdot \dfrac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$

Merk op dat q negatief is (gerekend moet worden) als $45^\circ < \theta < 60^\circ$; zie figuur 2.



figuur 2

Uit $p = x + q$ volgt dan na vermenigvuldiging met $2x = 2r \cdot \cos\theta$:

$$2px = 2x^2 + (2r\cos\theta)\cdot r\sin\theta\cdot\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$
$$= 2x^2 + r^2\cdot 2\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin(2\theta)}$$
$$= 2x^2 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$
$$= 2x^2 + x^2 - y^2$$

zodat het verband tussen de coördinaten (x, y) van het punt C is: $3x^2 - 2px - y^2 = 0$. En dit is een vergelijking van een hyperbool; zie weer figuur 1.
Omdat θ een scherpe hoek is, is x positief. De meetkundige plaats K van het punt C is dus alleen de *rechtertak* van de hyperbool. En van die tak is het snijpunt T_2 met de x-as uitgezonderd, omdat driehoek ABC dan ontaard is (punt C op de x-as en hoek A en hoek B beide gelijk aan 0°).
Eenvoudig is in te zien dat de hyperbool door $A = (0, 0)$ en door $T_2 = (\frac{2}{3}p, 0)$ gaat; beide punten zijn toppen van de hyperbool. De standaardvorm van K (met 'halve' assen $a=\frac{1}{3}p$ en $b=\frac{1}{\sqrt{3}}p$) is:

$$\frac{(x-\frac{1}{3}p)^2}{(\frac{1}{3}p)^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}}p)^2}=1 \quad (x>0)$$

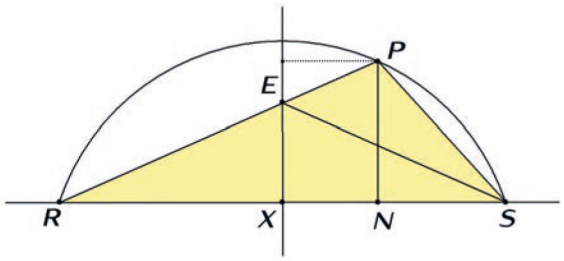
Daaruit zien we dat $M = (\frac{1}{3}p, 0)$ het middelpunt van de hyperbool is. Is c de halve brandpuntsafstand, dan is: $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{9}p^2 + \frac{1}{3}p^2 = \frac{4}{9}p^2$, waaruit volgt dat $c = \frac{2}{3}p$.
Wegens (zie opnieuw figuur 1) $MB = OB - OM = p - \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}p = c$, is het punt B een brandpunt van de hyperbool.
Voor de waarde van de zogenoemde excentriciteit ε van deze hyperbool vinden we:[1]

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2}{3}p}{\frac{1}{3}p} = 2$$

De *excentriciteit* van een kegelsnede is de verhouding van de afstand van een punt van de kegelsnede tot een brandpunt en de afstand van dat punt tot de bij dat brandpunt behorende richtlijn.

Bewijs van Pappos

We kunnen de in de vorige paragraaf gevonden hyperbool gebruiken om een hoek in drie gelijke delen te verdelen. Dit laatste staat in de wiskunde bekend onder de naam *trisectie*. De trisectie waarbij gebruik wordt gemaakt van een hyperbool, is voor het eerst beschreven door Pappos van Alexandrië (ca. 290 – ca. 350, Egypte). We laten hieronder een van de twee door Pappos gegeven bewijzen (en niet diens constructie) min of meer volgen.[2] En dan blijkt ook dat we het in de vorige paragraaf vermelde probleem (het vinden van de meetkundige plaats) heel wat eenvoudiger kunnen oplossen.
We nemen aan dat de cirkelboog RS door het punt P zo verdeeld is dat $\text{bg}(SP) = \frac{1}{3}\ \text{bg}(SPR)$, zie figuur 3.



figuur 3

Dan is:
$\angle RSP = 2 \cdot \angle SRP$ (omtrekshoeken op dezelfde cirkel).
De lijn SE is de bissectrice van hoek RSP, waarbij E op RP ligt. De lijnen EX en PN staan beide loodrecht op RS.
Dan is $RX = SX$ (driehoek ERS is gelijkbenig), waarbij X een vast punt is (het midden van RS).
Ook is $RS : PS = RE : PE$ (bissectricestelling) en $RE : PE = RX : NX$ (evenwijdigheid).
Zodat $RS : PS = RX : NX$. Maar $RS = 2 \cdot RX$, zodat $2 : PS = 1 : NX$. Met andere woorden: $PS = 2 \cdot NX$.
De lengte van het lijnstuk NX is gelijk aan de afstand van het punt P tot de loodlijn in X op de lijn RS.
Hieruit blijkt dat het punt P ligt op een hyperbool met brandpunt S en met XE als richtlijn. En de excentriciteit van de hyperbool is gelijk aan 2.

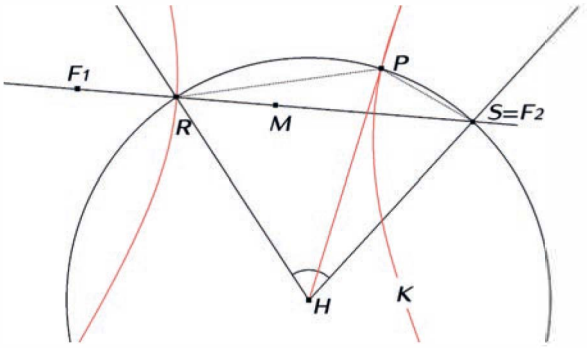
Constructie?

Het probleem van de trisectie van een hoek is – zoals opgemerkt – een 'oud probleem'. Het is één van de drie klassieke meetkundeproblemen, naast dat van de kwadratuur van de cirkel en van de verdubbeling van de (inhoud van de) kubus.
De hulpmiddelen voor het construeren van vlakke figuren in de oud-Griekse wiskunde waren de passer en het 'latje' (een blanco liniaal zonder onderverdeling). Bewezen is (in 1837 door Pierre Laurent Wantzel) dat trisectie met deze hulpmiddelen alléén niet mogelijk is. Laten we echter ook de mogelijkheid tot het 'tekenen van een hyperbool' als extra hulpmiddel toe, dan kunnen we de trisectie wél uitvoeren. Moderne dynamische meetkundeprogramma's, zoals bijvoorbeeld *GeoGebra,*[3] hebben deze mogelijkheid. In *GeoGebra* zit een standaardfunctie voor de 'constructie' van een hyperbool waarvan een punt en de twee brandpunten gegeven zijn, zie figuur 4.



figuur 4 Constructie van een hyperbool in *GeoGebra*

De constructiestappen voor een constructie binnen *GeoGebra* zijn, uitgaande van een gegeven hoek H, zie figuur 5:



figuur 5

- teken een cirkel met middelpunt H en willekeurige straal;
- bepaal de snijpunten R en S ervan met de benen van de hoek;
- (optioneel) teken de lijn RS;
- bepaal het punt M (het middelpunt van de hyperbool), dat het beeld van S is bij een vermenigvuldiging (homothetie) met centrum R en factor $\frac{1}{3}$;
- bepaal het punt F_1 als puntspiegelbeeld van M in het punt R;
- teken de hyperbool K met als brandpunten F_1 en $S = F_2$ en met punt R als punt *op* de hyperbool;
- bepaal P als snijpunt van de hyperbool met de cirkel(boog) RS;
- de lijn HP is dan een *trisectie* van de hoek H.

Opmerkingen

- De in de constructie gebruikte hyperbool heeft noodzakelijk 2 als excentriciteit. De lezer vergelijke figuur 5 met figuur 3.
- De tweede trisectrice van een hoek kan gevonden worden als spiegelbeeld van de eerste in de bissectrice van de hoek.

Het bewijs van de juistheid van bovenstaande constructie is eenvoudig. Een en ander volgt direct uit de eigenschappen van middelpuntshoeken van een cirkel. Immers, we hebben hierboven gezien dat het punt P (als punt van de hyperbool) de cirkelboog RPS verdeelt in stukken RP en PS die zich verhouden als 2 : 1.
De middelpuntshoeken RHP en PHS staan opvolgend op de deelbogen RP en PS van die boog.
Inderdaad is dan $\angle RHP = 2 \cdot \angle PHS$.

Noten

[1] Zie voor de afleiding van de formule voor de excentriciteit van een hyperbool: Klingens, D. (1999). *Kegelsneden en hun vergelijkingen*. Op: www.pandd.demon.nl/kever.htm#42

[2] Heath, T.L. (1981). *A History of Greek Mathematics. Deel 1*. New York: Dover Publications, p. 243. Hierin wordt verwezen naar boek IV van Pappos' *Synagoge*.

[3] Zie de website: *www.geogebra.org*

EEN MOOI VOORBEELD VAN MOOIE MEETKUNDE

Dick Klingens

Een combinatie van wiskunde B en D kan leiden tot iets wat je mooie meetkunde zou kunnen noemen. Aldus Dick Klingens, die ons graag meevoert in de schoonheid van bijzondere eigenschappen van kegelsneden met een middelpunt.

In het nieuwe eindexamenprogramma van wiskunde B en wiskunde D voor het vwo wordt bij meetkunde de nadruk gelegd op het gebruik van coördinaten (dit is in wat mindere mate het geval op het havo):

- De kandidaat kan eigenschappen en onderlinge ligging van punten, lijnen, cirkels en andere *geschikte figuren onderzoeken met* behulp van algebraïsche voorstellingen, kan in een gegeven of zelfgekozen coördinatenstelsel algebraïsche voorstellingen van figuren opstellen en kan algebraïsche voorstellingen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen. (B, domein E2)
- De kandidaat kan *analytische en synthetische methoden* en redeneringen toepassen op meetkundige probleemsituaties en daarmee eigenschappen bewijzen.[1] (D, domein D1)

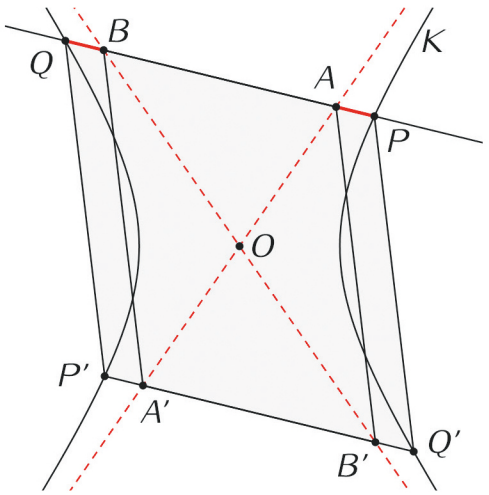
Een combinatie B & D, dat wil zeggen 'geschikte figuren onderzoeken met analytische en synthetische methoden', biedt de mogelijkheid in dit artikel wat breder en dieper in te gaan op bijzondere meetkundige eigenschappen. Dit leidt dan tot wat ik 'mooie meetkunde' zou willen noemen. Een mooi voorbeeld daarvan volgt hieronder.[2]

Hyperbool

We gaan in dit voorbeeld uit van een hyperbool. Weliswaar zijn kegelsneden alleen in het vwo-programma van wiskunde D genoemd, maar binnen de analyse komen toch ook hyperbolen voor.
Van de kegelsneden die een middelpunt hebben – cirkel, ellips, hyperbool – is eenvoudig via de middelpuntsvergelijking daarvan in een xOy-assenstelsel, vast te stellen dat ze *puntsymmetrisch* zijn ten opzichte van het punt O.

Vergelijking: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ voor de cirkel, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de ellips en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor de hyperbool). Puntsymmetrie: Als het punt $P = (x_0, y_0)$ op de kegelsnede ligt, dan ligt het *tegenpunt* P' van P met $P' = (-x_0, -y_0)$ eveneens op die kegelsnede. Dit geeft al direct een 'mooie' eigenschap van een hyperbool en diens asymptoten; deze laatste lijnen vormen op zich een puntsymmetrische figuur.

Stelling 1: Is PQ een koorde[3] van een hyperbool K en snijdt de lijn PQ de asymptoten van K in de punten A en B, dan is $PA = QB$; zie figuur 1.



figuur 1

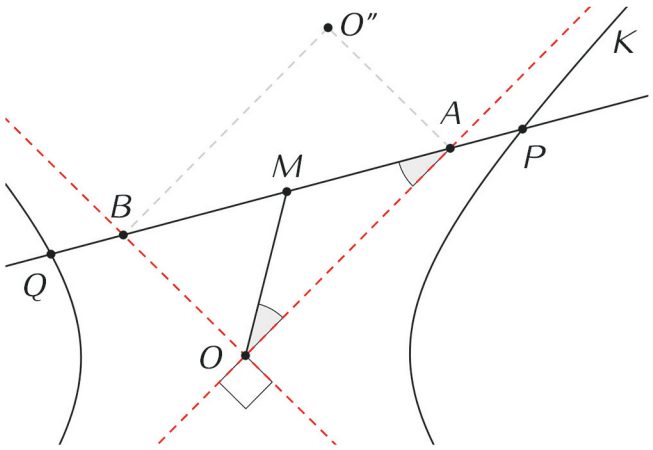
Bewijs: Zijn P', Q', A' en B' de tegenpunten van P, Q, A en B, dan is op grond van de puntsymmetrie ten opzichte van het punt O de vierhoek $PQP'Q'$ een parallellogram, waarbij A' en B' op de zijde $P'Q'$ liggen. Ook vierhoek $ABA'B'$ is een parallellogram. En daaruit volgt het gestelde direct.

Gevolg: De lijnstukken PQ en AB hebben hetzelfde midden.

Orthogonale hyperbool

We bekijken (het gevolg van) dat gevolg voor een *orthogonale* hyperbool K[4] met middelpunt O.

In figuur 2 snijdt de koorde PQ van K de asymptoten ook nu in de punten A en B. Driehoek OAB is dan rechthoekig in O, omdat de asymptoten de dragers zijn van de zijden OA en OB. Voor het midden M van het lijnstuk AB geldt dan: $OM = MA = MB$, immers, OM is deel van de diagonaal OO'' in de rechthoek $OAO''B$. Daarmee is driehoek OAM gelijkbenig, zodat daarin $\angle O = \angle A$.
We formuleren dit als:

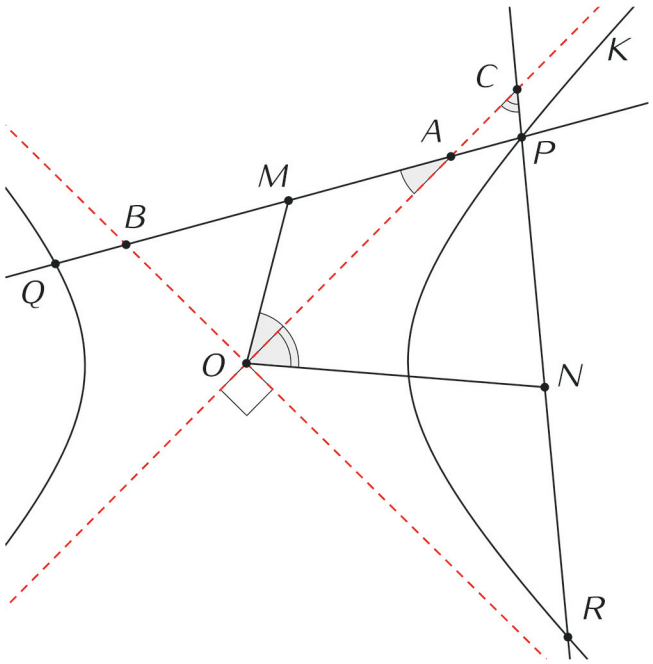


figuur 2

Stelling 2: Is PQ een koorde van een orthogonale hyperbool K (met middelpunt O) en is M het midden van PQ, dan is de hoek tussen het lijnstuk OM en een asymptoot van K gelijk aan de hoek tussen de drager van PQ en die asymptoot.

Opmerking: De hoek tussen twee lijnen is *per definitie* een niet-stompe hoek. Hetzelfde geldt voor de hoek tussen een lijnstuk en een lijn.

En met stelling 2 kijken we in figuur 3a naar *twee* koorden PQ en PR van K.



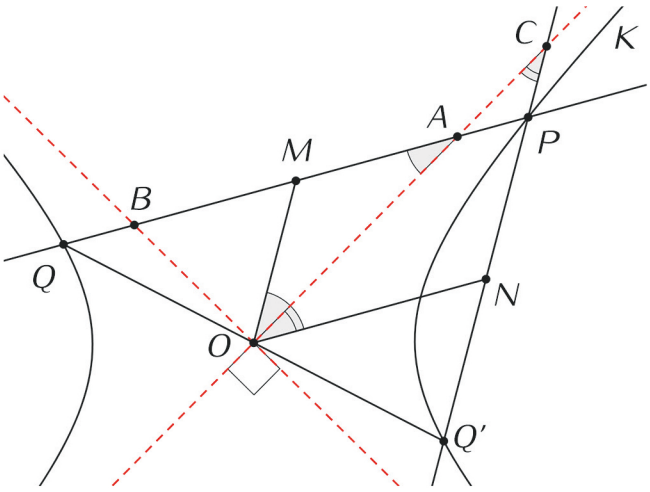
figuur 3a

Het punt N is het midden van koorde PR, die verder de asymptoot OA snijdt in het punt C.
Op grond van stelling 2 kunnen we nu concluderen dat de hoek tussen ON en OA gelijk is aan de hoek tussen PR en OA.

Hoek NPM is een buitenhoek van driehoek PCA, zodat bij die driehoek geldt:
buitenhoek $P = \angle C + \angle A = \angle AON + \angle OAM = \angle AON + \angle AOM = \angle NOM$
Zodat in vierhoek $ONPM$ geldt: $\angle O = \angle P$. Anders gezegd, en dit is toch ook mooi (en niet zo erg bekend):

Stelling 3: De hoek tussen de dragers van twee koorden van een orthogonale hyperbool die eenzelfde beginpunt hebben, is gelijk aan de hoek tussen de lijnstukken die het middelpunt van die hyperbool verbinden met de middens van die koorden.

Opmerking: Als in figuur 3a het punt R samenvalt met het tegenpunt Q' van Q, dan is vierhoek $ONPM$ een parallellogram en is de asymptoot OA de bissectrice van hoek O, zie figuur 3b.

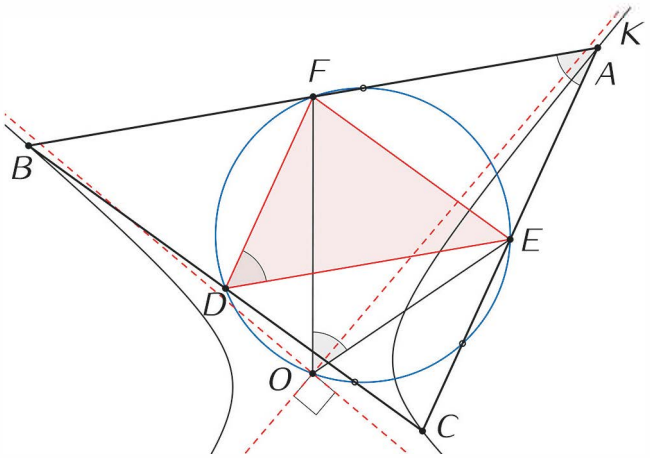


figuur 3b

Orthogonale hyperbool met ingeschreven driehoek

We bekijken vervolgens een driehoek waarvan de hoekpunten *op* een orthogonale hyperbool K liggen. We spreken dan van een *ingeschreven* driehoek van de hyperbool (of ook wel: de hyperbool is om de driehoek omschreven, een *omgeschreven* hyperbool).

