APPENDIX bij
De bissectricestelling en wat er zo bij komt kijken

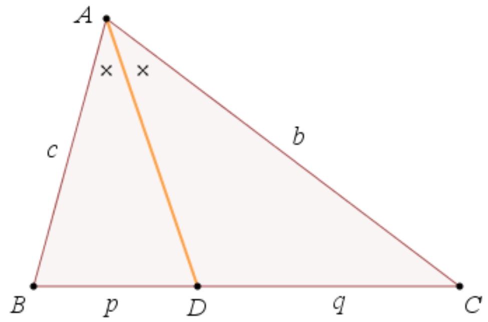
DICK KLINGENS

juli 2019

1. De omgekeerde bissectricestelling

In het artikel is de omgekeerde bissectricestelling (ongeveer) als volgt geformuleerd:

figuur 1



Stelling 1om. Als een lijn door het hoekpunt A van driehoek ABC de zijde BC via het punt D verdeelt in stukken ($BD = p$ en $CD = q$) die zich verhouden als de opstaande zijden (resp. b en c), dan is de lijn AD een bissectrice van de hoek A; zie figuur 1. ◊

Ik bewijs eerst een eigenschap die ik bij het bewijs van stelling 1om zal gebruiken.

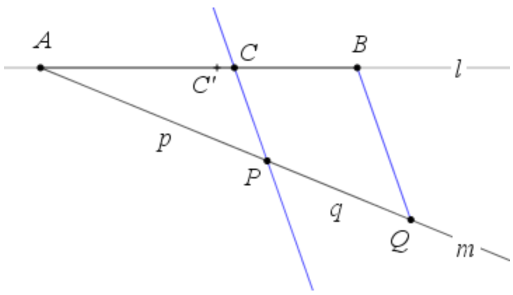
Lemma a2. Op een (in ligging en grootte) gegeven lijnstuk AB ligt precies één punt C zó, dat
- $AC : CB = p : q$

(p en q zijn gegeven lijnstukken c.q. de lengtes van twee gegeven lijnstukken). ◊

Bewijs. Ik toon eerst (via constructie) aan dat er zo'n punt C bestaat, en vervolgens dat er maar één punt C is.

Zie figuur 2. De halve lijn m door het punt A maakt met de drager l van het lijnstuk AB een hoek die ongelijk is aan 180° (hier is die hoek scherp).

figuur 2



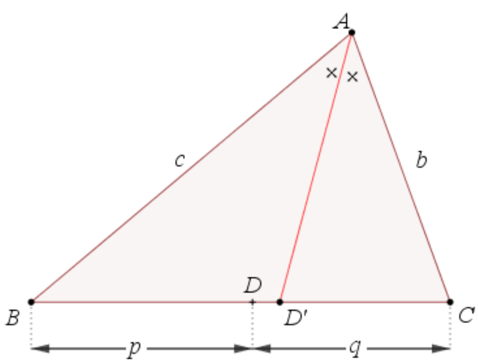
De punten P en Q liggen zo op m dat $AP = p$ en $PQ = q$.
De lijn door P evenwijdig met BQ snijdt AB in C.
Uit de stelling van Thales (voor evenwijdige lijnen) volgt nu:
- $AC : CB = AP : PQ = p : q$

Als op AB een *tweede* punt C' ligt zó, dat ook $AC' : C'B = p : q$, dan is, mede op grond van de eerdere constructie:
- $AC : CB = AC' : C'B$

Volgens een eigenschap van evenredigheden is dan:
- $(AC + CB) : (AC' + C'B) = AC : AC'$, of:
- $AB : AB = AC : AC'$

En daaruit blijkt dat $AC = AC'$. De punten C en C' vallen dus samen. ◊

figuur 3



Bewijs van stelling 1om (*uit het ongerijmde*)
Zie figuur 3. Uit de formulering van stelling 1om blijkt dat (gegeven is):
- $BD : CD = p : q = c : b$

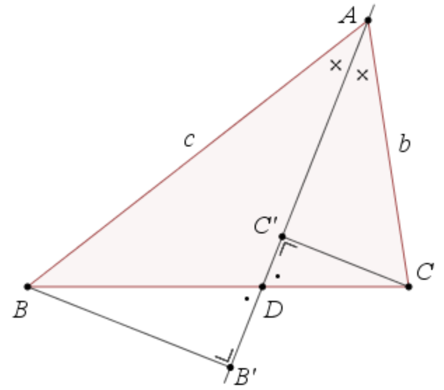
Stel nu dat AD *niet* een bissectrice is van hoek A, dan ligt er een van D *verschillend* punt D' op het lijnstuk BC zó, dat AD' *wél* bissectrice is.
Uit stelling 1 (in het artikel, de bissectricestelling [1]) volgt dan:
- $BD' : CD' = c : b$

