# EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

EXAMENNUMMER 2021

Lesmateriaal over steekproefsimulaties

Besprekingen van de examens wiskunde vmbo-gl en -tl, havo (A en B) en vwo (A, B, en C)

Examenvoorbereiding met oude examens

NR.1

JAARGANG 97 - SEPTEMBER 2021

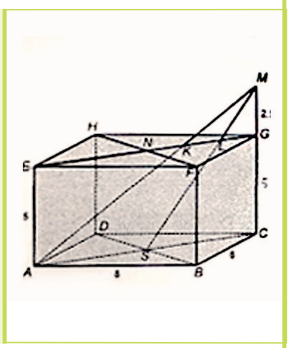
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 97 NR1

## IN DIT NUMMER





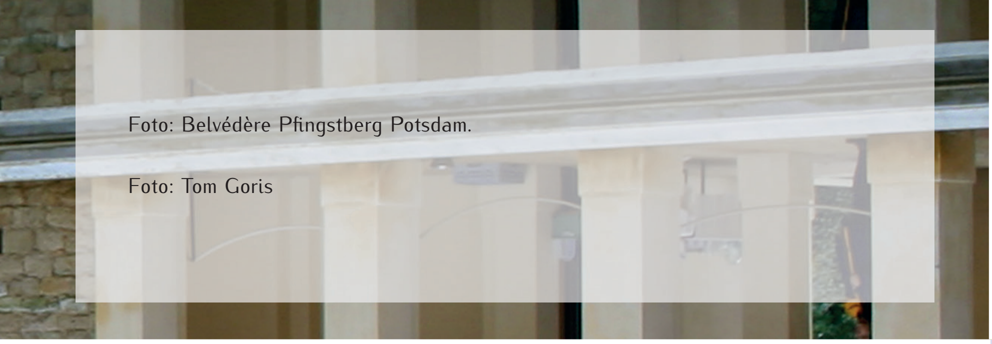


Foto: Belvédère Pfingstberg Potsdam.

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN



## Kort vooraf

Na twee jaar weer een 'gewone' examenspecial met zes persoonlijke recensies van docenten wier leerlingen het betreffende examen ook echt hebben gemaakt. Zowel bij het vmbo-examen als bij de wiskunde-A-examens gaat in de besprekingen veel aandacht uit naar de 'taligheid' van de examens, een aspect waar de meningen over blijven verschillen. We zijn de recensenten weer uitermate dankbaar dat ze onder hoge tijdsdruk (want de deadline is altijd half juni...) deze recensies hebben geschreven.

Helaas wordt het goede nieuws dat er weer een examenspecial is volledig overschaduwd door triest nieuws. Ger Limpens is plotseling overleden. Ger stond aan de basis van deze vorm van de examenspecial en hij was de vaste contactpersoon tussen Cito en *Euclides*. Daarnaast schreef hij een aantal boek-recensies in zijn geheel eigen stijl.
De examenspecial opent met een In Memoriam voor Ger.

Ruim voor de zomer werden we ook al opgeschrikt door een ander groot verlies: Dick Klingens. Marja Bos, die als hoofd-redacteur van *Euclides* nauw met Dick samen-werkte, stelde een bloemlezing van herinne-ringen aan Dick samen. Daarnaast hebben we, als eerbetoon, zijn laatste artikelen gebundeld in een *Dick Klingens Special*, te downloaden van de website. In het Kort Vooraf van die editie zie je dat we de komende jaargang nog wel de nodige 'mooie meetkunde' te publiceren hebben.

Voor de *Euclides*-special met artikelen van Dick Klingens:

*vakbladeuclides.nl/971klingens*

Tom Goris

# In memoriam Ger Limpens

Peter Kop, Marcel Voorhoeve

## Een bijzonder en betrokken mens is overleden

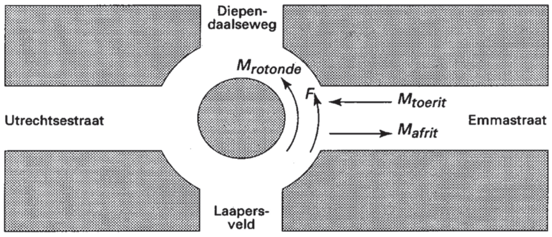
*Ger op weg naar de top bij het bedwingen van een van de vele bergen. Hij overleed op 7 juli: de dag dat de Tour de France de Ventoux twee keer aandeed.*

### Geen standaarddocent

Ger start zijn loopbaan als wiskundedocent na een studie wiskunde aan de Universiteit Utrecht. In de periode 1983-1998 werkt hij op het Alberdingk Thijm College te Hilversum. Hij heeft een nauwe band met zijn leerlingen. Zo is in *Didactief* van september 2015 te lezen dat een oud-leerling, tijdens een door Ger georganiseerde wandelreis, bij het kampvuur voor het eerst spreekt over zijn coming-out: 'Ik heb het wel aan jou te danken dat ik het durfde te vertellen. De sfeer tijdens die reis was zo vriendelijk en gemoedelijk. Ik besloot: bij thuiskomst vertel ik het ook mijn ouders.' Verder vinden we in het interview typerende uitspraken van Ger: 'Ik concludeerde dat onderwijs geven enorm veel energie opslorpt en dat het levensgevaarlijk is om dat fulltime te doen. Dat heb ik dus ook nooit gedaan.' En: 'Ik was binnen de school geen standaarddocent; ik had een lokaal dat geen collega wilde omdat het daar te druk en luidruchtig was. Dat stoorde me absoluut niet.' Waarop de oud-leerling zegt: 'Omdat het in je eigen klas ook druk was. Niet om te vleien hoor, maar je was veruit de populairste leraar.'

### Toetsdeskundige

Begin jaren '90 wordt Ger lid van de constructiegroep havo wiskunde A. Daar ontwikkelt hij zijn liefde voor wiskunde A (en later ook wiskunde C) verder en maakt hij mooie opgaven, zoals deze opgave uit het examen havo wiskunde A 1997 I over de capaciteit van een rotonde.




Hierna wordt voor elke weg naar de rotonde de zogenaamde *capaciteit Cap* berekend met de formule:

$$Cap = (1 - \frac{F}{800})\,(1440 - M_{rotonde} - 0{,}5 \cdot M_{afrit})$$

Enige jaren later ontstaat er een vacature voor toetsdeskundige bij Cito. Na een spannende race wordt Ger uitgekozen en leert hij het vak van Kees Lagerwaard. In deze rol blijkt dat Ger uiterst zorgvuldig is in het formuleren, in woord en schrift, van toetsopgaven. Als aanpassingen wenselijk zijn, is hij alleen met goede argumenten te overtuigen. Het valt hem niet altijd makkelijk om van zijn creaties afstand te nemen. Zijn kritische houding maakt dat hij soms moeite heeft met aanpassingen die in zijn ogen onvoldoende doordacht zijn.

Ger vindt het belangrijk om voor de buitenwereld inzichtelijk te maken hoe examens gemaakt worden, zoals blijkt uit de vele artikelen in *Euclides* waaraan hij heeft bijgedragen. Binnen Cito is hij expert in de analyse en interpretatie van de internationale PISA-onderzoeken. Hij is een graag geziene spreker op conferenties en studiedagen over deze onderwerpen. Vanuit Cito denkt hij in syllabuscommissies mee over curriculumvernieuwingen en is hij voor de *Euclides*-redactie het vaste aanspreekpunt voor alles wat met het examennummer te maken heeft. Het idee om docenten recensies van de examens te laten schrijven in plaats van de objectieve analyse van het examen door Cito zelf was zijn idee, evenals de serie artikelen in het kader van 50 jaar Cito van drie jaar geleden.

Naast de officiële werkzaamheden is Ger actief in werkgroepen van de NVvW: de havo/vwo werkgroep, het Wereldwiskunde Fonds en de Zebrareeks. Als lid van de Zebraredactie komt zijn kritische mening in de beoordeling van concepten van potentiële boekjes naar voren en neemt hij veel werk op zich door hele boekjes te redigeren op taal. Ook is hij jarenlang lid van de Alympiadecommissie als medecomponist van een groot aantal opdrachten.

## Maatschappelijk betrokken

De bewuste keuze van Ger om niet fulltime te werken geeft hem tijd voor andere dingen in de wereld. Hij maakt zich druk over maatschappelijk onrecht en kan daarover uitgebreid 'bomen' opzetten. In die discussies neemt hij duidelijk stelling. Startend met de zinsnede 'Ik weet niet wat ik daarvan moet vinden', volgt na enige tijd vaak een duidelijke afwijzing. Maar het blijft niet alleen bij woorden. Hij is bij veel initiatieven actief betrokken, waarbij het parool is 'de schouders eronder'. Bijvoorbeeld bij de stichting *Joy of a Toy*, die hij samen met Arie van Kooten opricht en waarvoor Ger vele jaren het secretariaat en de financiën doet.

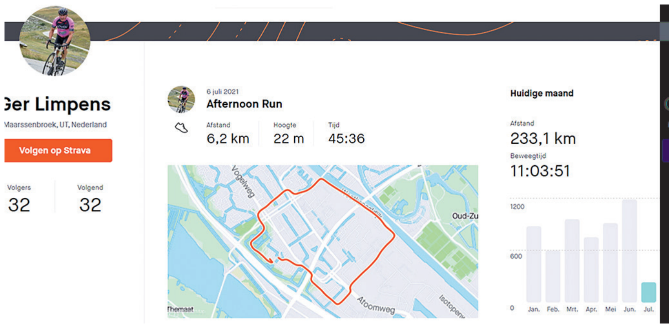

Stichting *Joy of a Toy* is in 1990 opgericht door Arie van Kooten en Ger Limpens, die elkaar kennen van hun wiskundestudie. Het doel van *Joy of a Toy* is de ondersteuning van de allerarmsten op het platteland van Zambia. Inmiddels heeft de stichting een weeshuis, een ziekenhuis en een school gebouwd voor de aidswezen van Kalwala's Village. Zie *www.joyofatoy.nl* (het archief van de rondzendbrieven laat zich lezen als een roman...)

*Uit: Euclides 91-7, 2016*

Sinds 2000 is hij penningmeester bij *STIL* (Stichting Lauw-Recht), een solidariteitsorganisatie voor vluchtelingen en migranten zonder verblijfsvergunning. Zelf stelt hij zich in de nieuwsbrief van *Joy of a Toy* in 2009 als volgt voor: 'Behalve interesse in wiskunde en onderwijs, maatschappelijke betrokkenheid (met name de enorme welvaartskloof tussen de westerse wereld en andere delen van de wereld en de gevolgen die deze kloof creëert ten aanzien van onderwijs en migratieproblematiek), is er ook een brede culturele belangstelling variërend van een omnivore muzikale interesse tot literatuur.' Die betrokkenheid bij de wereld is ook zichtbaar in de jaarlijkse kerstkaarten die hij en Marian sturen: steeds originele en intelligente juweeltjes.
En vrijwel iedereen die hem kent weet van zijn lidmaatschap van het Republikeins Genootschap.

## Fietsen

In zijn vrije tijd fietst Ger graag. Trots vertelt hij over de tochten met zijn zonen. In het begin kan hij het nog 'bolwerken met de jongens' maar later vertelt hij luchtig dat hij 'toch de oude lul' is die door hen ontzien moet worden. Hij loopt ook regelmatig hard. Ook op 6 juli, zoals blijkt uit zijn laatste Strava-profiel (het medium waarop hij al zijn prestaties deelde onder zijn sportvrienden).




Nu is zijn levenstocht gestopt. Plotseling. We gaan een betrokken en enthousiast wiskundige missen, een mooi, creatief en graag gezien mens. Op 7 juli, de dag van de Ventoux in 2021. We wensen Marian en Gers zonen Rens en Tim sterkte.

Douwe Wielenga, Piet van Blokland

# Toeval in de greep door simulatie

Omdat statistiek bij vwo A/C alleen nog in het schoolexamen zit, is een moderne didactische aanpak en toetsing mogelijk waarbij simulatie een grote rol speelt. Sinds juni 2021 zijn de VUStat-apps met bijbehorend lesmateriaal *Toeval in de greep* beschikbaar op de NVvW-website.

## Inleiding

Statistiekonderwijs in het vwo begint meestal met een fase in de vierde klas waarin op allerlei manieren informatie uit complete gegevensbestanden zichtbaar wordt gemaakt. Daarmee kun je dan vragen over de hele onderzochte populatie al of niet beantwoorden. Daar gaat dit artikel niet over.

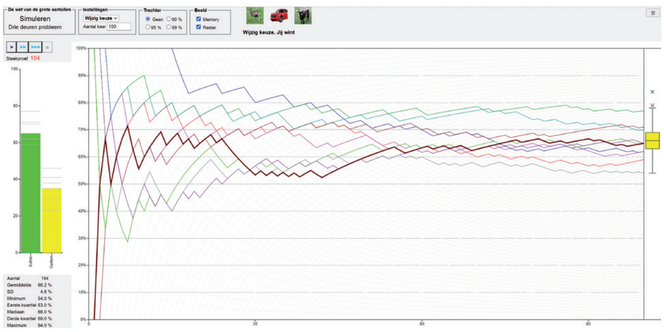
Vervolgens stappen we over op de fase waarin het gegevensbestand een *steekproef* is uit een grotere populatie. Op grond daarvan willen we uitspraken doen over de populatie zelf. Maar dan komt er onzekerheid bij, veroorzaakt door het toeval dat er bij het trekken van die (aselecte) steekproef is ingeslopen. Dus is het van belang deze fase te beginnen met een onderzoek van de eigenschappen van het toeval. Dat kan tegenwoordig heel goed met simulaties van toevalsprocessen.

## Werking van het toeval

Simulaties geven inzicht in het basisidee ‘grotere steekproeven dringen met hun gemiddelde het toeval terug’. Je krijgt het toeval meer in de greep. Dat is de wet van de grote aantallen. Het kansbegrip wordt daaraan opgehangen.

Voor dat basisidee zit in het pakket apps van VUStat [1] een voorbeeld van een toevalsproces waarbij het niet evident is wat de kans op succes is: het is het aloude tv-spel met de drie deuren en een prijs achter één ervan. Je mag een deur kiezen en de spelleider, die weet waar de prijs zit, opent nu van de andere twee deuren net die deur waar geen prijs achter zit. Wat doe je: wissel je nog van deur of blijf je bij je oorspronkelijke keuze?

Leerlingen kunnen bij herhaling experimenteren met die keuze, en hun resultaten worden via internet in een gezamenlijke grafiek omgezet. Daaraan zie je al hoe het succespercentage bij toenemende steekproefomvang naar een stabiele waarde lijkt te gaan, zie figuur 1.




*figuur 1* [2] *App: De wet van de grote aantallen*

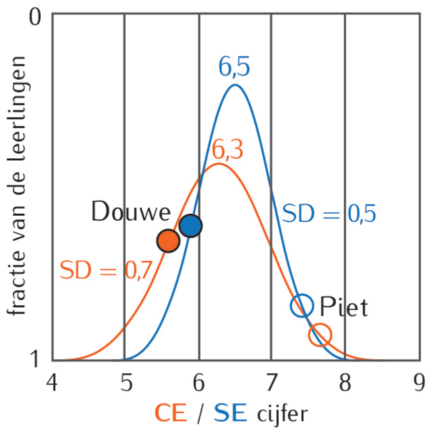
En dan laat je het simulatieproces helemaal door de computer overnemen en kun je experimenteren met de variabiliteit van het eindpercentage bij verschillende steekproefomvangen. In eerste instantie kijk je naar de boxplot, en in tweede instantie naar de standaardafwijking. Zo wordt de wortel-*n*-wet experimenteel ontdekt: 25 keer zoveel werk levert 5 keer zo kleine variabiliteit.

Nu zijn leerlingen gewend aan het idee dat je met simulatie kansen kunt verkrijgen.

Als je dit statistische verschijnsel niet goed in je denken hebt verankerd, kun je makkelijk met je intuïtie verkeerde conclusies gaan trekken. Het blijkt dat die verankering niet zo goed gaat bij veel leerlingen als je alleen woorden en formules gebruikt.

## Verkeerde conclusie

Dit voorbeeld is beschreven naar aanleiding van een artikel van Van Brederode & Meeter.[3] Het centraal examen voor een vak (CE) is een steekproef met omvang 1. Maar het schoolexamen (SE) is een steekproef met een groter aantal cijfers waar het gemiddelde van genomen wordt. We weten, uit de simulaties van zojuist, dat de variabiliteit van de verdeling van de CE-cijfers in het land dus waarschijnlijk groter is dan die van de verdeling van de SE-cijfers. Dat is ook zo: landelijk was vroeger de situatie zoals in figuur 2. Bovendien lag het SE gemiddeld 0,2 punt hoger dan het CE.




*figuur 2 Naar: Van Brederode & Meeter* [3]

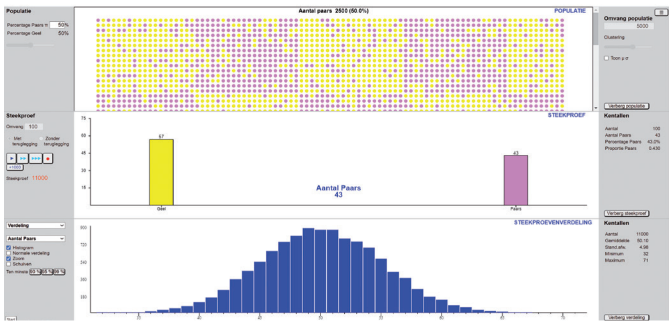
Stel dat Douwe een vakniveau heeft dat één standaardafwijking onder het landelijk gemiddelde ligt, consequent zowel bij het SE als bij het CE. De correlatie tussen SE en CE is in dat geval perfect.
Dan zie je aan figuur 2 dat de verwachte score van Douwe bij het SE voor dat vak hoger zal liggen dan bij het CE. En bij Piet, die een niveau heeft dat twee standaardafwijkingen boven het gemiddelde ligt, zal het verwachte SE juist lager liggen. Een school met veel Douwes zal daarom naar verwachting gemiddeld een lager CE hebben dan SE, en een school met veel Pieten juist gemiddeld een hoger CE dan SE, blijkt uit een simpel rekensommetje.

Jarenlang is dit *statistische* verschijnsel *oorzakelijk* geïnterpreteerd: als je je concentreert op scholen met een laag gemiddeld CE dan hebben die meestal een hoger SE dan CE; dus die zullen hun zwakke leerlingen wel een handje geholpen hebben op het schoolexamen! Daar moest de inspectie op controleren. Zo zie je een ongewenst maatschappelijk gevolg van een gebrekkig statistisch inzicht. Je kunt dit ook laten zien door simulatie als je de redenering niet helemaal vertrouwt, en je kunt daarbij verschillende waarden van de correlatie tussen SE- en CE-cijfers proberen. Dan blijkt: hoe zwakker de correlatie hoe sterker het effect. Mogelijk moeten de waargenomen data nog verder geanalyseerd worden om een definitief oordeel te kunnen vellen.

In het materiaal van het vwo lespakket *Toeval in de greep*[4] komen dergelijke dingen bewust aan de orde en ze worden verder onderzocht, meestal met simulaties van toevalsprocessen. Er zijn wel meer voorbeelden waarbij de mens door zijn intuïtieve systeem-1-denken (Kahneman [5]) eerst aan een oorzakelijk verband denkt, en daarna pas door zijn systeem-2-denken wordt gecorrigeerd, namelijk: het kan ook een statistisch effect zijn, waar geen oorzaak voor nodig is. De wet-van-de-kleine-aantallen en regressie-naar-het-midden zijn daar voorbeelden van. Leerlingen moeten daarom enkele hoofdstukken lezen en samenvatten uit Kahnemans boek *Thinking fast and slow*.

## Verdeling, schatten en beslissen

Aan de basis van het didactisch concept ligt ook het volgende idee. Door computers veel aselecte steekproeven uit een populatie te laten trekken (simuleren) krijg je inzicht in de kansverdeling van het gemiddelde van zo'n steekproef. In figuur 3 staat een voorbeeld met een eerlijk muntstuk dat honderd keer gegooid wordt, en de steekproefgrootheid is het percentage successen.

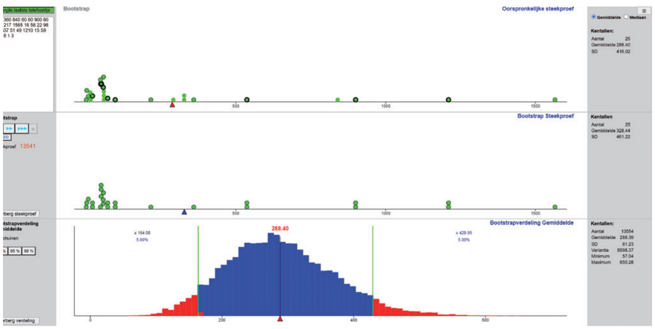



*figuur 3* [2] *App: Steekproeven uit ja-nee populatie*

Dat inzicht, dat begrip, ontstaat bij leerlingen maar moeizaam als je alleen woorden of formules gebruikt. Veel leerlingen blijven dan, gehandicapt, onbegrepen dingen met formules doen.
Als je kunt experimenteren met een computer die, door jezelf gestuurd, het resultaat van zeer veel herhaalde steekproeven toont in de vorm van een verdeling, dan zie je het toeval aan het werk en dan heeft een leerling een prothese die hem over die handicap heen helpt. Een leerling kan proefondervindelijk statistische wetmatigheden bij toevalsprocessen onderzoeken, cq. aantonen. En nu kun je heel makkelijk overstappen op schatten en toetsen in de situatie waarin je slechts een (aselecte) steekproef hebt en toch iets over de hele populatie wilt zeggen. Dat moet een leerling dan *blijven* doen met simulaties, en niet met formules. Daardoor wordt die voornoemde prothese steeds opnieuw gebruikt, als een soort hamer die het begrip er telkens dieper inslaat.
Om dezelfde reden is het verstandig de didactische opbouw concentrisch te maken: begrippen komen steeds terug en worden verder ingekleurd of uitgebouwd. >

## Concentrisch

Zo kun je bijvoorbeeld beginnen met het behandelen van het idee van hypothesetoetsen en daarna het betrouwbaarheidsinterval definiëren als de verzameling van alle hypotheses over de populatieparameter die nog acceptabel zijn in het licht van de waargenomen steekproef en de significantiedrempel van de gevolgde methode. Je hebt daarbij overigens wel een veronderstelling gedaan over het type kansmodel voor de populatie. Dan merk je dat het wel heel veel werk is om de grenzen van dat betrouwbaarheidsinterval experimenterenderwijs te bepalen, en je valt terug op een snelle benaderingsmanier, 'die wel ongeveer zal kloppen'.
Maar in een latere fase kom je erop terug. De moderne aanpak van statistische problemen gebruikt *resampling* methodes. Nu is een veronderstelling over het type model voor de populatie nauwelijks meer nodig. De *bootstrap*-simulatie 'voegt bij herhaling wat toeval toe' aan de waargenomen steekproef en produceert zo een verdeling van de steekproefgrootheid.[6] Het bijbehorende 95%-betrouwbaarheidsinterval blijkt nu met ongeveer 95% zekerheid de populatieparameter te bevatten, zie figuur 4. Leerlingen kunnen ook experimenteren met een app om dit kenmerk van de bootstrapmethode te controleren onder verschillende voorwaarden.



*figuur 4 [2] App: Bootstrap voor enkelvoudige gemiddelde*

Dat betrouwbaarheidsinterval is de schatting van de parameter van de populatie op grond van de steekproef. Daarna komt pas de beslissing of je een nulhypothese moet verwerpen of niet: zit die hypothese in het betrouwbaarheidsinterval of niet? Leerlingen hebben daar dan geen conceptuele moeite meer mee. En in een weer latere fase bespreek je de samenhang tussen de alternatieve hypothese, de significantiedrempel en het betrouwbaarheidsinterval. Een derde serie opgaven sluit deze fase af. Leerlingen kunnen daarna ook nog simulaties gebruiken om te onderzoeken hoe groot een steekproef moet zijn om, bij een gegeven significantiedrempel (= kans op fout type 1), de kans op fout type 2 beneden een zekere waarde te krijgen. Je moet je hersens erbij houden, maar door die simulaties begrijpen leerlingen heel goed waar ze mee bezig zijn.