Van de in K ingeschreven driehoek ABC is DEF de driehoek die bepaald is door de middens van de zijden, zie figuur 4.



figuur 4

De omcirkel[5] van driehoek DEF is de zogeheten *negenpuntscirkel* of *cirkel van Feuerbach*[6] van driehoek ABC. De negen in de naam van de cirkel bedoelde punten die op die cirkel liggen, zijn:

- de middens van de zijden van de driehoek;
- de voetpunten van de hoogtelijnen van de driehoek (geen namen in figuur 4);
- de middens van de 'bovenste' stukken van de hoogtelijnen (niet getekend in figuur 4).[2]

En de in stelling 4 te noemen mooie eigenschap – een *tiende* punt op de negenpuntscirkel – is nu eenvoudig te bewijzen.

Stelling 4: Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het middelpunt van die hyperbool op de negenpuntscirkel van die driehoek.

Bewijs: Zie weer figuur 4. Hierin is K dus een omgeschreven orthogonale hyperbool van driehoek ABC. Het middelpunt van K is het punt O.

We passen stelling 3 toe op de koorden AB en AC van K. De lijnstukken OF en OE verbinden het middelpunt van de hyperbool met de middens van die koorden, zodat: $\angle FOE = \angle CAB = \angle EAF$.
Maar vierhoek $DEAF$ is een parallellogram, zodat $\angle EDF = \angle EAF$. Gevolg: $\angle FOE = \angle EDF$.
Volgens de stelling van de omtrekshoek ligt dan ook het punt O op de negenpuntscirkel.

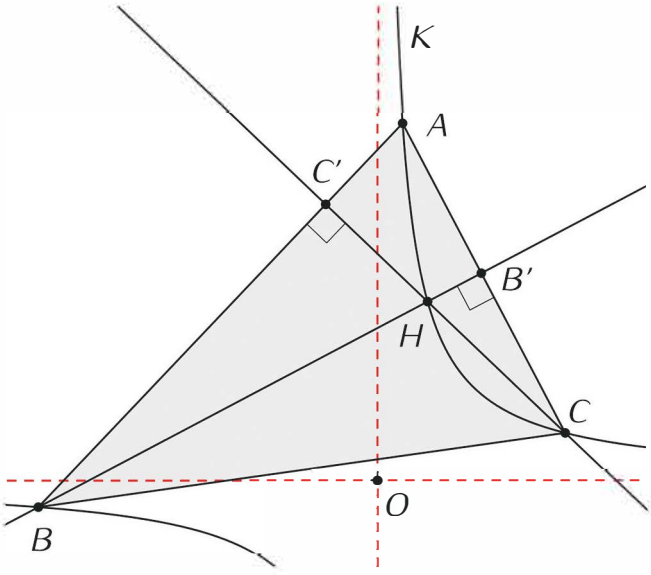
Hoogtepunt

Een eveneens mooie eigenschap van het hoogtepunt van een driehoek die is ingeschreven in een orthogonale hyperbool, staat in de volgende stelling.

Stelling 5: Is een driehoek ingeschreven in een orthogonale hyperbool, dan ligt het hoogtepunt van die driehoek op die hyperbool.

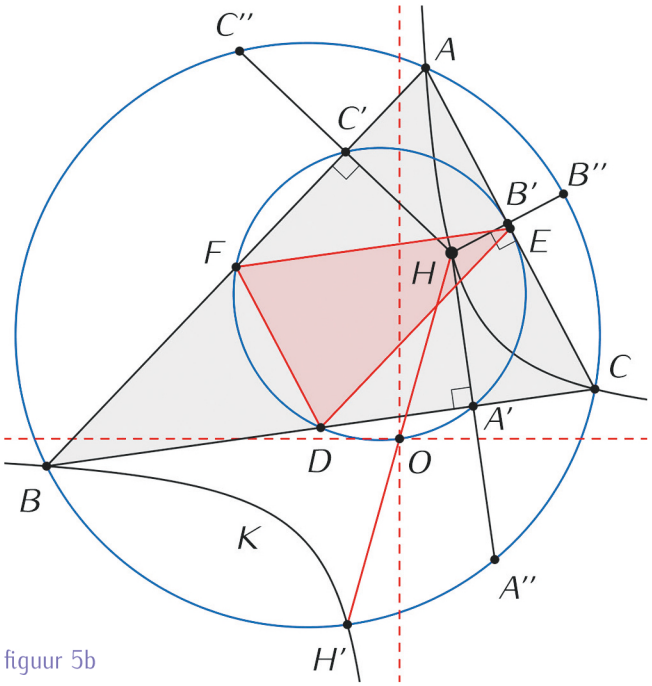
Bij het bewijs van stelling 5 gebruiken we coördinaten.[7] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs geweld aan te doen, kiezen we de asymptoten van de orthogonale hyperbool K langs de coördinaatsassen van een rechthoekig assenstelsel[2] xOy. En, op grond van gelijkvormigheid, kunnen we voor de vergelijking van K uitgaan van: $xy = 1$ of $y = \frac{1}{x}$.

Bewijs van stelling 5: Zie figuur 5a waarin $A = (a, 1/a)$, $B = (b, 1/b)$, $C = (1, 1/c)$ drie verschillende punten zijn van K (met $a, b, c \neq 0$ en onder meer $b \neq c$).
Voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de lijnen AB en AC hebben we dan:[8]
rico(AB) = $-1/ab$
rico(AC) = $-1/ac$
Vergelijkingen van de hoogtelijnen van driehoek ABC uit B en C zijn dan:
BB' : $y - 1/b = ac(x - b)$ of $by - 1 = abc(x - b)$
CC' : $y - 1/c = ab(x - c)$ of $cy - 1 = abc(x - c)$



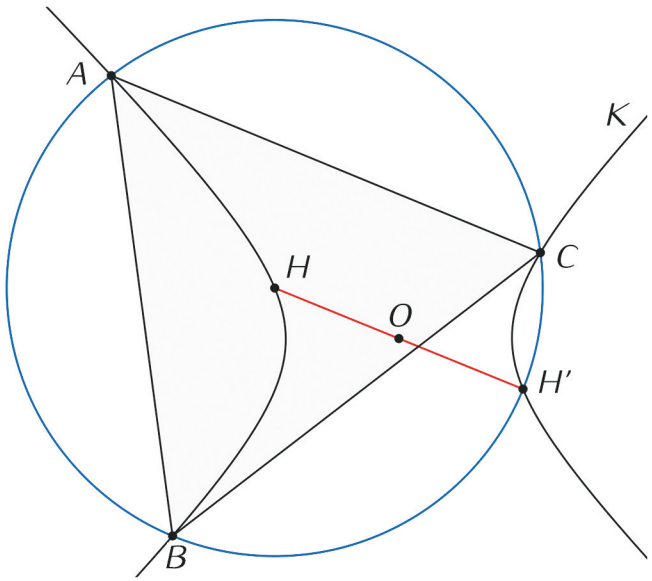
figuur 5a

Uit deze vergelijkingen volgt dan, na enige berekening, voor de coördinaten (x_H, y_H) van het snijpunt H van die lijnen (het hoogtepunt): $x_H = -1/abc$ en $y_H = -abc$.
De coördinaten van het punt H voldoen daarmee aan de vergelijking van de hyperbool. Met andere woorden: het hoogtepunt H van de driehoek ABC ligt op K.



figuur 5b

Gevolg: Zie figuur 5b. Volgens de, voorafgaand aan stelling 4, genoemde negenpuntseigenschappen beeldt de vermenigvuldiging V_H (centrum H, factor ½) de omcirkel van driehoek ABC – via de punten A'', B'', C'' op die omcirkel – af op de negenpuntscirkel, en dat is de omcirkel van driehoek $A'B'C'$ (≡ driehoek DEF).[2]
Het vierde snijpunt H' van de omcirkel en de hyperbool heeft daarmee dus het punt O als V_H-beeld (zie ook stelling 4).



figuur 6

Ook mooi

We gaan nu uit van een orthogonale hyperbool (middelpunt O), zie figuur 6. Daarop kiezen we een punt H. Vervolgens bepalen we de snijpunten A, B, C van de cirkel met middelpunt H die door het tegenpunt H' van H gaat. *Die driehoek is gelijkzijdig*! Waarom? Het punt H is het hoogtepunt van driehoek ABC, maar het is ook het middelpunt van de omgeschreven cirkel van die driehoek. Waar dat uit blijkt? Uit 'al het moois' dat in de voorgaande paragrafen staat.

Noten

[1] Examenprogramma wiskunde B vanaf 2018
Examenprogramma wiskunde D vanaf 2018
Zie voor beide: *http://www.examenblad.nl*

[2] Bij dit artikel hoort een appendix waarin enkele (basis)begrippen die in dit artikel worden gebruikt, nader zijn toegelicht. Zie daarvoor: *http://vakbladeuclides.nl/932klingens*

[3] Onder een *koorde* van een kegelsnede wordt verstaan het verbindingslijnstuk tussen twee punten van die kegelsnede.

[4] Een hyperbool heet *orthogonaal* (ook wel *gelijkzijdig*) als de asymptoten van die hyperbool loodrecht op elkaar staan.

[5] De *omcirkel* van een driehoek is de omgeschreven cirkel van die driehoek.

[6] Naar Karl Wilhelm von Feuerbach (1800 - 1834, Duitsland). Hij bewees als eerste een aantal eigenschappen van de naar hem genoemde cirkel, onder meer dat die cirkel raakt aan de ingeschreven en aan de aangeschreven cirkels van de driehoek.

[7] In de appendix (zie noot 2) staat een synthetisch bewijs.

[8] Met de rekenkundige uitdrukking $1/xy$ bedoelen we in hetgeen volgt $1/(xy)$.

vakbladeuclides.nl/932klingens
Op de site is een uitgebreide appendix bij dit artikel te vinden.

EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN

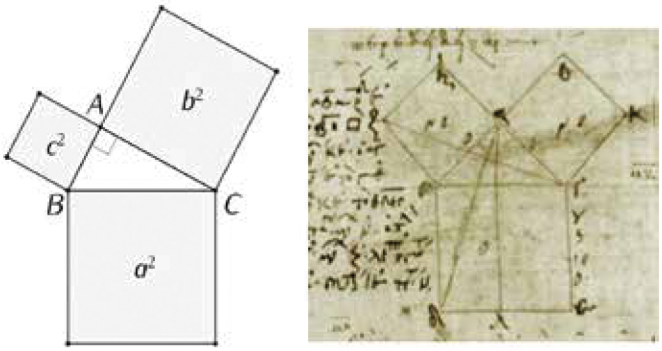
Dick Klingens

Vierkanten plaatsen op twee zijden van een driehoek. Daarmee kun je de stelling van Pythagoras aanschouwelijk maken, maar het levert nog veel meer boeiende stellingen op. Dick Klingens neemt ons mee naar Frankrijk en Rusland voor een aantal mooie voorbeelden.

Het houdt bij ons op bij...

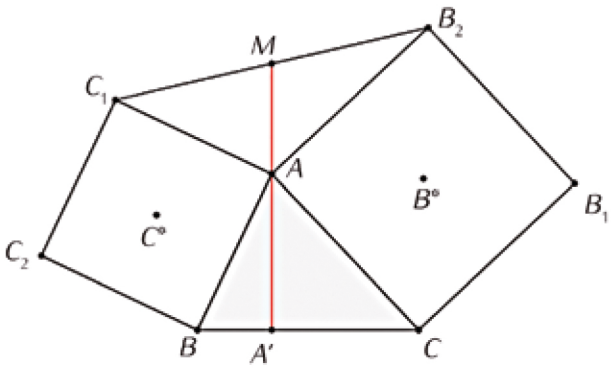
Natuurlijk, met vierkanten geplaatst op de zijden van een rechthoekige driehoek kun je de stelling van Pythagoras formuleren als:[1, 2]

De som van de oppervlaktes van de vierkanten op de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde van die driehoek.



figuur 1a (links) en 1b (rechts)

In het meetkundeonderwijs in het vo (zeker in de onderbouw) houdt het gebruik van vierkanten bij driehoeken daarmee wel zo'n beetje op. Maar dat hoeft in dit tijdschrift natuurlijk niet.



figuur 2

Neem een willekeurige driehoek ABC en beschrijf daarop uitwendig vierkanten op twee van de zijden. In figuur 2 zijn dat het vierkant CB_1B_2A met middelpunt B^* en het vierkant BAC_1C_2 met middelpunt C^*. Het punt M is het midden van het lijnstuk B_2C_1. Toon aan dat MA (in A') loodrecht staat op BC.

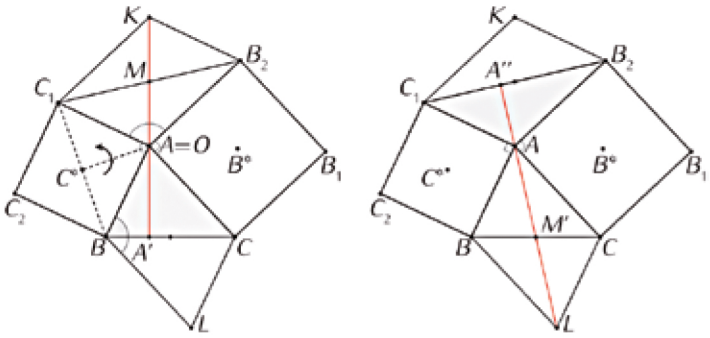
Je kunt hier natuurlijk direct verder lezen – dat bewijs komt er zeker aan. Maar je kunt ook even wachten, en dan eerst zelf bedenken hoe dat bewijs er uit zou kunnen zien...

Wellicht is tijdens dat wachten ook de gedachte opgekomen om het een met het ander om te draaien: ga uit van de hoogtelijn AA' en bewijs dat deze door het midden M van B_2C_1 gaat.

Het ingevoegd parallellogram

Hoe ook gedraaid, met 'hoeken jagen' lukte het mij niet snel genoeg. En over draaien gesproken. Ik hou het hier op een rotatie R, en wel die met centrum C^* over een hoek van 90°, waarbij ik gebruik maak van de volgende (zeker wel) bekende eigenschap.

Stelling1. Is l' het beeld van een rechte lijn l bij een rotatie over een hoek van 90°, dan staan l en l' loodrecht op elkaar.



figuur 3a (links) en 3b (rechts)

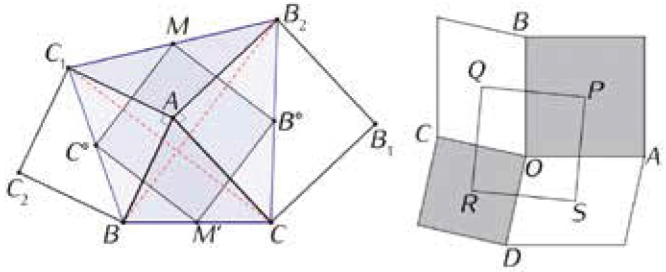
Dan is in ieder geval, zie figuur 3a, $R(A) = C_1$, $R(B) = A$, zodat R(lijnstuk AB) = lijnstuk C_1A.
Maar komen we hiermee dan verder? Zoveel andere lijnstukken zijn er niet waarvan direct duidelijk is dat ze onder R origineel en beeld zijn.
Voor het bewijs teken ik er twee driehoeken zó bij, dat $BLCA$ en AB_2KC_1 parallellogrammen zijn. Ik noem AB_2KC_1 het ingevoegde parallellogram (ingevoegd tussen beide vierkanten). Daarvan is trouwens AK een diagonaal.

We kunnen de beoogde eigenschap dan als volgt formuleren.

Stelling 2. Als op twee zijden van een driehoek vierkanten zijn geplaatst, dan staat de lijn die door het gemeenschappelijke hoekpunt gaat en door het middelpunt van het ingevoegde parallellogram, loodrecht op de overstaande zijde van dat hoekpunt.

Opmerking. Als we in figuur 3b naar driehoek AB_2C_1 kijken, dan zijn op de zijden AB_2 en AC_1 daarvan vierkanten geplaatst. $ABLC$ is hier het ingevoegde parallellogram. En volgens stelling 2 staat de lijn AM' (M' is het midden van BC) in A'' loodrecht op B_2C_1.

Bewijs van stelling 2. Nu is, en we zijn weer terug in figuur 3a: $\angle ABL = \angle C_1AB_2$, omdat beide de hoek A als supplement hebben. En omdat $AB_2 = AC = BL$ is, is direct duidelijk dat $R(BL) = AB_2$. En dan is $R(BLCA) = AB_2KC_1$, zodat ook $R(BC) = AK$.
Met andere woorden, conform stelling 1: de drager van AK – en dat is de lijn AM – staat loodrecht op BC. En daarmee is stelling 2 bewezen.



figuur 4a (links) en 4b (rechts)

Gevolg. $BC = AK$ en $AL = C_1B_2$. Maar er is meer!
Zie daartoe figuur 4a. De punten M', B^*, M, C^* zijn de middens van de zijden van vierhoek BCB_2C_1.
Daarmee is $M'B^*MC^*$ een parallellogram (van Varignon [3]). Als we roteren met A als centrum en weer over een hoek van 90°, dan is: $R(C_1) = B$, $R(C) = B_2$, zodat $R(C_1C) = BB_2$. En dan staat C_1C loodrecht op BB_2, en ook is $C_1C = BB_2$.
Omdat dit de diagonalen zijn van de vierhoek BCB_2C_1, is het Varignon-parallellogram een vierkant (zo is er toch nog een derde vierkant).

Opmerking. In de appendix [1] staan nog twee andere bewijzen van stelling 2.

Maar in Frankrijk

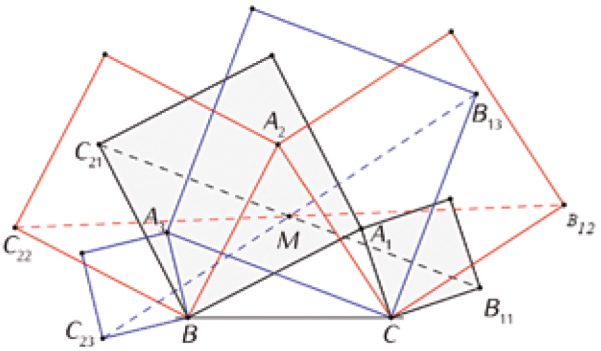
Ik trof de volgende opgave (uit het jaar 2003) aan, [4] zie figuur 4b:

Exercice 4
Beschouw twee vierkanten (in grijs) met een gemeenschappelijke hoekpunt en de constructie van twee parallellogrammen (in wit). Laat zien dat de middelpunten van vierkanten en parallellogrammen de hoekpunten van een vierkant zijn. Neem daartoe een assenstelsel met oorsprong O en ken daarbij complexe getallen toe aan de punten A, B, C en D.