Blijkens het hiervoor bewezen lemma is dan $D \equiv D'$. Dit is in tegenspraak met "de punten D en D' zijn verschillend". Dus is AD de bissectrice van hoek A. ◊

2. Andere bewijzen van stelling 1

Het bewijs van de bissectricestelling dat meestal in de (wat oudere) meetkundeboeken voor de onderbouw van het middelbaar c.q. voortgezet onderwijs staat, volgt hierna als eerste van twee.

figuur 4



Vierde bewijs van stelling 1

De projecties van de hoekpunten B, C op de bissectrice AD zijn de punten B', C'. Dan is driehoek BAB' gelijkvormig (hh) met driehoek CAC', zodat:

(2.1)… $BB' : CC' = BA : CA = c : b$

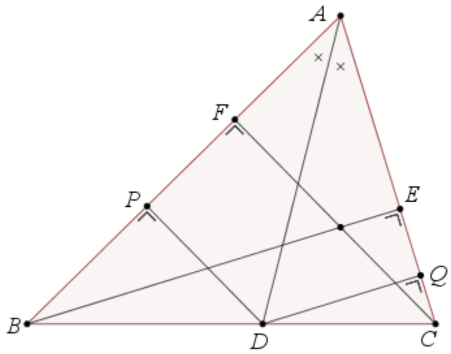
Ook zijn de driehoeken $BB'D$ en $CC'D$ gelijkvormig (hh). Daaruit volgt dat:

(2.2)… $BB' : CC' = BD : CD$

Uit de relaties (2.2) en (2.1) volgt dan $BD : CD = c : b$. ◊

Een iets gecompliceerder bewijs van stelling 1 is het volgende, dat weer gebaseerd is op gelijkvormigheid van driehoeken, maar eveneens op het feit dat een bissectrice van een hoek kan worden opgevat als een *meetkundige plaats*.

figuur 5



Vijfde bewijs van stelling 1

Zie figuur 5. De lijn AD (de A-bissectrice) is de meetkundige plaats van de punten die gelijke afstanden hebben tot AB en AC. Dus is $DP = DQ$.

De lijnen BE en CF zijn loodlijnen uit B, C op AC, AB. Dan zijn de driehoeken BDP en BCF gelijkvormig (hh), waaruit volgt dat $BD : BC = DP : CF$, zodat:

(2.3)… $BD \cdot CF = a \cdot DP$

Ook zijn de driehoeken DCQ en BCE gelijkvormig (hh), en dan is $DC : BC = DQ : BE$, zodat:

(2.4)… $BE \cdot DC = a \cdot \underline{DQ} = a \cdot \underline{DP}$

Uit (2.3) en (2.4) blijkt dan dat:

(2.5a)… $BD \cdot CF = BE \cdot DC$, met andere woorden:

(2.5b)… $BD : DC = \underline{BE : CF}$

Daarbij is ook driehoek ABE gelijkvormig (hh) met driehoek ACF, waaruit volgt dat:

(2.6)… $\underline{BE : CF} = AB : AC = c : b$

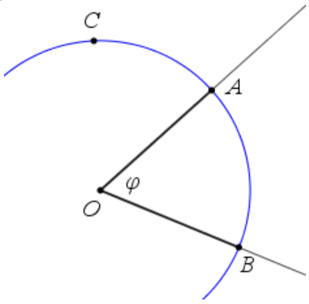
Uit (2.5b) en (2.6) blijkt dan, ook nu:

- $BD : DC = c : b$

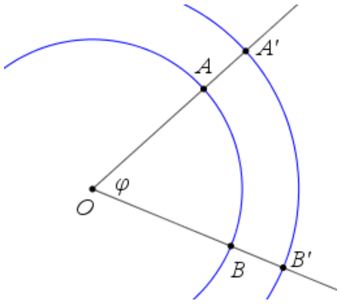
En dit is wat moest worden aangetoond. ◊

3. Hoeken en cirkelbogen

figuur 6a



figuur 6b



Definitie. Een **middelpuntshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt samenvalt met het middelpunt van die cirkel; zie figuur 6a.
(Deel van de definitie) Als de stralen OA, OB (waarvan de benen van de hoek de dragers zijn) *geen* gestrekte hoek vormen, dan wordt met de hoek AOB de hoek φ bedoeld waarvoor $0 < \varphi < 180^o$. ◊

De punten A en B verdelen de cirkel in twee (cirkel)bogen, die beide A en B als eindpunten hebben, namelijk:
- de boog 'binnen' de hoek φ;
- het andere deel van de cirkel, de boog 'buiten' de hoek φ.