## Relevant onderzoek in de les

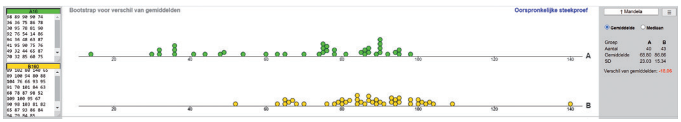
Het idee is afkomstig van Alan Rossman en het onderzoek gaat over het *psychologisch referentie-effect.*
In een eerdere fase heb je in een groepsactiviteit al aandacht besteed aan bias bij een niet-echt-aselecte steekproef. En met een voorbeeld over het oorspronkelijk verkeerd opgezette onderzoek naar de werking van het Salk vaccin tegen polio, in 1954, wordt goed duidelijk dat een dubbel blind aselect gecontroleerde test- en controlegroep opzet echt nodig is om met statistiek een eventueel oorzakelijk verband te kunnen aantonen.
Nu verdeel je de klas aselect in twee groepen. De ene groep (A) krijgt de vraag:

*We vragen ons af of Nelson Mandela, de eerste president van Zuid-Afrika na de apartheid, jonger of ouder was dan 16 jaar toen hij overleed.*
*Geef jouw schatting van zijn leeftijd toen hij overleed.*

De andere groep (B) krijgt de vraag:

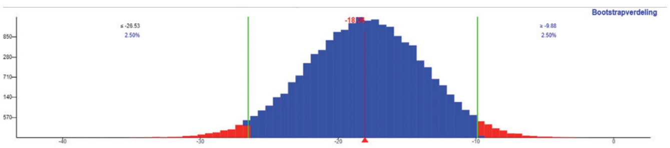
*We vragen ons af of Nelson Mandela, de eerste president van Zuid-Afrika na de apartheid, jonger of ouder was dan 160 jaar toen hij overleed.*
*Geef jouw schatting van zijn leeftijd toen hij overleed.*

En we voeren deze twee steekproeven in de app 'Twee gemiddelden vergelijken' in en kiezen voor de bootstrapmethode. Het resultaat zie je in figuur 5.



*figuur 5 [2] App: De gemiddelde geschatte leeftijd door groep A is 69, door groep B 87*

De bootstrapmethode levert de verdeling van het verschil van de twee gemiddelden, zie figuur 6.



*figuur 6 [2] App: Het verschil tussen de twee gemiddelden ligt met 95% zekerheid tussen de 10 en 27 jaren*

De klas constateert een effect van de eerste rare onzin-zin van tussen de 10 en 27 jaren op de gemiddelde schatting van Mandela's leeftijd. En dat deze uitspraak voor 95% zeker is.
Het is een oorzakelijk effect want de opzet was met aselecte toekenning gerealiseerd. Natuurlijk moet nog wel gediscussieerd worden over de steekproef zelf: welke populatie, en was de klas wel aselect? In elk geval is duidelijk dat de nulhypothese (geen invloed) wordt verworpen in de methodiek met een eenzijdige significantie van 2,5%.
Een leerling heeft eens een zelfbedacht onderzoek opgezet en uitgevoerd in een basisschool om te kijken of de mening van de juf invloed heeft op de keuze van een kind.

Er zijn nog veel meer onderwerpen die een rol moeten spelen in een goede statistiekcursus, en vaak kun je de simulaties gebruiken voor de begripsvorming én voor de uitvoering van het statistisch onderzoek met resampling-methodes. Maar in dit artikel beperken we ons tot bovenstaande voorbeelden. Het moge duidelijk zijn dat formele kansrekening niet aan de orde komt. Het kansbegrip zit verweven in de (gesimuleerde) kansverdeling, met de variabiliteit als belangrijk kenmerk.
We zitten daarmee goed in de internationale trend van het statistiekonderwijs. Dat blijkt uit het GAISE report [7]: *Pre-college statistics education should emphasize the ways probability is used in statistical thinking; an intuitive grasp of probability will suffice at these levels.*
Zie ook de noten 8 t/m 11 voor nog meer referenties.

## Over VUStat

Veel van de oude mogelijkheden van de Windows-versie van VUStat zijn behouden. De apps-versie van VUStat werkt op alle browsers en heeft vergelijkbare mogelijkheden voor wat betreft data-analyse (voor beschrijvende statistiek): kansberekeningen met allerlei typen verdelingen kun je grafisch aanpakken; tekstbestanden kun je inlezen, en in allerlei vormen laten tonen, databestanden kun je bewaren en aanpassen, je kunt uitsplitsingen naar één van de variabelen maken, kruistabellen maken en analyseren, en nog veel meer.
Daarnaast zijn er nu apps met mogelijkheden om te simuleren. Resampling en vooral de bootstrap is te gebruiken als een toegankelijke weg naar schatten en toetsen. In de app 'Data analyse' is het op verschillende plaatsen mogelijk om direct data door te sturen naar een van de resampling-apps, waar dan verdere analyse van de steekproef kan plaatsvinden.
Daarnaast is er nog een aantal apps dat de breedte van het onderwerp statistiek laat zien. Zo kun je de wetten van de grote en de kleine aantallen onderzoeken met pakkende voorbeelden. Dat is ook het geval met het verschijnsel van de regressie naar het midden.

## Lesmateriaal

De VUStat apps met bijbehorend lesmateriaal *Toeval in de greep* zijn op de NVvW website beschikbaar gemaakt. Het adres met docenteninformatie is: *toevalindegreep.nl/doc*. Daar staan ook de doorverwijzingen naar leerlingenmateriaal voor 4 vwo en 5 vwo. Het lesmateriaal is het resultaat van vijf jaar ontwikkelen op scholen en is vrij te gebruiken en eventueel aan te passen. Het is goed mogelijk alleen een deel te gebruiken.

## Noten

[1] Zie: *https://www.vustat.eu/apps/*
[2] Op de website staan grotere versies van deze figuren. Digitale *Euclides* lezers: klik op de figuur. Maar nog mooier: ga na naar *https://www.vustat.eu/apps/* en maak ze zelf...
[3] Zie: *https://www.scienceguide.nl/2020/05/hoe-statistiek-het-schoolexamen-verdacht-maakte/*
[4] Zie: *https://www.toevalindegreep.nl*
[5] Daniel Kahneman (2012). *Thinking, fast and slow*. Londen: Penguin.
[6] Voor een heldere uitleg van de bootstrap simulatie, zie: *https://toevalindegreep.nl/StatOnd/HV1/HV1.html*
[7] Zie: *https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf*
[8] *https://askgoodquestions.blog/*
[9] *https://teaching.statistics-is-awesome.org/*
[10] *https://www.statisticsteacher.org/*
[11] *https://artofstat.com/*

## Over de auteurs

Piet van Blokland is de auteur van VUGrafiek en VUStat.
Douwe Wielenga is de auteur van het lesmateriaal.
Beiden startten in 1971 de wiskundeafdeling van de nieuwe lerarenopleiding VL-VU. E-mailadressen:
*pjvanblokland@gmail.com* en *d.k.wielenga@gmail.com*

Hugo Duivesteijn

# Examen vmbo-gl en -tl

Hugo Duivesteijn bespreekt het vmbo-gl- en -tl-examen en komt tot de conclusie dat het wederom een solide examen is. De N-term is 1,0.

## Taligheid

Zoals gebruikelijk begin ik deze recensie met te kijken naar de taligheid van het examen. Waar ik twee jaar geleden al tevreden kon vaststellen dat taal de wiskunde geen parten speelde, is dat dit jaar wederom gelukt. Ik blijf dit herhalen, omdat het wel eens anders is geweest en voor onze doelgroep vaker een probleem is dan voor andere doelgroepen. Super dus, dat het weer gelukt is. Voor het eerst sinds ik recenseer, heb ik niet echt klachten gehoord over het examen. Dat belooft wat.

> “Inhoudelijk sluit het examen goed aan, is het uitdagend en zeker niet te veel gevraagd.”

## Zeppelin

Bij het lezen van de eerste vragen van de opgave Zeppelin schrikt de examenkandidaat wellicht van het exponentiële verband. Er wordt gevraagd naar een procentuele afname, die te herleiden is uit de formule. Een kennisvraag over een relatief moeilijk onderwerp. Daarna moet er een grafiek getekend worden na het invullen van de bijbehorende tabel. Een fijne opdracht om meteen in het wiskundemapje in je brein voor te sorteren. Bij vraag 3 wordt er gevraagd om een vergelijking op te lossen die met inklemmen kan worden opgelost, om vervolgens bij vraag 4 een gemiddelde snelheid uit te rekenen waarbij je rekening moet houden met het tijdsverschil, zie figuur 1. Gelukkig zijn de eenheden al in kilometer en uur, dus het enige lastige is het tijdsverschil juist meewegen.

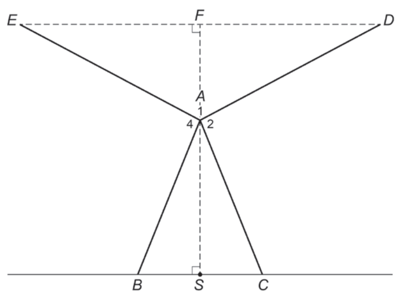

**4** Een zeppelin vertrok op vrijdag 14 februari 1936 om 12.00 uur voor een reis van Hamburg naar New York. De aankomst in New York was op zondag 16 februari 1936 om 19.30 uur. In New York is het 6 uur vroeger dan in Hamburg. De afstand die de zeppelin aflegde is 6278 km.
→ Bereken de gemiddelde snelheid in km per uur van de zeppelin tijdens deze reis. Schrijf je berekening op.

*figuur 1*

## Droogrek

Nu volgt een opgave onder de noemer Droogrek. Het eerste dat me opvalt is dat de toepassingsvraag erg ‘gemaakt’ overkomt. In het dagelijks leven zal geen enkel weldenkend mens, bezig gaan één hoek van het droogrek op te meten en de rest uit te rekenen. Afgezien hiervan een leuke set vragen. Bij de eerste vraag moet er met de tangens gerekend worden.

**8** $AD = AE = 110$ cm. In onderstaande tekening is te zien dat de hoogte van punt $E$ gelijk is aan de lengte van $FS$.




→ Bereken de hoogte van punt $E$. Schrijf je berekening op.

*figuur 2*

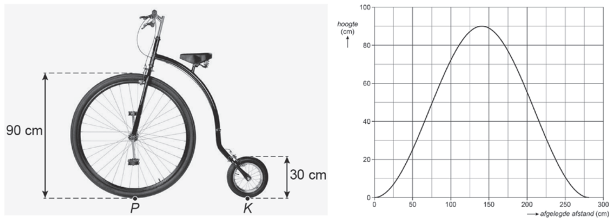
Gevolgd door pythagoras of het rekenen met een sinus. Hierna moet worden toegepast dat een volle hoek verdeeld in delen bij elkaar opgeteld 360º oplevert. Meer een kennisvraag dan een rekenvraag, prima voor de afwisseling. Afsluitend komt de cosinus voorbij om in combinatie met een eerder gevonden antwoord de hoogte van het droogrek uit te rekenen, zie figuur 2. Leuke opgave, maar ik kan me toch niet losmaken van het feit dat deze vraag ver van de realiteit van de leerlingen blijft.

## Gasfles

Dan de Gasfles, een herkenbare context voor mensen met een gasbarbecue. Deze opgave begint gemakkelijk om even in de context te komen. Er moet het gewicht van 1 liter berekend worden waarbij het gewicht van 22 liter bekend is. Direct gevolgd door het berekenen van een percentage. Beide vragen zijn op te lossen met de vertrouwde verhoudingstabel. Ook de vraag hierna, waarbij de kandidaat moet uitzoeken wat de brandduur van 22 liter is terwijl die van 20 liter bekend is, kan worden opgelost met diezelfde verhoudingstabel. Hierna moet de formule bij de grafiek van de branduren opgesteld worden. In het correctievoorschrift wordt er genoegen genomen met een hellingsgetal van 2 of nauwkeuriger. Wat mij enigszins bevreemdt, omdat het hellingsgetal 2 niet strookt met het gegeven in de opgave ervoor, waar gesteld wordt dat na een brandtijd van 11 uur er 20 liter verbruikt is. Ik kan me niet goed voorstellen dat er wiskundecollega's zijn die de leerlingen aanleren in zo'n geval af te ronden op helen. De laatste vraag over dit onderwerp is een leuke. Hier wordt voorgesteld dat er een grafiek getekend wordt bij het tegenovergestelde verband, een beetje kietelende vraag voor de leerlingen. Iedere toets, het examen niet uitgezonderd, mag van mij zo'n vraag bevatten waarvan de leerlingen na afloop zichzelf voor het hoofd kunnen slaan wegens de eenvoud van het antwoord, terwijl ze er vaak veel te ingewikkeld over nadachten. Opgave 13 valt zeker in deze categorie.

## Fiets

De opgave Fiets gaat over cirkels, een onderwerp dat natuurlijk niet kan ontbreken. De eerste vraag is relatief duidelijk: Hoe vaak heeft het wiel rondgedraaid over een afstand van 40 meter? Een overduidelijke reproductie-vraag, één uit het boekje. Vraag 15 en 16 worden iets interessanter. Waar er bij vraag 15 gevraagd wordt om inzicht, wordt er in het correctievoorschrift bij vraag 16 juist alleen beloond voor het resultaat. Jammer, omdat juist hier ook het inzicht in de verhouding tussen de formule en de grafiek een grotere rol speelt, zie figuur 3. De uitleg zou hier ook beloond mogen, of zelfs moeten, worden.




Het grote voorwiel van deze fiets heeft een diameter van 90 cm. Op het grote voorwiel is het punt *P* aangegeven. Op de uitwerkbijlage zie je de grafiek van de afgelegde afstand en de hoogte van punt *P* tijdens één omwenteling van het grote wiel.

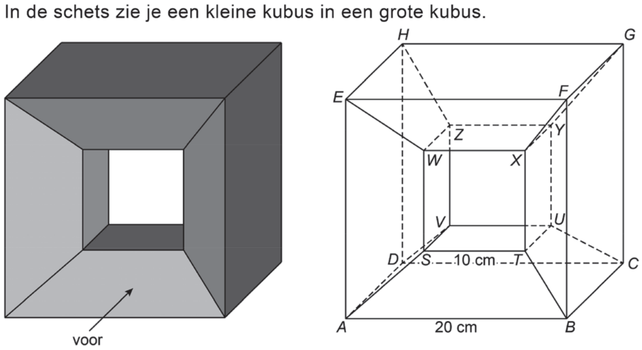
**16** Het kleine achterwiel heeft een diameter van 30 cm. Op het kleine achterwiel is het punt *K* aangegeven.
→ Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage de grafiek van de afgelegde afstand en de hoogte van punt *K* tijdens één omwenteling van het grote voorwiel.

*figuur 3*

## Kubuskunstwerk

Kubuskunstwerk is een opgave waarbij de leerling zich heel goed in de context kan verplaatsen, zie figuur 4. Dit is wiskunde zoals de leerling het zich voorstelt. Eerst wordt er gevraagd een vooraanzicht te tekenen. Gevolgd door een verlengde stelling van pythagoras. Pythagoras was al eerder te gebruiken, maar niet noodzakelijk. Nu worden de kandidaten gedwongen te laten zien dat ze dit kunnen. Daarna moet de leerling ruimtelijk inzicht tonen om afstanden in een driehoek te vinden en hier vervolgens met behulp van een tangens een hoek uit te rekenen. Een mooie opdracht om veel wiskundige vaardigheid te laten zien. Als laatste moet er een driedimensionale variant van inlijsten worden toegepast, ook een mooie inzichtvraag.

Je ziet een kubuskunstwerk en rechts een schets van het kunstwerk.
In de schets zie je een kleine kubus in een grote kubus.




*figuur 4*

# Computational thinking in de wiskundeles

## Bereid leerlingen voor op de toekomst

**Wilt u computational thinking opnemen in de wiskundeles?**

Met de handhelds en software van Texas Instruments gebruikt u programmeren in Python eenvoudig in de klas! Volg diverse gratis webinars waar u Python leert benutten en tips krijgt voor praktische toepassingen in de les.

## Webinars leraren

De webinars van het T³ lerarennetwerk draaien om computationeel denken, logisch redeneren, algoritmisch structureren en programmeren in de klas. U kijkt de opgenomen webinars terug wanneer het u uitkomt!

» **resources.t3nederland.nl/webinars**

## Python op de handheld

Leerlingen programmeren zelf in Python met de TI-Nspire™ CX II-T handhelds, de TI-Nspire™ CX software en TI-84 Plus CE-T Python Edition. Met de Python BootCamp leert u hoe u programmeren met TI-technologie toepast in de klas:

» **www.wil-depython.nl**

python™

**education.ti.com/nl**

Texas Instruments

## Loterij

Als laatste opgave is daar de Loterij, geïnspireerd op de Staatsloterij, met een prijs van 10.000 euro per maand voor 30 jaar lang en een hoofdprijs van 4,2 miljoen. Een goede rekenvraag om dan uit te rekenen welke prijs meer oplevert. Wat hier wel opvalt is dat de vraag begint met het woord 'bereken' en afgesloten wordt met de opmerking: 'Schrijf je berekening op'. Hoeft dat in de andere gevallen dat er 'bereken' staat niet gedaan te worden? Persoonlijk vind ik het een vreemde opmerking.
Deze vraag wordt gevolgd door nog een vraag om een percentage uit te rekenen met de verhoudingstabel, om vervolgens af te sluiten met een vraag over exponentiële groei en inklemmen. Dat lijkt op het begin van het examen.

## Conclusie

Terwijl bij het examen van twee jaar geleden leerlingen makkelijk in de wiskundeflow konden komen doordat de vragen steeds iets complexer werden, was dat met dit examen minder het geval. Toch vind ik dat er dit jaar wederom een solide examen is gemaakt. De trend dat de examens minder talig zijn is er een die ik alleen maar kan toejuichen.

Dat er dit jaar nauwelijks grote klachten over dit examen zijn gekomen, lijkt me terecht. Los van mijn gemopper op het al dan niet aansluiten van de context op de belevingswereld van de leerlingen, is er niet veel aan te merken op dit examen. Inhoudelijk sluit het goed aan, is het uitdagend en zeker niet te veel gevraagd.


### Over de auteur

Hugo Duivesteijn is docent wiskunde op Werkplaats Kindergemeenschap VO in Bilthoven. Daarnaast is hij voorzitter van de redactie van *Euclides. E-mailadres: hugoduivesteijn@gmail.com*

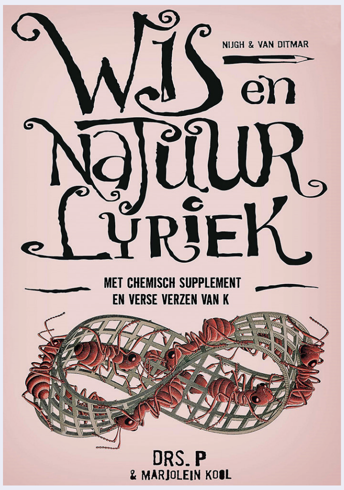

# Priemgetal

De bouwmarkt ruimde stenen op.
Wie duizend klinkers kocht
die kreeg er negen bij voor nop.
Dat was juist wat ze zocht.

Ze kocht die duizendnegen snel
en gaf haar man de klus
een stoep te maken, maar dan wel
van al die stenen dus.

Hij ging voortvarend aan de gang.
De stoep werd één steen smal
en duizendnegen stenen lang.
Heel fijn, zo'n priemgetal!

Marjolein Kool




*De dichtbundel Wis- en natuurlyriek van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. 'Priemgetal' is een van de nieuwe gedichten.*

Dick Spaans en Joanne de Jager

# Examen havo wiskunde A

Was het examen taliger en complexer dan voorgaande jaren? Dick Spaans en Joanne de Jager analyseren de lengte, complexiteit en de taligheid van het examen. Het examen heeft een N-term van 1,2.

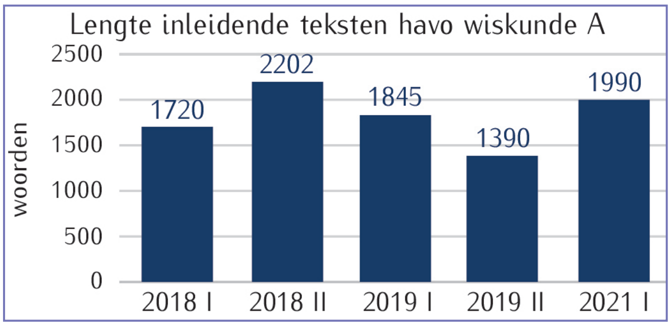
## Inleiding

Er is al heel veel over geschreven: onderwijs in het coronajaar ’20 – ‘21. De scholen begonnen in augustus positief, omdat er weer volledig fysiek onderwijs gegeven kon worden. Op de achtergrond tekende de nieuwe coronagolf zich helaas af. Via de media vernamen we toenemende besmettingsgevallen. Hopelijk wijs geworden in het eerste coronajaar ‘19 – ‘20 hoopten we nog een nieuwe golf af te kunnen wenden. Ondertussen startten we met lesgeven, zo ook aan de examenklassen. Wat heeft de scholensluiting in ‘19 – ‘20 met de leerlingen gedaan? In hoeverre zijn ze in de pré-examenklas qua kennis, vaardigheden en leerattitude klaar voor het examenjaar? Is er toch niet een aantal leerlingen overgegaan naar de examenklas dat op grond van prestaties beter had kunnen doubleren? Maar in hoeverre hebben scholen en docenten in de pré-examenklas een goed beeld van de capaciteiten van de leerlingen gekregen?

Op woensdag 26 mei om 13:15 uur sta ik in een gymzaal vol met examenleerlingen waaronder circa 82 leerlingen uit drie groepen havo 5 wiskunde A. Ik steek nog een paar mentorleerlingen een hart onder de riem en in razend tempo loop ik al die leerlingen af om te checken of op de TI 84 het oranje balkje oplicht, ten teken dat het apparaat in de verplichte examenstand staat. Als het startsein is gegeven is het muisstil en gaan de leerlingen zeer geconcentreerd aan de slag. Natuurlijk ben ook ik razend benieuwd naar de inhoud van het examen. De eerste zaken die mij opvallen is dat de hoeveelheid tekst per opgave ‘meevalt’; dat de onderzoeksopgave dit keer ‘slechts’ 6 punten bevat. Dit alles zegt misschien niet zo veel over de complexiteit van de gevraagde wiskunde, maar mogelijk wel over het niveau van de contexten. Aan de andere kant lijkt het examen wat aan de lange kant: 81 punten, waar dat voorgaande jaren steeds rond de 75 punten was. Mijn laatste surveillancebeurt start om 16:35 uur: de reguliere tijd zit er dan net vijf minuten op, de zaal is fiks uitgedund, slechts een klein aantal plaatsen is nog bezet door leerlingen met extra tijd en sommigen blijven tot het eind zitten. Zou het examen ‘te lang’ zijn? Wordt de examenstof in gelijke mate getoetst? Een en ander proberen we hieronder met een aantal data (hopelijk valide) handen en voeten te geven.

## Lengte examen

Al vrij snel meldt een aantal collega’s op het examenforum van de NVvW het examen lang te vinden: veel van hun leerlingen hadden de volle tijd nodig. Ik ga een poging doen om dat te objectiveren: daarvoor vergelijk ik het aantal opgaven per examen, het totaal aantal punten en de hoeveelheid tekst in historisch perspectief. We boffen, want in de *Wiskunde E-brief* van zondag 6 juni staat toevallig een vergelijking van de lengte van de examens, zie figuur 1. Voor de bepaling van de lengte van het examen is het aantal woorden voorafgaand aan alle vragen van het examen geteld. Hieruit blijkt dat het examen 2021 tijdvak 1 inderdaad lang is, maar dat het wel in de trend van de afgelopen jaren past.