Ik laat het aan jezelf over dit probleempje *zonder* complexe getallen op te lossen.
In de appendix [1] staat de originele tekst van de *exercice* en er is, naast een oplossing *met* complexe getallen, ook een analytische oplossing in opgenomen.

Toch ook bij ons

We bekijken opnieuw vierkanten op twee zijden van een driehoek, maar nu enigszins dynamisch; zie figuur 5 waarin drie momentopnames weergegeven zijn.

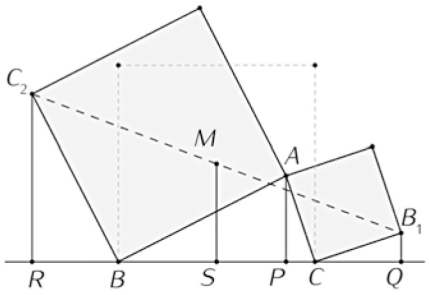


figuur 5

We zien in figuur 5 driehoeken A_kBC met $k = 1, 2, 3$. De lijnstukken $B_{1k}C_{2k}$ hebben blijkbaar alle hetzelfde midden, het punt M. De plaats van M hangt niet af van de plaats van het punt A. Deze eigenschap wordt in de (buitenlandse) literatuur meestal de stelling van Bottema [5] genoemd.

Stelling 3 (stelling van Bottema). Worden op de zijden AB en AC van driehoek ABC vierkanten beschreven en zijn B_1 en C_2 de hoekpunten daarvan tegenover A, dan is het midden M van het lijnstuk B_1C_2 onafhankelijk van de ligging van het punt A.

Bewijs. Zie figuur 6. De punten P, Q, R, S zijn de projecties van A, B_1, C_2 en M op de lijn BC. Eenvoudig is in te zien dat de driehoeken ABP en BC_2R congruent zijn (ZHH). Hetzelfde geldt voor de driehoeken APC en CQB_1. Uit die congruenties volgt dan: $C_2R = BP$ en $B_1Q = CP$. In het rechthoekig trapezium QB_1C_2R is het lijnstuk MS de middenparallel, zodat: $MS = \frac{1}{2}(C_2R + B_1Q)$.
En dan is ook $MS = \frac{1}{2}(BP + CP) = \frac{1}{2}BC$
Waaruit blijkt dat de ligging van M alleen afhangt van de ligging van de punten B en C (M is het middelpunt van het vierkant op het lijnstuk BC).



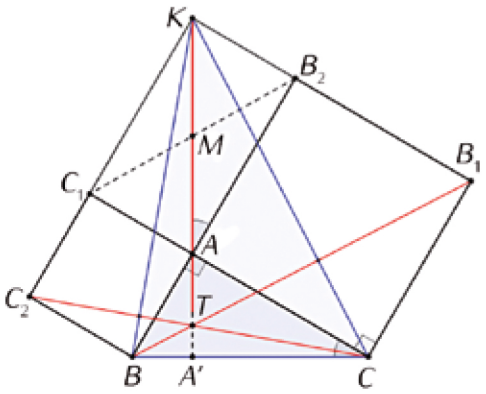
figuur 6

Intermezzo?

Voordat naar een rechthoekige driehoek wordt overgestapt, kun je in de appendix [1] (paragraaf 3) nog naar twee zelf op te lossen opgaven kijken.

In een rechthoekige driehoek

En nu toch maar naar een rechthoekige driehoek...



figuur 7

Ook hierbij zijn op de zijden van de in A rechthoekige driehoek ABC vierkanten geplaatst. Het ingevoegde parallellogram, nu een rechthoek, is eveneens weergegeven; en dit alles met de gebruikelijke naamgeving van de punten. We zullen bewijzen:

Stelling 4. In de configuratie van figuur 7 geldt:
a. de lijnen KA, BB_1 en CC_2 zijn concurrent;
b. deze lijnen zijn de hoogtelijnen van driehoek KBC.

Opmerking. Deze eigenschappen gelden overigens óók in een niet-rechthoekige driehoek. Als je jezelf de gelegenheid wilt bieden even na te denken over het bewijs van deze eigenschappen, dan is nú het moment...
Bewijs. Bij het punt A zijn de hoeken KAB_2 en CAA' elkaars complement. In driehoek $A'CA$ is dat het geval met de hoeken CAA' en ACA'. Daardoor is: $\angle KAB_2 = \angle ACA'$. Zodat wegens $AK = CB$ (zie het gevolg van stelling 2) blijkt dat de driehoeken ACK en CB_1B congruent zijn (ZHZ). Van deze driehoeken staan twee paar overeenkomstige zijden loodrecht op elkaar.[7] En dan is dat ook met het derde paar, te weten KC en BB_1, het geval. BB_1 is dus hoogtelijn van driehoek KBC. En analoog is CC_2 dat ook. En van KA' wisten we al eerder dat het een hoogtelijn is. En dat de hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn...

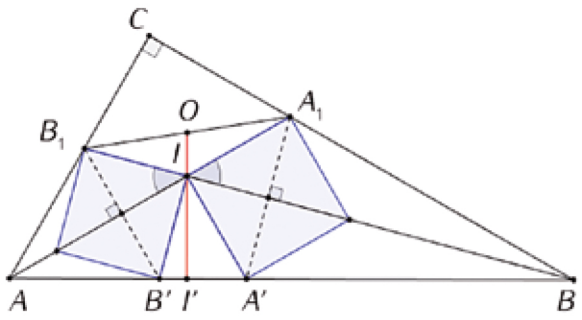
Opmerking. In de appendix [1] (paragraaf 4a) staat een ander bewijs van onderdeel a van stelling 4.

En ook in Rusland

De aanleiding voor het schrijven van dit artikel is gelegen in het feit dat ik, alweer een tijdje geleden, tegen het volgende probleem aanliep.[8] Van het een kwam zo het ander:

D. Shvetsov (8 punten): Bisectors AA_1 and BB_1 of a right triangle ABC ($\angle C = 90^o$) meet at a point I. Let O be the circumcenter of the triangle CA_1B_1. Prove that $OI \perp AB$.

Geformuleerd als stelling – en ik noem die maar naar de opsteller van het vraagstuk, zie figuur 8:



figuur 8

Stelling 5 (stelling van Shvetsov). Zijn in een in C rechthoekige driehoek ABC de punten A_1 en B_1 de voetpunten van de elkaar in I snijdende bissectrices van de hoeken A en B en is O het midden van A_1B_1, dan staat OI loodrecht op AB.
Bewijs. Een oplossing kan worden gevonden door toepassing van hetgeen hierboven staat. Maar, zijn in figuur 8

de vierhoeken op hun diagonalen A_1A' en B_1B' inderdaad vierkanten?
Uit 'hoeken jagen' rond het punt I blijkt in ieder geval dat $\angle BIA_1 = \angle AIB_1 = 45^\circ$.
En omdat AA_1 en BB_1 bissectrices zijn, liggen de spiegelbeelden van A_1 en B_1 in die bissectrices op AB. Dan zijn de driehoeken $IA'A_1$ en $IB'B_1$ gelijkbenig en rechthoekig. Waarmee bovenstaande vraag beantwoord is. Ja, en dan zijn de 8 te behalen punten voor Shvetsovs vraagstuk binnen. We hebben immers vaak genoeg gezien dat OI (dit keer in I') loodrecht staat op AB.

Opmerking. In de appendix [1] staat een tweede bewijs van stelling 5. Daarin wordt gebruik gemaakt van enkele elementaire (nou ja...) eigenschappen van de ingeschreven cirkel van een driehoek.


vakbladeuclides.nl/936klingens

Noten

[1] Bij dit artikel is ook een appendix beschikbaar. Zie: *http://vakbladeuclides.nl/936klingens*

[2] En dan is het uit de figuren 1a en 1b ook duidelijk dat $a^2 + b^2$ niet altijd gelijk is aan c^2...
In figuur 1b staat Nasr al-Din al-Tusi's (1201-1274) manuscript van Euclides' *Elementen* met de stelling van Pythagoras (Boek I, propositie 47).
Bron Bibliotheek Vaticaan: *http://www.ibiblio.org*
Zie de appendix[1] (paragraaf 6) voor een 'oud' bewijs van de stelling van Pythagoras.

[3] Zie ook: Klingens, D. (2001). *De stelling van Varignon, en meer.* Op de website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/vierh/varignon.htm*

[4] EPF (École d'ingénieur-e-s, Sceaux, Frankrijk): *Concours terminale 1999-2008.*

[5] Naar Oene Bottema (1901-1992), hoogleraar zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool Delft (tegenwoordig TU Delft) van 1941 tot 1971. Een 'echte' dynamische illustratie is te vinden via de volgende link naar de website van Alexander Bogomolny:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/VisualBottema.shtml
Op die website staat ook het hier gegeven bewijs van de stelling.
Bottema illustreert 'zijn stelling' [6] (ongeveer) als volgt. Iemand heeft een schat begraven op een plek die op gecompliceerde wijze kan worden bepaald. Hij gaat uit van drie gemerkte bomen A, B en C en denkt zich CA in negatieve richting om C gedraaid tot CB_1 en BA in positieve richting om B tot BC_2. Hij kiest het midden M van B_1C_2 als bewuste plaats. Als hij later terugkomt is boom A verdwenen. De eerste poging tot opgraving heeft echter reeds succes.

[6] Bottema, O. (1959). *Verscheidenheid XXXVIII.* In: *Verscheidenheden.* Groningen: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren / Wolters Noordhoff (1978), p. 51.

[7] Van deze eigenschap staat in de appendix [1] (paragraaf 4b) een summier bewijs.

[8] Bron: *VI Geometrical Olympiad in honour of I.F. Sharygin*, 2010.
Via: *http://geometry.ru/olimp/2010.php*

SCHERP, RECHT, STOMP...

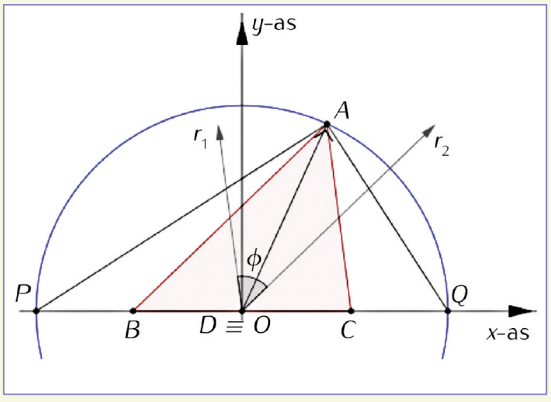
Dick Klingens

De voorloper van *Euclides* uit 1924 inspireerde Dick Klingens tot het componeren van een WDA. Dick kwam een stelling over zwaartelijnen tegen en bewijst die zoals we dat nu kunnen doen.

Op bladzijde 101 van wat nu te boek staat als de derde *Euclides*[1] ooit, lees ik – bij toeval, want ik was op zoek naar iets anders – in het artikel 'Loodrechte stand van lijn en vlak' van de hand van ir. D.J. Kruijtbosch de volgende zinsnede:

behandeld, luidend: „Naarmate in △ ABC de zwaartelijn uit A grooter, gelijk of kleiner is dan de helft van BC, is de hoek A scherp, recht of stomp''. Om deze stellingen te bewijzen zijn

Het is een uitspraak die ik zeker onderschrijf (hoewel, ik zou het woordje 'naarmate' niet gebruiken). Binnen het huidige meetkundeonderwijs, in onder- en bovenbouw van het voortgezet onderwijs, zal de vraag een bewijs te geven van die uitspraak, niet meer gesteld worden, denk ik.
In het kader van Wiskundige Denk Activiteiten (WDA's) geef ik hier toch de volgende opdracht:
Geef een synthetisch bewijs van bovenstaande uitspraak.
Maar eerst laat ik een analytisch bewijs volgen, want dat ligt, in ieder geval in de bovenbouw, meer voor de hand.
Ik kies een xOy-assenstelsel waarvan de x-as langs de zijde BC van de driehoek valt, waarbij $O \equiv D$ (D is het midden van de zijde BC). Dan kies ik, zie figuur 1, $A = (p, q)$ in het eerste kwadrant – dat doet de algemene geldigheid van hetgeen volgt geen geweld aan – en $B = (-b, 0)$, met $b > 0$, zodat $C = (b, 0)$.



figuur 1

(1a) Ik veronderstel allereerst dat $OA > \frac{1}{2}BC = OC$. Met $OA = \sqrt{(p^2 + q^2)} = r$ ligt het voor de hand ook de cirkel met middelpunt O en straal r in de beschouwing te betrekken.
Omdat $b = OC < OA = r$ is, snijdt deze cirkel de x-as in de punten $P = (-r, 0)$ en $Q = (r, 0)$, waarbij $\angle PAQ = 90^\circ$ (*Thales-cirkel*) en waarbij de punten B en C op het lijnstuk PQ liggen (*beide* binnen de cirkel). Dus: hoek BAC is een scherpe hoek.
(2a) Als $OA = OC$ is, dan vallen de punten P, Q samen met de punten B, C, zodat in dit geval hoek $BAC = \angle PAQ = 90^\circ$; zie onderdeel (1a).
(3a) En als $OA < OC$ is, dan rest dat hoek BAC stomp is (*quartum non datur*).
Maar, ga ik bij het bewijs in (1a) eigenlijk niet te veel af op wat ik *zie* in figuur 1? Moet ik niet *met een berekening* aantonen dat hoek BAC een scherpe hoek is? Welnu.

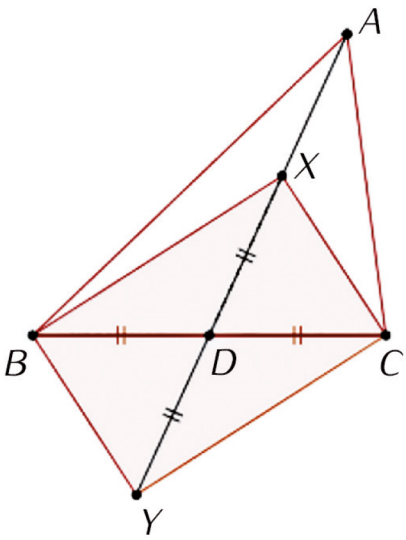
Voor de richtingsvectoren r_1 en r_2 van AC en AB vind ik:

$$r_1 = r_{AC} = \begin{pmatrix} p-b \\ q \end{pmatrix}, \quad r_2 = r_{AB} = \begin{pmatrix} p+b \\ q \end{pmatrix}.$$

Met $\varphi = \angle(r_1, r_2)$ is dan:

$$\cos\phi = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{p^2 - b^2 + q^2}{|r_1| \cdot |r_2|} = \frac{r^2 - b^2}{|r_1| \cdot |r_2|}.$$

Omdat in onderdeel (1a) $r > b$ is, is $\cos\varphi > 0$.
En daarmee is φ een scherpe hoek, en hoek A dus ook.
Ik vind dat ik bij een synthetisch bewijs *geen* gebruik mag maken van een cirkel (maar waarom eigenlijk?).
Zie daarom nu figuur 2.



figuur 2

(1s) Als $AD > BD$ is, is er een punt X op het lijnstuk DA met $DX = DB = DC$. En dan is in driehoek BXC de zwaartelijn uit X *gelijk* aan de helft van BC.
Met het punt Y op het verlengde van XD zó dat $XD = DY$ is, is vierhoek $XBYC$ een rechthoek; immers, de diagonalen XY en BC hebben beide het punt D als midden en hebben dezelfde lengte. Maar dan is $\angle BXC = 90^o$.
De som van de hoeken in de (niet-convexe) vierhoek $ABXC$ is gelijk aan 360^o. Dan is in die vierhoek: $\angle A + \angle B + \angle C = 360^o - 270^o = 90^o$. Hoek A, ook die van driehoek ABC, is dan zeker een scherpe hoek.

(2s) Als $AD = BD$ is, dan valt het in onderdeel (1s) geïntroduceerde punt X samen met het punt A. In dit geval is $\angle BXC = 90^o = \angle BAC$.

(3s) En is $AD < BD$, dan kan het niet anders dan dat hoek A stomp is.

Aan de opdracht voldaan hebbend, stel ik toch nog wat vragen in het kader van deze WDA.
Is er bij (1s) echt geen gebruik gemaakt van een cirkel?
Is er in het bovenstaande gebruik gemaakt van het feit dat in de figuren 1 en 2 hoek A als een scherpe hoek is weergegeven?
Zo ja, waar is dat het geval? En verloopt het bewijs anders als hoek A als stomp zou zijn weergegeven?

Noot

[1] Kruytbosch, D.J. (1924). Loodrechte stand van lijn en vlak. *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan Onderwijsbelangen. 1*(1), pp. 101-108. Groningen: P. Noordhoff.

Zie het digitale archief van *Euclides: https://archief.vakbladeuclides.nl/jaargang_001.html.*

MET EN/OF ZONDER COÖRDINATEN_

Dick Klingens

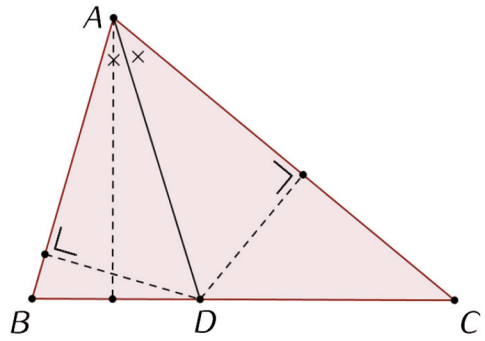
Dick Klingens duikt in het verleden, maar blijft ook in het heden, niet alleen bij het beantwoorden van een vraag van een WisFaq-bezoeker.

Zo maar een vraag?

In februari 2017 kwam op *WisFaq*[1] de volgende vraag binnen:
Hoe bewijs ik dat de bissectrice van een hoek van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de aanliggende zijden? Deze vraag staat al op WisFaq maar ik vind het antwoord niet zonder gelijkvormigheid toe te passen. Alvast bedankt, Dries.

Het antwoord dat ik gaf, als *WisFaq*-beantwoorder, staat hieronder.

Dag Dries,
Uitgaande van een driehoek ABC waarvan de bissectrice van hoek A de zijde BC snijdt in D, kun je in ieder geval bewijzen dat de oppervlaktes van de driehoeken ABD en ACD zich verhouden als BD : CD (hoe?).
Het punt D heeft gelijke afstanden tot AB en AC (waarom?).
En dan kun je nog een keer de verhouding van de oppervlaktes van de reeds bekeken driehoeken uitdrukken in twee (andere) zijden van die driehoek.
En dan rest jou het netjes formuleren van het bovenstaande en het volledig maken van het bewijs.