De eerste boog wordt in het algemeen aangegeven als bg(AB), en de tweede, met gebruik van een 'tussenliggend' punt op die boog, als bg(ACB). De oriëntatie (volgorde) van de letters is daarbij meestal niet van belang.

Definitie. De hoek φ, bg(AB) en koorde AB **horen bij elkaar**. Hoek φ **staat op** bg(AB), koorde AB **onderspant** bg(AB). ◊

Stelling a3. Bij gelijke middelpuntshoeken van de dezelfde cirkel horen gelijke koorden en gelijke bogen. ◊

Het gebruik van het woord 'gelijk' in deze context bij het woord 'boog' is wat dubbelzinnig, omdat over de 'lengte' van een boog – direct na het vastleggen van de meetkundige betekenis daarvan – nog niet is gesproken. Het woord 'gelijk' moet hier dan ook worden gebruikt in de betekenis: bg(AB) en bg(CD) zijn congruent [2]. ◊

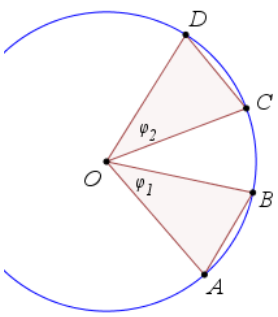
Daarom is het in dit verband handig om (nu direct maar) de 'grootte' (dus *niet* de lengte) van een cirkelboog te definiëren.

Definitie. Een **booggraad** is de grootte van een boog die hoort bij een middelpuntshoek van 1^o.
Notatie: bg(AB) = 1^o, als $\varphi = 1^o$ ($=\frac{1}{180}$-ste deel van een gestrekte hoek). ◊

Opmerkingen. **1.** De grootte van een boog is daarmee dus *onafhankelijk* van de straal van de betreffende cirkel: in figuur 6b is bg(AB) = bg($A'B'$).
2. Als de hoek φ hoort bij de bg(AB), dan houdt de relatie φ = bg(AB) in dat het *aantal hoekgraden* van hoek φ gelijk is aan het *aantal booggraden* van bg(AB). ◊

Gevolg van de laatste definitie:
Stelling a4. Een middelpuntshoek is gelijk aan (de onderspannende) boog van die hoek. ◊

figuur 7



Bewijs van stelling a3
In figuur 7 zijn in de driehoeken OAB en OCD de middelpuntshoeken φ_1 en φ_2 aan elkaar gelijk. Dan zijn die driehoeken congruent (*ZHZ*), zodat in ieder geval $AB = CD$.
En dat nu ook bg(AB) = bg(CD) is gelegen in het feit dat (per definitie c.q. conform stelling a4) bg(AB) = φ_1 en bg(CD) = φ_2. ◊

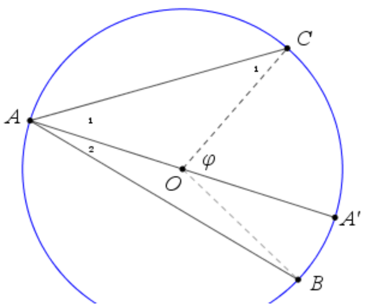
Definitie. Een **omtrekshoek** van een cirkel is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan de benen de cirkel snijden. ◊

Stelling a5. Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de *helft* van de boog waarop die hoek staat. ◊

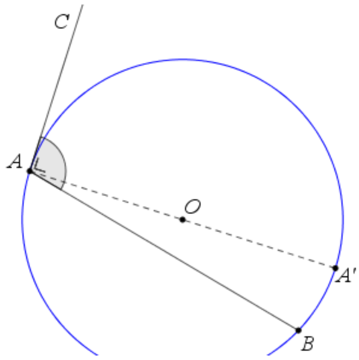
Opmerkingen. **1.** De tekst van stelling a5 moet/kan dus gelezen worden als:
Het aantal hoekgraden van een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de *helft* van het aantal booggraden van de boog waarop die hoek staat.
2. Bij omtrekshoeken zijn er drie gevallen te onderscheiden:
- het middelpunt van de cirkel ligt op één van de benen van de hoek;
- het middelpunt ligt *binnen* de hoek;
- het middelpunt ligt *buiten* de hoek.