*figuur 1 Uit: Wiskunde E-brief 6 juni 2021*

Terugkijkend naar de afgelopen examens, aangevuld met gegevens over het aantal inleidende woorden, levert dat het overzicht op in tabel 1.

| jaar-tijdvak | aantal vragen | aantal punten | aantal inleidende woorden | gemiddeld aantal inleidende woorden per vraag |
|---|---|---|---|---|
| 2018-I | 21 | 76 | 1720 | 81,9 |
| 2018-II | 22 | 78 | 2202 | 100,1 |
| 2019-I | 23 | 78 | 1845 | 80,2 |
| 2019-II | 19 | 70 | 1390 | 73,2 |
| 2021-I | 24 | 81 | 1990 | 82,9 |

*tabel 1*

| jaar-tijdvak | gemiddeld aantal punten per vraag | aantal punten onderzoeksopgave | aantal vragen (excl onderzoeksopgave) van 5 of 6 punten | aantal bladzijden uitwerkbijlagen |
|---|---|---|---|---|
| 2018-I | 3,6 | 8 | 3 | 3 |
| 2018-II | 3,5 | 8 | 2 | 2 |
| 2019-I | 3,4 | 6 | 0 | 3 |
| 2019-II | 3,7 | 6 | 1 | 3 |
| 2021-I | 3,4 | 6 | 1 | 0 |

*tabel 2*

Uit tabel 1 blijkt dan ook dat examen 2021-I volgens de eerste twee criteria het langste examen is, op het derde en vierde criterium het op één na langste examen. Met recht kunnen we zeggen dat het een lang examen is.

## Complexiteit examen

Betekent dat dan ook dat het een moeilijk examen is? Is er laag gescoord? Zijn er veel vragen niet gemaakt?
In tabel 2 zie je een aantal criteria dat mogelijk iets zegt over de complexiteit van het examen. Een maat voor de complexiteit zou het gemiddeld aantal punten per vraag kunnen zijn: zo bezien lijkt het examen 2021-I met gemiddeld 3,375 niet heel complex, maar ook niet heel sterk afwijken van de edities daarvoor. En wat moeilijke vragen zijn is natuurlijk subjectief. Uit tabel 2 blijkt ook dat de onderzoeksopgave van 2021-I niet het hoogste aantal punten van alle afgelopen edities oplevert; dat het aantal overige vragen met veel (5 of 6) punten relatief laag is en het examen geen bijlagen kent. We nemen hierbij aan dat een vraag die meer punten oplevert complexer is dan een vraag met minder punten en dat een bijlage de context van de opgave compliceert.
Op grond van bovenstaande criteria lijkt het examen 2021-I zeker niet het meest complexe van de vijf meest recente. Daarentegen vinden wij het voorbarig om te stellen dat dit het minst zware examen is. De zwaarte is een resultante van lengte en complexiteit (het examen was wel wat langer en er zal een verschil zijn tussen wat de examenmakers aan complexiteit en lengte beogen en hoe de leerlingen dat ervaren).

## Taligheid examen

In 2019 werd al geconstateerd dat de examens taliger waren (*Wiskunde E-brief* nr 846, 816, 814) en is er voorgesteld om daar onderzoek naar te doen. Het examen van 2021-I past volledig in de taligheidstrend, getuige de lengte van het examen (zelfs één A4'tje meer dan in 2019) en het aantal inleidende woorden, maar dat aantal wijkt niet af van de trend van de voorgaande vier examens. Qua taligheid lijkt 2021-I niet heel anders dan de vorige examens, geen reden dus om het eventuele teveel aan taligheid terug te dringen.

# De opgaven

## Visus

De start was voor de meeste leerlingen goed te doen. Van opgave *Visus* waren de eerste drie vragen zelfs makkelijk: niet te veel tekst, duidelijk wat er afgelezen en berekend moest worden. Vraag 4 en 5 waren lastiger: redeneren met formules en herleiden. Een onderdeel waar bij wiskunde A steeds meer aandacht voor is, maar ook een onderdeel dat in de klas nog meer geoefend moet worden, gezien de resultaten bij deze vragen.

## Klarinet

Een klarinet is een houten blaasinstrument. Alle mogelijke tonen die op het instrument kunnen worden gespeeld, worden samen het bereik genoemd. Het bereik van een klarinet is bijna vier octaven. Een octaaf bestaat uit 12 opeenvolgende toonafstanden. Zie de tabel.

Elke voorafgaande of opeenvolgende octaaf heeft dezelfde namen voor de tonen in dat octaaf.

De frequentie van een toon wordt gegeven in hertz (Hz), dit is het aantal trillingen per seconde. Bij een hogere toon hoort een hogere frequentie. Als je eenzelfde toon één octaaf hoger speelt, wordt de frequentie twee keer zo groot. Er bestaat een exponentieel verband tussen de frequenties en de tonen in de tabel: van elke volgende toon neemt de frequentie met een vast percentage toe. In de tabel zie je van enkele tonen de frequenties.

**tabel Voorbeeld van een octaaf**

| toon | A | Bes | B | C | Des | D | Es | E | F | Ges | G | As | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie (Hz) | 440 | | | | | 587 | | | | | | | 880 |

In de tabel is de frequentie van de D-toon afgerond op hele Hz.

**6** Bereken op basis van de frequenties van de A-tonen uit de tabel de frequentie van de D-toon. Geef je antwoord in één decimaal.

*figuur 2*

Vraag 6, zie figuur 2: op zich geen complexe vraag ($440 \cdot \left(\left(\frac{880}{440}\right)^{\frac{1}{12}}\right)^5 \approx 587{,}3$ Hz), maar de leerlingen (en docenten) die niet thuis zijn in muziek hadden het een stuk lastiger dan degenen die hier wel vertrouwd mee zijn. Een collega is tweede corrector van een school waar veel aan muziek gedaan wordt. Terwijl mijn leerlingen en de leerlingen van wie ik tweede corrector was op deze vraag erg slecht gescoord hadden, hadden de leerlingen van wie zij het werk nakeek, beduidend beter gescoord. De vraag is of dat eerlijk is in een eindexamen. Ook bij vraag 7, combineer tekst, figuur en tabel en bereken de laagste en hoogste frequentie die een klarinet kan bereiken, waren muzikaal ingestelde leerlingen in het voordeel. De opgave op zich is mooi, uit meerdere gegevens conclusies trekken, maar het is jammer dat leerlingen zonder muzikale achtergrond met deze context in het nadeel zijn. Bij vraag 8 en 9 was dat gelukkig niet het geval, hier weer werken met formules.

## Voorsteekpas

Een opgave over wachtrijen in een pretpark waarbij je wachttijd korter wordt als je een voorsteekpas hebt.
Dit is een opgave met veel formules. De twee eerste vragen zijn goed te doen. Invullen van gegeven waardes in een formule, uitkomst invullen in de volgende formule en zo de wachttijd berekenen. En twee formules vergelijken, met en zonder voorsteekpas, maar met dezelfde gegevens. De laatste twee vragen waren weer meer algebraïsch: het oplossen van een vergelijking en weer het herleiden van een formule. De vraag was: als je niet wilt dat de wachttijd bij een bepaalde attractie langer is dan tachtig minuten, hoeveel procent van de bezoekers mag dan maximaal een voorsteekpas hebben? De vergelijking opschrijven leverde een eerste punt op. Dat ging de meesten nog wel goed af: $\frac{0{,}95 \cdot 6}{2 \cdot (1-0{,}95) \cdot (1-0{,}95a)} = 80$ .

Degenen die de vergelijking hadden opgelost, kwamen op het antwoord a = 0,3026.... . Bij mijn leerlingen heb ik niemand gezien die deze uitkomst juist interpreteerde. Afgerond op één decimaal betekent dit dat maximaal 30,2 % van de bezoekers een voorsteekpas mag krijgen. Punt eraf, maar wel een a-tje (afrondingsfout). Ook goed om aan dit soort afrondingen meer tijd te besteden in de les.

## Nibud Scholierenonderzoek

Mooie statistiekopgave: onder vmbo-, havo- en vwo-leerlingen in de leeftijd van twaalf tot en met achttien jaar is het financiële gedrag in kaart gebracht. De eerste vraag was weer goed te doen: er moest een betrouwbaarheidsinterval berekend worden voor een populatieproportie. Het lastigste onderdeel voor de leerlingen was de proportie berekenen en de uitkomst noteren als interval. Gelukkig was er qua notatie voor dat interval in het examenverslag heel veel passabel. Daardoor waren er voor de meeste leerlingen veel punten te behalen. Bij de tweede vraag werd de leerlingen gevraagd naar twee manieren om de groepen met elkaar te vergelijken en te benoemen wat je daar nog voor nodig had. Hier was discussie over: als een leerling een goede manier genoemd had, maar de gemiste gegevens niet helemaal correct of volledig gaf, of er dan niet alsnog een punt gegeven mocht worden. Het CvTE was hier duidelijk in. De vraag gaat over de vuistregels die op het formuleblad staan. Een kandidaat die hierin onvolledig is, laat zien dat hij deze vuistregel niet volledig begrijpt. Daarom is ervoor gekozen 0 of 2 punten toe te kennen. Na redelijk door vraag 16 en 17 gekomen te zijn, was de laatste vraag van deze opgave lastig, zie figuur 3.
Veel leerlingen gebruikten $\max V_{cp}$ zonder rekening te houden met de 'c' van cumulatief. Cumulatieve percentages werden niet berekend en dus ook niet de cumulatieve percentageverschillen. Er kon nog een punt behaald worden door het berekende antwoord te interpreteren, het verschil is gering.

Voor het laatste onderdeel van deze opgave kijken we niet naar het inkomen van scholieren, maar naar een aspect van de uitgaven van scholieren. Dit aspect betreft de vraag hoe vaak scholieren spijt hebben na het doen van een aankoop. Van 1200 aselect gekozen respondenten (600 jongens en 600 meisjes) is bekend hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop. De resultaten zijn weergegeven in een relatieve frequentietabel, zie tabel 3.

**tabel 3** **Spijt na het doen van een aankoop**

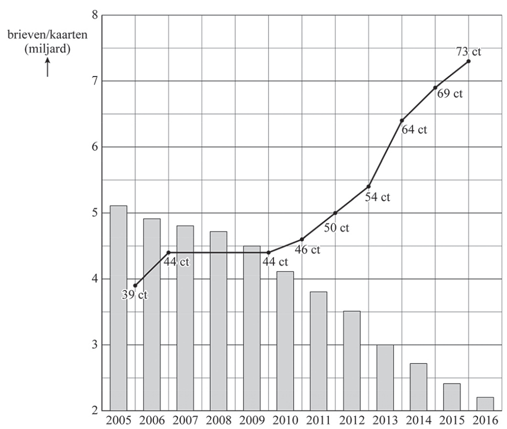
| | jongens | meisjes | totaal |
|---|---|---|---|
| nooit / zelden | 16% | 8% | 12% |
| meestal niet | 65% | 61% | 63% |
| meestal wel | 19% | 29% | 24% |
| vaak / altijd | 0% | 2% | 1% |

**18** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen jongens en meisjes in hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop gering, middelmatig of groot is.

*figuur 3*

Ook bij het berekenen door middel van *phi* werden niet altijd goede waarden bij elkaar genomen. Leerlingen konden ondanks deze fouten nog wel punten behalen.

## Postzegels




*figuur 4*

Tussen 2010 en 2014 stijgt de prijs van de postzegel exponentieel. De leerling moet het jaarlijkse groeipercentage van de postzegelprijs berekenen. Van 2010 tot 2016 nam het aantal briefkaarten dat werd bezorgd bij benadering lineair af. De leerling moet door middel van lineair extrapoleren de verwachte aantallen in 2020 berekenen. Daarna moest in de formule 0,73 1947,44 + 1,46 x + 2,19 (265,56 – x) = 1877 de getallen verklaard en de vergelijking opgelost worden. Op zich goed te doen, maar sommige leerlingen raakten in de war van de miljoenen en schreven de getallen helemaal uit. Dat werd helemaal lastig bij de laatste vraag waar het om miljarden ging.

## Fijnstofemissie

Als afsluiter een mooie onderzoeksvraag waar veel gegevens gecombineerd, verschillende onderdelen berekend en conclusies getrokken moesten worden. Het deed wat denken aan de onderzoeksopgave *Voetafdruk* (met een lineair aflopend verband en een exponentieel dalend verband, maar dan zonder de 'knik' die de opgave *Voetafdruk* zo lastig maakte, zie het examen 2018-I). Voor elke leerling was bij deze opgave wel één puntje te verdienen en vo or de zeer goede alle punten. Helaas was het lichtje al voor veel leerlingen uit toen ze hieraan toe waren.

## Conclusie en observaties

Zo beschouwd lijkt het examen 2021-I op grond van eerdergenoemde data een wat langer examen ('aantal vragen' en 'aantal punten'). Je ziet aan de manier van beantwoorden van de laatste vragen dat de concentratie was verslapt en veel leerlingen zijn niet eens aan die laatste drie vragen toegekomen. Mogelijk is dat ook een verklaring voor het hoge aantal N-en op de Wolf-lijst. Ik kom in mijn Wolf scoreoverzicht 37 keer een N tegen bij de 24 gemaakte examens. En dan heb ik de vragen waarbij een leerling nauwelijks iets heeft opgeschreven nog niet meegerekend. Eén van mijn leerlingen heeft zelfs bij 7 van de 24 vragen een N. Of is het zo dat de leerlingen 'er geen zin meer in hadden' of over onvoldoende uithoudingsvermogen beschikken? Heeft de lockdown hierin een rol gespeeld? Of zijn zij dusdanig calculerende burgers die denken dat ze 'er wel zijn', ook zonder die punten? Aan de andere kant was het een iets minder complex examen ('gemiddeld aantal punten per opgave' en 'aantal opgaven met meer dan 4 punten') dan de examens in de voorgaande jaren. Qua taligheid ('aantal inleidende woorden' en 'gemiddeld aantal inleidende woorden per vraag') past dit examen in de trend van de afgelopen edities.

Het lijkt prettig voor de leerlingen dat alle opgaven een instapvraag hadden: dat houdt de motivatie erin. Het is wel een examen met veel afwisseling: werken met gegevens en werken met formules in dezelfde vraag en meerdere algebraïsche vragen.

## Over de auteurs


Dick Spaans is wiskundedocent op het Krimpenerwaard College in Krimpen aan den IJssel. Dick heeft politicologie gestudeerd (met als verdieping kwantitatief onderzoek). Na vijf jaar als onderzoeker in de politiewereld en veertien jaar in de ict te hebben gewerkt volgde de overstap naar het onderwijs. E-mailadres: *spa@kwcollege.nl*

Joanne de Jager is wiskundedocent op het Metis Montessori Lyceum in Amsterdam, na twintig jaar als architect te hebben gewerkt. Joanne is sinds 2019 bestuurslid van de NVvW. E-mailadres: *j.dejager@nvvw.nl*

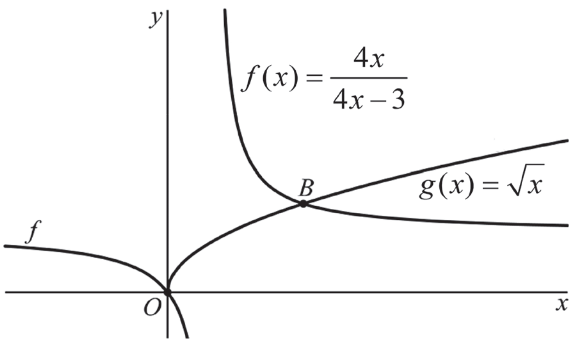
Gerrie Stuurman

# Examen havo wiskunde B

Volgens de leerlingen was het een pittig examen. Gerrie Stuurman analyseert waar de problemen zich voordeden. Het examen heeft een N-term van 1,8.

## Gebroken wortels

Het examen begint met de 'kale' opgave *Gebroken functie en wortelfunctie* die bestaat uit drie vragen. Op zich fijn voor de leerlingen om te starten met vragen waar niet al te veel tekst bij is. Gewoon lekker algebraïsch rekenen. Bij de eerste vraag moet er exact een helling worden berekend. Dat is bekend terrein. Maar het differentiëren van een gebroken vergelijking valt voor sommigen niet mee. Ik merk dat ik blijkbaar toch vaker met wortelfuncties dan met gebroken functies in combinatie met de kettingregel heb geoefend. Mijn eerste puntje om komend schooljaar aan te werken heb ik bij opgave 1 al binnen. Bij de tweede vraag moet het snijpunt $B$ van de grafieken van een gebroken functie met een wortelfunctie exact worden berekend, zie figuur 1.



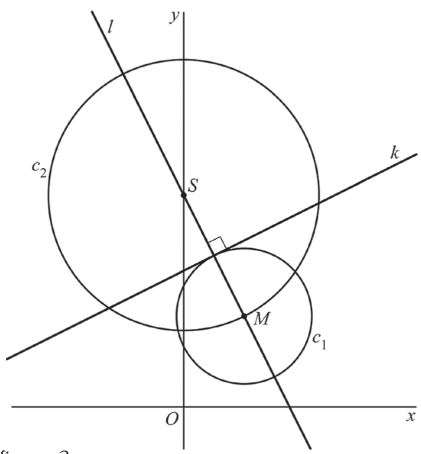

*figuur 1*

De meeste van mijn leerlingen komen niet verder dan het opschrijven van de bijbehorende vergelijking $\frac{4x}{4x-3} = \sqrt{x}$ . De enkele leerling die bedenkt dat er nu gekwadrateerd moet worden, haalt vervolgens ook de eindstreep van de vraag wel. Deze vraag is de een-na-slechtst gemaakte vraag van het hele examen. Tijdens het nakijken van het examen was dit het punt waarop ik dacht dat het misschien niet goed zou gaan aflopen.

Gelukkig pakt iedereen de draad weer op bij vraag 3 waarbij, ook exact, een afstand tussen twee punten berekend moet worden. Om deze vraag te kunnen maken moeten de leerlingen de horizontale en de verticale asymptoot van de gebroken functie vinden. En dat kunnen ze bijna vlekkeloos. Jammer van die enkele leerling die opschrijft dat de horizontale asymptoot 1 is. Hoe vaak heb ik daar bij een toets niet met rode pen voor het getal '$y =$' (of '$x =$') gezet? Jullie ook?

## Cirkels en lijnen

Ook de tweede opgave *Twee cirkels en twee lijnen* ziet er herkenbaar uit. Wat cirkels en wat lijnen, een 'loodrecht'-symbool, wat snijpunten met de assen, het woord 'bewijs' en 'exact', zie figuur 2. Daar hebben we flink mee geoefend.

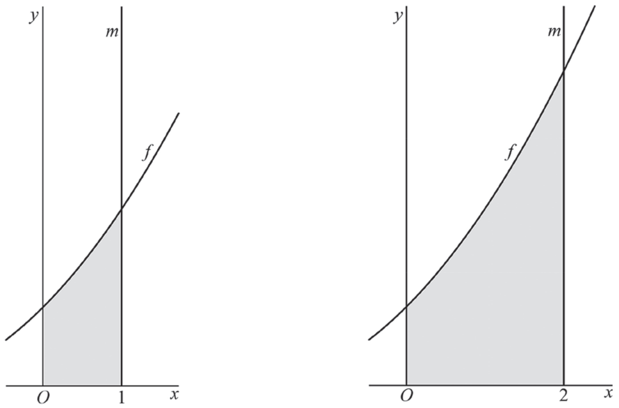



*figuur 2*

Bij vraag 4 moet er bewezen worden dat lijn $k$ cirkel $c_1$ raakt. Bij vraag 5 moet de vergelijking van cirkel $c_2$ worden opgesteld. Hiervoor moet eerst de vergelijking van de loodlijn $l$ op lijn $k$ worden opgesteld. Van deze lijn l moet dan het snijpunt $S$ met de $y$-as worden gebruikt voor het berekenen van de straal van die cirkel. Wat mij betreft was dit een betere opgave geweest om het examen mee te starten. Mijn leerlingen halen meer dan 80% van de te verdienen punten binnen, terwijl dat bij de eerste opgave net onder de 50% blijft hangen.

## Oppervlakte

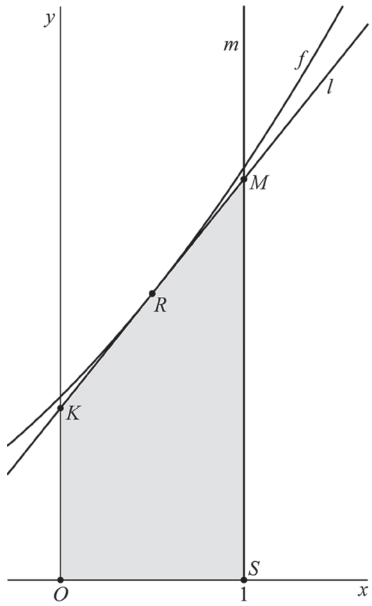
Na een lege bladzijde omslaan, zie je bij de derde opgave *Oppervlakte onder een grafiek* figuren staan die je in een vwo-lesboek verwacht bij het onderwerp 'oppervlakte berekenen met een variabele bovengrens', zie figuur 3.




*figuur 3*

Bij vraag 6 moet er worden bewezen dat de top van een parabool op de x-as ligt. Een tweepunts inkoppertje. Bij vraag 7 wordt de formule waarmee de oppervlakte onder de grafiek van x = 0 tot $x = p$ kan worden berekend, gegeven: $A=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}p+1)^3-\frac{2}{3}$ . De leerlingen moeten vervolgens exact berekenen bij welke waarde van $p$ de oppervlakte gelijk is aan 42. Een mooie 'havo wiskunde-B'-opgave vind ik. Met de scores van mijn leerlingen gaat het ook nog steeds goed. Ook bij vraag 8 wordt een standaard vaardigheid gevraagd: het opstellen van de formule van een raaklijn, zie figuur 4.

Wat de vraag enigszins lastiger maakt is het feit dat de coördinaten van het raakpunt $R(\frac{1}{2},1\frac{9}{16})$ en de helling van de raaklijn ($1\frac{1}{4}$) beide breuken bevatten. In een lessituatie zou ik mijn leerlingen deze vraag zonder rekenmachine laten doen. Helen in de breuk halen, breuken gelijknamig maken, breuken vermenigvuldigen of optellen en breuken weer vereenvoudigen. Welke groep heeft het snelst het juiste antwoord? Maar bij een PTA en het examen mogen ze 'lui' zijn. Pak maar je rekenmachine en zet het antwoord om naar een breuk. En dat hebben ze blijkbaar goed onthouden. Het kan natuurlijk ook zijn dat ze zoveel geoefend hebben, dat ze gewoon heel goed zijn geworden in het werken met breuken. 😉



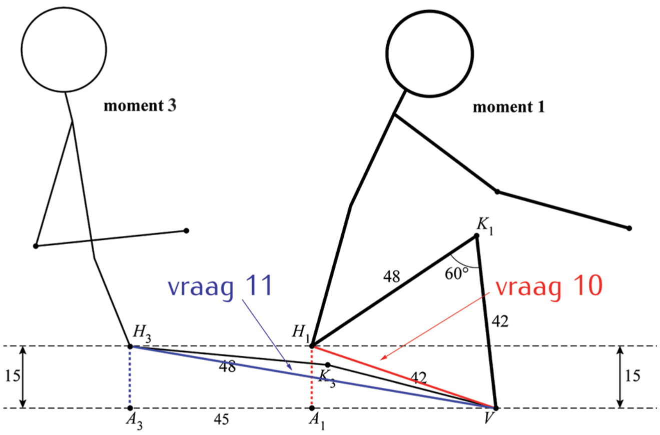

*figuur 4*

Bij vraag 9 moet de echte oppervlakte onder de grafiek worden vergeleken met de oppervlakte van het grijze gebied. Deze oppervlakte is te berekenen door het gebied te splitsen in een rechthoek en een driehoek. De coördinaten van $K$ en $M$ moeten worden berekend met de zojuist gevonden raaklijn. Ook hier weer rekenwerk met breuken.