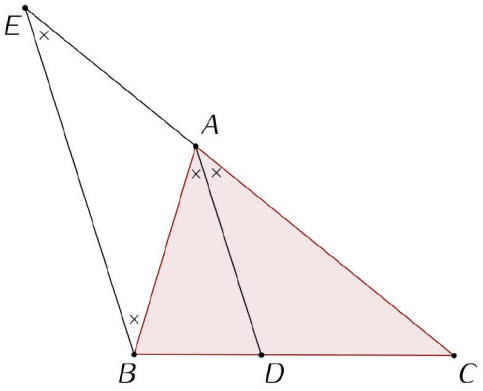
figuur 1

Uiteraard moest er voor de vragensteller ook nog wat te doen blijven, vandaar de twee vragen binnen het antwoord.

Het bewijs dat de oppervlaktes (aangeven met ϕ) van de deeldriehoeken zich verhouden als $BD : CD$ is natuurlijk standaard en elementair, zie figuur 1:
$\phi(ABD) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BD$
$\phi(ACD) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot CD$
waarin h de lengte is van de hoogtelijn uit A op de zijde BC.
Uiteraard is afst(D, AB) = afst$(D, BC) = d$, omdat D een punt is van een bissectrice, en zo'n punt heeft gelijke afstanden tot de benen van de betreffende hoek (het is de meetkundige plaats van alle punten met die eigenschap).
En zo is ook:
$\phi(ABD) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AB$
$\phi(ACD) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AC$
En dan is direct duidelijk dat $BD : CD = AB : AC$.

Even terug in de tijd

Waarom de vragensteller zo graag een bewijs wilde zonder gelijkvormigheid, is mij niet duidelijk, maar het zou om didactische redenen kunnen zijn (student aan een lerarenopleiding?). Toen ik wat later mijn antwoord nog eens terug las, vroeg ik me af welk bewijs ik zelf voor het eerst zag... Het zal in 1958 geweest zijn, in de tweede klas van de middelbare school.



figuur 2

Ik vond het bewijs terug in een boek van Van der Neut en Holwerda[2], en dat bewijsidee gebruik ik, zie figuur 2.
Op het verlengde van CA ligt het punt E zó dat

$BE \parallel AD$. Daarmee is dan:
$\angle ABE = \angle BAD = \angle DAC = \angle AEB$. Waaruit blijkt dat driehoek AEB gelijkbenig is, met $AB = AE$.
Uit de evenredigheid op de lijnen CB en CE blijkt dan – en dat is het gevolg van de 1e stelling van Thales[3]:
$CD : DB = CA : AE$ of $BD : CD = AB : AC$.
En dit is wat we wilden aantonen.

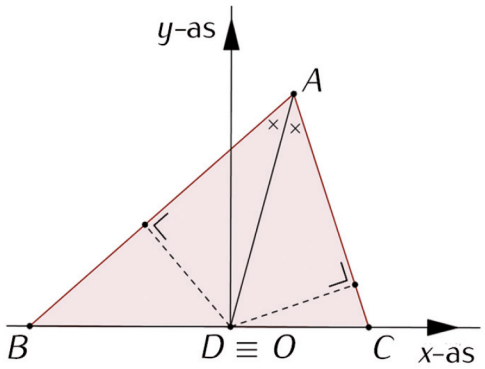
In het bovenstaande bewijs zit natuurlijk gelijkvormigheid van driehoeken verborgen: $CAD \sim CEB$ (hh) waaruit volgt dat $CA : CE = CD : CB$. En volgens een niet zo vaak meer gebruikte eigenschap van evenredigheden is nu ook: $CA : (CE - CA) = CD : (CB - CD)$. En daaruit volgt dan direct de bissectricestelling, die in [2] geformuleerd is als:

Stelling I. *Een bisectrix van een driehoek verdeelt de overstaande zijde inwendig in stukken, die zich verhouden als de aanliggende zijden.*[4,5]

Overigens, de omgekeerde bissectricestelling geldt ook:
De lijn door een hoekpunt van een driehoek en het punt, dat de overstaande zijde inwendig verdeelt in stukken, die evenredig zijn met de aanliggende zijden, is een bisectrix van die driehoek.

En weer terug in het heden

In het huidige meetkundecurriculum vinden we stelling I en haar omkering niet meer terug. Maar we kunnen er wel met een modern oog naar kijken. Hier is dat een analytisch oog: coördinaten. Eerst maar het bewijs van de stelling zelf.
We kiezen een rechthoekig assenstelsel xOy, met $O \equiv D$ (het voetpunt van de bissectrice van hoek A) en waarbij verder de drager van het lijnstuk BC samenvalt met de x-as, zie figuur 3.



figuur 3

Stellen we $A = (p, q)$, $B = (-b, 0)$ en $C = (c, 0)$, dan hebben we de vergelijkingen:[6]
BA: $y = \frac{q}{p+b}(x + b)$
CA: $y = \frac{q}{p-c}(x - c)$
Omdat O op de bissectrice van hoek A ligt, is afst(O, BA) = afst(O, CA); we zagen dat al eerder.

Met de normaalvergelijkingen[7] van de lijnen:

$$BA: \frac{qx-(p+b)y+bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}} = 0,\ CA: \frac{qx-(p-c)y-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}} = 0$$

blijkt dan:

$$\text{afst}(O, BA) = \left|\frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}}\right| = \frac{bq}{\sqrt{q^2+(p+b)^2}},$$

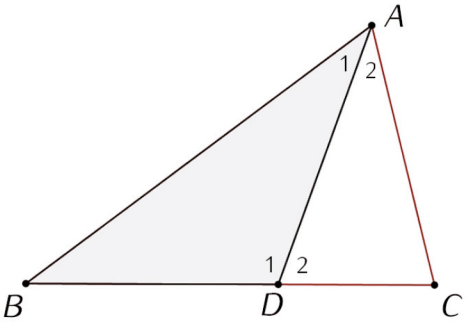
$$\text{afst}(O, CA) = \left|\frac{-cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}\right| = \frac{cq}{\sqrt{q^2+(p-c)^2}}$$

Uit de gelijkheid van deze uitdrukkingen en de formule voor de afstand van twee punten volgt dan:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{(p+b)^2+q^2}}{\sqrt{(p-c)^2+q^2}} = \frac{AB}{AC}$$

Waaruit blijkt dat $AB : AC = b : c = OB : OC$. En dat is de bedoelde verhouding op de zijde BC van driehoek ABC.

Zullen we het bewijs van de omgekeerde stelling ook met coördinaten leveren? Ik doe het hier niet, maar een bewijs met coördinaten staat in de appendix bij dit artikel. Het is het zojuist geleverde bewijs, maar dan, met enkele aanpassingen, vanaf het eind teruggeschreven. Ik denk dat ik het omgekeerde bewijs in 1958 zélf gegeven heb met een redenering uit het ongerijmde. Ook dát bewijs staat in de appendix. Nee, ik geef een eenvoudig bewijs met behulp van de sinusregel. En dit is eigenlijk wel leuk: in 1958 kon dat niet op deze manier, want de sinusregel kreeg je pas (c.q. al) in de derde klas.



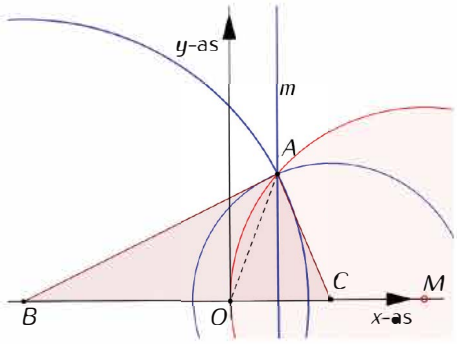
figuur 4

Zie nu figuur 4. In driehoek ABD geldt volgens de sinusregel: $\frac{AB}{\sin D_1} = \frac{BD}{\sin A_1}$, zodat: $AB = \frac{BD \cdot \sin D_1}{\sin A_1}$.
In driehoek ACD is volgens die regel: $\frac{AC}{\sin D_2} = \frac{CD}{\sin A_2}$,
en dus: $AC = \frac{CD \cdot \sin D_2}{\sin A_2}$.
In de omgekeerde stelling is gegeven dat $AB : AC = BD : CD$. Daar komt bij dat $\sin D_1 = \sin D_2$ (D_1 en D_2 zijn samen 180°), met als gevolg dat $\sin A_1 = \sin A_2$. En daaruit volgt, in dit geval direct, dat $\angle A_1 = \angle A_2$. Met andere woorden: AD is een bissectrice van de driehoek.

De Apollonius-cirkel

De evenredigheid $AB : AC = b : c$ kunnen we ook schrijven als $AB = k \cdot b$, $AC = k \cdot c$, met $k \neq 0$.
Het punt A is daardoor ook één van de snijpunten van de cirkels:
$(x + b)^2 + y^2 = (kb)^2$
$(x - c)^2 + y^2 = (kc)^2$
We kunnen ons nu afvragen wat de meetkundige plaats is van het snijpunt A van de beide cirkels als k varieert, bij vaste punten O, B en C. Bekijken we dit met of zonder coördinaten? Ik kies voor *met*.
De coördinaten van het punt A voldoen nu ook aan het stelsel vergelijkingen:

$$S : \begin{cases} (x+b)^2 + y^2 = k^2 b^2 \\ x = \frac{1}{2}(k^2 - 1)(b - c) \end{cases}$$



figuur 5

De laatste vergelijking van S is de vergelijking van de zogeheten machtlijn van beide hierboven genoemde cirkels; in figuur 5 is dat de lijn m. En dan voldoen de coördinaten van A óók aan een combinatie van de vergelijkingen van S waarin k, en dus ook k^2, niet voorkomt. Die vergelijking is dan de vergelijking van de meetkundige plaats.
We elimineren daarom k^2 uit beide vergelijkingen:
$k^2 = \frac{2x}{b-c} + 1$, zodat:

$$(x + b)^2 + y^2 = \left(\frac{2x}{b-c} + 1\right) \cdot b^2$$

Na enig rekenwerk aan deze vergelijking vinden we:

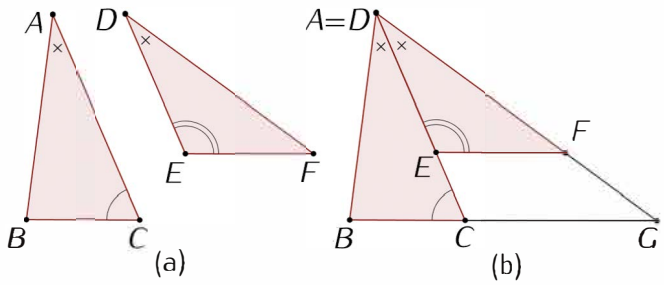
$$\left(x - \frac{b}{b-c}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2 c^2}{(b-c)^2}$$

En dit is de vergelijking van een cirkel, die gaat door het punt O en waarvan het middelpunt M op de x-as ligt.
Opmerking. Is E het tweede snijpunt van deze cirkel met de x-as, dan staat EA loodrecht op OA (2e stelling van Thales). Uiteraard kan dit ook analytisch bewezen worden.

Als we de verhouding $BO : CO$ gelijk aan r stellen ($BO : CO = r : 1$), dan noemen we de gevonden meetkundige plaats de r-Apollonius-cirkel op BC.[8]
In de appendix staat, naast een korte synthetische behandeling, een eenvoudige constructie van deze cirkel. Verder vindt de lezer daar een korte beschrijving van de (drie) Apollonius-cirkels van een driehoek.

Terug naar stelling I

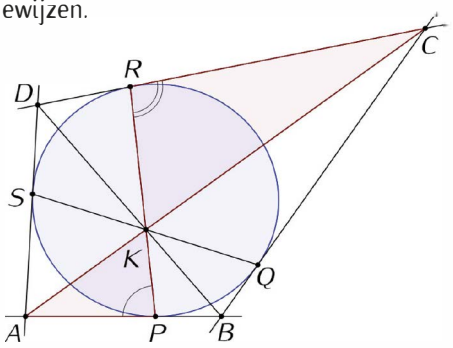
Een niet zo'n bekend, maar eenvoudig gevolg van de bissectricestelling zien we geïllustreerd in figuur 6a.



figuur 6

Van de driehoeken ABC en DEF is $\angle A = \angle D$ en zijn de hoeken C en E elkaars supplement. In deze driehoeken geldt nu:
Stelling II. $AB : DF = BC : EF$.
Ten behoeve van het bewijs hiervan plaatsen we de driehoeken tegen elkaar, zoals is weergegeven in figuur 6b. En we vullen aan met de vierhoek $CGFE$ ('natuurlijk' is daarbij $EF \parallel CG$). Nu is, volgens de bissectricestelling in driehoek ABG:
$AB : AG = BC : GC$. In driehoek DCG ($\equiv ACG$) geldt, mede op grond van de 1e stelling van Thales:
$DG : DF = CG : EF$.
Vermenigvuldiging van beide evenredigheden geeft nu:
$\frac{AB}{AG} \cdot \frac{DG}{DF} = \frac{BC}{GC} \cdot \frac{CG}{EF}$. En hier staat niets anders dan hetgeen we wilden aantonen, omdat immers $AG \equiv DG$ is.

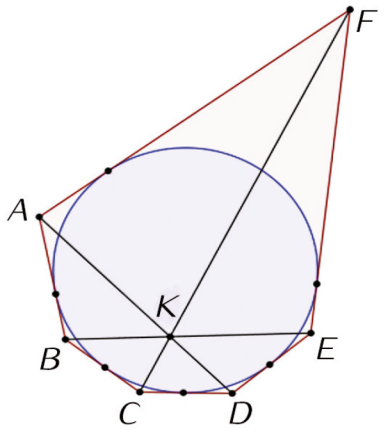
Ik heb deze eigenschap ooit eens (en dat was heel wat jaren ná 1958) gebruikt om de volgende stelling te bewijzen.



figuur 7

Stelling III. *Van een raaklijnenvierhoek gaan de diagonalen en de verbindingslijnen van 'overstaande' raakpunten door hetzelfde punt*[9].
In figuur 7 staat de raaklijnenvierhoek $ABCD$.

De punten P, Q, R, S zijn de raakpunten van de incirkel van die vierhoek met de zijden. We willen nu aantonen dat de lijnen AC, BD, PR, QS concurrent zijn in het punt K.
We nemen eerst $K = PR \,\&\, AC$[10]. In de driehoeken APK en CRK zijn de hoeken bij K aan elkaar gelijk, terwijl de hoeken bij P en R elkaars supplement zijn. Immers:
$\angle P = \frac{1}{2}$ bg(PSR) en $\angle R = \frac{1}{2}$ bg(RQP).
Conform stelling II is dan $AP : CR = KA : KC$.
Met $K' = AC \,\&\, KS$ vinden we analoog
$AS : CQ = K'A : K'C$.
Omdat $AP = AS$ en $CQ = CR$ (raaklijnstukken aan de incirkel) vinden we op het lijnstuk AC de evenredigheid
$KA : KC = K'A : K'C$.
En daaruit volgt dat $K \equiv K'$.
Met eenzelfde redenering blijkt dan dat K ook op het lijnstuk BD ligt. En daarmee zijn de in stelling III bedoelde lijnen concurrent.



figuur 8

Meestal wordt stelling III bewezen met een bijzondere vorm van de (uit de projectieve meetkunde bekende) stelling van Brianchon[11], zie figuur 8.
Stelling IV. *Als een zeshoek om een cirkel beschreven is, dan zijn de lijnen die overstaande hoekpunten verbinden, concurrent.*

De bijzondere vorm wordt hierbij bereikt door twee (handig gekozen) hoekpunten van de zeshoek ook op de cirkel te plaatsen; die hoekpunten vallen dan samen met de beide 'naastgelegen' raakpunten.[12]
Of het bewijs van stelling IV ook met gebruik van coördinaten kan, heb ik niet onderzocht.

Een appendix bij dit artikel is te vinden op de *Euclides*-site.

vakbladeuclides.nl/945klingens

Noten

[1] WisFaq is een internet-vraagbaak voor leerlingen in het voortgezet onderwijs in Nederland en in het secundair onderwijs in België. Zie voor de betreffende WisFaq-pagina: *http://www.wisfaq.nl/showrecord3.asp?id=83943*
[2] Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956) *Meetkunde, Tweede Deel*. Groningen: J.B. Wolters.
[3] Naar verluidt zijn er twee stellingen die door Thales van Milete (±624-545 v.Chr., Griekenland) zijn gevonden. De eerste betreft de projectie door evenwijdige lijnen, de tweede zegt dat de grootste zijde in een rechthoekige driehoek een middellijn is van de omcirkel van die driehoek. De bedoelde eerste stelling luidt in [2]: *De stukken die drie evenwijdige lijnen van twee snijlijnen afsnijden, vormen een evenredigheid.*
[4] Het woord 'bisectrix' is Latijn. Dat dit woord de vrouwelijke uitgang 'trix' heeft, is gelegen in het feit dat het een lijn is, en dat woord is in het Latijn vrouwelijk: linea. Het hier, en meestal door ons, gebruikte 'bissectrice' is direct ontleend aan het Frans. Waarom gebruiken we in het Nederlands niet gewoon 'deellijn'?
[5] Het woord 'inwendig' betekent in deze context 'op het lijnstuk zelf liggend'.
[6] Zonder de algemene geldigheid van het bewijs aan te tasten kunnen we stellen dat $a, b, c > 0$ en $p, q > 0$.
[7] In de appendix staat een afleiding van de normaal-vergelijking van een lijn.
[8] Genoemd naar Apollonius van Perga (±262-190 v.Chr., Griekenland).
[9] In de appendix staat een paragraaf als toegift met betrekking tot raaklijnenvierhoeken.
[10] De notatie $X = l \,\&\, m$ betekent: de meetkundige objecten l en m hebben het punt X als snijpunt.
[11] Naar Charles Julien Brianchon (1785-1864, Frankrijk).
[12] Zie eventueel verder: Dick Klingens (2004): *De stellingen van Pascal en Brianchon voor cirkels*. Website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/pascal.htm*

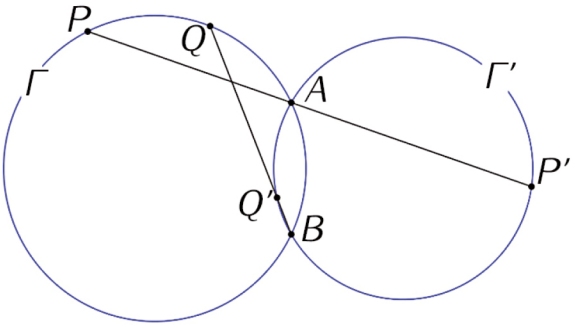
TWEE MEETKUNDIGE MINIATUREN

Dick Klingens

Dubbelkoorden en halve-dubbelkoordencirkels kunnen gebruikt worden om de bewijzen te leveren van de meetkundige 'miniaturen' aan het einde van het artikel.

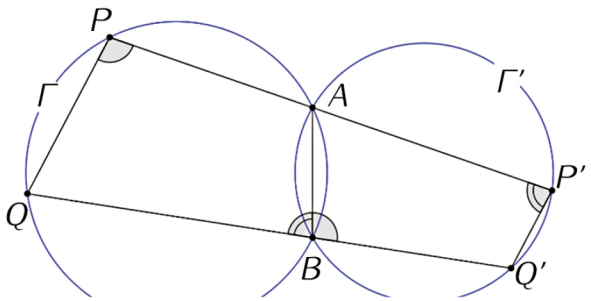
Inleiding

Iedereen heeft het wel eens: je hebt iets gelezen of gezien en je vindt dat ook anderen daarvan kennis zouden moeten nemen. Bij mij is dat soms het geval met meetkundige 'miniaturen'. Vandaar dit artikel, waarin ik aan het eind twee van die miniatuurtjes laat zien.[1]
Maar eerst wat 'hulpmiddelen' om de (nieuwe?) kennis wat makkelijker tot je te kunnen nemen...



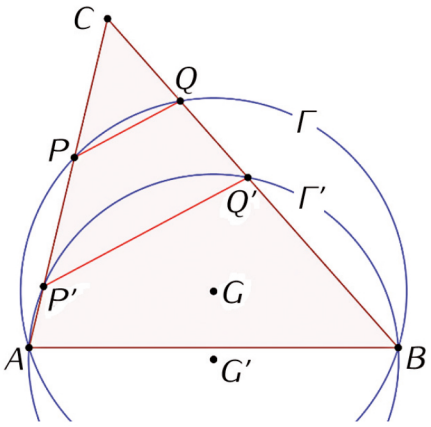
figuur 1

In figuur 1 staan twee elkaar in de punten A en B snijdende cirkels Γ en Γ'. Een lijnstuk als PP' noem ik hier *dubbelkoorde* (notatie: PAP'), omdat het ene eindpunt van het lijnstuk op Γ en het andere op Γ' ligt, én omdat A (c.q. B) *op* het lijnstuk ligt. Ook QBQ' is een dubbelkoorde: Q op Γ, Q' op Γ' en B op een verlengde van het lijnstuk QQ'. En wat de notatie betreft: bij een dubbelkoorde staat de naam van een 'cirkelsnijpunt' dus *altijd* tussen de namen van de eindpunten van het lijnstuk.
Een eerste eigenschap is geïllustreerd in figuur 2: als PAP' en QBQ' twee dubbelkoorden van Γ en Γ' zijn, dan is PQ evenwijdig met $P'Q'$.



figuur 2

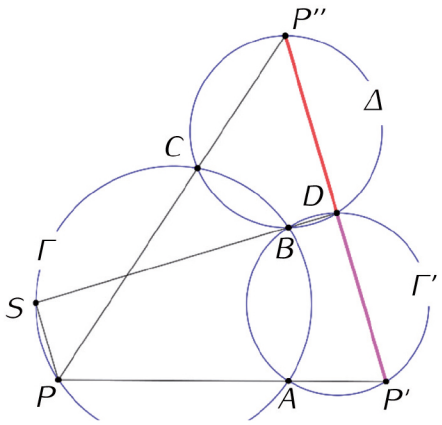
Het bewijs is redelijk elementair. Het ligt voor de hand het lijnstuk AB te tekenen en dan te kijken naar de koordenvierhoeken $PQBA$ en $P'Q'BA$.
Nu is: $\angle APQ = \angle ABQ'$ en $\angle AP'Q' = \angle ABQ$ (*binnenhoek* en *overstaande buitenhoek*)
waaruit blijkt dat:
$\angle APQ + \angle AP'Q' = 180^\circ$
Deze hoeken zijn 'binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn PP' van de lijnen PQ en $P'Q'$. En dus is:
$PQ \parallel P'Q'$.
De eigenschap wordt ook wel eens de 'stelling van Reim' genoemd.[2]



figuur 3

Een toepassing van de stelling van Reim staat in figuur 3: twee cirkels die beide door de hoekpunten A en B van een driehoek ABC gaan, snijden de zijden CA en CB met evenwijdige koorden PQ en $P'Q'$.[3]

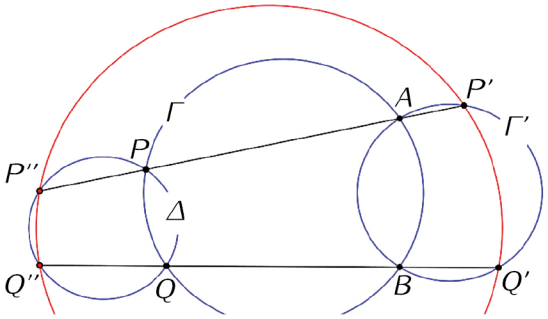
Als je aan twee snijdende cirkels nog een derde cirkel toevoegt die door één van de snijpunten van de eerste twee gaat én beide snijdt, dan ontstaat een configuratie als in figuur 4 (p. 36).



figuur 4

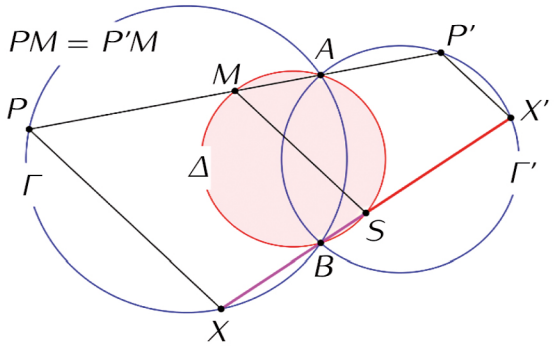
Cirkel Δ, die gaat door het snijpunt B van de cirkels Γ en Γ', is de toegevoegde cirkel. De andere snijpunten van Δ met die cirkels zijn C en D. Het punt P ligt *willekeurig* op Γ en PAP' is een dubbelkoorde (van Γ en Γ'), evenals PCP'' (van Γ en Δ). De bewering "dan is P'DP" een dubbelkoorde van Γ' en Δ" vraagt natuurlijk om een bewijs!
En dat bewijs volgt nu.
Ik teken de dubbelkoorde DBS van Γ' en Γ. Volgens de stelling van Reim is nu $DP' \,//\, PS$ (let wel, DP' is een lijnstuk). De lijnstukken PCP'' en SBD zijn dubbelkoorden van Γ en Δ. En hier is volgens die zelfde stelling $PS \,//\, DP''$ (ook DP'' is een lijnstuk). We hebben dus twee lijnstukken die evenwijdig zijn aan hetzelfde lijnstuk, dus hebben we ook *twee lijnen* (namelijk de drager van DP' en de drager van DP'') die evenwijdig zijn met *dezelfde lijn* (namelijk met de drager van PS).
Het komt niet zo vaak voor dat in een bewijs een beroep op het 5e postulaat van Euclides nodig is: door een punt (hier is dat D) buiten een lijn (hier is dat de drager van PS) gaat precies één lijn die evenwijdig is met die lijn.[4] Dus is $\angle P'DP'' = 180^\circ$, waarmee bewezen is dat $P'DP''$ inderdaad een dubbelkoorde is.[5]

Natuurlijk kan zo'n derde cirkel ook op een andere manier worden toegevoegd. In figuur 5 gaat de cirkel Δ door de eindpunten (P en Q) van twee dubbelkoorden (PAP' en QBQ') die op *dezelfde* cirkel Γ liggen. De punten P'' en Q'' zijn daarbij dan weer eindpunten op Δ van $P''PA$ en $Q''QB$. En dan is er zoals blijkt direct een vierde cirkel.



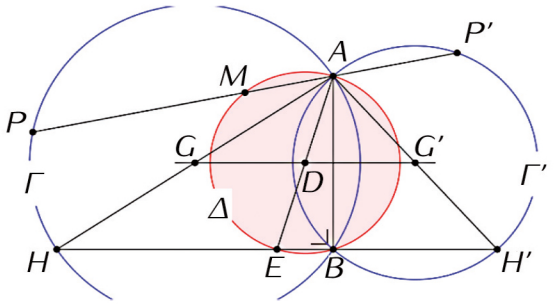
figuur 5

Een bewijs van het concyclisch zijn van de punten P', Q', P'', Q'' staat in paragraaf 3 van de appendix bij dit artikel.[1] Hetzelfde bewijs staat trouwens ook in de referentie die vermeld is in[2].
Zo'n derde cirkel kan natuurlijk ook door de snijpunten A, B van Γ en Γ' gaan. Ik doe dat als volgt; zie figuur 6. Ik kies een dubbelkoorde PAP' en bepaal het midden M van het lijnstuk PP'. De toegevoegde cirkel Δ is dan de cirkel door A, B en M.



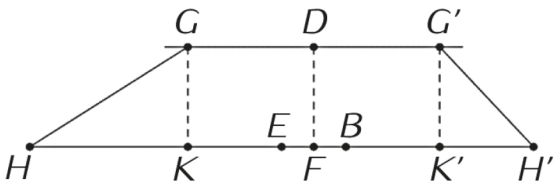
figuur 6

Tja, en als ik dan een andere, willekeurige dubbelkoorde bekijk, bijvoorbeeld XBX' waarbij[6] $S = XX' \,\&\, \Delta$, dan rijst onmiddellijk de vraag of S wellicht het midden is van het lijnstuk XX'. Het antwoord is 'ja', en het bewijs daarbij is zeker niet ingewikkeld.
Volgens de stelling van Reim, toegepast op de dubbelkoorden PAP' en XBX' (van Γ en Γ'), is $PX \,//\, P'X'$, zodat vierhoek $PXX'P'$ een trapezium is. Volgens die zelfde stelling, nu toegepast op de dubbelkoorden PAM en XBS (van Γ en Δ), is $PX \,//\, MS$, en daarmee is MS de middenparallel in dat trapezium. Dus: S is het midden van XX'. Met andere woorden: van alle dubbelkoorden XBX' ligt het midden op de cirkel Δ.



figuur 7

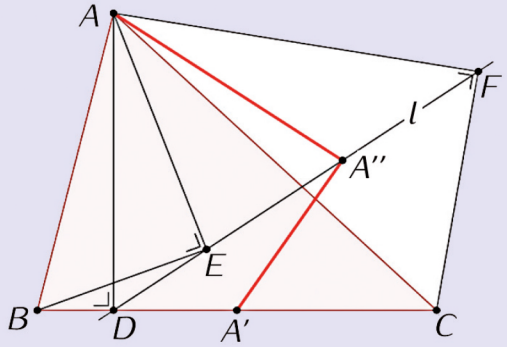
Om de ligging van het middelpunt D van de cirkel Δ te vinden kijk ik naar een bijzondere dubbelkoorde in figuur 7. Allereerst: is G het middelpunt van Γ en G' dat van Γ', dan zijn D, G, G' collineair; ze liggen immers alle drie op de middelloodlijn van het lijnstuk AB.
Zijn nu H, H' en E de tegenpunten van A op Γ, van A op Γ' en van A op Δ, dan liggen die punten ook op de dubbelkoorde HBH', omdat de driehoeken AHB, $AH'B$ en AEB alle rechthoekig zijn in B (*cirkelstelling van Thales*). Daarbij komt: GG' is een middenparallel in driehoek AHH'. De punten G, D, G' liggen óók op de middelloodlijnen van de lijnstukken HB, EB en BH'.



figuur 8

Zie nu figuur 8. Daarin zijn K, F, K' de loodrechte projecties van G, D, G' op HH'. Omdat E het midden is van HH', is $KF = K'F$ (neem even de tijd om te controleren!). En dan is in de rechthoek $KK'G'G$ het punt D het midden van GG'. Daarmee is aangetoond dat het middelpunt D van Δ samenvalt met het midden van de centraal GG' van de cirkels Γ en Γ'.
Ik noem de cirkel die gaat door de middens van de dubbelkoorden van twee 'cirkels van Reim' – en dat zijn steeds snijdende cirkels – de *hdk-cirkel* ('halve-dubbelkoordencirkel' [7]) van die cirkels.
Genoeg over de hulpmiddelen. Tijd voor de beloofde miniaturen.

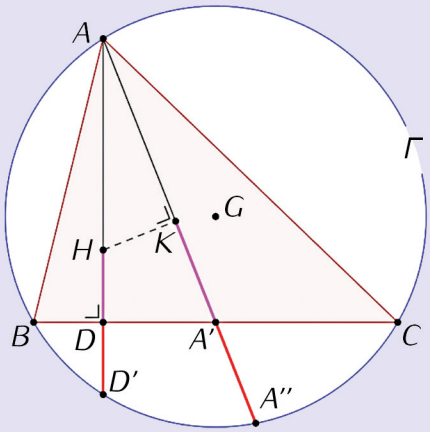
Miniatuur 1



figuur 9

Zie figuur 9. Gegeven is een driehoek ABC waarvan AD een hoogtelijn is. De lijn l gaat door D en is verder willekeurig. E ligt zó op l dat $AE \perp BE$, en F ligt zó op l dat $AF \perp CF$. A' is het midden van BC, A'' is het midden van EF.
Toon aan dat $AA'' \perp A'A''$.

Miniatuur 2



figuur 10

Zie figuur 10. Van driehoek ABC met omcirkel Γ (middelpunt G) is AA' een zwaartelijn, waarbij verder $A'' = A' \& \Gamma$. Het punt K is de loodrechte projectie van het hoogtepunt H op die zwaartelijn.
Toon aan dat A' het midden is van het lijnstuk KA''.

Bij de oplossing van dergelijke problemen moet je natuurlijk de juiste hulpmiddelen kiezen, deels aan de hand van herkenbare zaken in de figuur. Welnu, in miniatuur 1 zitten in ieder geval drie rechthoekige driehoeken en er wordt gesproken over middens van lijnstukken.
In miniatuur 2 zijn er ook drie rechthoekige driehoeken te herkennen. En een bekende eigenschap in de figuur is dat D het midden is van het lijnstuk HD'. Verder moet er bij een tweede lijnstuk iets bewezen worden over het midden ervan.
Het gebruik van de *hdk-cirkel* ligt dus bij beide miniaturen voor de hand.
De oplossing van beide problemen is te vinden in paragraaf 4 van de appendix.[1] In paragraaf 5 van die appendix staat trouwens ook een *analytisch* bewijs van het feit dat de *hdk-cirkel* de meetkundige plaats is van de middens van de dubbelkoorden van twee snijdende cirkels.

De appendix is te downloaden van:

vakbladeuclides.nl/946klingens

Noten

[1] De appendix bij dit artikel is te downloaden van de *Euclides*-site: https://nvvw.nl/euclides/

[2] Naar Anton Reim (1832-1922, Duits Bohemen/Sudetenland). Zie ook: Klingens, D. (2015). *Cirkels van Reim*. Ongepubliceerd artikel; elektronisch beschikbaar via: *http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/CirkelsVanReim_vs2.pdf*
In [1] staat ook het bewijs van de omgekeerde stelling van Reim (paragraaf 1).

[3] F.G.-M. (1920). *Exercices de Géométrie*. Parijs: Rééditions Jacques Gabay (1991), p. 283, théorème 124.

[4] Dit is het zogeheten *parallellenpostulaat*. Hier is dat postulaat tekstueel vervangen door het zogenoemde *axioma van Playfair*, dat met het door Euclides geformuleerde (5e) postulaat equivalent is.

[5] Wat hier bewezen is, is eigenlijk de 'stelling van Miquel', door Auguste Miquel (1816-1851, Frankrijk) gepubliceerd in 1844. Deze stelling luidt, refererend aan figuur 4: Gaan drie elkaar snijdende cirkels Γ, Γ', Δ door hetzelfde punt B, zijn A, C, D de andere snijpunten, is P een *willekeurig* punt van Γ, en is (zie ook [6]) $P' = PA \,\&\, \Gamma'$, $P'' = PC \,\&\, \Delta$, dan zijn D, P', P'' collineair.
In paragraaf 2 van [1] staat een bewijs van de *omgekeerde* stelling van Miquel, alleen gebaseerd op koordenvierhoeken.

[6] In hetgeen volgt betekent $P = X \,\&\, Y$: het punt P is het (c.q. een nog niet benoemd) snijpunt van de meetkundige objecten X en Y.

[7] Een naam voor de bedoelde cirkel zou 'midden-cirkel' kunnen zijn. Echter, die naam is in de Nederlandse wiskundeliteratuur reeds aan een andere bijzondere cirkel toegekend (en dus niet alleen aan een deel van de belijning van een sportveld). Zie: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Middencirkel_%28meetkunde%29*

Dick Klingens

(Het gevolg) van krassen met formules

Goniometrische identiteiten: er zijn nogal wat leerlingen die daar niet blij van worden. Maar je kunt er wel mooi mee goochelen. ‘Krassen’ noemt Dick Klingens dat. Het levert verrassende resultaten op!

Inleiding

Allereerst een toelichting op het woordje ‘krassen’ in de titel. Ik vond in een oud goniometrieboek een blaadje met enkele handgeschreven goniometrische identiteiten, deels met bewijzen ervan, waarin heel wat doorhalingen zaten. Naar ik vermoed wilde ik die identiteiten gebruiken in repetities – toen goniometrie nog (samen met analytische meetkunde) een apart (in de betekenis zelfstandig) vak was. De doorhalingen, het kraswerk, laat ik in hetgeen volgt weg. *Krassen* in het oud-Grieks is *grafein* (γράφειν), maar dit laatste werkwoord heeft ook de betekenis *schrijven*.
En ook: de (grootte van de) hoeken van de driehoek ABC, waarin zich het allemaal zal afspelen, geef ik aan met de letters A, B en C. Dat zal naar ik verwacht geen verwarring geven, ook niet als ik daarbij de meeste overbodige spaties weglaat (zonder die kun je het ook wel lezen). Toen ik dit artikel met pen op papier had gezet, stonden die spaties er in de meeste gevallen ook niet.

I

In elke driehoek ABC is:
$\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B) =$
$\sin A\cos B + \cos A\sin B$
Gekwadrateerd geeft dat – en waarom ik dat doe, blijkt hierna:

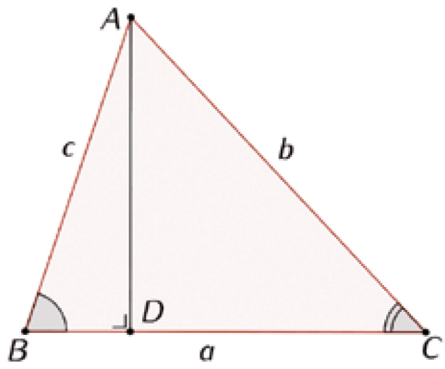
$$\begin{aligned}\sin^2 C &= \sin^2 A\cos^2 B + \cos^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\\ &= \sin^2 A(1 - \sin^2 B) + \sin^2 B(1 - \sin^2 A) + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\\ &= \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin^2 A\sin^2 B + 2\sin A\cos B\cos A\sin B\end{aligned}$$

Dan blijkt:

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C &= 2\sin A\sin B(\sin A\sin B - \cos A\cos B)\\ &= -2\sin A\sin B\cos(A + B) = -2\sin A\sin B\cos(180^\circ - C)\\ &= 2\sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

Ik zeg: een niet onaardig, en *bijna* symmetrisch, homogeen resultaat.[1]
Maar natuurlijk is de sinusregel ook bekend:
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$, zodat $\sin A = ka$, $\sin B = kb$, $\sin C = kc$.[2]
Na substitutie en ordening volgt uit het bovenstaande het aardige resultaat:
$k^2(a^2 + b^2 - c^2) = 2k^2ab \cdot \cos C$ zodat: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot \cos C$
En al dit ‘gekras’ leidt dus tot de cosinusregel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.
Als afleiding weer eens een wat andere afleiding. Of ook, de cosinusregel bewezen met de sinusregel.

Een toegiftje hierbij. In diezelfde driehoek is:
$\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$
Dan is, omdat ook deze identiteit homogeen [1] is in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$: $a = b\cos C + c\cos B$.
Die uitdrukking komt natuurlijk bekend voor!
Zeker als je naar figuur 1 kijkt.



figuur 1

II

Niet vreemd in een driehoek is natuurlijk:
$\sin(A + B + C) = 0$.
En dan is:

$$\begin{aligned}\sin((A + B) + C) &= \sin(A + B)\cos C + \cos(A + B)\sin C\\ &= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C + (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\sin C\\ &= 0\end{aligned}$$

Dit resultaat is niet verrassend. Maar wat mij wel verraste – na een iets andere ordening – is de symmetrie in: $\sin A\sin B\sin C = \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C$.

III

Ik gebruik bij het hierna volgende gekras een van de zogeheten *prosthaphaeresis-formules* (ook wel formules van Simpson genoemd)[3], [4], namelijk: $\frac{1}{2}\sin X + \frac{1}{2}\sin Y = \sin\frac{1}{2}(X + Y)\cos\frac{1}{2}(X - Y)$.
Ik ga uit van $F = T(A, B, C) + T(B, C, A) + T(C, A, B)$, waarin $T(X, Y, Z) = \sin^3 X\cos(Y - Z)$.

Dan is:

$$\begin{aligned}T(A, B, C) &= \sin^3 A\cos(B - C) = \sin^2 A\sin A\cos(B - C) = \sin^2 A\sin(B + C)\cos(B - C)\\ &= \tfrac{1}{2}\sin^2 A(\sin(2B) + \sin(2C))\\ &= \sin 2A(\sin B\cos B + \sin C\cos C)\end{aligned}$$

En *mutatis mutandis*:
$T(B, C, A) = \sin 2B(\sin C\cos C + \sin A\cos A)$ en
$T(C, A, B) = \sin 2C(\sin A\cos A + \sin B\cos B)$
Een uitdrukking van F in termen van 'sin' (en eerst ook nog 'cos') is gemakkelijk gevonden:

$$\begin{aligned}F &= \sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A) + \sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \sin C\sin A(\sin C\cos A + \sin A\cos C)\\ &= \sin A\sin B\sin(A + B) + \sin B\sin C\sin(B + C) + \sin C\sin A\sin(C + A)\\ &= 3\sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

IV

Naar aanleiding van mijn gekras in paragraaf I kwadrateer ik ook:
$\cos C = -\cos(A + B) = -(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$
Dus:

$$\begin{aligned}\cos^2 C &= \cos^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\\ &= \cos^2 A\cos^2 B + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\\ &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + 2\cos^2 A\cos^2 B - 2\cos A\cos B\sin A\sin B\end{aligned}$$

Zodat:

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 + 2\cos A\cos B(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\\ &= 1 + 2\cos A\cos B\cos(A + B)\\ &= 1 - 2\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

Leuk toch?

V

En dan is het zeker ook fijn om te weten dat:
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$
Reken maar na!

Noten

[1] Een relatie als $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$ heet 'homogeen in $\sin A$, $\sin B$ en $\sin C$' omdat de relatie onafhankelijk is van k als tegelijk $\sin A$ door $k \cdot \sin A$, $\sin B$ door $k \cdot \sin B$ én $\sin C$ door $k \cdot \sin C$ worden vervangen.

[2] Als R de lengte is van de straal van de omgeschreven cirkel van de beschouwde driehoek, dan is $1/k = 2R$.

[3] Zie bijvoorbeeld: Klingens, K. (2013). Gonio – Prosthaphaeresis. *Euclides, 89*(3), pp. 23-24.

[4] WikipediA NL: *Lijst_van_goniometrische_gelijkheden*.
Via: https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_goniometrische_gelijkheden

Dick Klingens

De Stelling van Stewart

Vergeten stellingen, daar zou je de stelling van Stewart onder kunnen rekenen. Aan de hand van drie opdrachten (uitdaging: probeer ze eerst zelf...) laat Dick Klingens de charme van de stelling van Stewart zien.

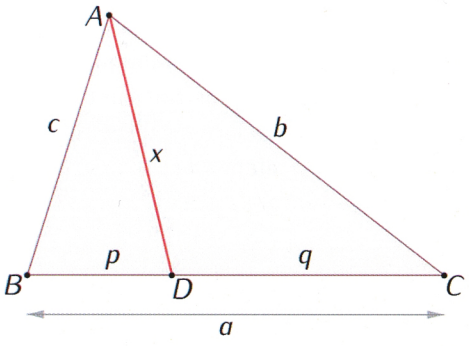
Drie opdrachten

PROPOSITION II.

In the right line AB *take any point* C *between the points* A, B; *and from the points* A, B, C *let there be drawn right lines to any point* D; *the square of* AD *together with the space to which the square of* BD *has the same ratio that* BC *has to* CA, *will be equal to the rectangle* BAC *together with the space to which the square of* CD *has the same ratio that* BC *has to* BA.

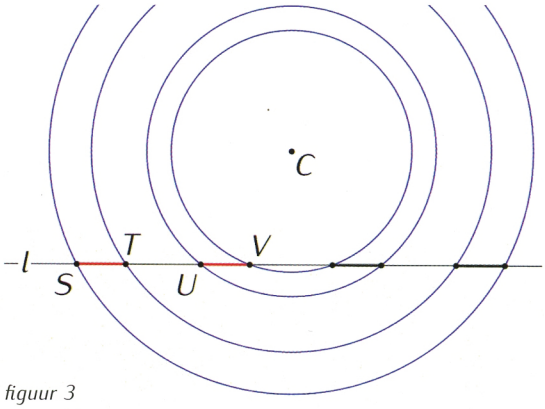
figuur 1

Opdracht 1 Geef in een formule weer wat in de tekst van figuur 1 staat.[1]



figuur 2

Opdracht 2 Zie figuur 2, waarin de namen van de punten afwijkend zijn van die welke beschreven zijn in figuur 1. Op de zijde BC van driehoek ABC ligt het (willekeurige) punt D. Druk het kwadraat van de lengte x van het lijnstuk AD uit in de lengtes a, b, c van de zijden van de driehoek en de lengtes p, q van opvolgend BD, CD.

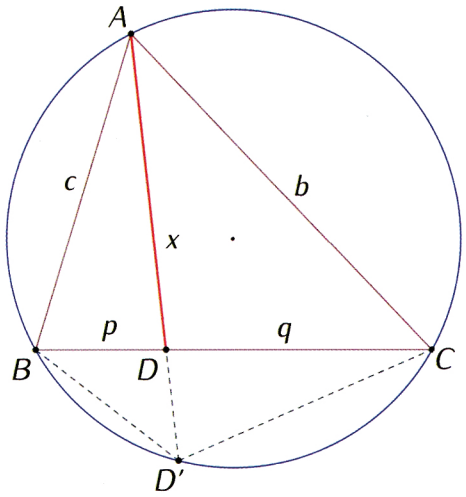


figuur 3

Opdracht 3 Gegeven zijn vier concentrische cirkels met middelpunt C. Construeer een rechte lijn l die de cirkels opvolgend zo in de punten S, T, U, V snijdt dat $ST = UV$, zie figuur 3.

De tekst in figuur 1 staat op bladzijde 2 en 3 van het boek *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics* dat in 1746 verscheen van de hand van de Schotse wiskundige Matthew Stewart (1717-1785).
Het antwoord op opdracht 2 is tevens het bewijs van de propositie in figuur 1: *de stelling van Stewart*. En opdracht 3 heeft natuurlijk met (een gevolg van) die stelling te maken (zie de paragraaf '"Stewart" in een vierhoek').
Of en hoe de opdrachten door elke individuele lezer zullen zijn uitgevoerd, is natuurlijk niet te voorspellen, maar zeker is dat er tenminste twee redelijk elementaire

bewijzen van de stelling bestaan: een bewijs gebaseerd op de stelling van Pythagoras (herhaald toegepast) en een bewijs dat gebruik maakt van de cosinusregel in bijvoorbeeld de driehoeken ABD en ABC in figuur 2; zie hiervoor paragraaf 2 in de appendix.
Ik vermoed dat er weinig lezers zijn die voor het bewijs gedacht hebben aan de stelling van Ptolemaeus: *Is een vierhoek ingeschreven in een cirkel, dan is de som van de producten van de paren overliggende zijden gelijk aan het product van de diagonalen.*[2]



figuur 4

In figuur 4 is $ABD'C$ een koordenvierhoek. D is hier het snijpunt van de diagonalen AD' en BC. Volgens de stelling van Ptolemaeus is dan in die vierhoek:
$AC \cdot BD' + AB \cdot CD' = BC \cdot AD'$ (1)

Op grond van de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken $BD'D$ en ACD is:
$BD' : AC = BD : AD$ en $D'D : CD = BD : AD$
zodat: $BD' = bp / x$ en $DD' = pq / x$.
En uit de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken $CD'D$ en ABD blijkt:
$CD' : AB = CD : AD$ zodat: $CD' = cq / x$.
Relatie (1) gaat nu door substitutie van BD', DD', CD' over in:

$$b\cdot\frac{bp}{x}+c\cdot\frac{cq}{x}=a\left(x+\frac{pq}{x}\right) \qquad (2)$$

Worden het linker- en rechterlid van (2) vermenigvuldigd met x, dan is: $b^2p + c^2q = x^2a + apq$.
Na rangschikking geeft dit de (min of meer) gebruikelijke *formule van Stewart* [3]:
$x^2a = b^2p + c^2q - apq$ (3)

Twee zijden tot de n-de macht

De ligging van het punt D op het lijnstuk BC kan ook afhankelijk zijn van de lengtes van de zijden AB en AC van de driehoek. Als bijvoorbeeld $BD : CD = c^n : b^n$ is, met gehele $n \geq 0$, dan is:

$$BD=p=\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot a \text{ en } CD=q=\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot a \qquad (4)$$

Formule (3) geeft dan door toepassing van (4):

$$x^2=\frac{1}{a}\left(\frac{c^n}{b^n+c^n}\cdot ab^2+\frac{b^n}{b^n+c^n}\cdot ac^2\right)-pq=$$
$$\frac{b^2c^n+b^nc^2}{b^n+c^n}-pq=\frac{b^nc^n}{b^n+c^n}(b^{2-n}+c^{2-n})-pq \qquad (5)$$

Met formule (5) kan dan voor $n = 0, 1, 2$ de lengte van $x^2 = AD^2$ worden berekend.

$n = 0$

In dit geval is $BD : CD = c^0 : d^0 = 1 : 1$. Dan is het punt D het midden van de zijde BC en is AD de A-zwaartelijn (de zwaartelijn door het hoekpunt A) met lengte z_a van de driehoek, zodat:
$z_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$ (dit is de zwaartelijnformule) (6)

Opmerking. Uit (6) volgt een mooie relatie tussen de lengtes van de zwaartelijnen en de zijden:

$$z_a^2+z_b^2+z_c^2=$$
$$(\tfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\tfrac{1}{4}a^2)+(\tfrac{1}{2}(c^2+a^2)-\tfrac{1}{4}b^2)+(\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{4}c^2)=$$
$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$n = 1$

Nu is $BD : CD = c : b$. Het lijnstuk AD is dan de A-bissectrice met lengte d_a van de driehoek. Zodat:
$d_a^2=bc-pq$ (dit is de bissectriceformule). (7)

Opmerking. Omdat p en q met de relaties (4) ook uit te drukken zijn in a, b en c, is relatie (7) als volgt te schrijven:

$$d_a^2=bc-\frac{ca}{b+c}\cdot\frac{ba}{b+c}=bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

$n = 2$

Niet zo bekend is dat als $BD : CD = c^2 : b^2$ is, het punt D het snijpunt is van de A-symmediaan van de driehoek (met lengte m_a) met de zijde BC. Een symmediaan van een driehoek is het spiegelbeeld van een zwaartelijn in de bissectrice die door hetzelfde hoekpunt gaat als die zwaartelijn.

Met relatie (5) is in dit geval:

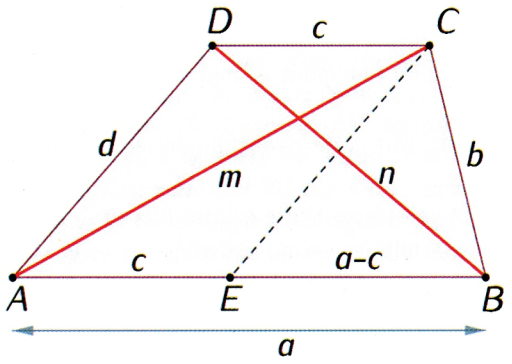
$$m_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}(1+1) - \frac{ac^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{ab^2}{b^2+c^2} =$$

$$\frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}(2b^2+2c^2-a^2) \qquad (8)$$

Met $n = 3, 4, \ldots$ zijn er natuurlijk ook lijnstukken AD waarvan met relatie (5) de lengte kan worden berekend. Maar daarvan zijn volgens mij geen toepassingen bekend. Zie verder ook de paragrafen 3 en 4 in de appendix.

'Stewart' in een vierhoek

Ik behandel nu een toepassing van de formule van Stewart in een trapezium. In figuur 5 is $ABCD$ een trapezium ($AB \,//\, CD$)[4] waarbij voor de lengtes van de zijden geldt: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$
De lengtes van de diagonalen AC, BD zijn m, n.
Verder is $CE \,//\, AD$, waardoor $CE = d$.



figuur 5

In driehoek ABC is dan volgens de stelling van Stewart:
$CE^2 \cdot AB = CA^2 \cdot BE + CB^2 \cdot AE - AB \cdot BE \cdot CE \Rightarrow$
$d^2a = m^2(a-c) + b^2c - ac(a-c)$

Zodat: $m^2 = ac + \frac{ad^2 - cb^2}{a-c}$.

Analoog is (in driehoek ABD): $n^2 = ac + \frac{ab^2 - cd^2}{a-c}$
Dit resulteert in:
$m^2 + n^2 = b^2 + d^2 + 2ac \qquad (9)$

En verder is ook:

$$m^2 - n^2 = \frac{ad^2 - cb^2 - ab^2 + cd^2}{a-c} = \frac{a(d^2-b^2)+c(d^2-b^2)}{a-c}$$

Dit leidt tot:

$$\frac{m^2-n^2}{d^2-b^2} = \frac{a+c}{a-c} \qquad (10)$$

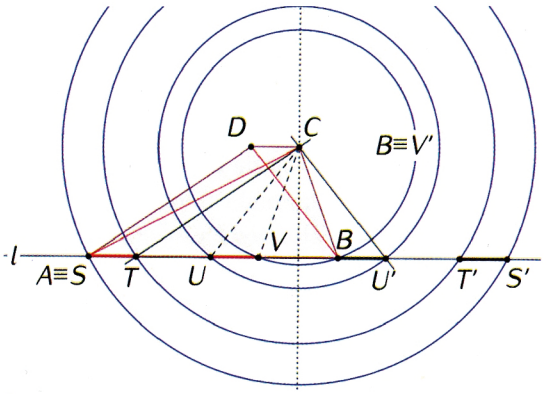
De relaties (9) en (10) maken het mogelijk bij gegeven lengtes van de niet-evenwijdige zijden (b, d) en die van de diagonalen (m, n) de lengtes van de evenwijdige zijden (a, c) van het trapezium te berekenen c.q. die zijden van het trapezium *met passer en liniaal* te construeren (dit laatste is echter niet eenvoudig).
Zijn a en c eenmaal bekend, dan is de constructie van het trapezium redelijk elementair. Een beschrijving van zo'n constructie, waarbij geen gebruik meer hoeft te worden gemaakt van b en d, is opgenomen in paragraaf 5.1 van de appendix.

Opmerkingen

1 Is vierhoek $ABCD$ een parallellogram, dan is $a = c$ (en uiteraard is ook $b = d$). Relatie (9) kan dan geschreven worden als: $m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
2 Relatie (9) kan ook worden bewezen door de stelling van Pythagoras herhaald toe te passen. Zie voor een bewijs daarvan paragraaf 5.2 van de appendix.

Over opdracht 3

In de tekst direct na opdracht 3 staat een hint naar de stelling van Stewart en naar de vorige paragraaf. Heeft die opdracht dan iets te maken met een trapezium? Ik denk dat een korte toelichting bij een plaatje hier meer zegt dan veel woorden.
Als gegeven is dat ST gelijk is aan UV, dan zijn er vanwege de symmetrie nog twee lijnstukken die daaraan gelijk zijn. In figuur 6 zijn dat de lijnstukken BU' (met $B \equiv V'$) en $T'S'$ (die lijnstukken staan in ook figuur 3).



figuur 6

De lijnstukken CS, CT, CU, CV zijn dus de stralen van de cirkels. En deze stralen kunnen gebruikt worden voor de constructie van het trapezium $ABCD$ (met $A \equiv S$), waarvan dus, via die concentrische cirkels, gegeven zijn:

— de niet-evenwijdige zijden: $AD = CT$ en $BC = CV$;

— de diagonalen: $AC = CS$ en $BD = CU' = CU$.

En in de vorige paragraaf is aangetoond dat een dergelijk trapezium (met passer en liniaal) construeerbaar is.

Vroeger

In een eerdere aflevering van *Euclides* schreef U.H. van Wijk (in Weltevreden, Batavia) ook over de stelling van Stewart.[5] Hij leidde daarbij een 'nieuwe gedaante' van de formule af, en wel in het bijzonder de toepassing daarvan in een vierhoek en in een viervlak, namelijk (ook geldig in de figuren 2 en 4):

$x^2a^2 = b^2p^2 + c^2q^2 + 2bcpq\cdot\cos(A)$

Vergelijk deze formule met formule (3). Een citaat uit dat artikel: 'Men zal misschien tegen dezen vorm van de stelling van STEWART aanvoeren, dat hij niet voor behandeling in een tweede klasse van een middelbare school in aanmerking kan komen, omdat er kennis van goniometrische verhoudingen (ook in 't 2de kwadrant!) voor geëischt wordt.'

In de appendix bij dit artikel wordt nader ingegaan op enkele items en staat een extra opgave.

vakbladeuclides.nl/956klingens

Noten

[1] Een (bijna letterlijke) vertaling: Neem op de rechte lijn AB een willekeurig punt C tussen A en B; en laten er door A, B, C rechte lijnen zijn getrokken naar een willekeurig punt D. Dan is het vierkant op AD samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op BD dezelfde verhouding heeft als BC heeft tot CA gelijk aan de rechthoek BAC samen met de oppervlakte waarvan het vierkant op CD dezelfde verhouding heeft als BC heeft tot BA.

[2] Voor een bewijs zie bijvoorbeeld: Dick Klingens (1999): *De stelling van Ptolemaeus en de sinusregel*. Op (de website van de auteur): *http://www.pandd.demon.nl/sinregel.htm*

[3] Ikzelf heb de formule(s) van Stewart moeten leren aan het einde van de tweede klas van het voortgezet onderwijs (dat was in 1959), uit het boek: Neut, D.N. van der & Holwerda, A. (1956). *Meetkunde met de beginselen der goniometrie. Deel 2* (9e druk). Groningen: J.B. Wolters, p. 77.
En daarbij stond ook een afleiding van de formule als het punt D op het verlengde van AB ligt. Erna stond: 'Een dergelijke betrekking kan men afleiden, als D een punt is op het verlengde van BA. Ga dit na.' Want, inderdaad, er zijn eigenlijk drie *verschillende* formules van Stewart.

[4] Voor mij is een trapezium een vierhoek met *ten minste* twee evenwijdige zijden. Zo'n vierhoek zou dus ook een parallellogram kunnen zijn.

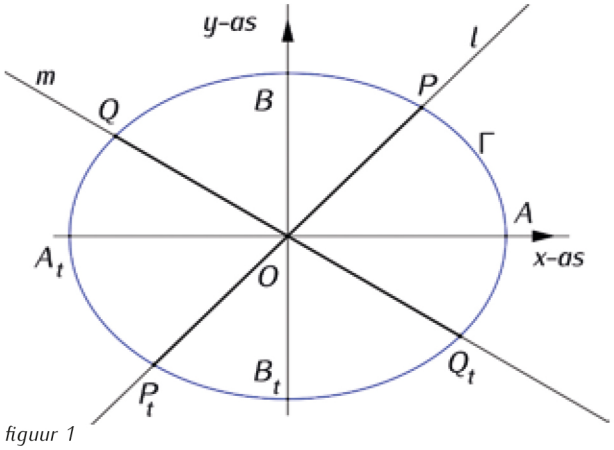
[5] Wijk, U.H. van (1929). De Stelling van Stewart. *Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken, 6*(2), pp. 65-68. Zie: *https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/006_1929-30_02.pdf*

Dick Klingens

Over een eigenschap van een ellips

Dick Klingens beschrijft constructies met passer en liniaal met behulp van de *toegevoegde middellijnen* van een ellips.

Inleiding



figuur 1

In figuur 1 zijn in een rechthoekig xOy-assenstelsel weergegeven:

- een ellips Γ met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;
- de lijnen l, m die beide door het middelpunt O van de ellips gaan;
- de toppen van de ellips: A, A_t, B, B_t met $OA = a$, $OB = b$;
- de snijpunten[1] van Γ met l, m: Γ & $l = \{P, P_t\}$, Γ & $m = \{Q, Q_t\}$.

De lijnstukken PP_t en QQ_t worden *middellijnen* van de ellips genoemd – analoog aan hetzelfde begrip bij de cirkel: het zijn koorden door het middelpunt. Ik val nu maar direct in huis met een definitie:

Definitie. Twee middellijnen PP_t, QQ_t van een ellips heten *toegevoegde middellijnen* als voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de dragers l, m van die middellijnen geldt: $\text{rico}(l) \cdot \text{rico}(m) = -b^2/a^2$.

In hetgeen volgt zal onder meer een constructie met passer en liniaal (met p&l) worden besproken waarmee, bij gegeven lijnstukken OP en OQ, de halve grote as OA en de halve kleine as OB van de ellips kunnen worden gevonden.
Ik merk nog op dat met de lijnstukken OP en OQ – die ook wel *toegevoegde stralen* worden genoemd – tevens de middellijnen PP_t en QQ_t vastliggen.

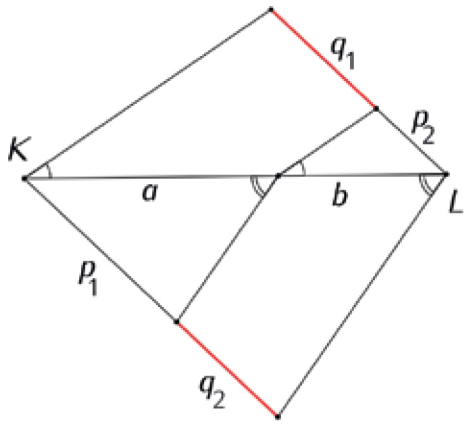
Gegeven: de ellips en een punt erop

Als de ellips Γ gegeven is in een coördinatenstelsel en als het punt P op Γ ligt, dan kunnen de coördinaten van het punt Q uitgedrukt worden in die van P als OP en OQ toegevoegde stralen van Γ zijn. Er geldt namelijk:

Stelling 1. Is in een xOy-assenstelsel een ellips Γ gegeven met de vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ligt het punt $P = (p_1, p_2)$ op Γ en is Q het op Γ liggende eindpunt van de toegevoegde straal OQ van OP, dan is voor de coördinaten $(-q_1, q_2)$ van het punt Q (zie figuur 1):[2]
$q_1 = a/b \cdot p_2$, $q_2 = b/a \cdot p_1$

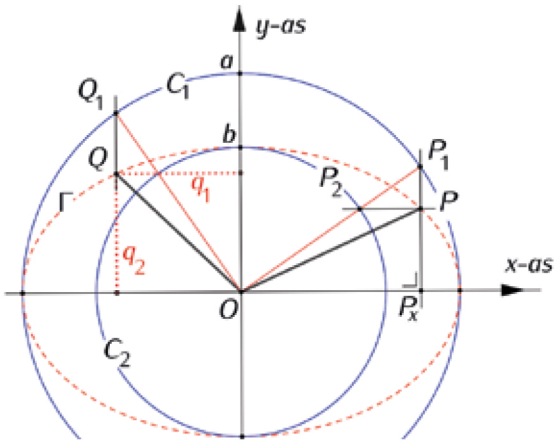
Het bewijs van stelling 1 staat in paragraaf 1 in de appendix bij dit artikel.[3]

De p&l-constructie van de coördinaten van het punt Q volgt nu eenvoudig uit twee evenredigheden die gebaseerd zijn op de in stelling 1 genoemde relaties:
$b : a = p_2 : q_1$, $a : b = p_1 : q_2$
In figuur 2 is de (gebruikelijke) constructie van lijnstukken met lengtes q_1, q_2 uitgevoerd, uitgaande van een lijnstuk KL met lengte $a + b$, en lijnstukken met lengtes p_1, p_2.



figuur 2

Zoals bekend is het met p&l construeren van een kegelsnede *alleen puntsgewijs* mogelijk. Voor de constructie van een punt van de ellips (in casu het punt P) kies ik een *loodrechte lijnvermenigvuldiging*[4] van de cirkel C_1 (middelpunt O) met straal a ten opzichte van de x-as met factor b/a. Zie daartoe figuur 3, waarin de lengte van de straal van de cirkel C_2 (middelpunt O) gelijk is aan b (hier met $b < a$).
Ik zal laten zien dat bij die lijnvermenigvuldiging (het woord 'loodrechte' laat ik in hetgeen volgt maar weg) een cirkel inderdaad wordt afgebeeld op een ellips.



figuur 3

In de appendix (paragraaf 4)[3] toon ik aan, dat deze afbeelding (met een factor kleiner dan 1) overeenkomt met een *orthogonale projectie* van een cirkel in de 3-dimensionale euclidische ruimte op een vlak.

De vergelijking van C_1 is $x^2 + y^2 = a^2$; daarop ligt het punt P_1. Met[5] $x(P_1) = x_1$, $y(P_1) = y_1$ geldt dan:
$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ (1)

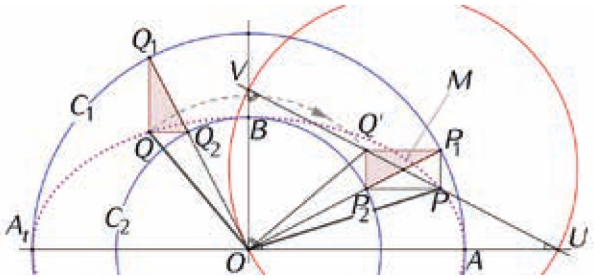
Het punt P is het beeld van P_1 bij de bedoelde lijnvermenigvuldiging. Met $x(P) = x$, $y(P) = y$ is nu:

$$\begin{cases} x(P) = x(P_1) \Rightarrow x_1 = x \\ y(P) = b/a \cdot y(P_1) \Rightarrow y_1 = a/b \cdot y \end{cases} \qquad (2)$$

Immers, in driehoek
OP_xP_1 is $P_1P_x : PP_x = P_1O : P_2O$ of $y_1 : y = a : b$.
Uit (1) en (2) volgt dan door substitutie de vergelijking van de *meetkundige plaats* van het punt P als P_1 de cirkel C_1 doorloopt:
$x^2 + (a/b)^2 \cdot y^2 = a^2$ of $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
En dit is inderdaad de vergelijking van Γ.
Gevolg (van stelling 1). Het punt Q in figuur 3 is uiteraard ook het beeld van een punt van C_1 bij de onderhavige lijnvermenigvuldiging, namelijk van Q_1. Voor het product van de rico's van OP, OQ geldt (per definitie):
$\text{rico}(OP) \cdot \text{rico}(OQ) = -b^2/a^2$.
Nu is $\text{rico}(OP_1) = a/b \cdot \text{rico}(OP)$, $\text{rico}(OQ_1) = a/b \cdot \text{rico}(OQ)$, zodat:
$\text{rico}(OP_1) \cdot \text{rico}(OQ_1) = a^2/b^2 \cdot -b^2/a^2 = -1$
De lijnstukken OP_1 en OP_2 (stralen van C_1) staan dus in O loodrecht op elkaar. En, het omgekeerde is eveneens juist.

Gegeven: twee toegevoegde stralen van een ellips

Ik merk allereerst op dat het werken met coördinaten ten behoeve van een p&l-constructie, zoals in de vorige paragraaf, niet mogelijk is als alleen twee toegevoegde stralen van een ellips in ligging en grootte gegeven zijn. In de nu volgende theoretische voorbehandeling (de analyse) van de constructie zal ik echter wél gebruik maken van de halve assen.



figuur 4

In figuur 4 is de straal van cirkel C_1 gelijk aan a en die van C_2 gelijk aan b. Voorts zijn er twee onderling loodrechte lijnen door O getekend: OA, OB; dit zijn de (symmetrie)assen van de ellips.

De punten P, Q van de ellips zijn de beelden van de punten P_1, Q_1 (op cirkel C_1) bij de lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de lijn OA (de drager van een middellijn van C_1).

De lijnstukken OP_1 en OP_2 zijn zo gekozen dat ze loodrecht op elkaar staan. Op grond van het gevolg van stelling 1 zullen OP en OQ dan toegevoegde stralen van de ellips zijn.
De in Q rechthoekige driehoek QQ_1Q_2 (Q_2 op cirkel C_2) wordt geroteerd in wijzerrichting (over -90°) met O als centrum. Het beeld van die driehoek is driehoek $Q'P_1P_2$ (P_2 op cirkel C_2).
Verder is PQ' & $OA = U$ en PQ' & $OB = V$. Dan is vierhoek $PP_1Q'P_2$ een rechthoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn met de assen van de ellips. Daardoor maakt de lijn UV dezelfde hoeken met de assen van de ellips als de lijn OP_1 (beide zijn drager van een diagonaal van de rechthoek). Dan is, en zie de *gelijkbenige* trapezia $OP_2Q'V$ en $OUPP_2$:
$OP_1 = \boldsymbol{a} = OP_2 + P_2P_1 = \boldsymbol{b} + Q'P =$
$VQ' + Q'P = \boldsymbol{VP}$
$OP_2 = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{UP}$
Ik formuleer nu, deels op grond van wat hierboven is gevonden:

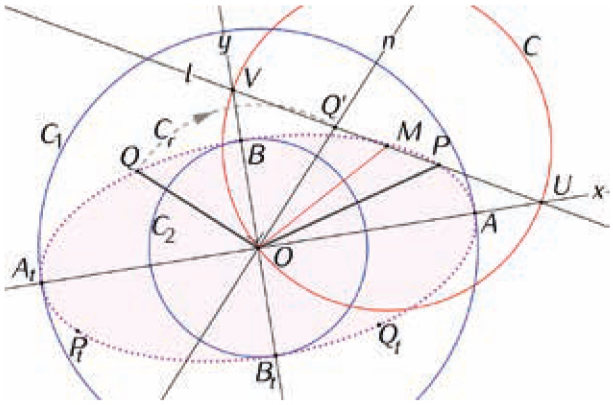
Stelling 2. Zijn OP en OQ toegevoegde stralen van een ellips (met halve assen a en b), is Q' het beeld van Q bij een rotatie om O over -90° en is M het midden van PQ', dan snijdt de lijn PQ' de cirkel met middelpunt M en straal MO in de punten U en V (zie figuur 4), waarbij $VP = a$ en $UP = b$.

Bewijs. Voor de punten U, V op de lijn PQ' geldt dan $VP > UP$. Verder is $VQ' = OP_2 = UP$ (zie de genoemde trapezia), zodat het midden M van het lijnstuk PQ' ook het midden is van het lijnstuk UV. Met andere woorden: M is het middelpunt van de omcirkel van de (in O rechthoekige) driehoek OUV.

Tot zover de theoretische aanloop naar de hierna volgende p&l-constructie.

De constructie van Rytz

Geheel conform stelling 2 kunnen de grote en de kleine as van een ellips met p&l worden geconstrueerd als *alleen* twee toegevoegde stralen OP en OQ gegeven zijn; zie figuur 5.



figuur 5

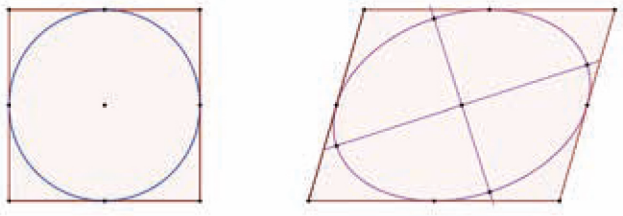
Constructiestappen bij de in ligging en grootte gegeven lijnstukken OP en OQ. [6]

1. Loodlijn(O, OQ) = n
2. Cirkel (O, Q) = C_r // t.b.v. de rotatie.
3. C_r & $n = Q'$
4. Midden(P, Q') = M
5. Lijn(P, Q') = l
6. Cirkel(M, O) = C
7. C & $l = \{U, V\}$
8. Passer(VP, O) = C_1 ; Passer(UP, O) = C_2
9. Lijn(O, U) = x ; Lijn(O, V) = y // dit zijn de assen van de ellips.
10. C_1 & $x = \{A, A_t\}$; C_2 & $y = \{B, B_t\}$ // dit zijn de toppen van de ellips.

De ellips is nu bepaald door vijf van de zes (acht) punten A_1, A_2, B_1, B_2, P, Q, (P_t, Q_t).
Deze constructie, die voor het eerst gepubliceerd is in 1845, is vernoemd naar de Zwitserse wiskundige David Rytz von Brugg (1801–1868).

Het waarom?

Het antwoord op die vraag is natuurlijk niet alleen 'Vanwege de wiskunde!'. Het met p&l construeren van een ingeschreven cirkel in een vierkant kost minder dan een cent: construeer het midden van twee geschikte lijnstukken en je hebt het middelpunt en een raakpunt van die cirkel, zie figuur 6 (links). Het tekenen (want met p&l écht construeren gaat immers niet) van een ingeschreven ellips van een parallellogram, zie figuur 6 (rechts), waarin ook de assen van het parallellogram zijn weergegeven, kost toch wel iets meer!

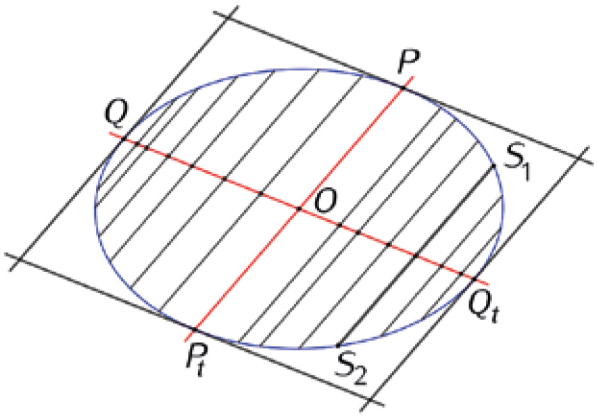


figuur 6

Maar, een eigenschap van twee toegevoegde middellijnen van een ellips kan bij dit laatste uitkomst bieden, namelijk:

Stelling 3. De meetkundige plaats van de middens van de koorden van een ellips die evenwijdig zijn met een middellijn van die ellips, is de aan die middellijn toegevoegde middellijn, zie figuur 7.

Een analytisch bewijs van deze stelling staat in de appendix (in paragraaf 2).[3]



figuur 7

In figuur 7 zijn ook de raaklijnen in de eindpunten van beide toegevoegde middellijnen PP_t en QQ_t weergegeven. Deze zijn uiteraard (?) evenwijdig met de betreffende middellijn.[7]

Een slotopdracht. Construeer met p&l de assen van een ingeschreven ellips in een gegeven parallellogram. Hierbij merk ik op, dat er natuurlijk méér ingeschreven ellipsen zijn dan die ene die kan worden 'gevonden' met de constructie van Rytz.[8]

Voor de appendix bij dit artikel:

vakbladeuclides.nl/963klingens

Noten

[1] In hetgeen volgt betekent u & $v = \{X, Y\}$: de punten X en Y zijn de snijpunten van de meetkundige objecten u en v; u & $v = X$ betekent: X is een/het snijpunt van u en v.

[2] De algemene geldigheid van de stelling wordt geen geweld aangedaan door te stellen dat $p_1, p_2 > 0$ en ook $q_1, q_2 > 0$.

[3] Voor de appendix bij dit artikel: *vakbladeuclides.nl/963klingens*

[4] Een lijnvermenigvuldiging behoort tot de klasse van affiene afbeeldingen van het euclidische vlak op zichzelf. Zie voor een beschouwing daarvan bijvoorbeeld: *http://www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm#41*

[5] Met $x(U)$ c.q. $y(U)$ wordt in hetgeen volgt bedoeld: de x-coördinaat van het punt U c.q. de y-coördinaat van het punt U.

[6] De functies die in de constructiestappen worden gebruikt, komen in het algemeen overeen met functies die zijn opgenomen in computer-tekenprogramma's, zoals GeoGebra. Na // staat commentaar bij de constructiestap. Zie: *https://www.geogebra.org*.

[7] Zie opmerking 2 bij stelling 3 in paragraaf 2 van de appendix.

[8] In de appendix (paragraaf 5) staat een eenvoudiger methode om punten van een in een parallellogram ingeschreven ellips te construeren. Die methode is gebaseerd op een orthogonale projectie, waarvan een korte inleiding staat in paragraaf 4 van die appendix.

Dick Klingens

De bissectricestelling en wat er zo bij komt kijken

Dick Klingens raakte geïnspireerd door het lezen van de hoofdstukken 6 (Verhoudingen van lijnstukken), 8 (Gelijkvormigheid) en 20 (Oppervlakte en omtrek van de cirkel) en Aanvullingen uit het boek Planimetrie voor M.O. en V.H.O. van C.J. Alders (1904 – 1969) uit 1958. Dit artikel is opgedragen aan Cor Alders.[1]

Dick Klingens overleden

Vlak voor het verschijnen van deze *Euclides* bereikte ons het verdrietige bericht dat Dick Klingens onverwachts is overleden. Dick heeft nog de drukproef van dit artikel nauwgezet gecontroleerd. Met toestemming van zijn familie publiceren we dit artikel. De tijd was te kort om een In memoriam te schrijven en te plaatsen waarin we stilstaan bij alles wat Dick heeft betekend voor *Euclides* en het wiskundeonderwijs. Dat volgt in nummer 97-1.

Inleiding

De zogeheten bissectricestelling behoort niet meer (expliciet) tot de basiskennis binnen het huidige meetkundeprogramma van het voortgezet onderwijs, nu daarin vooral aan de analytische aspecten van de vlakke meetkunde aandacht wordt gegeven. In hetgeen volgt ga ik juist daarom in op enkele synthetische aspecten van de stelling en op 'wat er zoal bij kan komen kijken'. En, ik zal dat doen zonder goniometrie.

De stelling, ongebruikelijk bewezen

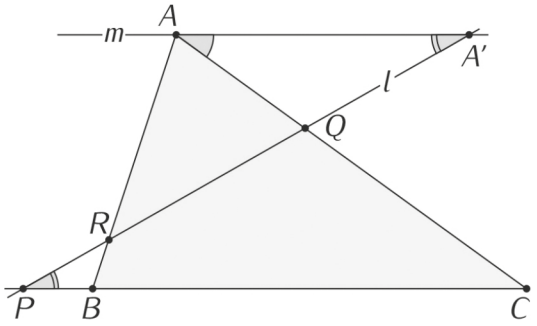
De bedoelde euclidische stelling luidt:

Stelling 1 (bissectricestelling). Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde van die hoek in stukken die zich verhouden als de opstaande (aangrenzende) zijden.

Van deze stelling zal ik, zoals de kop van deze paragraaf al aangeeft, een bewijs geven dat niet zo bekend is, en zeker ook omdat het daarbij te gebruiken 'hulpmiddel', een transversaal, al lange tijd niet meer in het curriculum voorkomt. Daarom volgt er eerst een definitie daarvan.
Definitie. Een (rechte) lijn die de drie zijden van een driehoek snijdt en niet door een hoekpunt daarvan gaat, is een transversaal van die driehoek.

De bekendste eigenschap van een transversaal is vervat in de stelling van Menelaos[2]:

Stelling 2 (Menelaos). Snijdt de transversaal l de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in opvolgend de punten P, Q, R, dan geldt[3]:
$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = 1$

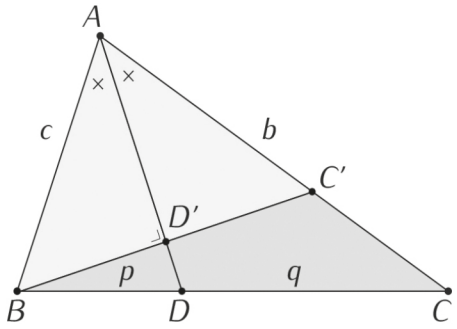


figuur 1

Bewijs. Zie figuur 1. Met A' als snijpunt van de lijn l met de lijn m door A die evenwijdig is met BC, zijn de driehoeken QCP en QAA' gelijkvormig (hh).
Dus: $QC : QA = CP : AA'$
De driehoeken RAA' en RBP zijn eveneens gelijkvormig (hh), zodat: $RA : RB = AA' : BP$
Met deze kennis kan ik schrijven:

$$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB} =$$
$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CP}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BP} = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{-CP}{-BP} = 1$$

En hiermee kan dan het (ongebruikelijke) bewijs van stelling 1 redelijk eenvoudig worden geleverd.



figuur 2

Eerste bewijs van stelling 1

In de configuratie van figuur 2 moet dus bewezen worden:
$BD : CD = BA : CA = c : b$
De loodlijn uit B op AD snijdt de lijnen AD, AC in opvolgend D', C'. Dan is driehoek ABC' gelijkbenig (met top A), zodat ook $BD' = C'D'$.
Ik beschouw nu driehoek BCC' met als transversaal de lijn $AD'D$. Volgens stelling 2 geldt dan in die driehoek:

$$\frac{DB}{DC}.\frac{AC}{AC'}.\frac{D'C'}{D'B}=1 \Rightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{AC}{AB}.\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow BD:CD=c:b$$

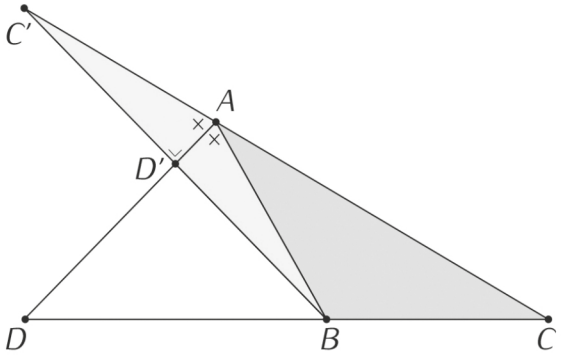
Opmerkingen
1) Er zijn natuurlijk ook andere verschijningsvormen van de bissectricestelling. Zo is met $BD = p$, $CD = q$ natuurlijk $p : q = c : b$. Met $BC = a$ is dan:

$$BD=p=\frac{ac}{b+c},\ CD=q=\frac{ab}{b+c}$$

2) In figuur 3 is AD de *buitenbissectrice* van hoek A. Ook hier geldt: $BD : CD = c : b$
Het hierboven staande bewijs (van stelling 1) kan onveranderd worden gebruikt om de juistheid van deze eigenschap te bewijzen. Bij een binnenbissectrice spreekt men van een *inwendige* verdeling van de overstaande zijde, bij een buitenbissectrice van een *uitwendige* verdeling van die zijde.

3) Met een bewijs uit het ongerijmde kan ook de *omgekeerde* stelling van stelling 1 worden bewezen.
Stelling 1 (omgekeerd). Als een lijn door een hoekpunt van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de opstaande zijden, dan is die lijn een bissectrice van de betreffende hoek.

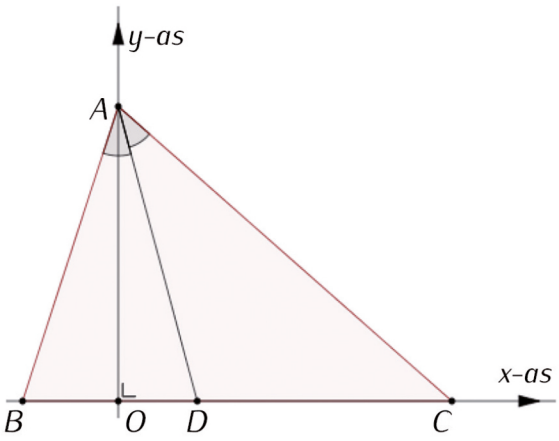
In paragraaf 1 van de appendix[4], staat het bedoelde bewijs.



figuur 3

Tweede bewijs van stelling 1

Een *analytisch* bewijs van stelling 1 is overigens redelijk elementair. Ik kies daartoe een orthogonaal assenstelsel xOy waarvan de x-as de drager is van de zijde BC van driehoek ABC en waarvan de y-as door het punt A gaat; zie figuur 4.



figuur 4

Ik ga dan uit van $A = (0, r)$, $B = (-p, 0)$, $C = (q, 0)$ met p, q, $r > 0$ en $p < q$. Vergelijkingen van de opstaande zijden zijn dan:
AB: $y = \frac{r}{p}(x + p)$
AC: $y = -\frac{r}{q}(x - q)$
Volgens een 'bekende formule'[5] is dan de vergelijking van het bissectricepaar van hoek A:

$$\left|\frac{rx-py+pr}{\sqrt{r^2+p^2}}\right|=\left|\frac{rx+qy-qr}{\sqrt{r^2+q^2}}\right|$$

De x-coördinaat x_D van het punt D ($y_D = 0$) voldoet dan, met $c = AB = \sqrt{(r^2 + p^2)}$, $b = AC = \sqrt{(r^2 + q^2)}$
en na deling door r, aan de vergelijking:

$$\left|\frac{x+p}{c}\right|=\left|\frac{x-q}{b}\right| \Rightarrow b(x + p) = \pm c(x - q)$$

Omdat $x_D > 0$ is, moet in de laatste vergelijking het minteken gebruikt worden. Dan is:

$$bx + bp = -cx + cq \Rightarrow x_D = \frac{-bp+qc}{b+c}$$

en daarmee is, met $p + q = a$:

$$BD = p + \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}c = \frac{ac}{b+c}$$

$$\text{en } CD = q - \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}b = \frac{ab}{b+c}$$

waaruit opnieuw blijkt (zie opmerking 1 hierboven) dat $BD : CD = c : b$

N.B. De keuze van $p < q$ in het bewijs heeft natuurlijk geen invloed op de algemene geldigheid van de stelling. Als $p = q$ is, is de driehoek A-gelijkbenig. En daarin is stelling 1 triviaal.

Andere bewijzen van de bissectricestelling

Voor een iets gecompliceerder bewijs van stelling 1 dat *alleen* op gelijkvormigheid van driehoeken is gebaseerd, verwijs ik naar paragraaf 2 van de appendix. Daarin staat ook het meest gebruikelijke bewijs.

Een bewijs van de bissectricestelling waarin gebruik gemaakt wordt van *omtrekshoeken* (op een cirkel), staat meestal *niet* in de leerboeken, omdat de daaraan ten grondslag liggende theorie later in het curriculum aan de orde kwam/komt. Ik heb (een deel van) die theorie opgenomen in de appendix (zie paragraaf 3). Hieronder gebruik ik dan omtrekshoeken voor het bewijs van stelling 1.

Derde bewijs van stelling 1

In figuur 5 snijdt de A-bissectrice van driehoek ABC de zijde BC in het punt D en de omcirkel van de driehoek ook in het punt D'.

Nu is:

$\angle BAD = \frac{1}{2}\text{bg}(BD') = \angle D'BC$ (*omtrekshoeken*)

$\angle D'AC = \frac{1}{2}\text{bg}(D'C) = \angle DCD'$ (*omtrekshoeken*)

De bogen BD' en CD' zijn daarmee dus aan elkaar gelijk. Voorts zijn de driehoeken ABD' en BDD' gelijkvormig (*hh*), zodat:

$AB : BD = BD' : DD'$ (1)

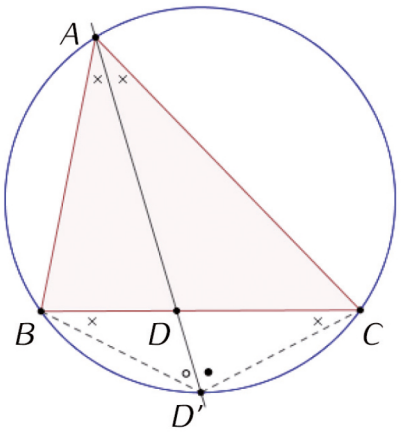
En de driehoeken ACD' en CDD' zijn dat eveneens, zodat:

$AC : CD = CD' : DD'$ (2)

En driehoek BCD' is D'-gelijkbenig, zodat:

$BD' = CD'$ (bij gelijke bogen horen gelijke koorden)(3)

Uit (1), (2) en (3) volgt:



figuur 5

$AB : BD = AC : CD$ of ook $BD : CD = AB : AC$

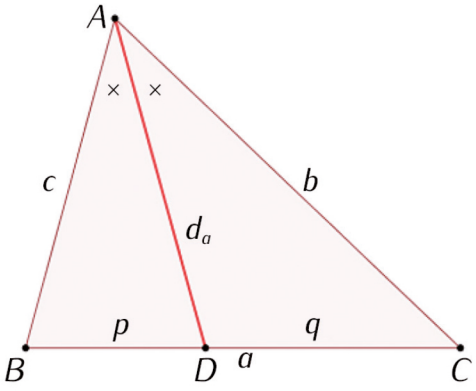
En dit is wat in stelling 1 is verwoord.

De bissectriceformule

De uitdrukking waarmee de lengte van een bissectrice van een driehoek kan worden berekend indien de lengtes van de zijden van die driehoek gegeven zijn, staat bekend als de *bissectriceformule*. Die formule luidt voor de bissectrice $d_a = AD$ (met punt D op BC) van hoek A van driehoek ABC (met a, b, c als lengtes van de zijden):

$d_a^2 = bc - pq$ (4)

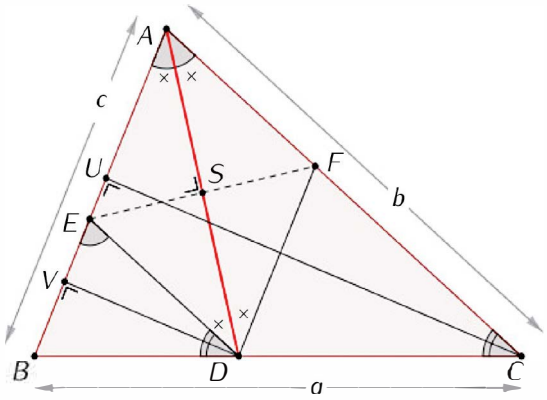
waarbij dan weer $BD = p$ is en $CD = q$, zie figuur 6.



figuur 6

De bissectriceformule wordt meestal afgeleid met de *stelling van Stewart* [6]. Ik zal hier echter een bewijs laten volgen waarin een ruit een bijzondere rol speelt. Twee andere bewijzen, de eerste met gebruik van gelijkvormigheid en de tweede met gebruik van de stelling van Pythagoras, staan in de appendix (paragraaf 4).

In figuur 7 is $DE \parallel CA$, $DF \parallel BA$, $CU \perp AB$, $DV \perp AB$, en is S het snijpunt van EF en de A-bissectrice AD van driehoek ABC. Vierhoek $AEDF$ is dan een parallellogram, en omdat AD ook bissectrice is van de hoek A daarvan, is $AEDF$ een *ruit*. Van het feit dat $AE = DE$ is, zal ik een enkele keer gebruik maken. En in die ruit is (natuurlijk)



figuur 7

ook $AS = \frac{1}{2}AD$. Volgens de bissectricestelling is:
$BD : CD = AB : AC = c : b$
Ook hier gebruik ik $BD = \frac{ac}{b+c}$. Uit de gelijkvormigheid (*hh*) van de driehoeken *BDE* en *BCA* volgt:

$$BD : BC = DE : CA \Rightarrow DE = \frac{CA}{BC} \cdot BD = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{bc}{b+c} \ (= AE) \qquad (5)$$

De driehoeken *ADV* en *AES* zijn eveneens gelijkvormig (*hh*), zodat:
$AD : AE = AV : AS \Rightarrow AD : AE = AV : \frac{1}{2}AD \Rightarrow$
$AD^2 = 2AV \cdot AE \qquad (6)$
En het rechterlid van uitdrukking (6) verdient nu verdere uitwerking. Opnieuw gelijkvormigheid: driehoek *EVD* is gelijkvormig (*hh*) met driehoek *AUC*, waaruit volgt:

$$EV : AU = DE : CA \Rightarrow EV : AU = DE : b \Rightarrow$$

$$EV = AU \cdot \frac{DE}{b} \overset{\text{MET (5)}}{=} AU \cdot \frac{c}{b+c} \qquad (7)$$

In de driehoeken *BUC* en *AUC* is dan:
$a^2 = CU^2 + BU^2 = (b^2 - AU^2) + (c^2 - AU^2) =$

$b^2 + c^2 - 2c \cdot AU$ zodat: $AU = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
En nu blijkt met relatie (7):

$$EV = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)}$$

Uit $AV = AE + EV$ en opnieuw (5) volgt dan:

$$AV = \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)}$$

En met deze laatste uitdrukking gaat relatie (6) over in:

$$AD^2 = 2 \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)} \cdot \frac{bc}{b+c} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \qquad (8)$$

Of ook:

$$d_a^2 = bc - \frac{ac \cdot ab}{(b+c)(b+c)} = bc - pq$$

En ja, dit is uitdrukking (4).

Voor de appendix bij dit artikel zie:
vakbladeuclides.nl/967bissectricestelling

Noten

[1] Zie ook: Vredenduin, P.G.J. (1969). In memoriam Cor Alders. *Euclides, jaargang*(44), nr. 5, p. 129.

[2] Naar Menelaos van Alexandrië (70 – 130, Egypte). Menelaos gebruikte de stelling in zijn boek *Sphaerica* bij de behandeling van driehoeken op een boloppervlak. Zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria* en *https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Menelaos* De op deze laatste pagina gegeven eigenschap wijkt iets af van de hierboven staande door een ander uitgangspunt, in dit artikel namelijk het begrip deelverhouding; zie [3].

[3] Met drie collineaire, verschillende punten *P*, *Q*, *X* is de zogeheten deelverhouding (*PQX*) van het lijnstuk *PQ per definitie* gelijk aan $\varepsilon \cdot XP/XQ$. Daarbij moet rekening gehouden worden met de oriëntatie van die (deel)lijnstukken. Ligt *X* op het lijnstuk *PQ*, dan is $\varepsilon = -1$; ligt *X* op een verlengde van *PQ* dan is $\varepsilon = 1$.

[4] Zie de website van *Euclides* voor de appendix bij dit artikel.

[5] Hier staat niets anders dan dat de afstand van een punt met coördinaten (*x*, *y*) tot de lijn *AB* gelijk is aan de afstand van datzelfde punt tot de lijn *AC*. Een bissectrice van een hoek wordt hier opgevat als de *meetkundige plaats* van de punten die *gelijke* afstand hebben tot de benen van die hoek

[6] Naar Matthew Stewart (1717-1785, Schotland). Zie *https://nl.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart* Voor de naar hem vernoemde stelling zie bijvoorbeeld: http://www.pandd.demon.nl/stewart.htmv