De bewijsvoering is afhankelijk van de ligging van het middelpunt. In het volgende bewijs ga ik ervan uit dat het middelpunt *binnen* de omtrekshoek ligt.[3] ◊

figuur 8a



figuur 8b



Bewijs van stelling a5. Zie figuur 8a, waarin hoek BAC een omtrekshoek is.
Is A' het tegenpunt van A op de cirkel, dan is $\angle COA' = \varphi = \text{bg}(A'C)$ (conform stelling a4). Maar bij driehoek AOC, die O-gelijkbenig is, is die hoek een buitenhoek, zodat ook:
- $\varphi = \angle A_1 + \angle C_1 = 2\angle A_1 \quad \Rightarrow \quad \angle A_1 = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\text{bg}(A'C)$

Analoog is $\angle A_2 = \frac{1}{2}\text{bg}(A'B)$, zodat inderdaad $\angle A = \frac{1}{2}\text{bg}(A'C) + \frac{1}{2}\text{bg}(A'B) = \frac{1}{2}\text{bg}(BC)$. ◊

Opmerking. Ook een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan een been raakt aan de cirkel, kan worden opgevat als een omtrekshoek; zie figuur 8b. Immers:
- $\angle BAC = \angle BAA' + \angle A'AC = \frac{1}{2}\text{bg}(A'B) + 90^\circ = \frac{1}{2}\text{bg}(A'B) + \frac{1}{2}\text{bg}(A'A) = \frac{1}{2}\text{bg}(BA'A)$ ◊

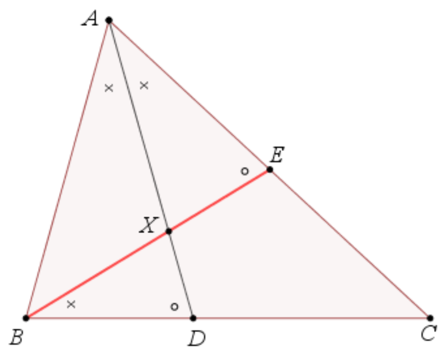
4. Nog twee keer de bissectriceformule

Voor twee andere afleidingen (bewijzen) van de formule voor de lengte van een bissectrice van een driehoek geef ik vooraf de volgende informatie.

A. In het eerste bewijs maak ik gebruik van gelijkvormigheid van driehoeken en van stelling 1 (in het artikel), de bissectricestelling.

B. In het tweede bewijs gebruik ik stelling 1 eveneens én de stelling van Pythagoras.

figuur 9



A. Zie figuur 9. Ik zal aantonen dat
- $\boxed{AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD}$

Daartoe kies ik op de lijn AD (de A-bissectrice) het punt X zó dat $\angle XBD = \frac{1}{2}\angle A$ (= ×).
Het snijpunt van BX en AC is het punt E. Direct is nu duidelijk dat de driehoeken ABD en AXE gelijkvormig (hh) zijn. Dan is:
- $AD : AE = AB : AX$

En met $AE = AC - CE$ en $AX = AD - XD$ geeft dat $AD : (AC - CE) = AB : (AD - XD)$.
Zodat:

(4.1)… $AD^2 = AB \cdot AC - AB \cdot CE + AD \cdot XD$

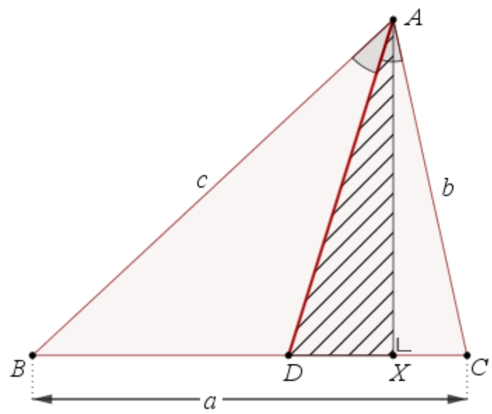
Uit de gelijkvormigheid (hh) van de driehoeken BEC en ADC volgt:
(4.2)… $EC : BC = \underline{DC : AC}$
En met de bissectricestelling is:
(4.3)… $\underline{DC : AC} = BD : AB$
Uit (4.2) en (4.3) volgt dan:
(4.4)… $AB \cdot EC = BC \cdot BD$
Uit de gelijkvormigheid (hh) van de driehoeken ABD en BXD (hh) volgt $BD : AD = DX : DB$. Dus:
(4.5)… $BD^2 = AD \cdot DX$

En dan gaat (4.1) met (4.4) en (4.5) over in:

- $$\begin{aligned} AD^2 &= AB\cdot AC - BC\cdot BD + BD^2 = AB\cdot AC - BD\cdot(BC-BD) \\ &= AB\cdot AC - BD\cdot CD \end{aligned}$$