## Roeien met de riemen die je hebt

Bij mijn examenbespreking van het havo wiskunde-B-examen van 2017 heb ik opgemerkt dat er bij wiskunde B bijna nooit een sportcontext voorkomt. Dat jaar werd er speer geworpen in het examen. Twee jaar later werd er in het examen getennist. Dit jaar, dus weer twee jaar later, wordt er in het examen geroeid en in de laatste opgave wordt er hardgelopen. Ik zou bijna denken dat de examenmakers bij het Cito mijn artikelen lezen...
Maar goed, roeien dus. In deze context mogen de leerlingen laten zien wat ze allemaal weten van subdomein C1: Afstanden en hoeken in concrete situaties. Altijd al willen weten wat de afstand tussen de hiel van mijn voet en mijn heup is tijdens het roeien. Toch?
Bij vraag 10 is met behulp van de cosinusregel eenvoudig de exacte lengte van $H_1V$ te berekenen. Er zijn immers twee zijden en een tussenliggende hoek bekend. Bij vraag 11 moet de hoek tussen het onder- en bovenbeen worden berekend op het moment dat het been is uitgestrekt. In figuur 5 is dat hoek $H_3K_3V$. Sommige van mijn leerlingen gaan ergens tijdens het oplossen de fout in, omdat de lijnen $H_1V$, $K_3V$ en $H_3V$ wel erg dicht bij elkaar liggen, zie figuur 5. Zeker als je de lijnen met een stomp potlood hebt getekend. Mmmm. Volgens mij heb ik wel eens iets >

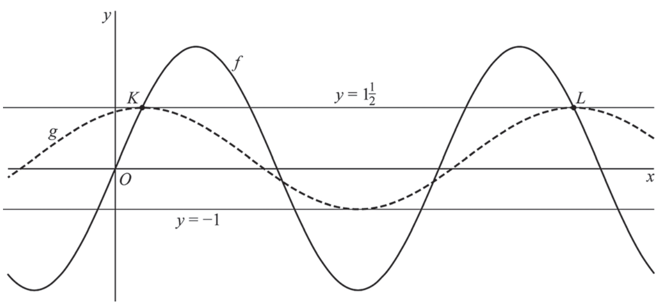
gezegd over het gebruik van een puntenslijper. Bij deze opgave scoren mijn leerlingen net op de 40%. Ik heb maar twee leerlingen die bij deze opgave foutloos de finish over roeien.




*figuur 5*

## Sinusoïden

In de opgave *Een sinusoïde en nog een sinusoïde* wordt bij vraag 12 het exact kunnen oplossen van sinusvergelijkingen gecombineerd met het berekenen van een richtingshoek. Bij deze opgave zie ik een sterk verband tussen de scores voor de vragen in deze opgave en de eindscores van mijn leerlingen. Bij vraag 13 moet het functievoorschrift van een sinusoïde worden opgesteld van de volgende vorm: $g(x) = a.\cos(b(x - c)) + d$. De waarden van de vier onbekenden moeten hier worden bepaald door het exact berekenen van de snijpunten van $f(x)=3\sin(\frac{1}{4}\pi x)$ met $y = 1\frac{1}{2}$ en door gebruik te maken van de periodiciteit en symmetrie van $f(x)$, zie figuur 6.

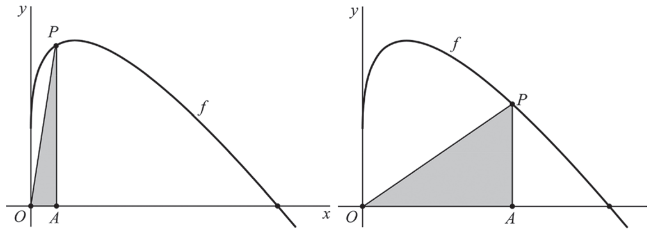



*figuur 6*

Ik vind het jammer en verwarrend dat er geen eenduidige afspraak is welke letter (*a, b, c* of *d*) er voor welke transformatie wordt gebruikt. De bekende wiskundemethodes wijken van elkaar af. Er zijn altijd leerlingen die fouten maken met dit soort opgaven omdat bij 'hun' methode de letters anders worden gebruikt.

## Nog meer oppervlakte

De opgave *Driehoek met maximale oppervlakte* begint met het exact berekenen van de top van de grafiek van $f(x) = 3\sqrt{x} - 2x + 1$. Dat is prima te doen. Bij vraag 15 moet er een optimaliseringsprobleem worden opgelost. Het punt P ligt 'ergens' tussen de oorsprong en het snijpunt van de grafiek met de *x*-as, zie figuur 7.




*figuur 7*

Het punt moet zo gekozen worden dat de oppervlakte van de driehoek maximaal is. Deze opgave is een 'brug te ver' voor de gemiddelde havo-leerling. Wellicht hadden ze een beetje op weg geholpen kunnen worden door aan te geven dat de coördinaten van het punt A als (*a*, 0) te schrijven is. Het gros van mijn leerlingen 'skipt' deze vraag of haalt nul punten. Alleen mijn leerling met een 10 op haar eindlijst voor wiskunde B maakt deze opgave foutloos in een paar regels.

## Een sprintje trekken

In de laatste opgave *De invloed van leeftijd op hardloopprestaties*, als de leerlingen er al een flinke afstand hebben op zitten, volgen de laatste twee vragen van het examen. Er zijn dan nog 11 punten te verdienen. Van tevoren heb ik mijn leerlingen erop gewezen dat er hier nog flink wat punten te verdienen zouden zijn. Dat is ook de reden dat een deel van de leerlingen vraag 15 heeft overgeslagen, vertelden ze mij na afloop. Bij vraag 16 moet de prestatie van een bepaalde loper met een exponentiële groeifactor worden omgerekend naar de verwachte prestatie van dezelfde loper twaalf jaar later. In werkelijkheid heeft deze loper twaalf jaar later een betere tijd neergezet. De vraag is hoeveel seconden beter de werkelijke prestatie is. Leerlingen die hier netjes, zin voor zin, de juiste getallen uit de tekst weten te halen, komen hier wel uit. Voor leerlingen die in tijdsnood raken, is het een stuk lastiger. Bij vraag 17 wordt het nog een stukje ingewikkelder als er met een exponentieel verband tussen vermenigvuldigingsfactoren gerekend moet gaan worden. Maar goed dat dit de laatste vraag is. Het is tijd om in te leveren ...

## Conclusies

Viel het nu mee of viel het tegen? De leerlingen vonden het een pittig examen. Dat was ook te lezen in de beschouwing op scholieren.com. Twee derde van de leerlingen die de poll hebben ingevuld, hebben gekozen voor 'Echt moeilijk'. De N-term liet dit ook zien. Deze was maar liefst 1,8. Het was duidelijk geen 'corona'-examen. Om een mooie voldoende te halen, moesten leerlingen echt wat laten zien. Ik had zelf dit jaar het voordeel van een goede klas. Ze hebben het meer dan uitstekend gedaan. Zoals hierboven te lezen is werden er bij een aantal onderwerpen in dit examen echt moeilijke dingen gevraagd. Voor de leerlingen die het vooral van stug blijven oefenen moeten hebben, viel het niet mee. En verder miste ik toch wel een aantal zaken. Geen logaritmen. Geen formules herleiden. Maar ach. Je kunt niet alles hebben.

Ik sluit af met een suggestie voor nog een sportcontext voor een toekomstig examen. Wat dachten jullie van schaken? Uitrekenen welke afstand een loper over het bord heeft afgelegd na twee zetten. En de vraag of het afgelegde pad van het zwarte paard loodrecht op de verplaatsing van de witte dame staat. Het is maar een ideetje.


### Over de auteur

Gerrie Stuurman is docent wiskunde op Huizermaat te Huizen. E-mailadres: *gstuurman@gsf.nl*


# WiTje: Doe maar een gooi

Wiskunde in teams

**WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op de Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).**

Je hebt vast wel eens Yahtzee gespeeld of een ander dobbelspel en daarbij nagedacht over je keuze om dobbelstenen wel of niet nog een keer te gooien. Waar hangt zo'n keuze van af? In deze opdracht bekijk je een dobbelspel en onderzoek je twee scoresystemen en het effect ervan op de aantrekkelijkheid van het spel.

### Spel 'Som-product'

Spelregel:
Je gooit elke ronde steeds met twee dobbelstenen en je mag maximaal drie keer gooien.

**Scoresysteem A**
Je score is de som van de ogen van de laatste worp.

**Scoresysteem B**
Je score is het product van de ogen van de laatste worp.

Speel het spel 'Som-product' een flink aantal rondes volgens beide scoresystemen en houd het verloop goed bij. Bij welk scoresysteem is de kans op veel punten in het algemeen het grootst? Maak een onderscheid tussen risicomijdende spelers en spelers die wel van een gok houden. Onderbouw je antwoord met voorbeelden en berekeningen.
Bron: Alympiade finale 2020
*https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28975/*

### Wiskunde in Teams 2021-2022

Deze WiTjes zijn allemaal gebaseerd op opdrachten die voor Wiskunde in Teams ontworpen zijn. Al die opdrachten zijn vrij te gebruiken voor iedereen, je vindt ze op *wiskundeinteams.sites.uu.nl.* Laat je inspireren en kijk eens of je jouw leerlingen ook aan Wiskunde in Teams wilt laten meedoen.

De voorronde van de Alympiade en de Wiskunde B-dag vinden plaats op vrijdag 12 november 2021, de Onderbouw Wiskundedag op 16 februari 2022.
Via *https://wiskundeinteams.sites.uu.nl/aanmelden/* kun je je aanmelden voor deelname.

Rutger Kock, Tessa Landgraf

# Examen vwo wiskunde A

Rutger Kock en Tessa Landgraf bespreken alle opgaven van het vwo wiskunde-A-examen. Een selectie daarvan zie je in dit artikel; de volledige recensie staat op de website. Het examen heeft een N-term van 1,6.

## Inleiding

Het vwo wiskunde-A-examen had veel pagina's: negentien in totaal waarvan dertien voor de opgaven. Al met al een zeer talig examen, waarbij de hoeveelheid begrijpend lezen het toetsen van wiskundige vaardigheden in een context overschaduwt. Wiskundig gezien was dit geen moeilijk examen, maar door het vele leeswerk kwamen leerlingen wel in tijdnood. Veel leerlingen hebben een of meerdere opgaven niet gemaakt. Dit verklaart wellicht de hoge N-term van 1,6. Een aantal onderwerpen dat veel geoefend was kwam (vrijwel) niet aan bod, zoals rijen, lineaire verbanden, e-machten en het toepassen van de rekenregels voor logaritmen. Uiteraard kan niet altijd alles getoetst worden, maar daardoor is het extra jammer dat er twee vrijwel dezelfde vragen over het oplossen van een exponentiële vergelijking in stonden.

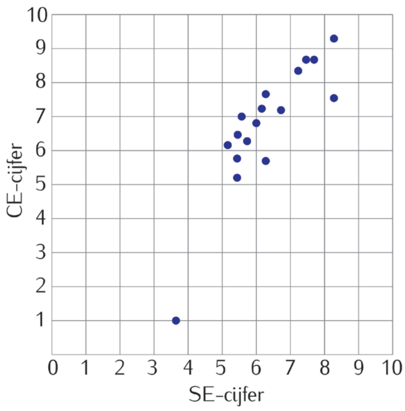
## Reacties leerlingen

De meeste leerlingen hebben veel hogere cijfers behaald dan ze dachten toen ze het hadden ingeleverd. Dit zou kunnen komen doordat de wiskundige basis goed was, waardoor ze vragen goed hebben beantwoord zonder dat ze echt doorhadden waar ze contextueel mee bezig waren. Hieronder vind je een reactie van Elard, die dacht een 6 gehaald te hebben maar tot zijn verrassing een 8,2 behaalde.

Ik had voor mijn examen wiskunde alle examens van 2017-2019 gemaakt en de onderwerpen die ik fout/lastig vond apart geoefend. Ik ging dus met vertrouwen mijn examen in, omdat ik dacht een extreem helder beeld te hebben van wat ik kon verwachten. Echter was het examen naar mijn mening totaal niet vergelijkbaar met voorgaande jaren.

Achteraf vond ik het meer een algemene kennistoets waarbij ik me door zowel wiskunde-, natuurkunde- als scheikundekennis heen heb geploegd. Hoewel ik voor dit examen enorm veel en hard heb geleerd verwacht ik hiervoor een 6. Ik beschouw mezelf als een snelle leerling, ik heb nog nooit tijdsdruk/-tekort gehad en had voor elk oefenexamen minimaal een uur over soms zelfs 1,5! Nu was het zo dat ik slechts 15 minuten voor tijd klaar was. Wellicht komt dit door de extra druk of heb ik simpelweg niet hard genoeg doorgewerkt. De hoeveelheid van het examen was te vergelijken met voorgaande jaren maar de inhoud was veel diepgaander en ik denk dat ik dit examen ook op mijn literatuurlijst zet; wat was dat veel leeswerk! Bovendien waren er ook een handvol vragen waarbij je enorm moest nadenken en visualiseren, zoals de opgave met de sinusfunctie en het huis op de rotonde. Dit kostte veel tijd, deze opgaven kon ik bij andere examens niet vinden.
*mvg Elard.*

In de webversie van dit artikel zie je een reactie van Lina, die het als beste van Rutgers groep heeft gemaakt. Zijn leerlingen hebben het door de hoge N-term iets beter gemaakt dan hun gemiddelde schoolexamen, zie figuur 1. Er is een sterke correlatie tussen het gemiddelde SE-cijfer en het CE-cijfer van een leerling, de correlatiefactor is 0,87. Het is geen doel op zich om deze correlatie te zien, maar het is een indicatie (en niet meer dan dat), dat het examen wel valide en betrouwbaar is.




*figuur 1*

## Linkshandigen en ronde getallen

De eerste en meteen lange opgave ging over linkshandigen en ronde getallen. Onderzoek heeft uitgewezen dat linkshandigen eerder geneigd zijn ronde getallen te kiezen dan rechtshandigen. Er is een formule gegeven die op basis van de definitie van Sigurd de rondheid van een getal vanaf 20 tot en met 1000 bepaalt:

$$R(n) = \frac{1000}{n} + \frac{100}{n} + \frac{10}{n} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{500}{n} + \frac{50}{n} + \frac{5}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{250}{n} + \frac{25}{n}\right)$$

Een formule met veel termen die je op het eerste gezicht doet denken aan rijen en reeksen, maar in deze opgave hoef je je kennis over rijen en reeksen niet toe te passen. In de formule telt elke term $n$ alleen mee als $n$ een veelvoud van de teller is.

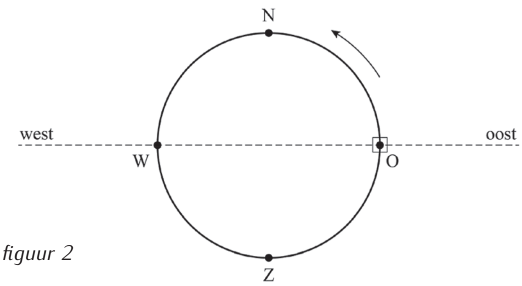
De eerste vraag was een goede binnenkomer. Er wordt gevraagd om te onderzoeken welke van de twee getallen 750 en 600 het rondst is. Bijna alle leerlingen maken deze vraag volledig goed.

Het was voor veel leerlingen vervolgens te lastig om het principe ook toe te passen bij vraag 2. Deze vraag bestaat uit twee delen, een herleiding en een redenatie. De herleiding lijkt op vraag 1, maar hier wordt niet naar een specifiek aantal gekeken maar naar een rond getal met $n = 100p$. De meeste leerlingen vergeten de termen weg te strepen waarbij de teller geen veelvoud is van de noemer. Dat is opvallend, omdat dit precies dezelfde termen zijn als in het voorbeeld zijn weggestreept voor $n = 600$ en ze het principe vaak wel correct hebben toegepast bij vraag 1. De taligheid zou hierin een rol kunnen spelen, omdat leerlingen letterlijk doen wat er staat:

'*Dat kan worden gedaan met behulp van substitutie $n = 100p$ en daarna de formule te herleiden tot $R = \frac{23}{16p}$*'. Voor veel leerlingen is het te veel gevraagd om in deze abstracte situatie ook te bedenken dat er weer termen moeten worden weggestreept voordat ze gaan herleiden. Het herleiden tot de gevraagde uitdrukking lukt dan niet meer. Leerlingen die dat dan toch aan elkaar gelijk proberen te praten missen het enkele schamele punt voor het herleiden. Deze stap verdient meer punten, het herleiden is namelijk niet evident. Vervolgens mist een aantal leerlingen de twee makkelijk te verdienen punten uit het tweede deel van de vraag, omdat ze het tweede gedeelte overslaan, nadat ze vastlopen bij het eerste gedeelte. Hier moest je redeneren dat de rondheid van de honderdtallen tussen de 500 en 1000 steeds kleiner wordt met behulp van de formule
$R = \frac{23}{16p}$, een inkoppertje voor de meeste leerlingen.

## Draaiend huis

Een leuke context, een huis op een rotonde in Tilburg dat zodanig draait dat het geen twee opeenvolgende dagen op hetzelfde tijdstip op dezelfde plek staat. Het maakt nieuwsgierig om het huis in het echt te zien. De opgave begint zonder al te veel overbodige tekst en met een tekening op de bijlage, zie figuur 2 en de bespreking van het wiskunde-C-examen.




*figuur 2*

De eerste vraag is om, gegeven dat het huis op maandag om 8 uur 's ochtends precies aan de oostkant van de rotonde staat, op de uitwerkbijlage aan te geven waar het huis zich diezelfde maandag om 20:30 bevindt. Slechts een enkele leerling had hier moeite mee, een prima vraag om mee te starten en in het probleem te duiken. Vervolgens wordt gevraagd over hoeveel hele weken het huis zich voor het eerst op maandagochtend 8:00 weer precies aan de oostkant van de rotonde bevindt. Dat was voor velen een stuk lastiger. Een veelgebruikte aanpak was om het uit te schrijven, wat op zich een prima aanpak is. Het nadeel daarvan was dat de ene dag in de week dat het huis tweemaal aan de oostkant staat (in de eerste week op woensdag om 0:00 en om 20:00), door veel leerlingen als een omloop, want één dag, geteld werd. Deze foute uitwerking leverde vervolgens nog maar 1 van de 3 punten op. De behaalde score voor deze vraag was daardoor over het algemeen 0, 1 of 3 punten. >

De overige twee vragen bij deze opgave gebruikten een vergelijking van de sinusoïde die hoort bij de positie van het huis. Er wordt beschreven dat de afstanden onder de west-oost-as als negatieve getallen weergegeven worden. Goed doorgronden hoe dit in elkaar steekt kost waardevolle tijd, terwijl dit met een schematische weergave in een assenstelsel meteen een stuk duidelijker zou zijn. Bij vraag 8 konden en bij vraag 9 moesten goniometrische vergelijkingen opgelost worden. Bij vraag 9 bleek dat het oplossen vaak niet het probleem was, maar vooral het goed lezen. De vraag was om met de formule $A = 30 \cdot (10 \cdot t)$ te onderzoeken hoeveel procent van de tijd het huis zich minder dan 15 meter van de west-oost-as bevindt. In veel gevallen werd de vergelijking $A = 15$ wel goed opgelost maar de vergelijking $A = -15$ vergeten. Dat scheelde dan 2 punten door slordig leeswerk of door het niet goed kunnen koppelen van de geplotte grafiek aan het vraagstuk. Waarschijnlijk waren hier de wiskundige denkactiviteiten belangrijk, maar gezien de rest van het examen waren leerlingen op dit gebied niets tekortgekomen als hierbij in een assenstelsel een sinusoïde getekend was. Sommige leerlingen gebruiken snijpunten bij tijdstippen uit verschillende periodes. In dit geval zou het goed passen om leerlingen te belonen die bewust een goed venster instellen, in dit geval bijvoorbeeld $x_{min} = 0$ en $x_{max} = 20$. Als voor een correcte vensterinstelling punten te behalen zijn, gaan leerlingen het belang ervan inzien, er beter over nadenken en de opgave beter maken, een win-winsituatie.

## Mathematical Bridge

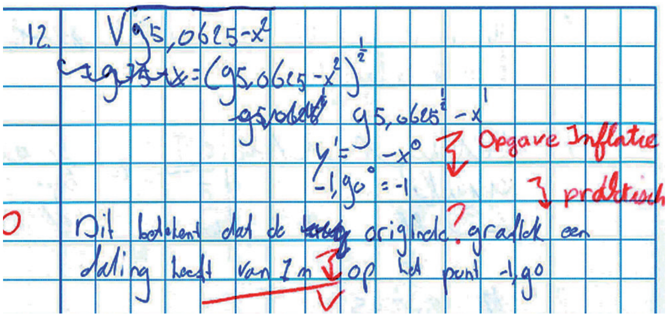
**foto 1** **foto 2**

Op foto 1 zie je de Mathematical Bridge, een houten brug in Cambridge. Deze brug werd in 1748 ontworpen door William Etheridge.
Als je goed kijkt naar de brug, dan zie je dat deze bestaat uit een aantal balken die een denkbeeldige boog (gevormd door de onderkant van de brug) raken. Zie foto 2.

*figuur 3*

Je moet inderdaad heel goed kijken, het zijn erg donkere, kleine foto's, zie figuur 3. En lees die derde zin nog eens en stel je voor dat je een examen Wiskunde A maakt bestaande uit 21 vragen met in totaal 82 punten. Deze zin had er zo niet in gemoeten, het voegt niets toe en schept verwarring. Een zin als 'De onderkant van de brug heeft een boog die lijkt op een deel van een cirkel' had volstaan.

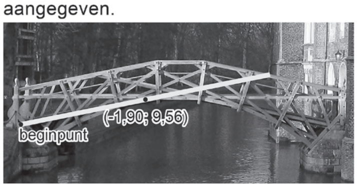
Vraag 10 is prima te doen en ook goed gemaakt. De algemene cirkelvergelijking met een gegeven straal moet herleid worden naar het verband $y = \sqrt{90{,}625 - x^2}$, een vergelijking van de bovenste helft van de cirkel. Er is slechts een enkele leerling die $y = -\sqrt{90{,}625 - x^2}$ noemt. Vermoedelijk hebben andere leerlingen die optie niet bewust weggelaten. Bij vraag 12 moet de afgeleide van de wortelformule bepaald worden. Vervolgens wordt deze gebruikt om de waarde van $y'(-1{,}90)$ mee te berekenen. Tot slot moet de leerling hiervan de praktische betekenis uitleggen. Deze vraag was in een aantal opzichten een brug te ver voor veel leerlingen. Er is een valkuil bij de afgeleide van deze wortelfunctie, sommigen gaan de wortelformule eerst foutief herleiden, waardoor er weinig meer van de vraag overblijft. Voor het differentiëren van $y = \sqrt{90{,}625 - x^2}$ worden geen punten gegeven als de kettingregel verkeerd is toegepast. En ook het uitrekenen van $y'(-1{,}90)$ vervalt door de herleidfout, zie figuur 4.




*figuur 4*

De praktische betekenis volgt uit deze vage context, zie figuur 5:

Op foto 3 zie je een raaklijn die ongeveer gelijk loopt met het begin van het looppad van de brug. Deze raaklijn raakt de cirkel in het punt $(-1{,}90; 9{,}56)$. Zowel dit punt als het beginpunt van de raaklijn is in de foto aangegeven.




*figuur 5*

Sinds wanneer heeft een raaklijn een beginpunt? Dit is bovendien een ander beginpunt dan het beginpunt van vraag 11, wat erg verwarrend is. Bovendien is de taal hier niet eenduidig, want met het begin van het looppad wordt het eerste stuk bedoeld, maar je kunt het ook lezen als het beginpunt. Op foto drie staat inderdaad een raaklijn, maar de foto is zo klein en de lijn is zo dik dat het niet duidelijk is dat de raaklijn ongeveer gelijk loopt met het begin van het looppad van de brug. Sowieso is het looppad moeilijk te onderscheiden op de donkere foto met veel balken in dezelfde grijstint. Voor het beschrijven van de praktische betekenis kan maar 1 punt behaald worden, terwijl er eigenlijk toch meerdere elementen verwacht worden: wat, waar, waarde en zo nodig een goede eenheid (m/m) horen erbij. 2 punten zijn meer op z'n plaats, zodat je onderscheid kunt maken tussen een gedeeltelijk en een volledig goed antwoord. Het koppelen van de raaklijn aan de helling voor het hele eerste stuk van de brug was voor nagenoeg alle leerlingen een brug te ver. Hierop zijn ze niet afgerekend. Als een leerling schrijft dat de hoogte van de brug in het punt $x = -1{,}90$ toeneemt met 0,2 m/m wordt dit ook door eerste en tweede corrector goedgekeurd.

## The International

Deze opgave gaat over E-sports en beslaat vier pagina's. Het begint met een flinke hoeveelheid tekst ter inleiding van een basisopgave over exponentiële groei. Vraag 13 is eigenlijk een discreet probleem. Oplossen met de tabel verdient de voorkeur dus en daar past het goede antwoord 2022. Wel gek dat in het correctievoorschrift staat (bijvoorbeeld met behulp van een tabel en dan als antwoord 5,07...). , wat er juist op duidt dat er geen tabel is gebruikt. Bij het continu oplossen en vervolgens afronden past het antwoord 2021. Deze opgave had bij uitstek goed gebruikt kunnen worden om in plaats van exponentieel met rijen te werken. Dan was het eindantwoord veel eenduidiger geweest en had het examen niet twee vrijwel dezelfde opgaven gehad (zie opgave 19). *The International* is wel een veelzijdige opgave, want door middel van een hele pagina tekst met een grafiek wordt er weer een ander wiskundig onderwerp, differentiëren en algebra, geïntroduceerd. Ter inleiding van vraag 16 staat een formule met een natuurlijke logaritme, die het totale prijzengeld $P$ voorspelt afhankelijk van de tijd in dagen. Hierbij moet goed gelezen worden om de juiste waarde van $P$ uit de tekst af te leiden en vervolgens de correcte vergelijking op te stellen. Het correctievoorschrift houdt al rekening met mogelijke leesfouten. Deze vergelijking mag met de grafische rekenmachine opgelost worden. Dit is dus een opgave waarbij het correct vertalen van tekst naar relevante wiskunde het doel is. Vraag 17 is de laatste vraag van deze opgave. Deze vereist het opstellen van de afgeleide functie en het correct bepalen van het aantal verstreken dagen tussen 16 mei en 30 juni. Helaas gaat dat laatste af en toe toch fout, waarbij leerlingen zeggen dat het 44 dagen in plaats van 45 dagen zijn. Over het algemeen werden deze twee laatste vragen redelijk gemaakt.

## Huurprijzen in New York

Deze opgave heeft twee vragen die eigenlijk vrij standaard over exponentiële groei gaan. Bij vraag 18 wordt gevraagd naar de gemiddelde huurstijging. De groeifactor moet uit de tekst gehaald worden en vervolgens kan de procentuele stijging van de gemiddelde huurprijzen bepaald worden met de formule (nieuw – oud)/oud × 100%. Deze economische vraag wordt door sommige leerlingen ook op een manier opgelost die bij het vak economie geleerd wordt. Dat zorgde bij het nakijken er soms voor dat het even lastig te volgen was wat de leerling had gedaan.
Vraag 19 was bijna gelijk aan vraag 13; groeifactor bepalen, vergelijking opstellen en oplossen. Leerlingen die hier lineair in plaats van exponentieel aan het werk gingen konden op 0 punten rekenen. Terecht, aangezien het werken met exponentiële verbanden een basisonderdeel is van wiskunde A. In dit examen wordt dat echter wel zwaar aangerekend, als dat bij twee opgaven misgaat. Dat betreft dan bijna 10% van alle te behalen punten, misschien is dat wat aan de zware kant.

## Inkomensongelijkheid

De inmiddels traditionele onderzoeksopgave volgt weer het volgende recept: (te) veel gegevens op verschillende manieren aangeboden; tekst, tabel en grafiek. Definities geven aan hoe iets berekend moet worden. Sommige berekeningen zijn al uitgevoerd met de uitkomsten in de tekst, zodat de leerlingen niet alles zelf hoeven te doen. Leerlingen moeten de benodigde gegevens uit de context halen en ze vervolgens in vijf stappen omrekenen van hoeveelheden per huishouden naar hoeveelheden per persoon om vervolgens te kunnen concluderen of een uitspraak van het verschil van het primaire en secundaire inkomen tussen de groep met de hoogste en laagste inkomensgroep meer of minder dan 30.000 euro afneemt. Weer een economische vraag was te veel van het goede. Als docent, die eerst zelf het examen maakt alvorens te beginnen met de correctie, was de concentratie en het enthousiasme om aan deze opgave te beginnen nu wel op. Qua rekenwerk was het niet echt moeilijk. Belangrijk was weer goed lezen en bijhouden hoe groot de getallen zijn die uit de berekeningen komen, miljarden of miljoenen. Veel leerlingen berekenen het gemiddelde secundaire inkomen per huishouden in de tiende groep. Dikwijls zetten leerlingen er niet bij wat ze berekenen, wat soms leidt tot een foute vervolgstap. Komt dit omdat het niet voldoende is gelukt om ze deze discipline bij te brengen, of hadden ze gewoon de tijd niet meer om deze opgave netjes te maken? Het viel wel op dat de leerlingen die deze opgave eerder gemaakt hadden, dus niet hadden gewacht tot het laatst, deze meestal prima hadden gemaakt.

>

### Afronden

Opvallend was dat bij drie vragen waarbij een jaartal of het aantal dagen als antwoord werd gevraagd twee antwoorden als goed werden aangemerkt. Bijvoorbeeld bij vraag 13 was het laatste bolletje 'dus in 2022 (of 2021)'. Deze twee antwoorden worden respectievelijk op de volgende wijze gevonden: 2016 + 5,07... = 2022 en 2016 + 5 = 2021. Zoals eerder vermeld is hier eigenlijk sprake van een discreet probleem. Het is als docent lastig uit te leggen waarom beide antwoorden goed zijn, daar zit een nuance in die veel leerlingen niet begrijpen. Verder ontstaat hierdoor bij de leerlingen de houding dat, als ze allebei goed zijn, waarom zouden we er dan nog over nadenken. Wel of niet afronden zou juist in een wiskunde-A-examen eenduidig uit de context / probleemstelling moeten volgen. Als het niet uitmaakt doen we onszelf en de leerlingen tekort en waarom zouden we dan speciaal de afrondfouten nog moeten maximeren.

Wij hebben trouwens bij zowel eerste als tweede correctie geen leerlingen gehad die meer dan twee afrondfouten hadden en dus recht hadden op compensatie.

De volledige bespreking van dit examen is te vinden op *vakbladeuclides.nl/971vwo_a*

### Over de auteurs

Tessa Landgraf-Koster is docent wiskunde op het Christelijk Lyceum in Delft en ze is lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW. E-mailadres: *t.landgraf@chrlyceumdelft.nl*
Rutger Kock is docent wiskunde op het Libanon Lyceum in Rotterdam en hij is lid van de werkgroep havo-vwo van de NVvW. *E-mailadres: kck@llr.nl*

**Rob van Oord**

# Examen vwo wiskunde B

Rob van Oord bespreekt het vwo wiskunde-B-examen. Hij gaat vooral in op de twee opgaven waar zowel de leerlingen als de correctoren waarschijnlijk de grootste problemen mee hebben gehad. Het examen heeft een N-term van 1,5 .

### Eerste indruk

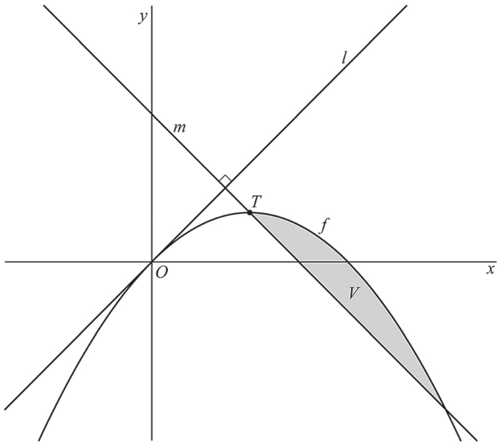
Prettige startvraag, zie figuur 1. De tekening geeft al goed aan wat je moet doen. Er is slechts één opgave die enigszins profielgerelateerd is. Met een maximale score van 74 punten zou je denken dat het werk goed te doen moet zijn. Maar... Bij de opgave *Aardbevingen* begint de ellende. Er zijn veel vragen met 6 of meer punten. In de vragen 5 t/m 9 moet er veel geprutst worden met berekeningen. Daardoor krijg je het gevoel in tijdnood te gaan komen. Kleine rekenfoutjes dwingen je om telkens opnieuw te beginnen. Als je ziet hoeveel verschillende oplossingen in het correctievoorschrift staan gaat het je al duizelen. Vraag 6 heeft drie oplossingen in het correctievoorschrift, vraag 8 heeft er vier, en dan zit die van mij er niet eens bij, vraag 9 heeft er liefst zes! Voor leerlingen dus ook een dilemma welke aanpak ze gaan kiezen. Ook bij vraag 14 staan zes oplossingen in het correctievoorschrift, maar dat is dan ook de laatste opgave die je op verschillende manieren kunt aanpakken.

**Parabool en twee lijnen**

De functie $f$ wordt gegeven door $f(x) = x - x^2$.

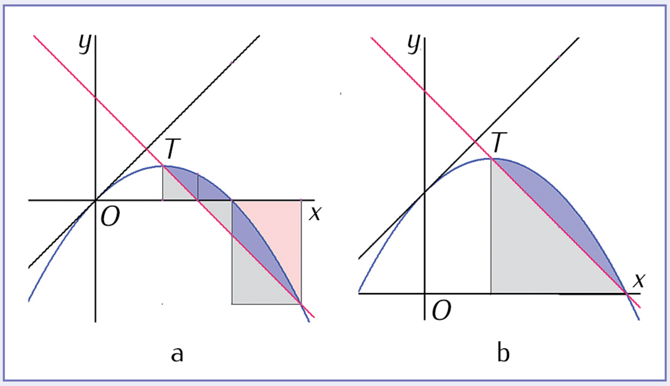
Het punt $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is de top van de grafiek van $f$.
De lijn $l$ is de raaklijn aan de grafiek van $f$ in de oorsprong.
De lijn $m$ staat loodrecht op lijn $l$ en gaat door $T$.
$V$ is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn $m$ en de grafiek van $f$.
Zie de figuur.

**figuur**




1 Bereken exact de oppervlakte van $V$.

*figuur 1*




*figuur 2*

Het aantal opgaven over profielspecifieke onderwerpen (zoals *Aardbevingen*) is erg mager. En dan gaat vraag 6 alleen maar over het bepalen van snijpunten van twee cirkels. Het examen lijkt veel op een toelatingsexamen tot een wiskundestudie, en minder op een afsluiting van een opleiding in een N&G of N&T profiel.

## Wat meer in detail

Er zijn best veel vragen (3, 5, 6, (7), 9) met 'Bereken ...', dus niet exact. Maar er moet wel eerst flink gedacht worden hoe je ze moet aanpakken. De opgave *Parabool en twee lijnen* (vraag 1, 8 punten, zie figuur 1) bijvoorbeeld. De oppervlakte werd vaak (foutief) gesplitst, heel wat leerlingen probeerden dit te doen. Als je een goede schets maakt, dan is het ook goed mogelijk (door die helling van -1 van lijn *m*) om met oppervlaktes van (geo-)driehoekjes te rekenen, zie figuur 2a.
In het correctievoorschrift wordt slechts één manier beschreven. Dus je moet zelf verzinnen hoe je de punten van de bolletjes 6 t/m 8 verdeelt voor het gekozen alternatief. Veel handiger is natuurlijk als je de hele figuur ¾ omhoogschuift, zie figuur 2b. Met een beetje goede wil scoor je al gauw 5 of 6 punten voor deze vraag.
De gonio-opgave met de spannende titel *Goniometrische functies* (vragen 2, 3 en 4) bevat een aantal standaardvragen, zoals: 'een bekende vergelijking, sin($x$) = sin($2x$), exact oplossen' of 'primitiveren van sin($x$) en sin($2x$)'. Van een collega kreeg ik te horen dat hij het verwarrend vond dat in de toelichting van het correctievoorschrift van vraag 3 staat dat je voor een niet volledig antwoord nog 1 punt (van de maximaal 2) kunt geven. Wat moet er staan voor een 'niet volledig juist' antwoord? Is de primitieve $-x$ van -1 al 1 punt waard? Het is gedeeltelijk juist. Daarmee heeft hij een punt. Maar de leerling waarschijnlijk nog niet. Bij de vraag over het raken van twee grafieken (4) moet je bewijzen dat zowel de functiewaarden als de hellingwaarden gelijk moeten zijn. Vaak laten leerlingen zien dat alleen de functiewaarden of de hellingen gelijk zijn. De afgeleide van tan($x$) die nodig was, is daarbij ook geen routinevraag meer.

## Aardbevingen

Bij het beantwoorden van vraag 5 moet je echt eerst bedenken dat $s = v \cdot t$ ofwel $t = \frac{s}{v}$, het minste dat je van natuurkunde moet weten. Het verschil van 17 seconden tussen beide golven leidt dan eenvoudig tot $\frac{d}{6} + 17 = \frac{d}{3{,}5}$. Daarna mag je oplossen met de GR. Voor vraag 6 moet een stelsel van twee cirkelvergelijkingen worden opgelost. De meeste leerlingen hebben gekozen om dit te doen volgens de derde manier van het correctievoorschrift. Dus veel gereken met grote getallen en een wortelvergelijking. Gelukkig kwam de discriminant wel op een kwadraatgetal uit: $1327104 = 1152^2$.
Bij de onderzoeksvraag (7) moet je een stelsel met twee variabelen ($a$ en $b$) oplossen. Daarvoor moet eerst twee keer een exponentiële uitdrukking naar log worden omgeschreven. Er moet goed gelezen worden wat het aantal $N$ precies voorstelt. Er staat vetgedrukt bij dat dit het aantal bevingen is met magnitude $M$ of groter. Toch heeft een aantal leerlingen dit niet goed begrepen en waarschijnlijk niet voldoende de voorbeelden gelezen die dit nog eens toelichten. Ze haalden uit de tabel $N(M \geq 6{,}5) = 56$ in plaats van $56 + 15 + 3{,}1 + 1{,}1 + 0{,}3 = 75{,}5$.

>

Dit terwijl in de tekst genoemd wordt dat je uit de tabel kunt afleiden dat er gemiddeld 4,5 aardbevingen zijn met een magnitude van 7,5 of groter. Dat wil zeggen dat $N(M \geq 7{,}5) = 4{,}5$ (en geen 3,1), zie figuur 3.

**tabel**

| magnitude | gemiddeld aantal aardbevingen per jaar |
|---|---|
| 6,0 – 6,4 | 210 |
| 6,5 – 6,9 | 56 |
| 7,0 – 7,4 | 15 |
| 7,5 – 7,9 | 3,1 |
| 8,0 – 8,4 | 1,1 |
| 8,5 – 8,9 | 0,3 |

De onderzoekers Gutenberg en Richter hebben een model ontwikkeld om het aantal aardbevingen per jaar in een gebied te voorspellen. Dit model is van de vorm:

$$N = 10^{a-bM}$$

Hierin is $M$ de magnitude en $N$ het te verwachten aantal aardbevingen per jaar met deze magnitude $M$ **of groter**. De waarden $a$ en $b$ zijn constanten.

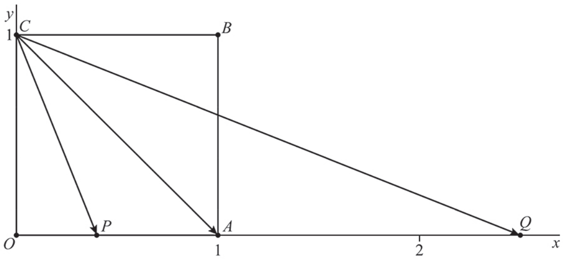
*figuur 3*

## Een vierkant met vier vectoren

Gegeven is het vierkant $OABC$ met hoekpunten $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ en $C(0,1)$. Verder zijn gegeven het punt $P(p,0)$ en het punt $Q\left(\frac{1}{p},0\right)$, met $0<p<1$.

In figuur 1 zijn de vectoren $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$ voor een willekeurige waarde van $p$ weergegeven.

**figuur 1**




**8** Bewijs dat voor elke waarde van $p$ de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

*figuur 4*

Zoals gezegd had ik bij vraag 8 een oplossing die niet in het correctievoorschrift staat. De titel en de tekst, waar gesproken wordt over vectoren, suggereren misschien dat je het bewijs van gelijke hoeken zou moeten aanpakken met inproducten. Maar dat hoef je toch niet per se te doen. Ik dacht aan de hoofdeigenschap van een bissectrice: de afstand van een punt op de bissectrice tot beide benen moet even groot zijn. Afstand van een punt tot een lijn zit immers in het programma. Ook die manier is best een gepruts en tijdrovend. Lijn $CP$: $y = -\frac{1}{p}x + 1$; loodlijn op $CP$ door $A(1, 0)$: $y = p(x - 1)$; snijpunt ($R$) van de loodlijn met $CP$:

$$x_R = \frac{p+p^2}{1+p^2} \quad \text{en} \quad y_R = -\frac{1}{p}\cdot\frac{p+p^2}{1+p^2}+1;$$

afstand $A$ tot $CP$ (in het kwadraat):

$$AR^2 = (1-x_R)^2 + (y_R)^2 =$$

$$\left(1-\frac{p+p^2}{1+p^2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{p+p^2}{1+p^2}\right)^2$$

Vervolgens lijn $CQ$: $y = -px + 1$; loodlijn op $CQ$ door $A(1, 0)$: $y = \frac{1}{p}(x - 1)$; snijpunt ($S$) van deze loodlijn met $CQ$, enzovoorts, geeft

$$AS^2 = \left(\frac{p+1}{p^2+1}-1\right)^2 + \left(1-p\cdot\frac{p+1}{p^2+1}\right)^2$$

Uit herschrijven van deze uitdrukkingen volgt $AR^2 = AS^2$, dus $AR = AS$ (dus $CA$ is bissectrice van $\angle PCT$, dus de gevraagde hoeken zijn gelijk). Hoe verdeel je de 6 scorepunten over deze manier van oplossen? Bij de derde oplossing van het correctievoorschrift liep ik tegen het woord *gelijkvormig* op. Volgens mij zijn $\Delta CAP$ en $\Delta CAR$ congruent (*ZHZ*). Ik heb gemaild naar het CvTE: zij berichtten me keurig dat 'congruent' niet in de woordenlijst in de syllabus staat. Dat klopt, zag ik. Maar je moet dus nu concluderen dat de genoemde driehoeken gelijkvormig zijn. Daaruit volgt ook dat de hoeken tussen de in de vraag genoemde vectoren gelijk zijn. Hoe krom wil je het hebben. Uiteraard mag een leerling die dat weet wél een congruentiegeval opvoeren. Dat is wel wat ik verwacht. Bij vraag 9 moest je weer terug naar de coördinaten van $P$ en $Q$ met $(p, 0)$ en $(\frac{1}{p}, 0)$. Dat gegeven heb je nodig om een vergelijking op te kunnen stellen. Dat staat in de tekst boven vraag 8, dus dat moet je wel beseffen. Vanaf vraag 10 komen weer gewone algebraische vaardigheden aan de orde. Limieten, differentiëren, ln, en $\sqrt{x}$. Daarmee kun je zonder veel gedoe makkelijk scoren. Jammer dat deze vragen niet eerder in het examen stonden. Bij vraag 14 moet je bedenken dat de helling van een lijn met gegeven hoek met de tangens berekend kan worden (beetje onderbouwstof) en de 30°- 60°- 90° driehoek: dan rolt het antwoord van vraag 14 er zo uit.

## Conclusie

Het is een aardig, vooral wiskundig getint examen met weinig toepassingen. Jammer dat de opgaven *Aardbevingen* en *Een vierkant en vier vectoren* zoveel problemen opwerpen dat je in de stress raakt en je gaat twijfelen of je wel tijd genoeg hebt voor de rest.

### Over de auteur


Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Maarten Müller

# Examenvoorbereiding met oude examens
# Examentraining of structureel oefenen?

Examenopgaven hebben nogal eens een ander karakter dan de opgaven uit de methoden. Maarten Müller beschrijft hoe je oude examens kunt inzetten, niet alleen als voorbereiding op de examens zelf, maar vooral als verrijking van je lessen.

## Inleiding

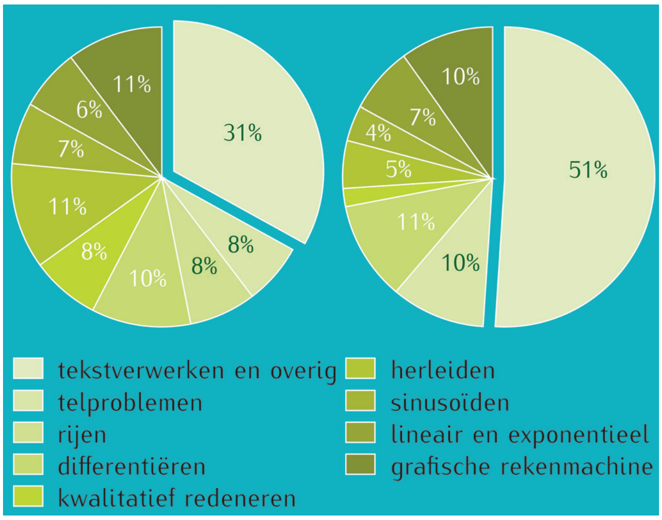
Als leerlingen voor het eerst in aanraking komen met oude examenopgaven, zijn ze vaak op z'n minst wat verbaasd. Bij wiskunde A zijn de gegevens soms wat meer verstopt in tekst, tabellen en grafieken. In de methodes worden de gegevens vaak kant-en-klaar aangeleverd. Bij wiskunde B komen ze tot de ontdekking dat in de vragen vaak zelf een plan ontworpen moet worden. In één opgave worden meerdere domeinen met elkaar gecombineerd en hun uitwerkingen zijn soms wel drie A4-tjes lang. Je wilt niet dat ze deze schok pas ervaren tijdens het eindexamen. Wanneer en hoe zet je oude examenopgaven in gedurende de schoolloopbaan van de leerlingen?

## Zijn examenopgaven echt zo anders dan opgaven uit de methode?

Om te kijken waar eindexamenopgaven een goede aanvulling op de methode kunnen zijn, is het nodig om een goed beeld te hebben van wat je zoal kunt verwachten van een eindexamen. Bij wiskunde A ziet dat er heel anders uit dan bij wiskunde B. Ik zal in dit artikel steeds spreken over vwo, maar voor havo geldt in meer of mindere mate hetzelfde.
Ik gebruik al jarenlang examenopgaven in de gehele bovenbouw, maar het blijft altijd zoeken waar je de meest geschikte opgave kunt vinden. Soms is de conclusie na een zoektocht van een half uur ook dat een bepaald onderwerp eigenlijk nauwelijks in het examen voorkomt. De afgelopen maanden ben ik voor het medeontwerpen van een examenvoorbereidingstool ExamenFit [1] veel bezig geweest met het analyseren van oude examenvragen. Je kunt examenopgaven voorzien van zogenaamde metadata. Op die manier kan ik nu de opgaven die ik zoek veel sneller terugvinden. Vragen behoren tot één of meerdere (sub)domeinen, zoals *inverse functies*, *telproblemen*, *algebra* of *periodieke functies*. Ze behoren tot een bepaald vraagtype, zoals *bereken algebraïsch*, *herleid* of *beredeneer*. En je kunt allerlei trefwoorden toekennen aan oude examenvragen, zoals *mathematiseren*, *kwadratisch verband* of *grafische rekenmachine*. Op deze manier heb ik de afgelopen maanden 24 oude examens doorgespit en ook de examens van het eerste tijdvak van dit jaar voorzien van metadata. Bij wiskunde A valt op dat de verhouding waarin de domeinen vertegenwoordigd zijn in de methodes en in de eindexamens heel erg van elkaar verschillen. Bij wiskunde B valt op dat het bij veel vragen veel meer zoeken naar de oplossingsstrategie is dan in het boek het geval is en ook dat veel vaker verschillende domeinen samenkomen in één vraag.

## Vwo wiskunde A 2021-I

Nadat ik de zes vwo wiskunde-A-examens van 2017, 2018 en 2019 van metadata had voorzien, heb ik een vergelijking gemaakt met het examen 2021-I, zie figuur 1.




*figuur 1*

De taartpunten *grafische rekenmachine* [2], *lineair & exponentieel* [3], *sinusoïden* [4], *herleiden* en *kwalitatief redeneren* representeren de basisvaardigheden. In de >

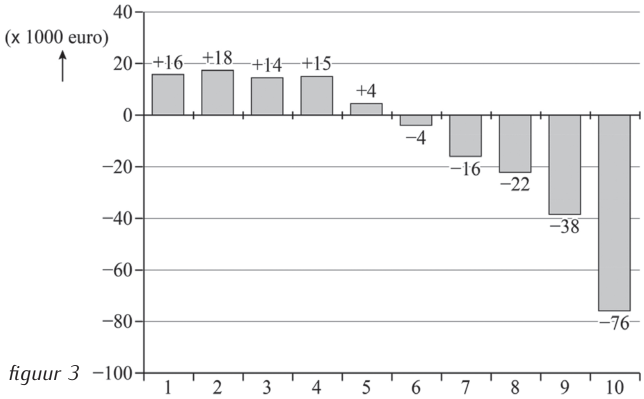
opgave is onmiddellijk duidelijk wat je moet doen. Trainen voor deze vragen kan ook heel goed met de lesmethode, hoewel bij sommige lesmethodes opvalt dat ze het veel formeler aankleden dan in het eindexamen het geval is. Met behulp van de metadata die ik voor ExamenFit heb gemaakt, kun je heel snel opgaven vinden uit oude examens waarmee de leerlingen deze specifieke vaardigheden kunnen oefenen met oude examenopgaven. De taartpunten *differentiëren*, *rijen* en *telproblemen* representeren specifieke (sub)domeinen, die voor leerlingen erg herkenbaar zijn in de methodes. Dan blijft de grootste taartpunt nog over. En in 2021 was deze nog vele malen groter dan in de voorgaande zes edities. In deze taartpunt zitten nog een paar verschillende onderwerpen, maar voor een groot deel beslaat het verwerken van gegevens uit tekst, tabellen en grafieken. Onder andere de laatste vraag van het eindexamen, waarin de onderzoeksvaardigheden van leerlingen getoetst worden, valt hier meestal onder. Hierbij wordt veel probleemoplossend vermogen gevraagd. De leerling kan niet in één keer overzien wat er moet gebeuren en moet het probleem opdelen in deelproblemen.
Laten we de probleemaanpak bij opgave 21 van het examen vwo wiskunde A 2021-I eens nader analyseren.
De titel van de vraag is *Inkomensongelijkheid*. Nadat een leerling twee A4-tjes tekst met een tabel en een grafische weergave heeft doorgelezen is de vraag: 'Onderzoek of *S* in 2014 bij het secundair inkomen meer of minder dan 30 000 euro lager is dan bij het primair inkomen'. Vragen die zich aandienen zijn 'Wat is *S*?' en 'Wat is een primair en secundair inkomen?'
Hoe pakt een leerling zo'n vraag nu aan? In de methodes vind je weinig aanwijzingen wat je moet doen. Dit komt simpelweg doordat in de methodes zelden zoveel gegevens met elkaar gecombineerd moeten worden. Mijn advies aan de leerlingen is het volgende: Lees de tekst één keer globaal door. Lees de tekst nog een tweede keer door en streep de tekst weg die je hierna niet nog een keer hoeft te lezen, omdat ze vooral context biedt. Er blijft dan al veel minder tekst over. Bij tabellen kies je een aantal getallen in de tabel uit waarvan je aan jezelf probeert uit te leggen wat precies de betekenis van die getallen is. Aanwijzingen zijn te vinden in de beschrijving bij de tabel en in de informatie bij de kolommen en rijen.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **aandeel primair inkomen (%)** | 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 12 | 16 | 20 | 35 |
| **aantal huishoudens (x 1000)** | 784 | 769 | 776 | 777 | 777 | 777 | 777 | 777 | 777 | 776 |
| **aantal personen (x 1000)** | 1138 | 1041 | 1234 | 1330 | 1466 | 1597 | 1851 | 2155 | 2381 | 2535 |

*figuur 2*

Bij de tabel uit vraag 21, zie figuur 2, kun je bijvoorbeeld bij het getal 2155 vertellen dat er 2155000 mensen zijn die tot de 777 000 huishoudens behoren, waarbij 20% een hoger primair inkomen en 70% een lager primair inkomen heeft. Bij grafische weergave kies je een waarde uit de grafiek en je probeert in een zin aan jezelf uit te leggen wat die waarde betekent. Hier zijn aanwijzingen te vinden in de titel, de informatie bij de assen en in de beschrijving van de grafische weergave in de tekst.

**secundair inkomen min primair inkomen per huishouden**




*figuur 3*

Bij de grafische weergave van opgave 21, zie figuur 3, zou een leerling bijvoorbeeld bij de -22 het volgende kunnen zeggen: de huishoudens, waarbij 20% een hoger primair inkomen en 70% een lager primair inkomen heeft, hebben een secundair inkomen dat 22000 euro lager is dan hun primair inkomen. Daarna zouden de leerlingen kunnen proberen de vraag te analyseren en de verwijzingen te volgen. In de vraag wordt gesproken over een primair en secundair inkomen (zoals ook in de grafische weergave). Dit is het moment om meer gericht in de tekst te gaan zoeken naar de betekenis van deze twee vormen van inkomen. Leerlingen vinden dan: *Het primair inkomen van een huishouden bestaat uit de som van alle bruto inkomens uit werk en vermogen van alle personen uit dat huishouden. Als in een huishouden niemand betaald werk heeft of over vermogen beschikt, dan is het primair inkomen van dit huishouden gelijk aan nul.*
en
*Als we bij het primair inkomen van een huishouden alle ontvangen uitkeringen optellen en alle betaalde belastingen eraf halen, krijgen we het secundair inkomen van het huishouden.*
Daarnaast wordt er gesproken over de variabele *S*. Ook die wordt beschreven in de tekst: *De mate van inkomensongelijkheid tussen personen wordt weergegeven door S. We definiëren S als volgt: S is het gemiddeld inkomen per persoon in de tiende groep min het gemiddeld inkomen per persoon in de eerste groep.*

Als leerlingen op deze manier door de tekst heen zijn gegaan kunnen ze beginnen met de opgave, maar wat leren ze dit? In de methode die ik gebruik in ieder geval niet. Dit is precies waar oude examens uitkomst kunnen bieden en een waardevolle aanvulling kunnen zijn op de methodes. Uiteraard moeten leerlingen dan wel tips krijgen hoe ze zoiets aanpakken. Dit kun je als docent doen in je lessen, maar je kunt ook een tool zoals ExamenFit gebruiken, waarin leerlingen tips krijgen als ze vastlopen en niet alleen kunnen zien hoe het had gemoeten. Het leren zit hier niet in het zien van de uitkomst, maar het krijgen van aanwijzingen over probleemaanpak.

## Vwo wiskunde B 2021-I

Bij wiskunde B valt vooral op dat in de methodes vragen netjes geordend zijn op onderwerp. In sommige methodes wordt elke vraag voorafgegaan door een stukje theorie waardoor je al niet meer hoeft te bedenken welk stukje theorie je moet gebruiken. Bij het toekennen van domeinen aan examenopgaven kwam ik vaak tot de conclusie dat veel domeinen samenkomen in één opgave en dat er veel probleemoplossend vermogen gevraagd wordt. Deze opgaven kregen vaak het trefwoord *mathematiseren*. Daar moet de leerling bedenken hoe hij de informatie die vaak in tekst wordt aangeleverd kan vertalen naar wiskundetaal om er vervolgens mee te kunnen rekenen. Neem als voorbeeld vraag 8 van het examen vwo wiskunde B 2021-I, zie figuur 4. In deze opgave werden in het correctievoorschrift vier mogelijke routes naar het eindantwoord beschreven, waar mijn leerlingen probleemloos nog minimaal vier varianten aan toevoegden. De wiskunde die gebruikt werd was een mooie combinatie van *herleiden* en meetkunde met *de formule voor de hoek tussen twee vectoren* of *gelijkvormigheid*.
Als je de vaardigheden die hier gevraagd worden wilt trainen, gaat dat veruit het meest eenvoudig met oude examenopgaven. Dit lukt met de methode minder goed omdat de opgave vaak na een stukje theorie staat, waardoor al weggegeven wordt welke wiskunde gebruikt moet worden. Maar hoe doe je dat bijvoorbeeld in 4 vwo?

## Hoe zet je examenopgaven in tijdens het leerproces?

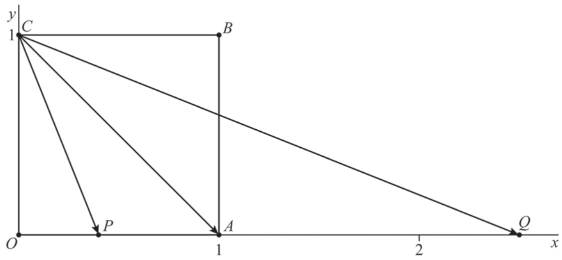
Wiskunde leren betekent naast veel kennis opdoen en wiskundige vaardigheden leren beheersen ook leren probleemoplossend bezig te zijn. Hiermee bedoel ik dat leerlingen hun kennis en vaardigheden flexibel moeten leren inzetten in (nieuwe) contexten.
Als je dit ook wilt toetsen voor het eindexamen, zou je dus ook in eerdere toetsen examenopgaven op kunnen nemen. De vwo eindexamenopgaven zijn wellicht wat lastig voor 4 vwo, maar daar kunnen ook examenopgaven van de havo

**Een vierkant en vier vectoren**

Gegeven is het vierkant $OABC$ met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ en $C(0, 1)$. Verder zijn gegeven het punt $P(p, 0)$ en het punt $Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)$, met $0 < p < 1$.

In figuur 1 zijn de vectoren $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$ voor een willekeurige waarde van $p$ weergegeven.

**figuur 1**




8 Bewijs dat voor elke waarde van $p$ de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ gelijk is aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$.

*figuur 4*

gebruikt worden. Zeker de opgaven met veel tekst uit het havo wiskunde-A-eindexamen kunnen ook in 4 havo of zelfs in de onderbouw prima in toetsen gebruikt worden. Als je dit soort opgaven in toetsen opneemt, zul je ze ook in de lessen moeten oefenen. Alles overwegend kun je zeggen dat examenopgaven inzetten puur en alleen als laatste voorbereiding op het eindexamen veel te kort door de bocht is. In examenvragen worden echt andere vaardigheden gevraagd. Sterker nog, er komen vaardigheden aan bod die in de methodes veel minder aandacht krijgen. Oude examens integreren in je lessen kun je doen door kopieën te maken, of op een digitaal device te werken. Maar een examenvoorbereidingstool zoals ExamenFit, met tips en uitwerkingen kan ook een waardevolle aanvulling zijn op de lesmethode.

## Noten

[1] zie: *https://examenfit.nl/*
[2] Het gaat om het aflezen van nulpunten, toppen en snijpunten met behulp van de grafische rekenmachine.
[3] Het gaat om het opstellen van formules van lineaire of exponentiële groei of het bepalen van de richtingscoëfficiënt of de groeifactor.
[4] Het gaat om het opstellen van de formule van een sinusoïde of het bepalen van één of meer parameters in de formule $y = a + b \cdot \sin(c(x-d))$.

## Over de auteur


Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en werkt als zzp'er mee aan de ontwikkeling van examentrainingstool Examenfit.
E-mailadres: *m.muller@marianum.nl*

Marjan Botke, Merijn Smit

# Examen vwo wiskunde C

Mooi dat Wiskunde C niet meer wordt gezien als een wiskunde A light variant, maar als een serieus wiskundevak voor het CM-profiel. Het examen was, net als het wiskunde A-examen, erg lang met veel tekst, maar bevatte wel mooie contexten. De N-term was 1,2.

## Inleiding

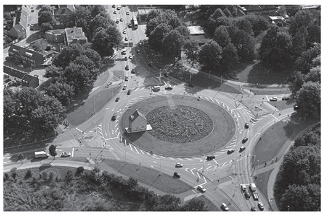
Het examen had (te) veel opgaven (zes contexten, 24 vragen), veel leerlingen zijn tot aan het einde van de zitting gebleven. Er moest onder andere een vergelijking van een raaklijn en een recursieve formule opgesteld worden. Het tekenen bij het onderdeel 'Vorm en ruimte' was best lastig.

## Draaiend huis

Op de Hasseltrotonde in Tilburg staat een huis. Eigenlijk is 'staat' niet het goede woord, want het huis beweegt: het draait in het rond. Het gevolg is dat elke keer dat je langs de rotonde rijdt, het huis op een andere plaats kan staan. Het is een kunstproject, ontworpen door John Körmeling.
Zie foto 1 en foto 2 hieronder.

**foto 1**

**foto 2**



Het huis legt in 20 uur één ronde af, zodat je, als je de rotonde elke dag op hetzelfde tijdstip passeert, het huis geen twee opeenvolgende dagen op dezelfde plaats ziet.

*figuur 1*

De opgave over het draaiende huis, zie figuur 1, is een leuke bestaande situatie die mooie realistische vragen kan opleveren. De eerste vraag gaat over de positie van het huis na een bepaalde tijd. Er moet hier worden berekend welk deel van de periode een gegeven tijdsduur is, en vervolgens moeten de leerlingen aangeven waar op de cirkel het huis zich dan bevindt. Een mooie vraag om mee te beginnen, niet te moeilijk. Deze vraag zat ook in het wiskunde-A-examen. Jammer dat de wiskunde-A-leerlingen deze vraag pas als vraag 6 kregen. Dit was voor wiskunde A een betere startvraag geweest dan de vraag met de breuken.

In de tweede vraag moeten de leerlingen berekenen wanneer het huis weer op hetzelfde tijdstip (maandagochtend 8:00 uur) op dezelfde positie staat. Dit betekent dat ze moeten nadenken over de periode van één hele ronde, in een dag of in een week, en dan net zo lang doorgaan totdat het huis zich om 8:00 weer in de startpositie bevindt. De derde vraag gaat over de snelheid die het huis moet hebben om even snel te bewegen als een auto (met een grotere omtrekcirkel) die een snelheid van 25 km per uur heeft. Dit kan worden berekend met een eenvoudige verhoudingstabel, maar dan is er wel behoorlijk veel inzicht nodig. De meeste leerlingen hebben keurig van beide cirkels de omtrek berekend en daarna snelheid (iets omslachtiger, maar het komt op hetzelfde neer). Leerlingen die dit onderdeel handig hadden gemodelleerd (wda), konden deze vraag sneller afronden en hadden daardoor meer tijd voor andere onderdelen.

## Tweepiramidendak

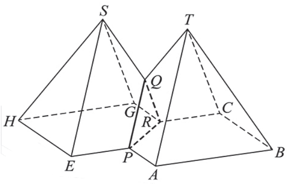
Deze opgave gaat ook over een huis, een soort stolpwoning. Deze woning heeft een dak in de vorm van twee gedeeltelijk overlappende piramides, zie figuur 2.
Bij vraag 4 moeten de leerlingen een bovenaanzicht van het dak tekenen op de bijlage. Lastig hieraan is dat je eerst het bovenaanzicht van beide piramides moet tekenen en daarna moet nadenken welke delen je niet ziet bij de overlap. Ook moeten de diagonalen op het piramidedak getekend worden. Leerlingen maakten hierbij nog wel eens fouten, omdat je nauwkeurig moet zijn met het stippelen van lijnen die je niet ziet.
Bij vraag 5 moet er een perspectieftekening van het grondvlak worden getekend op de bijlage. In de vraag wordt echter niet expliciet vermeld dat de horizontaal lijkende lijnen ook daadwerkelijk evenwijdig zijn met de horizon. Gelukkig zijn de leerlingen hier wel van uitgegaan. Daarnaast staat op de bijlage de start van deze

**Tweepiramidendak**

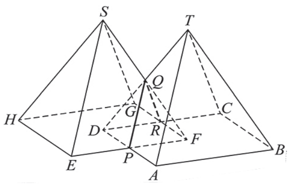
Op de foto zie je een bijzonder huis:
als basis voor het grondvlak zijn twee even grote overlappende vierkanten gebruikt. Het dak bestaat uit twee piramidevormige delen die aan elkaar vastzitten.
In figuur 1 zie je een model van het dak van dit huis. In het vervolg van deze opgave kijken we naar dit model, waarbij de verbinding tussen de toppen van beide dakdelen buiten beschouwing is gelaten.

**foto**

**figuur 1**




**figuur 2**

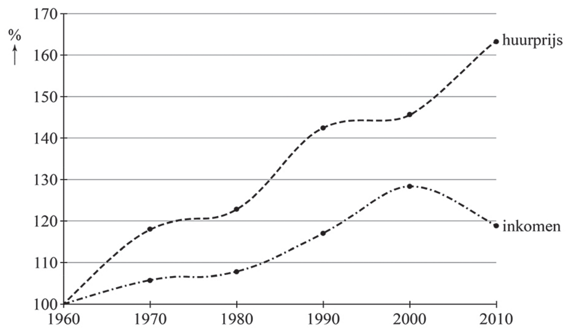



*figuur 2*

tekening een kwartslag gedraaid. Waarom hebben de examenmakers dit gedaan? Dit is echt bijzonder onhandig. Wij moesten als docent al even heel goed kijken hoe de tekening gemaakt moest worden. Dan lijkt het ons helemaal verwarrend voor de leerlingen. Deze lay-out had veel beter gekund. Vraag 6 vraagt naar de oppervlakte van de schuine bovendelen van het tweepiramidendak. Hierbij wordt de hoogte van het dak al gegeven. Dit lijkt mij niet echt noodzakelijk, want dat kunnen de leerlingen zelf wel uitrekenen. Het maakt de opgave wel wat minder complex. Er zijn meerdere manieren om de oppervlakte uit te rekenen. Bijvoorbeeld door de oppervlakte van de twee grote piramiden op te tellen en daar de kleine piramide (overlap van de beide grote piramiden) af te halen. Ook is het natuurlijk mogelijk om afzonderlijk de oppervlakte van elk dakdeel te berekenen. De dakdelen zijn driehoeken (4x) en driehoeken met een stuk eraf (4x).

## Huurprijzen in New York

In deze opgave gaat het weer over huizen (dat is zeker het thema van dit examen). Maar nu hebben we de huurprijs van een huis in New York door de jaren heen. Deze context komt ook weer gedeeltelijk voor in het wiskunde-A-examen. Vraag 7 vraagt naar de gemiddelde huurstijging als de inflatie ook wordt meegenomen. Om dit op te lossen moeten de leerlingen eerst de huurprijs na inflatie berekenen (dit moet met een exponentiële functie) en vervolgens moet het procentuele verschil worden bepaald. Een niet al te moeilijke opgave voor leerlingen die economie in hun pakket hebben, alleen hebben de meeste wiskunde-C-leerlingen dat niet. Bij vraag 8 moeten de leerlingen door middel van procentrekenen het gegeven percentage van 21% narekenen. Bij vraag 9 is het nodig om een exponentiële formule op te stellen en vervolgens een exponentiële vergelijking op te lossen. Het lastige hierbij is dat de gegeven waarden ook in percentages zijn gegeven. Dit maakt de vraag onnodig ingewikkeld.




Hieronder staan twee uitspraken die gaan over de gegevens in figuur 3:
1 In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000.
2 In de periode 1990–2000 daalde de huurlast.

*figuur 3*

Bij vraag 10 worden twee stellingen gegeven die gaan over de huurprijzen en het inkomen in figuur 3. De leerlingen moeten aangeven of de stellingen juist of onjuist zijn. Maar omdat er bij het aflezen een marge mag worden aangehouden, is stelling 1 zowel juist als onjuist te verklaren met de figuur. Een juiste argumentatie bij de berekening is hierbij het belangrijkste. Bij stelling 2 is dit gelukkig niet het geval en kunnen de leerlingen aangeven waarom de stelling juist is. Bij de laatste vraag van deze opgave kunnen de leerlingen met behulp van een trendlijn die ze zelf opstellen de huurlast voorspellen in 2023. De huurlast is weer een percentage.

## Grand Prix van Monaco

Eindelijk een context die niet over huizen gaat. Deze opgave gaat over de Formule 1 coureurs van de GP in 1996. Lijkt mij een actuele context omdat Max Verstappen een week na dit examen in Monaco gaat racen en daar zelfs als eerste over de finish weet te komen. Maar dat weten we natuurlijk nog niet tijdens dit examen.
Bij de eerste vraag moeten de leerlingen uitrekenen hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn voor het samenstellen van een top 3 bij het gegeven deelnemersveld. Dit kan bijvoorbeeld met de permutatie van 3 uit 22. De leerlingen moeten hier wel zien dat het een permutatie is en geen combinatie, dat lijkt ons de essentie van deze vraag. Bij vraag 13 wordt het uitrekenen van de gemiddelde snelheid van één van de coureurs gevraagd; een vraag die redelijk standaard is. Vraag 14 geeft een venndiagram met uitleg over dit diagram. Aan de hand van de gegevens kunnen de leerlingen bepalen welke coureur hoort bij >

welk deel van het venndiagram. De meeste leerlingen hebben deze opgave goed gemaakt. Bij vraag 15 moeten de leerlingen een gebied in het venndiagram inkleuren dat voldoet aan de gegeven voorwaarden. Vraag 16 bevat een beschrijving in logische symbolen waaruit is af te leiden welke coureurs aan deze voorwaarden voldoen, in vraag 17 volgt het omgekeerde: een beschrijving geven van een gegeven coureur in logische symbolen. Jammer dat hier één coureur wordt gegeven terwijl er meerdere coureurs zijn die aan dezelfde beschrijving voldoen. Het feit dat deze logische expressie niet verwijst naar een unieke coureur, maakt het gebruik van de term *de* coureur erg onduidelijk. In het correctievoorschrift stond dat er ook een omschrijving in woorden bij moest, maar dit stond niet in de vraag. In de examenbespreking is afgesproken dat alléén de logische symbolen ook 2 punten opleveren.

## Padovantafels

Deze opgave gaat over tafels met een bijzonder tafelblad. Het tafelblad heeft het patroon met de rij van Fibonacci. Daarna wordt op eenzelfde wijze overgegaan op een tafelblad met de rij van Padovan, zie figuur 4.

Op de foto zie je een zogenoemde Fibonaccitafel van de firma NautaBene Design. Het patroon van het tafelblad is geïnspireerd op de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,….

Het tafelblad bestaat uit vier vierkanten en een rechthoekig gat.
De zijden van de vierkanten verhouden zich als 5 : 8 : 13 : 21.
De tafel is 120 cm lang en 74 cm breed.

*figuur 4*

Laat het duidelijk zijn, deze context gaat onder andere over het onderdeel rijen en reeksen. De eerste vraag gaat echter over het berekenen van de afmetingen van het rechthoekige gat in het tafelblad. Niet voor alle leerlingen was het duidelijk welke afmetingen je kunt gebruiken voor de start van de berekening. Bij vraag 19 moesten de leerlingen aan de hand van de gegevens in de tekst een recursieformule opstellen voor de lengte van de zijdes van de driehoeken in de Padovantafel. In deze recursieformule kwamen de termen $p_{(n)}$, $p_{(n-1)}$ en $p_{(n-5)}$ voor en daarom was het noodzakelijk om de startwaardes van $p_{(1)}$ tot en met $p_{(5)}$ te geven. Dit was waarschijnlijk nieuw voor de leerlingen. Meestal wordt alleen $p_{(n)}$, $p_{(n-1)}$ en soms $p_{(n-2)}$ behandeld tijdens de lessen.
In vraag 20 moesten drie recursiefomules worden samengevoegd/herleid tot een nieuwe recursieformule. Dit kan op verschillende manieren. De leerlingen vonden dit een erg lastige opgave.

## Wisselslag

Dit is de laatste context van dit examen. Het gaat over het vullen van een zwembad, de bezoekersaantallen en het aantal buitenzwembaden in Nederland. Bij vraag 21 moet er in de grafiek voor twee verschillende pompen worden afgelezen hoeveel liter water een pomp per uur een zwembad in kan pompen. Hiermee kan vervolgens worden berekend hoeveel tijd het kost om het zwembad te vullen. Het eindantwoord is het verschil in minuten tussen de twee typen pompen. Bij vraag 22 moeten de leerlingen de helling bepalen van een grafiek en de betekenis hiervan geven. Dit kan bijvoorbeeld door het tekenen van een raaklijn en het opstellen van de vergelijking van deze raaklijn (of alleen de helling). De betekenis van deze helling wordt vaak fout of onvolledig door de leerlingen genoteerd. Dit is een duidelijk voorbeeld van betekenis kunnen geven aan je antwoord. Vraag 23 gaat over de afname van de totale aantallen bezoekers van buitenbaden. Er moet worden onderzocht of deze afname wel of niet exponentieel is. Om dat te bepalen, is het nodig om de totale aantallen bezoekers uit te rekenen met behulp van de bezoekersaantallen per buitenbad en het aantal buitenzwembaden. Vervolgens moet voor de drie periodes de groeifactor worden berekend. Als deze drie groeifactoren ongeveer gelijk zijn, is de afname exponentieel en anders niet. Het is ook mogelijk om met de groeifactor van de eerste periode de andere twee bezoekersaantallen te voorspellen en vervolgens te vergelijken met de berekende bezoekersaantallen. Zijn de bezoekersaantallen van de exponentiële voorspelling ongeveer hetzelfde als de berekende aantallen, dan is de afname exponentieel en anders niet. Bij vraag 24 moeten de leerlingen met behulp van lineair extrapoleren nagaan of het aantal buitenzwembaden daalt tot een bepaald aantal. In de tabel moeten de leerlingen de daling ontdekken, deze daling doortrekken tot 2019 en bepalen of het aantal buitenzwembaden onder de 177 of 178 komt. Hier moet een juiste conclusie bij worden gegeven. Wij vinden het belangrijk dat de leerlingen alleen gebruikmaken van de laatste twee jaartallen. Dit wordt niet aangegeven in het correctievoorschrift.


### Over de auteurs

Marjan Botke is docent wiskunde aan het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam en lerarenopleider aan de Universiteit Delft. Ze is voorzitter van de havo-vwo werkgroep van de NVvW en lid van de commissie onderwijs van PWN. E-mailadres: *botke@erasmiaans.nl*
Merijn Smit is docent wiskunde aan het Gymnasium Haganum in Den Haag, beeldcoach® en schoolopleider voor 4OLS. Hij is lid van de werkgroepen havo-vwo en statistiek van de NVvW. E-mailadres: *m.smit@haganum.nl*

Jörgen van Remoortere

# 'Een neus voor kwaliteit'

Als tegenwicht voor alle aandacht voor summatief toetsen in deze examenspecial: het formatief beoordelen van leerlingenwerk. Jörgen van Remoortere laat dat de leerlingen zelf doen met de werkvorm *comparative judgement.*

## Inleiding

Het afgelopen uur zaten mijn leerlingen te zwoegen, te zweten en soms ook te zuchten boven hun proefwerk. Na het signaal 'pennen neer' en het inleveren, verlaten de leerlingen het lokaal. Ik blader door de ingeleverde uitwerkingen en ik realiseer me dat ik vaak al snel op basis van één blik kan zien of het onder of boven de maat is. Hoe dat komt? Dat wordt 'een neus voor kwaliteit' genoemd. Die heb je als docent, maar het mooie is: die kunnen je leerlingen ook ontwikkelen. In deze tijden van examens zien wij, en ook de leerlingen, in de aanloop daarnaartoe veel vaker dan op andere momenten in het jaar de correctievoorschriften. Ofwel, dat wat leerlingen moeten laten zien om aan te tonen dat ze de lesstof in voldoende mate beheersen en om voldoende te scoren op hun toetsen. Een summatief moment, nu spant het erom: ben je door of niet?

## Rubrics

Een leerling legt een lange weg af naar dat moment. Ik probeer die route zo formatief mogelijk in te richten. Dus veel kleine checks en andere vormen van waarnemen, gevolgd door een terugkoppeling met actie voor de leerling of actie van mijn kant om het leren bij te sturen. In dat formatieve traject werk ik veel met leerdoelen en ook met uitgewerkte rubrics, zoals in figuur 1. Die uitgewerkte rubrics deel ik alleen steeds minder vaak met de leerlingen en het heeft even geduurd voordat ik dat doorhad en nog iets langer waarom ik dat eigenlijk steeds minder deed.

| Leerdoel | Beginner | In ontwikkeling | Gevorderd | Expert |
|---|---|---|---|---|
| Ik kan hoeken tekenen. | Ik weet de verschillen tussen scherpe, rechte, stompe en gestrekte hoeken en kan die ook herkennen. | Ik kan een scherpe en een rechte hoek tekenen. | Ik kan een stompe hoek tekenen tot 180°. | Ik kan iedere hoek tekenen van 0° tot en met 360°. |

*figuur 1*

Een rubric maken kost tijd. Nee, een goede rubric maken kost tijd. De manier waarop ik een rubric opbouwde was door te beginnen met het eindniveau van de doelgroep bij het specifieke leerdoel. Bijvoorbeeld bij het leerdoel: 'Ik kan een hoek tekenen' was het einddoel dat de brugklasleerling (vmbo-t) een hoek kon tekenen tussen de 0° en de 180°.

Ik bedacht daarna in welke stappen een leerling daar komt. Een hoek tussen de 0° en 90° is makkelijker. Dus die hoort één stap voor het einddoel. Excelleren binnen dit leerdoel kan ook eenvoudig aangegeven worden, namelijk door een hoek te tekenen tussen de 180° en de 360°. Wat er in de rubrics als stap voor het tekenen van een hoek tot 90° hoort is al iets lastiger. Ik heb gekozen voor: 'Ik ken het verschil tussen een scherpe en een stompe hoek'. Dat hoort wellicht niet bij het tekenen van een hoek zelf, maar is volgens mij een essentiële kenniscomponent die nodig is bij het tekenen. Misschien bedenk jij nu iets anders. Dat kan, en dat is ook goed. Het gesprek dat we daarover kunnen voeren is daarbij zeer waardevol.
Met deze rubric in de hand ga ik met de leerlingen aan de slag. De les wordt opgebouwd in stapjes, waarbij ik 'scherp' en 'stomp' herhaal en waarin we gaan tekenen. Eerst scherpe hoeken: ik leg uit hoe de geodriehoek gebruikt moet worden, waar bij het tekenen de boogjes horen te staan en de hoofdletter die de hoek aanduidt. Uiteraard moet ik wat leerlingen vragen hun pen weg te leggen en een potlood te gebruiken. Als ik naar hun werk kijk, dan lukt het de meeste leerlingen best aardig maar toch ben ik niet helemaal tevreden: sommige tekeningen zien er niet uit, andere kunnen zo een wiskundeboek in. Daar is de neus voor kwaliteit weer: ik zie in één oogopslag: oké of niet oké. Even los van het feit of een hoek niet 28° is in plaats van 32° (dat vraagt een nauwkeurigere blik).

>

## Comparative judgement

Nadenkend over hoe ik de leerlingen ook kan laten zien wat een goede tekening is, en wat niet, realiseer ik me dat ik dat écht wel heb uitgelegd. Ik heb het ook opgeschreven, en ze hebben het me ook zien voordoen op het bord. Waarom zie ik dat dan niet terug in hun gemaakte werk? Eigenlijk is dat goed te verklaren, want je kunt kwaliteit niet altijd heel specifiek beschrijven. En als je dat toch probeert, dan heb je ook kans dat je beschrijving zo uitgebreid wordt, dat het óf niet praktisch toepasbaar is, óf dat het een afvinklijst wordt waarbij je alles van waarde verliest wat niet is beschreven of niet in de afvinklijst staat. Een ander aspect waarom leerlingen die vaardigheid niet verwerven heeft volgens mij te maken met de passiviteit van kijken en luisteren tijdens het voordoen van de docent. Als de docent daarna met de klas samen een voorbeeld uitwerkt, is het niet te doen om alle 27 leerlingen direct feedback te geven op wat zij op dat moment doen en in hun schrift verwerken. De feedback die je geeft bij een eventueel rondje door de klas, in de sfeer van: 'Let op, teken met potlood!' of 'Vergeet niet met een boogje aan te geven welke hoek je bedoelt', wordt vaak passief verwerkt door de leerling. Bij meer vragende feedback, zoals 'Wat ben je vergeten aan te geven?, of 'Hoe zie ik welke hoek je getekend hebt', wordt de leerling wel meer uitgedaagd tot denken en actie maar je ziet dan niet de uiteindelijke verwerking ervan. Toen ik een keer op zoek was naar andere manieren van beoordelen kwam ik in aanraking met *comparative judgement*.[1] Kort gezegd houdt dat in dat je uitwerkingen van leerlingen steeds paarsgewijs vergelijkt en aangeeft welke van de twee de beste is. Een aantal docenten doet dat met dezelfde set leerlingenwerk. Het achterliggende systeem rangschikt alle werken, op basis van de keuzes van de docenten van laag naar hoog. Jij (en je collega-docenten) zijn daarna in staat om ook de grens aan te geven: tot hier is het onvoldoende en vanaf hier voldoende. Dit is een sterk vereenvoudigde weergave van *comparative judgement,* maar het geeft een goed beeld van het principe.

## Succescriteria

De vertaling die ik van *comparative judgement* heb gemaakt voor mijn lespraktijk is het combineren van een *exitticket* met een sorteer-en-verklaaropdracht in de les erna. Dat komt erop neer dat ik vooraf bedenk: Waar wil ik op letten, wat vind ik belangrijk en met welke opdracht krijg ik ook het beeld te zien waar ik naar op zoek ben? Die opdracht geef ik aan de leerlingen aan het einde van de les. Zij maken die en leveren die bij mij in (op papier of digitaal met een foto). Dat mag op naam, maar ook anoniem. Ik ga ze namelijk zelf nu geen feedback geven. Na de les selecteer ik ongeveer vijf uitwerkingen van verschillende kwaliteit. Die vijf scan ik en de leerlingen krijgen in de volgende les de opdracht om in groepjes die uitwerkingen te sorteren van slechtste tot beste. Ze moeten met elkaar in gesprek over het 'waarom de één beter is dan de ander'. Vaak laat ik ze dan opschrijven wat de succescriteria volgens hen zijn. Soms laat ik het bij het bespreken van de succescriteria. Als ze klaar zijn, stel ik meestal maar één vraag: Waarom liggen de beste en één na beste zo en niet omgekeerd? In die twee besten zit vaak de nuance. Of iets wat bij de nummer twee toch wel beter was dan bij de beste, maar wat ze minder belangrijk vonden. Dan komt het moment om het kwaliteitsbesef te verwerken. Ik varieer dan tussen het laten verbeteren van of feedback geven op de uitwerking die in het midden van hun rijtje stond of ik laat ze reflecteren op hun eigen uitwerking en laat die verbeteren. Na deze verwerking maken ze een nieuwe, soortgelijke opdracht om ook dan weer met alle aspecten die ze net besproken hebben rekening te houden. Let wel op: Deze opgave moet niet moeilijker of makkelijker zijn, want ik wil dat de aandacht nu uitgaat naar het toepassen van de succescriteria (kwaliteit) van de uitwerking.

## Voorbeeld: gelijkvormigheid

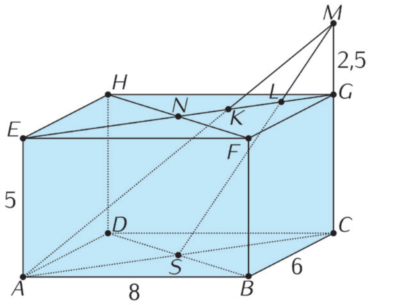
De derde klas (vwo) is bezig geweest met gelijkvormigheid. Voor ze de stap maken naar de echt ingewikkelde opgaven, wil ik van een aantal dingen zeker zijn:

— het opstellen van een verhoudingstabel en daarin rekenen met kruisproducten moet geen probleem meer zijn;
— het correct opschrijven van de juiste stappen om te komen tot die verhoudingstabel moet bij iedereen vanzelfsprekend zijn.

Met name het tweede doel is de focus van deze opdracht. Wat leerlingen leren bij het aantonen en rekenen met gelijkvormigheid in de meetkunde (in dit geval driehoeken) is: redeneren, verbanden leggen, conclusies trekken, bewijs leveren en dat alles zodanig dat de hele bewijsvoering en redenatie stap voor stap te volgen zijn voor de lezer.

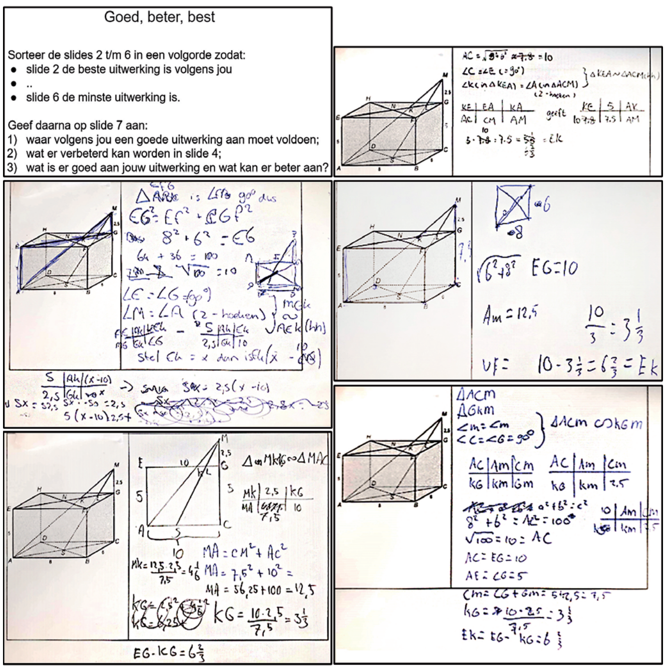
Als opdracht (fig. 2) heb ik gegeven:

Bereken $EK$, geef een exact (breuk) antwoord.




*figuur 2 (uit Getal & Ruimte, 12e editie)*

Omdat de leerlingen tabellen moeten maken en bij hun uitwerkingen ook diverse wiskundesymbolen en notaties moeten gebruiken, heb ik ervoor gekozen om de opdracht op papier uit te reiken en in te nemen. In een online setting kun je leerlingen een foto ervan laten inleveren. Na de les ben ik door de gemaakte opgaven heen gebladerd, op zoek naar uitwerkingen van verschillende kwaliteit. Ik heb vooral gekeken naar de volledigheid en juistheid van het noteren van de uitwerking. Van de negen geselecteerde uitwerkingen ben ik teruggegaan naar vijf in de stijl zoals je doet bij de werkvorm 'My favorite No'.[2] Deze vijf heb ik in een Google slide gezet in willekeurige volgorde met drie opdrachten erbij. De slides heb ik via Google Classroom met de leerlingen gedeeld (voor iedere leerling een eigen exemplaar), zie figuur 3.




*figuur 3*

De drie opdrachten die ik daarbij heb gegeven, zijn:

— Sorteer deze opgaven (versleep de slides) van beste naar slechtste uitwerking.
— Schrijf op waar een goede uitwerking aan moet voldoen.
— Geef van één van de uitwerkingen aan hoe die verbeterd kan worden.

In figuur 4 zie je een voorbeeld van wat leerlingen in stap 2 en 3 hebben opgeschreven.

**Een goede uitwerking**

Een goede uitwerking bestaat uit:

- Schets (optioneel)
- Verhoudingstabel
- Gelijkvormigheid aantonen
- Laten zien hoe je iets berekent / op je antwoord komt

De maker van slide 4 kan zijn/haar uitwerking verbeteren door…

- Aantonen waarom de driehoeken gelijkvormig zijn
- Nog een verhoudingstabel maken met alleen de letters (lijnen) erin

*figuur 4*

Leerlingen hebben zo een concreet en praktisch beeld ontwikkeld van de succescriteria die horen bij een goede, volledige en navolgbare uitwerking. Gaandeweg het hoofdstuk hebben ze daar natuurlijk al mee gewerkt, maar bij deze opdracht komt alles nog eens samen. Nadat de leerlingen met de opdracht klaar waren, hebben we de door hen geformuleerde succescriteria nog samen besproken. Ik heb daardoor de succescriteria kunnen aanscherpen en de belangrijkste elementen ervan kunnen benadrukken. Nadat de leerlingen in de les zelfstandig gewerkt hadden aan verdere opgaven heb ik ze vlak voor het afsluiten van de les gevraagd te kijken naar wat ze deze les hebben opgeschreven en hoe ze dat hebben opgeschreven. Dit om ze te laten controleren of hun antwoorden voldoen aan de eisen. Willekeurig heb ik een aantal leerlingen bevraagd: 'Wat doe jij al goed en waar moet je nog op letten?' Tijdens de les heb ik waardevolle en leerzame gesprekken gehoord, met mooi (of soms nog zoekend) wiskundig taalgebruik. Tijdens de afsluiting wist iedere leerling die ik sprak concreet te benoemen wat er goed gaat in het eigen werk en waar opgelet moet worden. Na de les heb ik de slides van de leerlingen kort bekeken om te zien of er bijzondere dingen opvielen. Wat me in ieder geval opviel is dat niet alle leerlingen een volledige beschrijving hadden gegeven van waar een goede uitwerking aan moet voldoen. Na de klassikale bespreking van de opdracht had ik de leerlingen wellicht nog de uiteindelijke versie van succescriteria in hun schrift kunnen laten opschrijven. Dan gaat iedere leerling naar huis met de juiste versie.

>

## Tot slot

Inmiddels heb ik de toets nagekeken, waarbij ik slechts bij één leerling constateer dat de notatie niet op orde is. Ik zie wel dat de juiste structuur en de juiste stappen er staan, maar het is niet de formele wiskundetaal. Eén andere leerling heeft een aantal keer conclusies getrokken zonder aan te tonen hoe hij daaraan is gekomen.

Al met al een mooie combinatie van *comparative judgement*, succescriteria, exittickets, (peer)feedback en reflectie. Met als resultaat een groter kwaliteitsbesef bij leerlingen. Ofwel een gevoeligere 'neus voor kwaliteit'. Of deze werkvorm veel tijd kost in de voorbereiding? Het exitticket maken kostte mij zes minuten. Printen en kopiëren: één minuut. De uitwerkingen filteren, vijf stuks fotograferen en in een slide zetten: twaalf minuten. De slide klaarzetten in classroom: één minuut. Al met al dus twintig minuten. Voor een les van zestig minuten. Wie is er aan het werk geweest? De leerling! En dat zonder een administratie bij te houden....

## Noten

[1] Zie bijvoorbeeld:
*https://www.vernieuwenderwijs.nl/vergelijkend-beoordelen-een-krachtig-principe/*
*https://www.teachertoolkit.co.uk/2017/11/25/comparative-assessment/*
*https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feduc.2017.00044/full*

[2] Zie *https://www.youtube.com/watch?v=srJWx7P6uLE*

## Over de auteur

Jörgen van Remoortere is docent op het Alkwin Kollege in Uithoorn. Hij is medeoprichter van de Facebookgroep 'Actief leren zonder cijfers' (meer dan 10 000 leden) en heeft zijn eigen blog: *https://jvremoortere.wordpress.com/*. Daarnaast is hij lid van het bestuur van de NVvW.
*E-maliadres jorgen@vanremoortere.nl*

# De wiskundige

Henk Rozenhart

We zien hier een schilderij van Ferdinand Bol. Het hangt in het Louvre. De titel is 'de wiskundige'. Een aantal jaren geleden was er onder andere op de website van de wiskundemeisjes (nog steeds een bron van veel wiskundeplezier) enige discussie over wie de afgebeelde wiskundige is. De meest genoemde naam is John Wallis. Maar de vraag is nog steeds niet definitief beantwoord. Of wel? En om welk stukje wiskunde gaat het eigenlijk?

# Jaarvergadering/studiedag 2021

## Tweede uitnodiging

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 6 november 2021**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:15 uur
Plaats: Ichtus College, Vondellaan 4, 3906EA Veenendaal

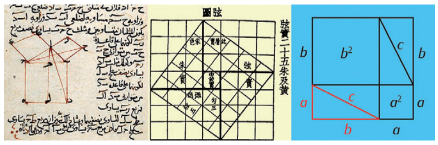
Op het moment van voorbereiden van deze aankondiging is nog niet duidelijk in welke vorm de jaarvergadering en studiedag dit jaar kan worden georganiseerd. Via de nieuwsbrief en de site van de NVvW krijg je hierover de meest actuele informatie.

## Thema van de studiedag: diversiteit

We leven in een zeer diverse samenleving en dat beïnvloedt ook ons wiskundeonderwijs. Docenten en leerlingen verschillen in vaardigheden, interesses en achtergrond. Bovendien heeft elke wiskundedocent zijn/haar eigen visie op leren en onderwijzen. Ook de onderwerpen binnen de wiskunde zijn heel divers met hun eigen didactische benaderingen. Deze studiedag is een mooie kans om ervaringen uit te wisselen over het omgaan met en benutten van die diversiteit. Wij kunnen veel van elkaar leren, net als leerlingen met diverse achtergronden en interesses voor wiskunde veel van elkaar kunnen leren. De kracht ligt dan juist in het samenwerken en het voorkomen van individuele trajecten. Samenwerken door leerlingen, maar ook door ons, met elkaar en met docenten van andere vakken en opleidingen, om de diverse toepassingen van wiskunde in beeld te houden.

## Een oproep voor bijdragen

We nodigen wiskundedocenten uit die, samen of alleen, hun ervaringen willen delen met andere wiskundedocenten. Je kunt daarbij denken aan zelfontworpen lessen in de diverse geledingen vmbo, havo en vwo op het gebied van wiskunde A, B, C en D, diverse mogelijkheden voor (digitaal) toetsen, maar ook aan het uitdragen van expertise op het gebied van de wiskunde en het wiskundeonderwijs zelf.
En ook, niet te vergeten, over het gebruik maken van de expertise uit diverse andere vakken, schoolculturen of andere landen. We kunnen nog zoveel van elkaar leren!
Dus: deel jouw wiskundekennis of ervaring door een workshop te geven op deze diverse studiedag.
Heb je ideeën voor een workshop over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp?
Dan horen we die graag! Mail naar *studiedag@nvvw.nl*



## 10.00-11.00 uur – Jaarvergadering

**(Concept) Agenda**

1 Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2 Jaarrede van de voorzitter
3 Notulen van de jaarvergadering van 7 november 2020
4 Jaarverslagen 2020/2021
  4.1 Jaarverslag van de NVvW
  4.2 Jaarverslag van *Euclides*
5 Financiën
  5.1 Jaarrekening en balans 2020/2021
  5.2 Verslag kascommissie en decharge van de penningmeester
  5.3 Begroting
  5.4 Vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6 Bestuursverkiezing
  Aftredend zijn Gert de Kleuver en Lidy Wesker-Elzinga. Zij zijn niet herbenoembaar voor een volgende termijn. Eveneens aftredend zijn Tanja Groenendaal, Michiel Doorman en Wim Caspers. Zij stellen zich allen herkiesbaar voor een derde termijn.
  Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (E-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
  Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten eveneens schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7 Rondvraag
8 Sluiting van de jaarvergadering

## Programma studiedag

Nadere informatie volgt.

**Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 6 november 2021.**

Via de nieuwsbrief en de website krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 6 november 2021. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (*hoofdbureau@nvvw.nl*).

# Herinneringen aan Dick Klingens

*Dick Klingens*

**Op 24 mei jl. overleed Dick Klingens, voormalig eindredacteur van Euclides (2000-2013) en mede-webmaster van de eerste website van de NVvW. Hij is 76 jaar geworden. Als voormalige collega's van Dick halen we graag wat herinneringen aan hem op.**

## Marian Kollenveld, voorzitter NVvW 1999-2014:

De eerste keer dat ik Dick zag, was bij zijn sollicitatie als eindredacteur voor *Euclides* en webmaster voor de vereniging. Dick bleek een man te zijn met zeer uitgesproken opvattingen. Uit mijn mailwisseling met Dick is wel een beeld te krijgen van onze onderlinge verstandhouding. Veel van die mails gaan over de studiedag en over de jaarrede, die hij netjes opgemaakt tijdig in het blad moest krijgen. Ook lees ik er mijn vertrouwen in Dicks technische en didactische vaardigheden in terug; geduldig legde hij me uit hoe ik moest (un)zippen en hoe ik foto's in de juiste resolutie kon versturen. En er was destijds veel gedoe rond het open forum van de website: rare mannen met onwelvoeglijke teksten en Viagra-advertenties die volgens mij weg moesten. Of Dick dat maar wilde doen.
Wat valt er verder uit al die mails af te lezen? Ach, we waren het zo vaak eens: over het belang van meetkunde, over de fans van de staartdeling, de vreugde van de lente of het gevoel dat het desondanks herfst is omdat het je lot is niet begrepen te worden. In latere jaren bleef hij zich zo lang mogelijk naar de jaarvergadering sleuren, ondanks het steeds zwakker wordende lichaam. En daar aangekomen bleef hij me koppig 'mijn voorzitter' noemen.
Dick, dankjewel, ik vond het fijn dat je er was!

## Kees Hoogland, hoofdredacteur *Euclides* 1996-2001:

Als ik aan Dick denk, zie ik...
... een beminnelijkheid van een met labradorvacht bedekte bol;
... een licht-Dorrestijnsiaanse hypochondrie als een bergparabool;
... een droge humor als een dalparabool;
... een verantwoordelijkheidsgevoel als een cirkel waaruit niets ontsnapt;
... een doordieselende werkhouding als een cycloïde;
... een scherpte voor kwaliteit als een hypocycloïde;
... een meetkundekennis als een tangens in de buurt van ½π.
Ik denk terug aan jaren van geweldige samenwerking in de redactie van *Euclides*.

## Gert de Kleuver, redactievoorzitter *Euclides* 2000-2009:

Ergens in 2000 hebben Dick en ik elkaar ontmoet. We hadden beiden gesolliciteerd naar de functie van eindredacteur en zo kwamen we elkaar tegen in hotel Wientjes in Zwolle. Dick werd benoemd als eindredacteur en zelf ging ik verder als voorzitter van de redactie, met toen nog Kees Hoogland als hoofdredacteur. In dat eerste jaar gingen Dick, Kees en ik op zekere dag naar Groningen, voor een afspraak met de vormgever. Aldaar aangekomen werden we in een gangetje ontvangen: de man bleek helemaal geen tijd voor ons te hebben. Ik heb Dick zelden zo boos gezien; zó wenste hij niet behandeld te worden! Het jaar erna werd Marja Bos hoofdredacteur. Vanaf dat moment gingen Dick en ik één keer per jaar een dagje naar Marja, voor groot overleg. Die treinreis op en neer naar Drenthe was altijd weer memorabel. Zo kocht Dick eens een verkeerd treinkaartje. Hij wilde het ruilen aan het loket, en de rij wachtenden achter hem groeide en groeide... totdat één van hen vroeg, of zij misschien éérst geholpen mochten worden. Dit leverde onmiddellijk luidruchtig commentaar van Dick op. Ook de reis zelf was altijd een groot feest. Dick kon mooi vertellen, en als hij op stoom kwam, was hij net een trein die niet te stoppen was. Medereizigers en conducteur genoten volop mee.
Dick had destijds het initiatief genomen voor een special over de meetkundige Oene Bottema (1901-1992). Samen met Marja werd dit Bottema-nummer degelijk voorbereid, en veel mensen werden bereid gevonden een stuk te schrijven. Dick schreef zelf ook, onder meer het mooie artikel 'Sangaku en inversie'. De special werd goed

ontvangen. Het was de eerste van een serie die Marja en Dick ontzettend veel tijd heeft gekost, maar ook veel energie heeft opgeleverd. Het eindredactiewerk was Dick op het lijf geschreven: de tekeningen, de foto's, de formules... alles altijd uitstekend verzorgd, met als ultiem doel een mooi en foutloos nummer van *Euclides.*
Dank je wel, Dick!

## Gerard Koolstra, webmaster van de eerste NVvW-website, 1998-2006:

Zo rond de eeuwwisseling heb ik veel met Dick samengewerkt in het kader van het ontwikkelen van een website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het onderhouden daarvan. We hebben veel gesprekken gevoerd, waarbij de veelzijdigheid van Dick al snel duidelijk werd: zijn verleden als verzekeringswiskundige, daarna zijn loopbaan als wiskundeleraar en schoolleider, zijn bemoeienissen met de programmeertaal COMAL, en natuurlijk zijn werk op het gebied van meetkunde.
De gemeenschappelijke noemer was om zoveel mogelijk kennis en gereedschappen te delen met vakgenoten. Daarbij speelde in toenemende mate ook zijn bezorgdheid over het wiskundig-inhoudelijk niveau van de Nederlandse wiskundedocenten een rol. Zaken die hem aan het hart gingen besprak hij vaak met een flinke scheut ironie, waaronder zich soms een diepe gedrevenheid verborg.
Later sprak ik hem veel minder, maar wel minstens een keer per jaar. De laatste tijd was zijn mindere gezondheid ook onderwerp van gesprek. Voor de manier waarop hij hiermee omging past bewondering.
In warme herinnering.

## Marja Bos, hoofdredacteur *Euclides* 2001-2008:

Mei 2001. Ik loop Hogeschool Domstad in Utrecht binnen voor het jaarlijkse symposium van de Historische Kring Reken- en WiskundeOnderwijs. Dwars door een gang vòl met mensen roept iemand mij van verre luidkeels toe: "Heeeeee, daar is ze: m'n nieuwe baas!!!" Ik krijg meteen een rooie kop – brrrrrr, wie probeert me hier zo in verlegenheid te brengen?! Het is de mij op dat moment nog onbekende Dick Klingens, eindredacteur van *Euclides*, het blad waarvan ik nog maar nèt als hoofdredacteur benoemd ben. Na afloop van het symposium drinken we samen een paar koppen koffie om nader kennis te maken. En als ik daarna de trein in stap, doe ik dat met het volste vertrouwen in zowel onze toekomstige werkrelatie als onze persoonlijke klik. Dick bleek inderdaad een uitstekende eindredacteur te zijn, met uitgesproken ideeën over allerlei vormgevingskwesties en met veel technische expertise. Ik leerde Dick natuurlijk ook kennen in zijn hoedanigheid als groot meetkundeliefhebber. Zijn enthousiasme en expertise op dit terrein bleken bijvoorbeeld uit de totstandkoming van de Bottema-special, die in januari 2002 bij de *Euclides*-abonnees op de mat viel. Zie daarover de bijdrage van Gert de Kleuver. Menigmaal diende Dick eigen meetkundeartikelen bij me in, en vele ervan heb ik daadwerkelijk geplaatst. Maar niet allemáál... Om uiteenlopende redenen wees ik zo nu en dan een inzending van hem af. Met bloedend hart, overigens, want ik wist dat ik Dick daarmee op zijn meetkundige ziel trapte... Overigens, Dicks prachtige privé-website *www.pandd.nl* (met heel veel meetkunde) blijft vooralsnog gelukkig gewoon in de lucht.
Minder bekend is misschien, dat Dick een groot aandeel heeft gehad in de digitalisering van alle jaargangen van *Euclides* (dus vanaf 1924). Dat was een immense klus, maar alle nummers zijn daardoor nu terug te vinden via *archief.vakbladeuclides.nl.* Fantastisch!
Als kernredactie vormden Dick, Gert de Kleuver en ik een goed op elkaar ingespeeld team. En we hebben samen ook heel wat afgelachen, al moet gezegd worden dat de heren voortdurend probeerden mij schandelijk voor aap te zetten. Vooral Dick was hierin een meester – en hij schiep er bovendien een boosaardig genoegen in! Ach, ach, wat heb ik het zwaar gehad. En dan dat karakteristieke glunderende gezicht van hem erbij, als 't hem dreigde te lukken...
Naarmate de jaren vorderden, ging Dicks gezondheid achteruit. Maar hij beklaagde zich niet, en bromde met het nodige relativeringsvermogen de zorgen van zich af. Gelukkig fleurde hij mentaal weer wat op toen er kleinkinderen kwamen; hij bleek een enthousiaste grootvader.

Dick heeft *Euclides* een mooi gezicht gegeven.
Hij was een eindredacteur van formaat!
En een fijn mens.

## Klaske Blom, hoofdredacteur *Euclides* 2008-2011:

Als ik van íemand vertrouwen heb gevoeld in de allereerste zenuwachtige stappen die ik zette als hoofdredacteur van *Euclides*, dan is het wel van Dick. Ik voelde me verzekerd van opvang als ik een stommiteit zou begaan. Als er íemand prachtige stukken schreef voor *Euclides*, dan was Dick het wel. Zo veel dat het regelmatig *te* veel was. Hij vond het erg als het niet geplaatst werd, en bedacht listen om te ontsnappen aan het strenge regime van de hoofdredacteur, bijvoorbeeld door gebruik te maken van zijn partners in crime: zijn alter ego's Daaf Spijker en >

Pim Diemitz. Buiten *Euclides* deelden we nog een passie: Noorwegen, een woest en wonderschoon land. Woest en wonderschoon, het zou een omschrijving van Dick kunnen zijn, toch? Woest in zijn reacties, in zijn ergernis, in zijn ideeën, woest zijn haar. Wonderschoon in zijn artikelen, wonderschoon zijn meetkunde, zijn bewijzen en zijn woordkunst. In mijn ogen kunnen we Dick niet dankbaar genoeg zijn voor datgene wat hij met zijn precisie, zijn oplettendheid, zijn enorme deskundigheid en ontelbare uren werk in al die jaren voor *Euclides* heeft betekend. Dick was niet de makkelijkste in gezelschap, maar zijn nabijheid, zowel digitaal als in redactievergaderingen, was me altijd bijzonder dierbaar.

Zie voor een *Euclides*-special met artikelen van Dick: *vakbladeuclides.nl/971klingens*

# Berichten uit het vmbo

Melanie Steentjes

## 'Sem: een leerling apart'

Al bijna vier jaar geef ik Sem wiskunde. Een vrolijke jongen die altijd lachend mijn lokaal binnenloopt. Een lekkere kletser ook. Op een bepaalde manier volwassen, een collega zei hem zo met een cappuccino op een terrasje te zien zitten. Aan de andere kant biechtte hij me in de derde klas op dat zijn moeder nog steeds zijn schooltas inpakte. 'En zijn werkstukken maakt,' voegde een klasgenoot jaloers toe. Sem dus.

In de eerste had Sem, net als veel kinderen in mijn vmbo-kader-klas, een behoorlijk rekentrauma. De jaren op de basisschool met slechte resultaten hadden hun sporen nagelaten (een reden dat ik tegen de middenschool ben, maar dat terzijde). Om die angst weg te nemen vertel ik in de eerste altijd dat wiskunde een heel ander vak dan rekenen is. Dat ik ze ga helpen en dat ze zullen merken dat ze gewoon goede cijfers kunnen halen. Ik zie ze bij de eerste mooie resultaten groeien, Sem ook. Bij mijn uitleg over breuken leek de heilige geest bijna in Sem neergedaald te zijn. 'Op de basisschool hebben ze me dit jaren proberen uit te leggen en u zegt één zin en ik begrijp het', riep hij uit. Helaas kan ik me alleen Sems uitroep herinneren, die ene zin ben ik vergeten.

Al die jaren dat ik Sem in de klas had bleef hij wel echt een middenmoter, geen uitblinker. Misschien kletste hij daar te veel voor. Tot ik noodgedwongen door de lockdown uitlegfilmpjes begon te maken. Dat bleek niet eens zo lastig. Voor mijn lessen maakte ik al PowerPoints. Met een pennetje kan ik via het touchscreen van mijn schoollaptop de PowerPoints helemaal vol kalken met uitleg. En een gratis programma voor schermopnames legt dit alles vast. Sem bleek een grootgebruiker ervan. Vlak voor een toets vertrouwde hij me toe de dag ervoor gek te zijn geworden van mijn stem. Zo lang en zo vaak had hij mijn filmpjes bekeken.

Vorige week was de laatste toets voor het examen. Mede op Sems verzoek had ik nog wat extra uitlegfilmpjes gemaakt. Toen ik zijn toets dit weekend aan het nakijken was, viel ik bijna van mijn stoel. Ineens leek het kwartje gevallen te zijn. Een 8,7! Vol enthousiasme appte ik hem direct het cijfer. 'Topppp' appte hij terug, ik denk vanachter een cappuccino. Die jongen komt er wel.

### Over de auteur

Melanie Steentjes is wiskundeleraar op het Hilfertsheem College in Hilversum en toetsdeskundige bij Cito in Arnhem.
E-mail: *m.steentjes@hilfertsheem.nl.*

Ab van der Roest

# Vastgeroest

# Beschuitbus als omwentelingslichaam

Bij het voorbereiden van een les over de inhoud van omwentelingslichamen kwam ik deze advertentie van een grote winkelketen tegen. Ik probeer aan te haken bij bestaande kennis en daarom vraag ik eerst naar de inhoud van een cilinder. En welke cilinder kent bijna elk mens: de beschuitbus. Wat me verraste in de advertentie, was niet de korting of de prijs, maar het volume van de bus. 1,7 liter leek me veel en ik zocht de afmetingen van de bus op bij de site van Brabantia. En toen ontstond er meteen een ander doel van de les…


**Brabantia garantie**
10 jaar

**Afmetingen**

Breedte: 11 cm
Lengte: 11 cm
Hoogte: 23, 5 cm
Inhoud: 1,7 liter
Diameter: 11 cm

De informatie die ik vond heb ik naast de advertentie gezet. Nadat ik het thema van de les, het volume van omwentelingslichamen, aan de klas had gepresenteerd en daarbij mijn associatie met de beschuitbus had uitgelegd, liet ik bovenstaande afbeeldingen zien. Wat valt op? Het duurde niet lang of een leerling riep dat hij breedte en lengte onzinnige informatie vond. Dat is goede kritiek. Wat verder? Ik moest een beetje de weg wijzen. Wat is het volume en klopt dat met de afmetingen? Oh, hoe bereken je het volume?
$I = \pi r^2 h$ wist iemand naar voren te brengen. Maar dat geeft een antwoord dat nergens op lijkt: $I = 2232$ cm$^3$. Maar Noah wist dat we natuurlijk de binnenmaten moeten hebben en niet de buitenmaten. We schatten de dikte op 0,5 cm en de hoogte op 22 cm en dat gaf het juiste volume.

> *"Ik verheug me nu al op de les van de koektrommel en de beschuitbus."*

Kunnen we nu ook de hoogte van de kleine bus berekenen?, was mijn volgende vraag. Als we ervan uitgaan dat de bussen van hetzelfde materiaal zijn gemaakt en dezelfde diameter hebben, dan kan dat. Maar klopt deze vooronderstelling? 'Ja', zei Cees, 'wij hebben hier thuis deze bussen.' Wat is dan de beste manier van berekenen? De leerlingen gingen weer aan de gang met diameter 10 cm enzovoort, maar is dat nodig? Nee, kijk maar:
$I_{\text{beschuitbus}} = \pi r^2 \cdot 23{,}5 = 1700$ en
$I_{\text{voorraadbus}} = \pi r^2 \cdot h = 1400$.

Dus $h = \frac{1400}{1700} \cdot 23{,}5 = 19{,}4$ cm.

De les ging over omwentelingslichamen, maar het doel van een deel van de les werd kritisch lezen en rekenen. Daarnaast de wiskunde thuis brengen, in de voorraadkast. Ik verheug me nu al op de les van de koektrommel en de beschuitbus. Waar die over gaat? Een lijnstuk van punt (0, 5) tot (22, 5) wordt gewenteld om de $x$-as en om de $y$-as. Welk omwentelingslichaam heeft het grootste volume? Toen ik zondagmorgen mijn beschuitje at, moest ik aan Cees denken: Eet hij nu een beschuitje uit die mooie bus?

**Over de auteur**
Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

# Puzzel 97-1

## Van tientallig naar tweetallig en weer terug

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In deze puzzel maken we rijtjes getallen $a(0)$ tot en met $a(i) = 1$.
Het algoritme om $a(j + 1)$ te krijgen uit $a(j)$ is als volgt: Schrijf $a(j)$ in het 2-tallig stelsel, maar beschouw dat als rij cijfers in het 10-tallig stelsel. Plaats naar keuze een aantal + tekens tussen die enen en nullen en bepaal de 10-tallige som $s(j)$ die je zo hebt verkregen.
Stel nu $a(j+1) = s(j)$.
Zo ontstaat een rij $a(0)$, $a(1)$, -... $a(i)$, met $a(i) = 1$
We zoeken een rij, beginnend met een bepaalde $a(0)$, waarvoor $i$ zo klein mogelijk is.

Voorbeeld: $a(0) = 19$, dus 2-tallig is dat 10011. Dit beschouwen we nu als een rij cijfers in het 10-tallig stelsel. Hier zetten we een aantal plustekens tussen de cijfers en bepalen de 10-tallige som.
Bijvoorbeeld: $10 + 0 + 1 + 1 = 12$, of
$1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$ of $100 + 11 = 111$. Dus $s(0)$ kan o.a. worden 12 , 3 of 111. $a(1)$ is daarvan de binair geschreven versie, dus 1100, 11 of 1101111
Met 110 en 11 kunnen we hiervan de som 2 maken, dus $s(1) = 2$, zodat $a(2) = 10$. En dan $1 + 0 = 1$, dus $s(2) = 1$ en dus ook $a(3) = 1$. Dus $i = 3$.

Nu blijkt dat als we dit voor elk willekeurig startgetal $a(0)$ handig aanpakken, we altijd kunnen krijgen $a(1) = 1$ met $i \leq 3$.

Stelling:
Voor alle startgetallen $\boldsymbol{a(0)}$ is het mogelijk een $\boldsymbol{a(i) = 1}$ te vinden met $i \leq 3$.

We zullen het aantal enen in $a(0)$ noteren als $e(0)$, of gewoon $e$. Voor de andere verkregen getallen $a(j)$ kun je het aantal enen noteren als $e(j)$.

Voor alle opgaven vragen we een antwoord en bewijs of toelichting.

**Opgave 1:** Bepaal de kleinst mogelijke $i$ voor de getallen $a(0) = 1$ tot en met $a(0) = 15$.

Voor $a(0) = 31$, binair is dat 11111 met 5 enen ($e = 5$), kunnen we kiezen voor $s(0) = 5$, dus $a(1) = 101$, dan kunnen we kiezen voor $s(1) = 2$, zodat $a(2) = 10$, zodat $s(2) = 1$, en $a(3) = 1$. Dus $i = 3$.

Maar er zijn ook getallen met 5 enen waarvoor $i < 3$ mogelijk is.
**Opgave 2:** Geef hiervan een voorbeeld.

We kunnen ook direct kijken naar het aantal enen (= $e$) in het binair geschreven startgetal $a(0)$.
**Opgave 3:** Bepaal de kleinst mogelijke $i$ voor alle startgetallen met binair geschreven $e$ enen voor $e = 1$ tot en met $e = 15$.
Het moet dan dus gelden voor alle mogelijke $a(0)$ met $e$ enen.

Voor bepaalde waarden van $\boldsymbol{e}$ zijn er startgetallen waarvoor we reeds met $i \leq 1$ in alle gevallen klaar zijn.
**Opgave 4:** Voor welke waarden van $\boldsymbol{e}$ geldt dit altijd?

**Opgave 5a:** Idem voor startgetallen met $e$ enen waarvoor het altijd lukt met $a(2) = 1$, dus $i = 2$.
Waar moet $\boldsymbol{e}$ dan aan voldoen?

Bij opgaven 4 en 5a ging het om bepaalde eigenschappen van $e$. Maar of je daarmee alle mogelijkheden met $i < 3$ hebt beschreven is moeilijk te bewijzen. Er zijn echter wel bepaalde waarden van $e$ waarvoor het zeker niet lukt om altijd een $a(i) = 1$ te vinden met $i < 3$.
**Opgave 5b:** Voor welke waarden van $\boldsymbol{e}$ is dat zeker altijd het geval?

Twee toegiften buiten de puntentelling:

Tip bij opgave 6: Dit is op te lossen met in de optellingen getallen met maximaal 2 enen en nullen.
**Opgave 6:** Bewijs de stelling dat er altijd een $i \leq 3$ is te vinden met $a(i) = 1$.

En nog beter (maar dat lukt niet met getallen met maximaal 2 cijfers in de optellingen).
Tip bij opgave 7: Dit is op te lossen met in de optellingen getallen met maximaal 4 enen en nullen.
**Opgave 7:** Geef een overzicht van de minimumwaarden van $i$ bij alle $e(0)$ en bewijs dat. Het bewijs is lastig, maar elke poging daartoe stellen we zeer op prijs.

## Inzenden oplossingen

Oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen, en 20 euro voor de aanvoerder van de ladder.
Inzendingen moeten uiterlijk op 26 oktober 2021 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 96-6:
*vakbladeuclides.nl/971puzzel*
Voor de volledige ladderstand en de uitwerking van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Jos Remijn van harte met de ladderprijs.

**Top 10 ladderstand t/m puzzel 96-4**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | J. Remijn | 153 |
| 2 | G. Bouwhuis | 119 |
| 3 | H. Huisman | 117 |
| 4 | M. Woldinga | 115 |
| 5 | F. Göbel | 114 |
| 6 | S. Zondervan | 112 |
| 7 | J. Meerhof | 84 |
| 8 | H. Bakker | 84 |
| 9 | D. Dopheide | 62 |
| 10 | L. Cizkova | 61 |

# Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op vrijdag 17 september zal de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaatsvinden. Hiervoor zijn 137 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. We hopen dat al deze toptalenten een leuke en uitdagende wedstrijdmiddag zullen beleven. Vanaf maandag 20 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op: www.wiskundeolympiade.nl. Een aantal weken later zullen de vijftien prijswinnaars (vijf in elk van de drie categorieën) bekend worden gemaakt.

# Nederland wint 2 medailles op Internationale Wiskunde Olympiade 2021

De Internationale Wiskunde Olympiade 2021 zou in Sint-Petersburg plaatsvinden, maar werd vanwege het coronavirus als wedstrijd-op-afstand gehouden. De leerlingen werkten aan zes opgaven van hoog wiskundig niveau en konden per opgave zeven punten verdienen. De resultaten zijn:

- 14 punten – BRONS: Hylke Hoogeveen (16 jaar, Odijk, 4 vwo, Openbaar Lyceum Zeist)
- 13 punten – BRONS: Jelle Bloemendaal (17 jaar, Hooglanderveen, 5 vwo, Corlaercollege Nijkerk)
- 11 punten – Eervolle vermelding: Kevin van Dijk (17 jaar, Oeffelt, 6 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen)
- 10 punten – Casper Madlener (16 jaar, Hoofddorp, 5 vwo, Leo Kanner College Leiden)
- 9 punten – Eervolle vermelding: Thian Tromp (18 jaar, Leeuwarden, 6 vwo, Chr. Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden)
- 8 punten – Eervolle vermelding: Kees den Tex (17 jaar, Naarden, 5 vwo, Gemeentelijk Gymnasium Hilversum)

Van de 619 deelnemers kregen de beste 52 een gouden medaille, de 103 besten daarna een zilveren en de volgende 148 deelnemers een bronzen medaille. Een eervolle vermelding wordt gegeven als een leerling minimaal één van de zes opgaven volledig oplost.

# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

**Redactie**
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck

**Inzenden bijdragen**
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

**Richtlijnen voor artikelen**
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

**Realisatie**
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
Website: www.nvvw.nl

**Voorzitter**
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

**Secretaris**
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

**Ledenadministratie**
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

**Helpdesk rechtspositie**
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

**Lidmaatschap**
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Abonnementen *Euclides* niet-leden**
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Advertenties en bijsluiters**
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

## 2021

**Vr 24/09**

### LANDELIJK
Onderwijs meets Onderzoek
organisatie: NVvW

**Za 02/10**

### ONLINE
Symposium Visies op wiskundeonderwijs
organisatie: werkgroep Geschiedenis (NVvW)

**Za 06/11**

### JAARVERGADERING EN STUDIEDAG
De jaardag van de NVvW zal dit jaar hopelijk live plaats kunnen vinden, maar zal in elk geval doorgaan op 6 november
organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 97

| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 2 | 26 oktober 2021 | 23 augustus 2021 |
| 3 | 14 december 2021 | 11 oktober 2021 |
| 4 | 25 januari 2022 | 15 november 2021 |
| 5 | 15 maart 2021 | 03 januari 2022 |
| 6 | 03 mei 2022 | 28 februari 2022 |
| 7 | 21 juni 2022 | 25 april 2022 |