En dat is precies wat ik wilde aantonen. ◊

figuur 10



B. Zie figuur 10. Ik zal aantonen dat voor de lengte van de bissectrice AD geldt [4]:

- $$\boxed{AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}$$

Uit de bissectricestelling volgt (zoals bekend):

$$BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{en} \quad CD = \frac{ab}{b+c}$$

Opmerking. Nu is: $BD \cdot CD = \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$. ◊

X is het voetpunt van de loodlijn uit A op BC. In driehoek ABX en driehoek ADX is dan:

$$\begin{aligned} c^2 &= AX^2 + BX^2 \\ &= (AD^2 - DX^2) + (BD + DX)^2 \\ &= AD^2 + BD^2 + 2BD\cdot DX \qquad \Rightarrow \quad \textbf{(5.6)...}\ 2BD\cdot DX = c^2 - AD^2 - BD^2 \end{aligned}$$

Verder is in driehoek ACX en in driehoek ADX:

$$\begin{aligned} b^2 &= AX^2 + CX^2 \\ &= (AD^2 - DX^2) + (DC - DX)^2 \\ &= AD^2 + DC^2 - 2DC\cdot DX \qquad \Rightarrow \quad \textbf{(5.7)...}\ 2DC\cdot DX = AD^2 + DC^2 - b^2 \end{aligned}$$

Uit de bissectricestelling en de relaties (5.6) en (5.7) volgt dan, na deling van de beide linkerleden van die relaties:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} = \frac{c^2 - AD^2 - BD^2}{AD^2 + DC^2 - b^2} = \frac{c^2 - AD^2 - (\frac{ac}{b+c})^2}{AD^2 + (\frac{ab}{b+c})^2 - b^2} \quad \Rightarrow$$

$$(AD^2 + (\tfrac{ab}{b+c})^2 - b^2)\cdot c = (c^2 - AD^2 - (\tfrac{ac}{b+c})^2)\cdot b \quad \Rightarrow$$

$$(b+c)\cdot AD^2 = b^2c + bc^2 - c\cdot(\tfrac{ab}{b+c})^2 - b\cdot(\tfrac{ac}{b+c})^2$$

Verder uitwerken geeft dan:

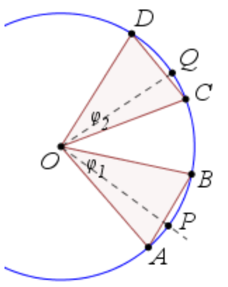
$$(b+c)\cdot AD^2 = bc(b+c) - \frac{a^2b^2c + a^2bc^2}{(b+c)^2} = bc(b+c) - \frac{a^2bc}{b+c}$$

Tot slot geeft deling door (b + c) en ontbinden: $AD^2 = bc\left(1 - \dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right)$. En dat is inderdaad de hierboven vermelde relatie. ◊

Eenvoudig kan worden ingezien dat de formule voor AD^2 overeenkomt met de formule $d_a^2 = bc - pq$, waarbij $p = BD$ en $q = CD$; zie de opmerking hierboven en relatie (4.0) in paragraaf 4 van het artikel.

5. Noten

[1] In het artikel is stelling 1 geformuleerd als: Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde van die hoek in stukken die zich verhouden als de opstaande (aangrenzende) zijden.

[2] 

De hoek φ_2 wordt zo verplaatst dat deze samenvalt met φ_1, en wel zó dat C samenvalt met A en D met B (dit kan vanwege de congruentie van de driehoeken OAB en OCD met een rotatie).
Is nu Q een *willekeurig* punt van bg(CD), dan ligt het lijnstuk QO binnen de hoek φ_2. Na de bedoelde verplaatsing valt QO langs een halve lijn door het punt O die dan binnen de hoek φ_1 valt. Is P het punt waarmee Q dan samenvalt, dan is $OP = OQ$, en dus ligt het punt P op bg(AB).
Met andere woorden: *elk* punt van bg(CD) valt na verplaatsing samen met een punt van bg(AB).
Op eenzelfde manier kan worden aangetoond dat *elk* punt van bg(AB) samenvalt met een punt van bg(CD). Met andere woorden er is sprake van *congruentie*: bg(AB) ≅ bg(CD).
Maar meestal wordt dit geschreven als: bg(AB) = bg(CD).

[3] Het bewijs van de beide andere gevallen wordt aan de lezer overgelaten

[4] Zie ook de relatie (4.4) in paragraaf 4 van het artikel.

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com* – website: *http://www.pandd.nl*

:-:

:-: