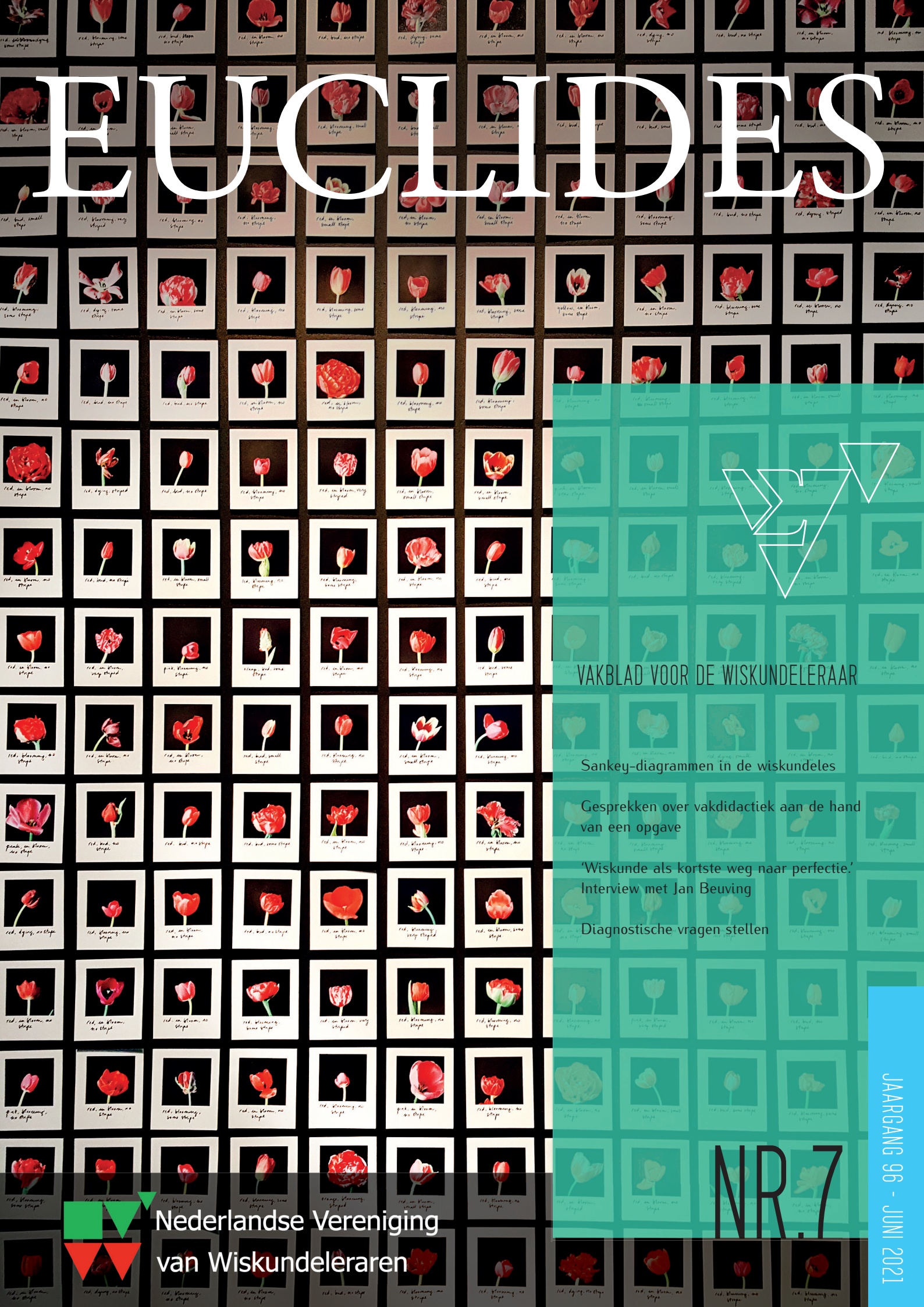


EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Sankey-diagrammen in de wiskundeles

Gesprekken over vakdidactiek aan de hand van een opgave

'Wiskunde als kortste weg naar perfectie.' Interview met Jan Beuving

Diagnostische vragen stellen

NR.7

JAARGANG 96 - JUNI 2021

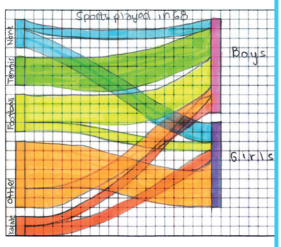
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR7

IN DIT NUMMER

SANKEY-DIAGRAMMEN IN DE WISKUNDELES
Pauline Vos, Eric Oziegbe Omobude
4



KOGELS SMELTEN BIJ VAKDIDACTIEK WISKUNDE
Gerrit Roorda, Nelleke den Braber
8

IN MEMORIAM JAN MAASSEN
Bestuur NVvW
11

MATH BETWEEN US
Jana Dean
12

DIAGNOSTISCHE VRAGEN IN DE WISKUNDELES
Jörgen van Remoortere
14

DOCENT-ONDERZOEKER: HOE LESPRAKTIJK EN ONDERZOEK ELKAAR VERSTERKEN
INTERVIEW MET MARIANNE VAN DIJKE
Liesbeth Coffeng
18

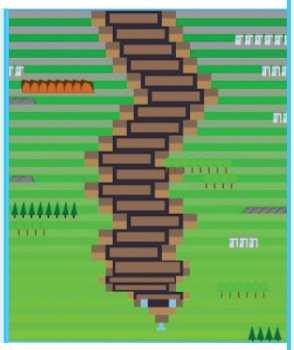
'BLIJF WISKUNDE GEVEN, WANT HET IS DE KORTSTE WEG NAAR PERFECTIE'
INTERVIEW MET JAN BEUVING
Hugo Duivesteijn
22

WIS EN WAARACHTIG
24

HET FIZIER GERICHT OP... HYPOTHESETOETSEN MET AUTOMATISCHE FEEDBACK
Sietske Tacoma
26

FORMULES SCHETSEN OM SYMBOL SENSE TE BEVORDEREN
Peter Kop
28

MATHE-MAGISCHE KUNST 2021
Koen Stulens
33



BOEKBESPREKING GRENSVERLEGGENDE GETALLEN
Ger Limpens
36

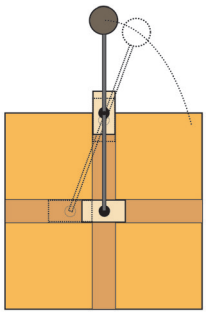
DE BISSECTRICESTELLING EN WAT ER ZO BIJ KOMT KIJKEN
Dick Klingens
38

Foto: Myriad (Tulips). Anne Ridler, 2018. Selectie van digitale prints met inkt. Deze foto's zijn gebruikt als basis voor het videowerk Mosaic virus dat deze tulpen bloeien volgens de ontwikkeling van de bitcoinmarkt. Tentoongesteld in het Forum Groningen, tijdens de tentoonstelling AI More than Human (2019).Zie http://annaridler.com/myriad-tulips voor uitgebreide beschrijvingen van Myriad (Tulips) en Mosaic Virus.

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

FRIEMELMOLEN
Pieter Slooten
42



VERENIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING / STUDIEDAG 2021
43

WERELDWISKUNDE FONDS
IN BURKINO FASO
Hervé Millet
44

PUZZEL
Esther Bod
45

SERVICEPAGINA
46

Rectificatie

In Wis en waarachtig, *Euclides* 96.6 worden Guusje ter Horst en Martinus Veltman geciteerd tijdens hun optreden op het Nederlands Mathematisch Congres in 2003. Jan Karel Lenstra berichtte de redactie dat hij zich de gebeurtenis anders herinnert, namelijk: 'Ter Horst vertelde ons dat ze op haar eindexamen een 3 had voor wiskunde. Nadat ze vertrokken was, begon Veltman zijn lustrumvoordracht met de woorden: "Nou nou, ze haalt een 1 voor wiskunde en dan wordt ze burgemeester."'

Kort vooraf

In het weekend waarin dit Kort Vooraf is geschreven, kwam de mededeling van Arie Slob dat de scholen weer open gaan. Dat leidde meteen tot discussies of dat al veilig is en wat het voor leerlingen betekent in regio Noord waar de vakantie vier weken later al zo'n beetje begint. Hoe dan ook: het einde van de coronatijd lijkt voor ons docenten in zicht. Komend schooljaar kunnen we waarschijnlijk weer 'gewoon' aan de slag. En misschien is de zomervakantie dan een mooi moment om terug te blikken. Wat hebben we geleerd? Hebben leerlingen schade opgelopen en zo ja, welke? De analyse van de examenresultaten door Cito en CvTE (*Euclides* 97-2) zal helpen om de balans op te maken.

Van nummer 7 van *Euclides* proberen we altijd een 'zomers' nummer te maken. Ik denk dat dat wederom gelukt is, hoewel de tulpen die de voorkant sieren inmiddels wel uitgebloeid zullen zijn. Kunstenares Anne Ridler vond het een origineel idee om haar werk op een tijdschrift voor wiskundedocenten te zien, ik heb haar als tegenprestatie beloofd jullie allemaal op te roepen naar haar website te gaan en daar de verborgen wiskunde in haar werk te zoeken. Voor de sportliefhebbers wordt het ook een mooie zomer, met de inhaalslag van de grote evenementen die vorig jaar hadden moeten plaatsvinden. Rob van Oord maakte een mooi werkblad over de Olympische ringen. Helaas te laat voor deze editie, maar op de website staat een 'preview' zodat je er toch vóór de zomer met je leerlingen mee aan de slag kunt gaan. Het artikel zelf bewaren we tot december: vlak voordat de Winterspelen beginnen...

Maar laat mij namens de redactie iedereen een mooie zomervakantie toewensen. We hebben hem dubbel en dwars verdiend...

Tom Goris

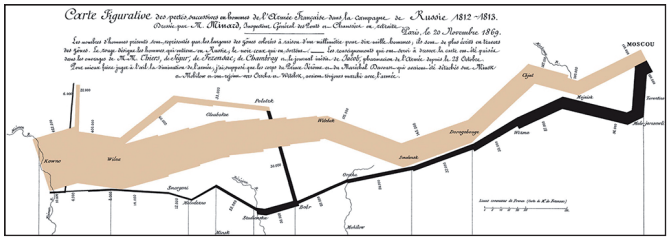
Pauline Vos, Eric Oziegbe Omobude

Sankey-diagrammen in de wiskundeles

Pauline en Eric werken in Noorwegen, waar ze met leerlingen uit klas 2 (vmbo-havo-vwo) bij een bedrijf op bezoek gaan. Terug in de klas maken leerlingen wiskundeopdrachten die bij de context van het bedrijf aansluiten. Het ontwerpen van die opdrachten is lastig, omdat ze ook moeten passen bij de interesse en competenties van de leerlingen. Sankey-diagramen bieden uitkomst, omdat je er *holistisch* mee naar bedrijfsprocessen kunt kijken.

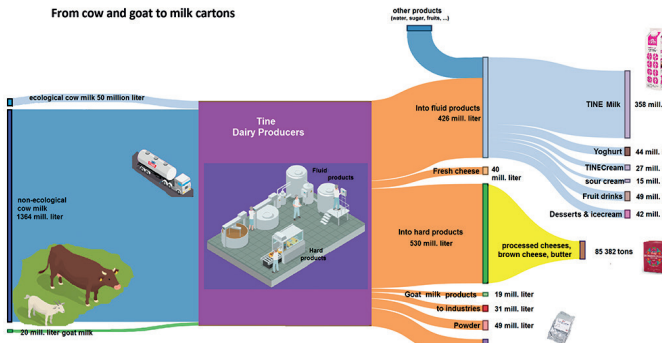
Wat zijn Sankey-diagrammen?

Sankey-diagrammen zijn stroomdiagrammen waarbij de breedte van de stroom proportioneel is met de hoeveelheid. De lengte doet er niet toe, en deze flexibiliteit maakt dat er creatief mee gevisualiseerd kan worden. Een van de eerste Sankey-diagrammen werd in 1869 gemaakt door Charles Minard over de Russische veldtocht van Napoleon, zie figuur 1.



figuur 1 [1]

Een brede, beige stroom toont hoe 422.000 Franse soldaten in de herfst op weg naar Moskou gingen. Vervolgens wordt de stroom soldaten dunner. Een kwart kwam aan in Moskou, op de terugweg wordt de zwarte stroom nog dunner. Een pieterig stroompje geeft weer dat 2% van alle soldaten uit die oorlogswinter terugkeerde. Minard gebruikte handig de landkaart als achtergrond om de stroom soldaten, tijdstip, plaats, temperatuur, de richting van de veldtocht en de dramatische sterfte onder de soldaten overzichtelijk weer te geven.
Pas later werd er een naam gegeven aan dit type diagram. Het is een beetje ongelukkig dat de naamgever van de Sankey-diagrammen, Capt Matthew Sankey, niet de eerste was die ze maakte. Hij maakte rond 1900 diagrammen om energiestromen in stoommachines weer te geven, namelijk hoeveel energie er vanuit een boiler wordt omgezet in arbeid, en hoeveel er verloren gaat aan wrijving, warmtestraling en rook. Sankey-diagrammen kun je dus gebruiken om de stroom van mensen, energie, geld of andere zaken weer te geven, en zijn daarmee geschikt voor het visualiseren en modelleren van complexe processen zoals te vinden in de bedrijven die onze leerlingen bezoeken. In figuur 2 staat een Sankey-diagram van de liters melk die van de koeien bij de boer naar de Noorse melkfabriek Tine AS gaan, daar omgezet worden in vloeibare en harde melkproducten, die vervolgens naar de consument komen als yoghurt, ijs, kaas en andere zuivelproducten. Dit diagram is gebaseerd op authentieke data uit het jaarverslag van deze Noorse melkfabrikant en gebruikten we in onze lessen om Sankey-diagrammen te introduceren[2].

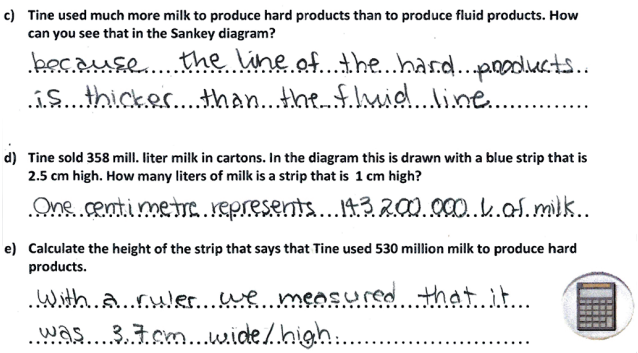


figuur 2 [2]

Lesmateriaal en ervaringen uit de les

Pauline had een werkboekje van acht pagina's ontworpen[3] en in kleine kring uitgetest. De opbouw van het boekje is dat de leerlingen eerst enkele diagrammen moeten interpreteren, en daarna zelf Sankey-diagrammen gaan tekenen. Eric heeft het materiaal op zijn school in een

tweede klas (*grade 8*) met negentien leerlingen uitgeprobeerd, waarbij de leerlingen in groepjes van drie of vier werkten. De leerlingen hadden twee lesuren nodig om het boekje door te werken, maar door corona zat er helaas meer dan een maand tussen die twee lessen. Toen de scholen weer opengingen en Eric zijn klas vroeg of ze het nog wilden afmaken, was het antwoord unaniem positief. Figuur 3 geeft een indruk van enkele opdrachten. Deze gaan over het interpreteren van de stroken als hoeveelheden melk, en het berekenen van de breedte van de stroken. Uit de antwoorden van de leerlingen konden we opmaken dat ze het idee van een Sankey-diagram goed oppikten, maar ook dat ze liever de breedte met een liniaal opmaten dan die te berekenen.

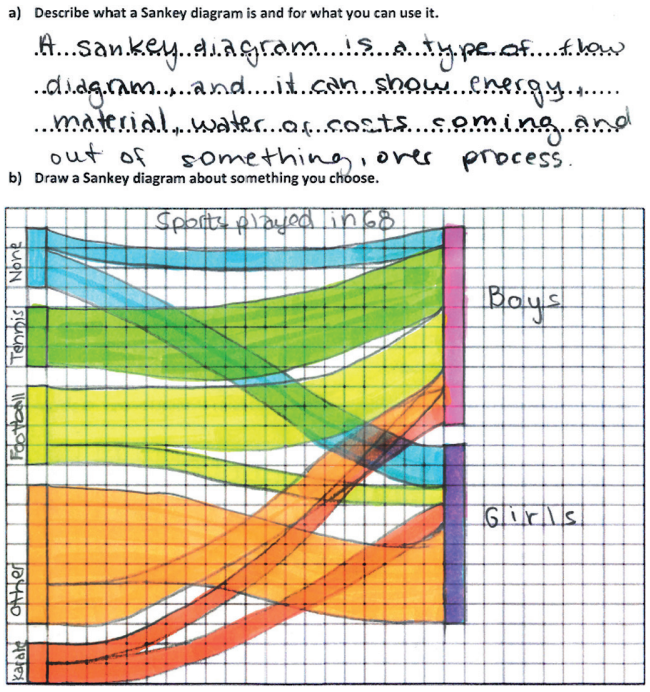


figuur 3 Opdrachten uit het boekje en antwoorden van leerlingen over de breedte van de stroken in het Sankey-diagram van de melkfabriek

Op de laatste pagina van het boekje vroegen we de leerlingen om een definitie van Sankey-diagrammen te geven en om er een te tekenen over een onderwerp naar keuze. Figuur 4 geeft de antwoorden van een groepje weer. De leerlingen geven als definitie vooral aan dat je met Sankey-diagrammen processen kunt weergeven. Dit was wat alle groepjes schreven: ze zagen vooral nut in de Sankey-diagrammen als input-outputdiagram en geen enkel leerlingengroepje meldde iets over de breedte van de stroken, hoewel ze hier wel opgaven over gemaakt hadden (zoals in figuur 2). Blijkbaar springt het kwalitatieve aspect van de diagrammen (dat je er processen mee kunt aangeven) er meer uit voor de leerlingen dan het kwantitatieve (dat je er hoeveelheden mee kunt aangeven)

Data met verschillende categorieën

Op de vraag om een Sankey-diagram naar keuze te maken zagen we vaak de hobby's van de leerlingen terug. In de meeste gevallen hadden ze dan evengoed een cirkeldiagram kunnen maken. In figuur 4 zien we een uitzondering hierop. Dit groepje had hobby's en sekse aan



figuur 4 Antwoorden van een leerlingengroepje over een definitie en een Sankey-diagram naar keuze

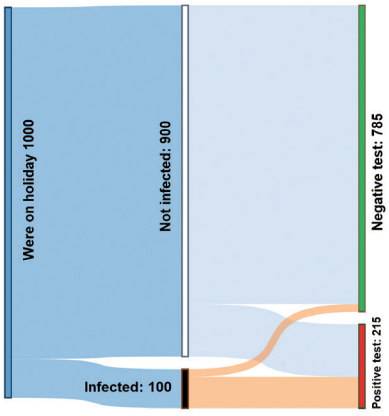
elkaar gekoppeld binnen een Sankey-diagram. Indien een Sankey-diagram op deze manier wordt gebruikt, dan wordt deze ook wel aangeduid als *alluval plot* of *parallel sets*. Op deze manier kunnen relaties tussen *categorieën* binnen een dataset gevisualiseerd worden. Zo kun je op het internet Sankey-diagrammen vinden over de passagiers op de eerste (en laatste) reis van de Titanic, waarbij elke passagier gelabeld is volgens de vier categorieën: passagiersklasse, geslacht, volwassene/kind en wel/niet overleefd.[4] Met dit Sankey-diagram tonen de breedte van de stroken duidelijk aan dat vooral mannen uit de bemanning en de laagste passagiersklasse overleden. Een ander voorbeeld is een sociologisch overzicht van moordzaken in de VS, waarbij de categorieën wapen, etniciteit en sekse van slachtoffer en dader, hun relatie en aanleiding voor de moord.[5] Dit diagram laat door de breedte van de stroken duidelijk zien dat de meeste slachtoffers man zijn, evenals de daders, dat ze elkaar meestal kenden en dat de aanleiding meestal een ruzie was. Door de breedte van de stroken te vergelijken kun je ook zien dat niet-witte mannen vaker door een witte man worden vermoord dan andersom. Deze twee voorbeelden hadden we niet opgenomen in het lesmateriaal, maar geven aan dat Sankey-diagrammen mogelijkheden bieden voor interdisciplinaire lessen op het snijvlak van wiskunde en de maatschappijvakken.

>

Fout-positief en fout-negatief

We hadden nog een opgave ontworpen die buiten het boekje is gebleven, maar die we je niet willen onthouden. De opgave gaat over fout-positieve en fout-negatieve medische testresultaten.[6] De opdracht is actueel, hoewel deze werd ontworpen voordat de coronaepidemie toesloeg. De opdracht gaat over een fictieve groep van duizend vakantiegangers, die op hun terugreis horen dat 10% van hen besmet is met een virus en dat het een tijd duurt voordat de ziektesymptomen komen. Alle reizigers moeten daarom direct een test doen. Deze test is alleen niet heel precies: 80% van de besmette reizigers krijgt een positief resultaat en 85% van de niet-besmette reizigers krijgt een negatief resultaat. In figuur 5 zijn de duizend reizigers in een Sankey-diagram gevisualiseerd, uitgesplitst naar besmetting en testresultaat. Je kunt de leerlingen allerlei vragen stellen, onder andere: moet een reiziger met een positieve uitslag zich zorgen maken? Het diagram laat zien dat als er weinig besmette mensen in een populatie zijn, het aantal fout-positieve uitslagen relatief hoog is. Dit komt doordat een klein deel van een grote groep meer kan zijn dan een groot deel van een kleine groep (lees deze zin rustig nog eens). Het diagram geeft aanleiding tot wiskundig redeneren met bijvoorbeeld enkele vervolgvragen van het type 'what if..?':

— Hoe verandert het aantal fout-positieven als de besmettingsgraad hoger wordt?
— Voorspel hoe het Sankey-diagram eruitziet als je het uitbreidt met een derde categorie: de resultaten van de her-test.



figuur 5 Fout-positieve, negatieve en fout-negatieve testresultaten[2]

Ten slotte

We denken dat Sankey-diagrammen veel mogelijkheden bieden voor interessante wiskundelessen. Enerzijds nodigen ze uit tot wiskundig redeneren en gaan ze over mooie maatschappelijk relevante contexten. Anderzijds zijn ze goed bruikbaar op allerlei niveaus, van onderbouw, in het vmbo, tot in de bovenbouw bijvoorbeeld in de lessen over hypothesetoesten bij statistiek. De veelzijdigheid van Sankey-diagrammen komt doordat ze twee rollen tegelijk spelen. Enerzijds kun je met Sankey-diagrammen complexe processen *modelleren*. Als model horen ze dan altijd bij een fenomeen; ze zijn een model van *iets*. Ze zijn dan een tool om de werkelijkheid wiskundig te vatten. Anderzijds behoren Sankey-diagrammen tot de *beeldtaal*; ze zijn familie van (data-)visualisaties, zoals ook histogrammen, boxplots, treemaps, Ganttmaps, enzovoort. Ze zijn daarmee een tool om te communiceren. Daardoor zien we ze steeds vaker in allerlei media en in wetenschappelijke artikelen. Met de groeiende hoeveelheid data in onze maatschappij zien we ook een groeiende hoeveelheid visueel-wiskundige tools die helpen om overzicht in die Big Data te scheppen. Als wiskundedocenten kunnen we leerlingen helpen om deze beeldtaal beter te interpreteren, en om deze zelf te leren hanteren.[7]
Ons lesmateriaal is vrij beschikbaar. We werken aan vervolgmateriaal, onder andere aan Sankey-diagrammen over de processen in de bedrijven in onze regio's (onder andere het olie-, de vuilverbrandings- en het rioleringsbedrijf). Helaas staan onze bedrijfsexcursies met de klassen momenteel 'on hold', omdat bedrijven huiverig zijn voor bezoek. Daarom denken we verder over meer digitaal materiaal. Indien je mee wilt denken, het materiaal naar het Nederlands wilt vertalen, het materiaal wilt aanpassen, of iets anders met Sankey-diagrammen wilt, dan horen we het graag.

Het lesmateriaal over Sankey-diagrammen vind je op

vakbladeuclides.nl/967sankey

Noten

[1] Zie https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/29/Minard.png
[2] Een beter leesbare versie van deze figuur is te zien in [3].
[3] Werkblad *Sankey diagrams* (in het Engels), zie *https://www.researchgate.net/publication/339460457_Sankey_diagrams*
[4] Zie bijvoorbeeld *https://cran.r-project.org/web/packages/alluvial/vignettes/alluvial.html*
[5] Zie: *https://medium.economist.com/an-anatomy-of-murder-20ef83346d37*

[6] Fout-negatief (vals-positief) en fout-negatief (vals-negatief) staan ook wel bekend, respectievelijk, als fout van de eerste soort (Type I fout) en fout van de tweede soort (Type II fout). In de statistiek wordt een fout van de eerste soort gemaakt als een statistische toets een nulhypothese onterecht verwerpt, en een fout van de tweede soort wordt gemaakt, als een statistische toets een nulhypothese onterecht aanneemt.

[7] Er zijn verschillende manieren om Sankey-diagrammen te maken. We raden aan dat leerlingen eerst de diagrammen met de hand maken. Onze leerlingen vonden daarna zelf een eenvoudig, gratis tooltje, zie *www.sankeymatic.com*.

Over de auteurs

Pauline Vos is hoogleraar Mathematics Education aan de Universiteit van Agder (Noorwegen). Naast het opleiden van leraren leidt ze onderzoek, onder andere naar relevantie-ervaringen van leerlingen in het wiskundeonderwijs ('juf, waarom moet ik deze sommen doen?'). E-mailadres: *pauline.vos@uia.no*
Eric Oziegbe Omobude is wiskundeleraar aan de Arendal International School (Noorwegen) en IB-examinator. Hij deed zijn masters in Mathematics Education aan de Universiteit van Agder en is nieuwsgierig naar hoe leerlingen wiskunde leren door middel van wiskundig modelleren.
E-mailadres: *ericomobude@gmail.com*

Oproep: auteurs Giraf-reeks

Heb jij altijd al je eigen boek of spel willen uitbrengen? De Giraf-reeks biedt jou deze kans! De Giraf-reeks is een boeken- en spellenreeks door de NVvW, waarbij wiskunde op creatieve, hedendaagse manier wordt aangeboden aan onderbouwleerlingen op het vmbo, havo en vwo.
Er zijn al twee delen verschenen over statistiek en cryptografie en er is behoefte aan een deel dat specifiek vmbo-leerlingen aanspreekt. Het onderwerp mag je zelf bedenken! Daarom zoeken we:

Een creatieve vmbo-wiskundedocent die ook goed kan schrijven!

Wat bieden we jou?
— dé kans om een eigen boek of spel uit te brengen!;
— begeleiding in het creatieproces door ervaren collega's;
— een breed publiek door publicatie in bijvoorbeeld *Euclides*, nieuwsbrieven en op studiedagen;
— een kleine financiële auteursvergoeding.

Wie zoeken we?
— een creatieve docent met ervaring op het vmbo.
— een goede schrijver die vmbo-leerlingen weet aan te spreken.
— een doorzetter.

Herken jij je in deze omschrijving en wil je graag een boek of spel uitbrengen? Neem dan contact op met Desiree van den Bogaart (*d.vandenbogaart@nvvw.nl*) voor meer informatie.

Gerrit Roorda, Nelleke den Braber

Kogels smelten bij vakdidactiek wiskunde

De vakdidactiekcolleges van Gerrit en Nelleke beginnen vaak met een korte wiskundeopdracht. De verschillende aanpakken van de studenten leveren veel stof tot gesprekken over vakdidactiek. Ook binnen jouw school of vaksectie kunnen dergelijke opgaven voer zijn voor een inspirerend didactisch gesprek. In dit artikel een voorbeeld waarin iets valt te leren over het belang van cognitieve schema's en probleemoplossingsvaardigheden.

De kogeltjessom

Conform het uitgangspunt hierboven is het mooi om zelf eerst na te denken over de aanpak die je als lezer zou gebruiken bij het oplossen van de volgende opdracht, het liefst met uitgeschreven berekening.

> Uit een grote voorraad kleine bolvormige loden kogeltjes met een diameter van 3 mm worden er 10 000 omgesmolten tot één grote bolvormige kogel. Bereken in mm nauwkeurig de diameter van de grote kogel.[1]

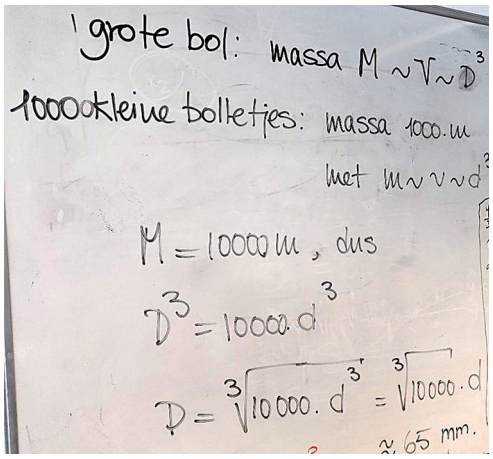
Oplossing 1

Veel studenten lossen deze opdracht gelukkig makkelijk op. De *uitrekenoptie* wordt veel gebruikt: je rekent de inhoud van één kogeltje uit: $I = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = 14{,}1371669...$ Dit betekent dat 10 000 kogeltjes samen een inhoud hebben van 141371,669... mm^3. Terugrekenen voor de grote kogel levert een straal van 32,32 mm en dus een diameter van ongeveer 65 mm op. Hobbels die studenten tegenkomen zijn: soms wordt vergeten met de straal te rekenen of weer terug te rekenen naar de diameter; net als bij leerlingen kan dit allemaal voorkomen. Daarnaast, lang niet alle studenten hebben de formule van de inhoud van een bol paraat. Allerlei varianten op formules voor inhouden van bollen komen naar voren zoals: $I_{bol} = 4\pi r^2$, $I_{bol} = \pi r^3$ of $I_{bol} = 4\pi r^3$. Gesprekspunten die hierbij naar voren komen: zou iedere (aanstaande) leraar wiskunde de formule uit het hoofd moeten weten? En hoe kun je formules onthouden?

Oplossing 2 en 3

Een tweede aanpak die studenten gebruiken is een soort verkorte uitrekenoptie; vaak gebruikt door studenten die hun rekenmachine niet bij zich hebben. De vergelijking $I_{groot} = 10\,000 I_{klein}$ levert $10\,000 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_g^3$.

Het voordeel is dat aan beide kanten gedeeld kan worden door $\frac{4}{3}\pi$, dat scheelt veel gereken. Optie 3 is een nog kortere berekening waarbij gebruik gemaakt wordt van het feit dat de inhoud van de bol evenredig is met de derde macht van de diameter, zie figuur 1.



figuur 1 Uitwerking van een student

Oplossing 4

Tijdens het college breng ik, Gerrit, mijn bijleservaring in: een havo 5 wiskunde B-leerlinge hoopte met één enkele bijles, vlak voor de toets, het wiskundecijfer wat op te krikken. Om te polsen 'wat voor vlees ik in de kuip had' sloeg ik het boek open bij de diagnostische toets.

De som die voorlag was de kogeltjessom. Ik vroeg haar deze opdracht te maken. Het meisje staarde enige tijd naar de opdracht en zei toen: 'Ik weet niet hoe je dit moet doen. Het was iets met wortels, dat weet ik nog wel, maar ik snapte dat niet.' We bladeren samen terug en ja hoor, daar staan de wortels. In het boek wordt onderstaande berekening (in een andere context) gegeven: dit levert een vierde oplossing die slechts zeer zelden in deze vorm door studenten wordt bedacht. De gesprekspunten die hieruit voorkomen: hoe ondersteun je leerlingen die blokkeren omdat ze 'niet meer weten hoe het volgens het boek aangepakt moest worden' en ook: waarom gebruiken de studenten slechts zelden optie 4?

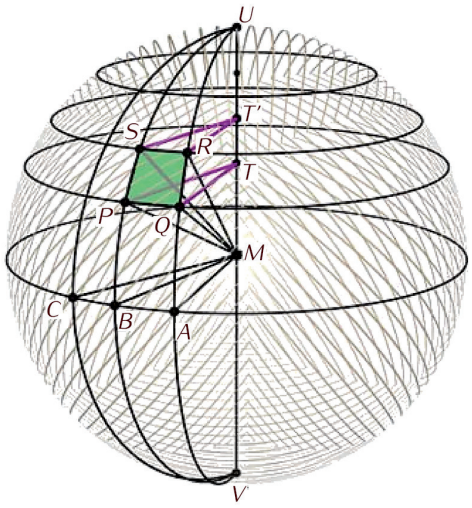
Kleine kogel (*origineel*) $\xrightarrow{\times k}$ *Grote kogel* (*beeld*)

Dus $k^3 = 10\,000$ en *dus* $k = \sqrt[3]{10000}$.
De diameter van de grote kogel is dus
$3 \times \sqrt[3]{10000} \approx 65$, dus 65 mm.

Gesprekspunt 1: Hoe onthoud je die formule?

Voor het onthouden van de inhoud van de bol-formule bespreken we in het college verschillende ideeën, voor een deel geopperd door studenten:

1) De derdemacht kun je relateren aan het feit dat het om een volume gaat.
2) Je kunt aantonen dat, populair gezegd, de afgeleide van de inhoud gelijk is aan de oppervlakte van de schil van de bol, ofwel[2]: $\frac{\mathrm{d}I_{bol}}{\mathrm{d}r} = O_{bol}$.
3) Er bestaan diverse verbanden tussen de inhouden van verschillende ruimtefiguren [3], om er één te noemen: de inhoud van een bol met straal r is ⅔ van de inhoud van een cilinder die er 'mooi omheen past' met grondcirkel straal r en hoogte $2r$.
4) Een mooi verband tussen oppervlakte en inhoud van een bol wordt beschreven door Dick Klingens[4]: de inhoud van een bol kan benaderd worden door piramides die 'gezamenlijk' als grondvlak de bolschil ($4\pi r^2$) hebben, met elk een hoogte r, zie figuur 2.
5) Met integraalrekening is (met enkele, dubbele of drievoudige integraal) de formule af te leiden.



figuur 2 [4]

Moet je nu al deze verbanden kennen als docent, en moet je dergelijke verbanden onderwijzen? Over antwoorden op deze vragen kun je discussiëren, maar twee thema's die hieraan gekoppeld zijn: in de eerste plaats blijkt uit diverse bronnen dat een (misschien niet onverwachte) voorwaarde voor effectief onderwijs de diepgaande en flexibele kennis van de docent is.[5] Dat zou ervoor pleiten dat een docent niet alleen de inhoudsformule kent, maar ook diverse verbanden zoals hierboven genoemd. In de tweede plaats: leerlingen die losse formules onthouden vergeten ze sneller dan leerlingen die delen van kennis aan elkaar kunnen relateren.[6] Dat zou ervoor pleiten om leerlingen in elk geval de kans te geven om de inhoudsformule in een breder perspectief te onthouden. Afhankelijk van leerjaar en voorkennis kunnen keuzes gemaakt worden.

Gesprekspunt 2: 'Ik weet niet meer hoe dat moest met wortels'

De bijlesleerlinge die uitsprak: 'het was iets met wortels' lijkt wiskunde te leren door de aanpakken in het hoofdstuk te memoriseren. Dit patroon is ook zichtbaar bij één van de onderzochte leerlingen in het onderzoek van Roorda,[7] die wiskunde bleek te leren door zeer nauwkeurig te memoriseren hoe je een bepaald type opdrachten moest aanpakken. Opdrachten die licht afweken van de standaardopdrachten bleken niet of nauwelijks oplosbaar. Het dilemma dat hier zichtbaar wordt: enerzijds is het oefenen van veel wiskundige technieken noodzakelijk, anderzijds wil je graag dat leerlingen tijdens het oplossen van een opdracht blijven nadenken over de opdracht, het kiezen van mogelijke gereedschappen en heuristische aanpakken gebruiken om toch een start te maken. >

Er zijn geen makkelijke antwoorden over hoe je dit zou moeten doen, maar mijn bijles aan deze leerlinge heeft vooral bestaan uit het trainen van metacognitieve vaardigheden: 'stel jezelf niet de vraag "hoe moest dit van het boek", maar "hoe zit deze situatie in elkaar", "welke gereedschappen zijn bruikbaar?", zie [6].

Gesprekspunt 3: de aanpak in het boek

In het vakdidactiekcollege spreken we vaak kort over de vraag waarom maar weinig studenten de aanpak gebruiken die in het boek geoefend wordt. Verklaringen zitten meestal in dat het lang geleden is dat ze opdrachten over dit onderwerp hebben gemaakt, of dat ze de 'aanpak via vergrotingsfactoren' niet geleerd hebben als losse techniek. Ook speelt mee dat de opdracht 'oproept' tot het berekenen van de inhoud van de kleine kogeltjes. Ten slotte zijn er studenten die pas in de loop van *uitrekenoptie 1* of de *verkorte-uitrekenoptie 2* beseffen dat de berekening via de vergrotingsfactor ook mogelijk is. Ook hier weer de vragen die geen makkelijke antwoorden hebben: is het nodig om deze vergrotingsfactorentechniek als eigenstandige techniek te leren? Kun je de techniek leren als truc, of heeft het leren van optie 4 alleen zin als je ook de opties 1, 2 en 3 kent? Ook hier speelt de eerdergenoemde theorie over samenhang in kennis, of verbrokkelde kennis een rol.[6]

De kogelsom, een reflectie

Met één korte opdracht komen allerlei wiskunde-didactische vragen en theorieën naar voren. De boodschap die we de studenten in deze activiteit meegeven is de volgende: we willen toch dat leerlingen verder komen dan 'hoe moest dat ook al weer volgens het boek'. Uit de eigen oplossingsprocessen kun je concluderen dat de aanpak bij de kogelsom niet eenduidig is en ook niet via één recht-toe-recht-aan route verloopt en blijkbaar ook vaak niet via de in het boek aangeleerde methode. In je onderwijs is het enerzijds van belang dat je leerlingen traint in het uitvoeren van procedures om bepaald type opdrachten op te lossen, maar anderzijds ook regelmatig tijd neemt voor het thema: hoe pak je een opdracht aan, hoe kies je het goede gereedschap? In de colleges kunnen we vervolgens ingaan op didactische aanpakken zoals doelvrije opdrachten, de praktijk van gevarieerd oefenen en 'zelfde-oppervlakte-andere-diepte-problemen'.[8] Ook ondersteunende materialen over Wiskundige Denkactiviteiten bieden veel handreikingen[9] en een in Japan veel gebruikte lesaanpak van Teaching Through Problem Solving[10] is zeer bruikbaar.
Kortom: genoeg te bespreken in de vakdidactiekcolleges!

Misschien ook interessant om een dergelijke activiteit met de vaksectie uit te voeren. Nog interessanter wordt het als de opdracht ook door leerlingen van een passende klas is uitgewerkt.

Noten

[1] Opdracht uit de diagnostische toets van *Getal & Ruimte*, havo wiskunde B.

[2] Van den Broek, L. (2007). D(inhoud) = oppervlakte? D(oppervlakte) = omtrek? *Uitwiskeling* 23(4), pp 3-7.

[3] Zie bijvoorbeeld *youtube.com/watch?v=YNutS8elhEs en youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik* en ook *hhofstede.nl/modules/bewijzen/inhoudbol.htm*

[4] *https://www.pandd.nl/downloads/oppinhbol.pdf*

[5] Coe, R., Rauch, C.J., Kime, S., & Singleton, D. (2020). *The Great Teaching toolkit: Evidence Review.*

[6] Drijvers, P., Van Streun, A. van, & Zwaneveld, B. (Eds.), *Handboek wiskundedidactiek.* Utrecht: Epsilon uitgaven. Zie met name pp 26- 37.

[7] Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering: ontwikkeling van wiskundige bekwaamheid van leerlingen met betrekking tot het concept afgeleide.* University of Groningen.

[8] Barton, C (2018). *Volgens Barton.* Culemborg: Phronese

[9] Van Streun, A. (2014). *Onderwijzen en toetsen van wiskundige denkactiviteiten.* Enschede: SLO. En Van Streun, A., & Kop, P. (2016). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo-vwo.* Enschede: SLO.

[10] Zie bijvoorbeeld *https://www.nais.org/magazine/independent-teacher/fall-2014/teaching-mathematics-through-problem-solving/*

Over de auteurs

Gerrit Roorda is docent wiskundedidactiek bij de eerstegraads lerarenopleidingen van de Universiteit Groningen en NHL Stenden Hogeschool. E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*. Nelleke den Braber is docent wiskundedidactiek bij de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding van NHL Stenden Hogeschool. E-mailadres: *nelleke.den.braber@nhlstenden.com*

In memoriam Jan Maassen

Jan Maassen

Op zaterdag 17 april is Jan Maassen, erelid van de NVvW, op 88-jarige leeftijd overleden. Jan heeft 25 jaar deel uitgemaakt van het bestuur van de NVvW en was ook 25 jaar secretaris van het bestuur. Bij zijn afscheid in oktober 1994 is hij benoemd tot erelid van de vereniging en kreeg hij een ridderorde.
Alle reden dus om in deze *Euclides* aandacht te besteden aan deze bijzondere collega, die we tot twee jaar geleden nog jaarlijks mochten verwelkomen op onze jaarvergadering/studiedag. Jan genoot van deze dagen, van het weerzien met oude bekenden en hij maakte dan steevast een praatje met een andere oud-secretaris, Kees Lagerwaard, die nog regelmatig contact had met Jan. Kees leerde Jan niet in het bestuur van de NVvW kennen, maar bij het maken van examens voor Cito. Jan zat namelijk in de constructiegroep voor de eerste examens havo A.

Kees heeft in die tijd als beginnend toetsdeskundige dankbaar gebruik kunnen maken van de rijke ervaring van Jan. Hij had een heel nuchtere kijk op eindexamens. Uiteraard was het examenprogramma leidend. Dus moesten die gloednieuwe examens recht doen aan de leerdoelen van wiskunde A havo. Maar de ambities moesten worden begrensd. Geen wilde, onverwachte, experimentele opgaven en vragen, maar herkenbare A-opgaven die leerlingen een eerlijke kans gaven om te laten zien in welke mate ze dat nieuwe vak beheersten. Jan vond dat altijd de eis die je aan de centrale eindexamens moest stellen: een degelijke toetsing van de kern van het vak. Het toetsen van de randen van het vak kon dan beter een plaats vinden in de schoolexamens. Jan had een actieve rol in de herverkaveling van de eindexamens wiskunde I en II, wat het begin was van het onderscheid tussen wiskunde A en wiskunde B. Jan deed in die tijd de eindredactie van een boekje met Opgaven wiskunde B havo en een vergelijkbaar boekje voor wiskunde A.

Bij zijn afscheid als bestuurslid kreeg Jan een lintje en werd hem het erelidmaatschap van de vereniging toegekend. In een interview met Agnes Verweij (*Euclides* 70-6) zei Jan dat hij het erelidmaatschap eigenlijk bijzonderder vond dan het lintje. Tenslotte is er maar een handvol ereleden en veel meer mensen met een lintje.

We komen Jan ook tegen in het boek *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Dit boek heeft de NVvW uitgegeven ter ere van het 75-jarige bestaan van de vereniging. In een van de hoofdstukken van dit boek, beschrijft Jan de ontwikkeling van de NVvW tot een vereniging voor álle docenten wiskunde in het vo en de samenwerking tussen vereniging en het tijdschrift *Euclides*. Uit zijn bijdrage kunnen we twee dingen halen waar Jan bij betrokken is geweest en die nog steeds herkenbaar zijn. Zo heeft, in de periode dat Jan secretaris van de NVvW was, *Euclides* een transformatie ondergaan. *Euclides* was eerder een blad dat vooral gevuld was met vakinhoudelijke artikelen, later werd het een blad waar ook didactiek en beleidsmatige artikelen een plaats kregen. Eerst was *Euclides* eigendom van Wolters Noordhoff, maar aan het einde van de bestuursperiode van Jan is de NVvW eigenaar van het blad geworden.

De laatste jaren ging de gezondheid van Jan achteruit, waardoor hij zijn activiteiten moest beperken,maar zijn geest was nog altijd helder en hij volgde de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs nog steeds.
We sluiten dit bericht af met een quote van Marian Kolleveld, eveneens erelid en 23 jaar voorzitter van de NVvW: 'Hij was jaren de spil van de vereniging, zijn notulen waren prachtig, je las daar wat je had willen zeggen, maar dan mooi verwoord.'

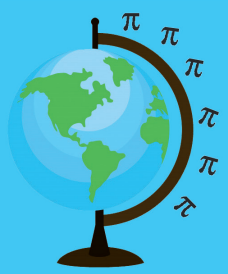
Rust zacht.
Namens het bestuur van de NVvW,

Heleen van der Ree

Math between US

Math Zoom, Math Love

Jana Dean



In deze column vertelt Jana Dean over haar ervaringen als wiskundedocent en haar experimenten op een middelbare school in Washington State, USA.

Math for Love

Just before Covid made my middle school teaching remote for the past year, I attended a workshop led by mathematician and *Math for Love* [1] co-founder, Dan Finkel. *Math for Love* makes visual puzzles and supports parents and teachers with math teaching resources. Little did I know, Dan's approach to providing intriguing visual puzzles would become a touchstone for learning to teach math from a distance.

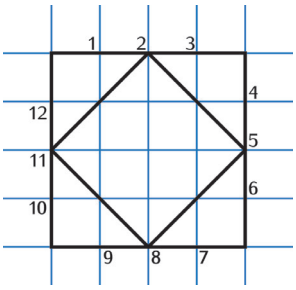


figure 1 Stained Glass Window [2]

Dan's workshop exemplified the *Math for Love* approach. He put an image on the screen and told us that we were looking at a stained glass window and that the master stained-glass artist was tired of this design. The artist had a commission to design as many windows as he could that would take up exactly half the square and touch each side of the square once and only once at the numbered points. Dan asked, 'Was it possible to come up with any other designs?'

The room sat silent for a few minutes and then people began sketching and wondering aloud. As Dan worked the room he circulated, and listened. He asked questions, waited for our answers and directed us to be curious about each other's partial solutions. Two or three times he called us together to consider each other's ideas as a large group. These discussions offered new tools, but no answers. After one and a half hours, participants had convinced each other that the stained glass maker could stay busy for a good long time without repeating a window, but none of us knew exactly how many windows that would be. Dan said good-bye without telling us the answer. In 2010, Dan and his partner Katherine Cook founded *Math for Love* with the goal of helping people see how 'playful, beautiful and life-changing mathematics can be.' I had long been intrigued by the activities and games I found on their website, and having experienced a workshop, I invited Dan for an interview. We met in a cafe in his Seattle neighborhood. Dan shared his work as a puzzle writer for the *New York Times*. He told me that making a good puzzle is like poetry. He starts by thinking about something visual, like a cube or overlapping squares and then begins asking himself a question. At best, it is a natural question — that is, a question that could arise for anyone seeing the image.

Images and words

While distance teaching using Zoom, I start my class by sharing an editable Google slide deck — a set of images and words that anchor an hour of doing mathematics together. My fourteen-year-old students log in from their bedrooms, living rooms and kitchens. At times, students' wifi is so weak it distorts voices so much they don't dare talk. With such glitchy connections, the visuals I provide in the slide deck help carry students' thinking forward. They can add words, and shapes and tables and images of their own.

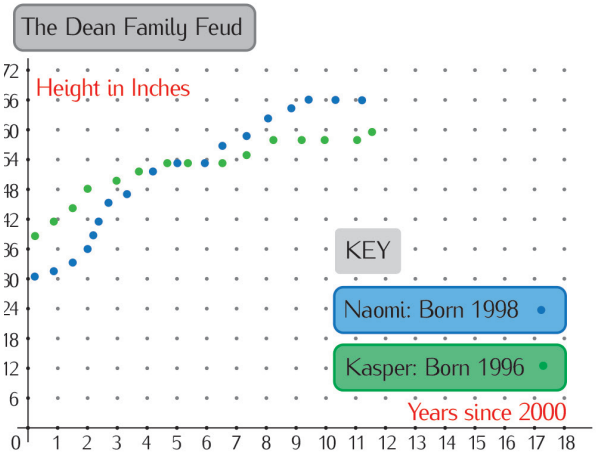


figure 2 What is happening here? When will Kasper be older than his sister?

While not every task rises to the level of poetry in Stained Glass Window, I keep *Math for Love* principles in mind as I design. In the Seattle cafe, Dan shared that a good puzzle naturally breaks into small doable steps that keep leading you on toward a solution. In the best puzzles, each step feels natural, that is, it doesn't require sudden insight or extensive formalized knowledge of mathematics or a series of prescribed steps.

As I translate these principles into distance teaching, I find myself leaning heavily on family stories I can tell, like my son's concern in middle school that his little sister

was taller than him or my husband wondering on a dark winter morning about Voyager's power supply.

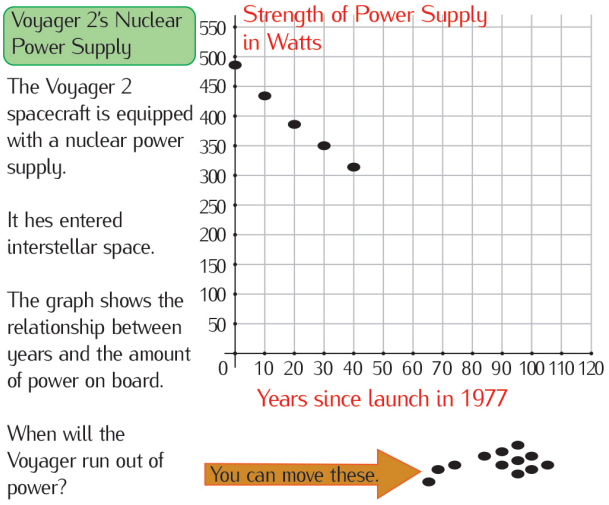


figure 3 When will the Voyager 2 run out of power?

I also take full advantage of the affordances of google slides. In our data unit, most tasks consisted of incomplete graphs that, if examined carefully, could be used to solve a problem or tell the rest of an unfinished story. Students can move the dots on the slides to complete and make sense of the graphs so they can use them to answer questions. I have also adapted ideas from Jo Boaler's new *Mindset Mathematics* [3] in a *Math for Love*-inspired manner. Stairway to Eleven provided a genuine puzzle related to slope. And Find the Fake became an investigation in similarity. You can create your own copy of these lessons with this link [4].

Conclusion

Even with inspiration from *Math for Love*, visual Zoom is eerily quiet; however students do share that they are learning, and they often 'say in the chat' what they are thinking. One student told me he hasn't understood math since 5th grade and he finally gets it. Another who said she used to hate math now finds it to be her favorite class. A third shared that she is enjoying and understanding math for the very first time. When I asked for details, all three told me they know what to think about by looking at the slides, even when they can't hear or understand the words. Their insights remind me of the importance of making math visual. When students miss the words, they can fall back on what they can see with their own eyes. Almost everyone who has been in a math class knows the feeling of having missed the words. If there is any power math can unlock it is a person's ability to make sense of the world through their own perception.

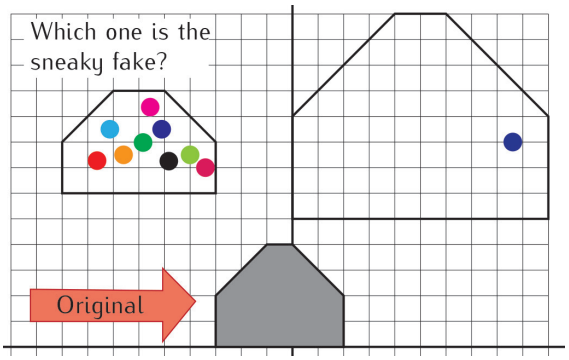


figure 4 Find the Fake

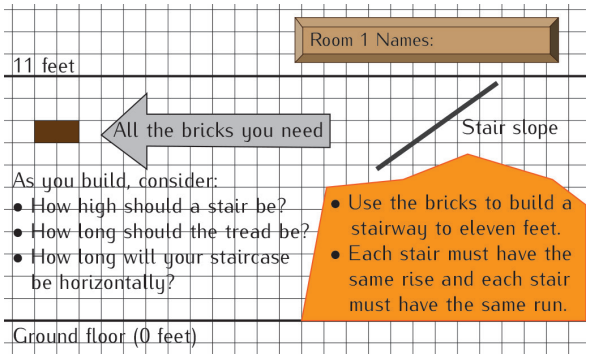


figure 5 Stairway to Eleven

The more math can be a visual puzzle the more it can unlock the power of people's own perception. Add a teacher who attends to student perception and real change for real people unfolds. As Dan Finkel says, "You have a right to understand the math. As the teacher I have a right to understand you. I will listen to you until I can understand you. That elevates everyone into a realm of relationship, community and kindness." What better way to get through a pandemic than teaching *Math for Love*?

References

[1] *https://mathforlove.com/*

[2] *https://mathforlove.com/lesson/quadrilateral-bisection-the-stained-glass-window-problem/*

[3] Boaler, J., Munson, J. & Williams, C. (2019). *Mindsets Mathematics Grade 8*. Hoboken: Wiley.

[4] *https://docs.google.com/presentation/d/12bpWBHlnzJWJXMTcmgkhPI8aSba_6f5d7trPcS8bm-U/copy*

About the author

Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a PhD candidate in Leadership Studies at Saint Martin's University (Lacey, Washington State). In 2019 Jana was a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019). See: *www.mathbetweenus.org*. E-mailadress: *jdean@reachone.com*

Jörgen van Remoortere

Diagnostische vragen in de wiskundeles

Een goede diagnostische vraag is niet zomaar een vraag: je wilt snel te weten komen of een leerling een concept te pakken heeft en voorkomen dat een eventueel misconcept toch tot het goede antwoord kan leiden. Een goede diagnostische vragenbank kan docenten helpen de goede vraag te stellen.

Inleiding

Wanneer ik voor het eerst tegen het gebruik van diagnostische vragen tijdens de les aanliep weet ik niet precies meer. En ik vermoed dat ik destijds ook nog niet doorhad waarom ik diagnostische vragen zou willen gebruiken, laat staan wat een goede diagnostische vraag is.
Als ik nu terugblader in de onderwijsboeken die ik in mijn kast heb staan, dan kom ik de diagnostische vraag voor het eerst tegen in William & Leary's *Embedding formative assessment*.[1] Zij noemen het een *hinge question*, ofwel een scharniervraag, omdat tijdens de instructiefase van de les het verdere verloop afhangt van het begrip dat leerlingen op dat moment kunnen laten zien. Dat wordt meteen gekoppeld aan hun definitie van formatief handelen: je kunt pas bepalen wat je te doen hebt als je leerlingresultaten of -prestaties verzamelt en analyseert.
In het voorwoord van een ander boek schrijft William dat hij de term *formative assessment* (achteraf gezien) liever *responsive teaching* had willen noemen. Overigens is hij ook daar later op teruggekomen, maar dat valt buiten de scope van dit artikel. In de term responsive teaching zit wel de kern van wat formatief handelen in mijn ogen is: de brug slaan tussen onderwijzen en leren.

Criteria voor goede vragen

Wat Wiliam & Leary beschrijven is dat omwille van de voortgang in de les zo'n diagnostische vraag aan een aantal criteria moet voldoen. Ten eerste moet een leerling met een foute redenatie niet op het juiste antwoord kunnen komen. Vergelijk volgende voorbeelden, zie figuur 1, eens met elkaar.

Welke breuk is kleiner?	Welke breuk is kleiner?
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{9}$	a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{7}{10}$

figuur 1

De linkervraag is geen goede vraag omdat een leerling vanuit de misvatting 'hoe groter de noemer, des te kleiner de breuk' het juiste antwoord kan kiezen. Door een breuk toe te voegen die hier niet aan voldoet wordt het al beter (zie het rechtervoorbeeld).
Ten tweede het antwoord op de vraag direct duidelijkheid geven over het begrip van de leerling, zonder dat het antwoord toegelicht hoeft te worden. Het gebruik van een diagnostische vraag is niet gericht op het voeren van een discussie op dát moment (uiteraard wel zinvol op de momenten dat je die discussieruimte wél inplant): je wilt op basis van de gekozen antwoorden een gepland vervolg geven.
De Schotse wiskundedocent Craig Barton heeft dit principe van diagnostische vragen uitgewerkt en is de website *Diagnostic Questions* [2] gestart, waarop inmiddels tienduizenden vragen staan (voornamelijk wiskunde/rekenen maar inmiddels ook andere vakken). In *Volgens Barton*[3] beschrijft hij in hoofdstuk 11 hoe diagnostische vragen ondersteunend kunnen zijn bij formatief handelen. Hij komt daarbij tot nog een aantal extra criteria voor een goede diagnostische vraag.

— Een diagnostische vraag moet duidelijk en ondubbelzinnig zijn.

Stel je wilt nagaan of leerlingen twee ongelijknamige breuken kunnen optellen, en je krijgt de volgende antwoorden, zie figuur 2:

$\frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{7}{14}$	$\frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{1}{2}$
antwoord A	antwoord B

figuur 2

Welk antwoord ga je goed rekenen: antwoord A of antwoord B? Beide zijn goed, ware het niet dat wij vinden dat een breuk altijd zo ver mogelijk vereenvoudigd moet zijn. Echter het vereenvoudigen van breuken is een andere vaardigheid dan het optellen van breuken.

— Een diagnostische vraag moet snel beantwoord kunnen worden.
Als richting geeft hij aan: binnen tien seconden. Dat maakt het oplossen van een vergelijking of een stelsel al niet mogelijk. Bijvoorbeeld deze meerkeuzevraag, zie figuur 3:

Los op: $3x + 4 = -2x - 6$

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 0{,}5$ d) $x = -0{,}5$

figuur 3

Los van de tijd speelt hier ook het vorige criterium: de leerling hoeft de vergelijking niet op te lossen, maar kan eenvoudig m.b.v. substitutie controleren welk antwoord klopt. Je kunt wel vragen, zie figuur 4:

Wat is een juiste vervolgstap bij het oplossen van $3x + 4 = -2x - 6$?

a) $5x = -10$ b) $x = -2$
c) $7x = -8x$ d) $x = -10$

figuur 4

— Een diagnostische vraag moet gaan over één enkele vaardigheid of begrip. Ga maar na dat in de voorbeelden hierboven, dat niet het geval is.

Tezamen komt dat op de vijf gouden regels voor de diagnostische vraag, volgens Barton:

1. De diagnostische vraag is duidelijk en ondubbelzinnig.
2. De diagnostische vraag moet één enkele vaardigheid of één enkel begrip toetsen
3. Leerlingen moeten de vraag snel kunnen beantwoorden (in ongeveer tien seconden).
4. Van elk onjuist antwoord moet je iets kunnen opsteken zonder dat de leerling het nader hoeft toe te lichten.
5. Het moet niet mogelijk zijn om op het juiste antwoord uit te komen met behulp van een misvatting.

Als je kijkt naar criterium 4 dan vind je die ook terug bij o.a. Doug Lemov in zijn boek *Teach like a champion 2.0*. [4] Techniek 7 die Lemov beschrijft heet: *Plan for error*, of in het Nederlands: fouten voorzien. Het feit dat je vooraf nadenkt over veelgemaakte fouten of misvattingen bij een leerdoel, maakt dat je bij je lesvoorbereiding al nadenkt over wat je gaat doen als je die fouten of misvattingen tegenkomt. Sterker nog: je zoekt ze bewust op, waardoor je zorgt dat als ze bestaan, je ze al in een vroegtijdig stadium kunt vaststellen.

Misvattingen versus fouten

Als je je gaat verdiepen in literatuur lijkt het vaak te gaan om het vroegtijdig signaleren van *misvattingen*. Het vroegtijdig signaleren van *veelgemaakte fouten* kom je minder vaak tegen. Daardoor ging ik op zoek naar: wat is nou precies het verschil tussen een misvatting en een veelgemaakte fout? En maakt dat eventuele verschil uit voor het gebruik van diagnostische vragen? Ik kwam uit op het volgende verschil: er is sprake van een misvatting als een leerling al een bepaald mentaal model heeft ontwikkeld over een onderwerp dat niet klopt. In het genoemde voorbeeld van de breuken is de misvatting dat een breuk met een grotere noemer kleiner is dan een breuk met een kleinere noemer. In het voorbeeld van breuken bij elkaar optellen is het onderscheid misschien wat lastiger te duiden. Als een leerling bij het optellen van ongelijknamige breuken zowel de tellers als de noemers bij elkaar optelt, is dat dan een misvatting of een veelgemaakte fout? Je zou kunnen beargumenteren dat, als dat gebeurt bij het aanleren, er nog geen mentaal model bestaat en het dus een veelgemaakte fout is. Maakt een leerling later in het proces deze fout, dan bestaat de kans dat er wel sprake is van een opgebouwd mentaal model. Het zou echter ook de verwarring kunnen zijn met het vermenigvuldigen van breuken. In dat geval is het mentale model wellicht nog niet solide opgebouwd. Over het verschil tussen een veelgemaakte fout en een misvatting zegt >

Dylan Wiliam: 'For me, a misconception has to be a stable phenomenon, and so is consistently demonstrated, and is thus different from an error, which could be a random mistake'.
Het spreekt voor zich dat je leerlingen bij het aanleren van iets nieuws direct het juiste mentale model laat opbouwen. Je wilt daarom snel kunnen constateren of het model op een goede manier geconstrueerd wordt in het hoofd van de leerling. Wat mij betreft is in die fase het onderscheid tussen een misvatting en een veelgemaakte fout niet zo belangrijk: je gaat ernaar op zoek, en een goede diagnostische vraag waarin beide aan bod komen kan daar prima bij helpen. Het probleem zit in het vervolg: als het een misvatting betreft is dat complexer om te corrigeren.
In meerdere boeken vind je verwijzingen terug naar de stap in het formatief handelen om zichtbaar te krijgen wat leerlingen denken, wat ze begrepen hebben. Bijvoorbeeld in *Responsive Teaching* van Harry Fletcher-Wood [5] of op de website *Wijze lessen: 12 bouwstenen voor effectieve didactiek*[6] wordt het stellen van goede (diagnostische) vragen als effectief instrument gezien. In *Wijze lessen* staat daarover: 'Goede vragen helpen bij het opfrissen en verankeren van eerdere kennis, het checken van begrip en het vaststellen van misvattingen die leerlingen nog hebben'.

Multiple choice?

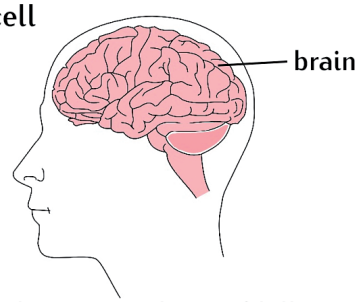
Barton gebruikt bij diagnostische vragen alleen multiplechoicevragen. Dat is een bewuste keuze en dat heeft voornamelijk te maken met het principe van 'plan for error': je bereidt niet alleen de vraag voor maar ook de vervolgacties bij specifieke foute antwoorden. Nu is er al veel geschreven over multiplechoicevragen en hun beperkingen/gevaren, zie o.a. Ben Wilbrink [7]. Daarbij moet je je wel realiseren dat het in die discussies meestal gaat om een summatieve beoordeling betreft. De soort vraag die voor een summatieve beoordeling gesteld wordt, wijkt veelal af van de vraag die je stelt vanuit een formatieve gedachte. De grootste bezwaren vallen daarmee weg: het doel is het verkrijgen van inzicht en informatie om doelgericht te kunnen handelen. In de conclusie die Wilbrink trekt staat wel een belangrijke zinsnede: '... kan de docent de vraag- en toetsconstructie beter uit handen geven aan daarin gespecialiseerde collega's...'. Hij bedoelt hier collega's die gespecialiseerd zijn in het construeren van valide en betrouwbare (summatieve) toetsen. Deze zinsnede lezende concludeer ik dat een goede diagnostische vraag, zoals ik dit in dit artikel beschrijf, gemaakt moet worden door specialisten in het vak: een ervaren wiskundedocent. Het vraagt namelijk diepgaande vakinhoudelijke kennis om te weten waarnaar je op zoek moet en vakdidactisch inzicht om daar passend op te handelen.

> "Een formatieve vragendatabase voor wiskunde heeft veel toegevoegde waarde."

Vakoverstijging

Wat zou het mooi zou zijn als wiskundedocenten een database van goede diagnostische vragen kunnen opstellen om onze gezamenlijke kennis en ervaring in te zetten voor het leren van wiskunde voor iedere leerling. Dat we een voorbereide les van een collega niet één op één kunnen toepassen in onze eigen lessen weten we: die moet je altijd aanpassen naar je eigen taal, context, doelgroep etcetera. Maar een goede diagnostische vraag is niet afhankelijk van dat soort factoren. Samen met Sofie Faes (NVON [8], biologiedocente) onderzoek ik of er behoefte is aan een dergelijke vragendatabase. Ook ben ik benieuwd of er docenten zijn die mee willen helpen aan het opbouwen van zo'n verzameling vragen. Voor biologie bestaat dat er al een website[9] waarin voor veel onderwerpen bekende misconcepten in kaart zijn gebracht. Voor wiskunde heb ik iets soortgelijks nog niet gevonden. Mocht dat er wel zijn, dan houd ik me aanbevolen! Bij deze biologiesite ontbreken nog de vragen die je vervolgens aan leerlingen kunt stellen. Op de site van de Association for Science Education[10] worden wel misconcepten met diagnostische vragen gecombineerd. Los van het feit dat de site niet over het vak wiskunde gaat, is hij Engelstalig en dus ook niet praktisch toepasbaar voor onze leerlingen. Een voorbeeld van een vraag [11] zie je in figuur 5.

Brain cell
Oxygen



A human brain is made up of billions of cells. Every cell in the brain needs oxygen to stay alive and function.

1. How does a cell in the brain get oxygen?

A It makes its own oxygen.
B It takes oxygen from the air.
C It takes oxygen from the lungs.
D It takes oxygen from the blood.

figuur 5

De achterliggende misvatting die hierbij hoort is als volgt geformuleerd:
Researchers have reported the common misunderstanding in children that the bodies of humans and other animals contain cells, perhaps floating in a 'soup' of body fluids, rather than being made up of cells. Dreyfus and Jungwirth found that many 16-year-olds struggled to explain how cells carry out life processes, with many students thinking that cells contain macroscopic organs such as a digestivetract (e.g. for nutrition) or lungs (e.g. for respiration). Cartoon-like depictions of cells with faces, limbs or speech bubbles implying that they are able to speak may introduce or reinforce misunderstandings about the size and scale of cells and organs.

Tot slot

Wij zien een toegevoegde waarde om een formatieve vragendatabase in Nederland te bouwen. Graag werken we hiervoor samen met vakverenigingen, lerarenopleidingen en kennisinstellingen. Op deze manier bouwen kennis op over wat bepaalde vakinhouden moeilijk maakt om te leren en verspreiden we kennis over hoe je deze obstakels kunt aanpakken in de klas. Heb je zelf ideeën of werk je bij een van deze organisaties en wil je bijdragen? Neem dan vooral contact op.

Noten

[1] William, D. & Leahy, S. (2015). *Embedding Formative assessment.* Blairsville: Learning Sciences International.
[2] *www.diagnosticquestions.com*
[3] *Volgens Barton*, deel 1 en 2 (2020) (bewerkt en vertaald door René Kneijber). Culemborg: Phronese.
[4] Lemov, D. (2016). *Teach like a champion 2.0, 62 technieken om leerlingen te laten excelleren.* Rotterdam: CED-groep.
[5] Fletcher-Wood, H. (2018). *Responsive Teaching.* Hoofdstuk 5 'How can we tell what students are thinking'. Milton Park: Taylor & Francis Ltd.
[6] Surma, T., Vanhoyweeghen, K., Sluijsmans, D., Camp, G. Muijs, D. & Kirschner, P.A. (2019). *Wijze lessen: twaalf bouwstenen voor effectieve didactiek.* Meppel: Ten Brink. Zie ook: *https://www.ou.nl/web/wijze-lessen* (Bouwsteen 6 Achterhaal of de hele klas het begrepen heeft)
[7] *http://benwilbrink.nl/publicaties/77KeuzevragenORD.htm*
[8] Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in Natuurwetenschappen, zie *www.nvon.nl*
[9] *http://www.ntwpracticumnet.ou.nl/content-e/Kennisbank_biologie_misconcepten/*
[10] *https://www.ase.org.uk/news/best-steps-brand-new-free-ase-resource-gcse-science-teachers*
[11] *https://drive.google.com/file/d/1VM-jjNYDeFfa6ZH9_wZzsC252I9g755e/view*

Over de auteur

Jörgen van Remoortere is docent op het Alkwin Kollege te Uithoorn. Hij is medeoprichter van de Facebookgroep 'Actief leren zonder cijfers' (inmiddels méér dan 10 000 leden) en heeft zijn eigen blog: https://jvremoortere.wordpress.com/. Daarnaast is hij lid van het bestuur van de NVvW.

Liesbeth Coffeng

Interview met Marianne van Dijke

Hoe onderzoek en lespraktijk elkaar versterken

Lesgeven en promoveren. Valt dat te combineren? Marianne van Dijke bewijst van wel. In juni promoveert ze op een onderzoek naar het werken met steekproefsimulaties in vwo 3. Een gesprek met een bevlogen onderzoekster over het onderzoekstraject, de hobbels daarin en de geluksmomenten.

Leerlingen krijgen uitleg van Marianne over de steekproefsimulatiesoftware TinkerPlots

Hoe kwam je op het idee om onderzoek naar onderwijs in statistiek te doen?

'Statistiek was op het moment dat ik begon in 2016 nog opkomend. Het examenprogramma was herzien: statistiek kreeg een grotere rol. Tegelijkertijd zag je dat statistiek in de maatschappij een steeds grotere rol kreeg, en met name het werken met steekproeven. Wiskunde A werd vernieuwd met meer statistiek richting datasets.
De leerlingen met wiskunde B zouden echter alleen in de onderbouw statistiek krijgen. Hier komt het werken met steekproeven nauwelijks voor. Vandaar het idee om al in vwo 3 te starten met steekproevensimulaties zodat alle leerlingen hiervan kunnen profiteren.
In de bovenbouw en in vervolgopleidingen moeten leerlingen steeds meer onderzoek doen. In veel gevallen wordt dan gewerkt met steekproeven. Vaak vinden ze het lastig om te weten wat een steekproef is, wat een populatie en wat *p*-waarden betekenen. Het rekenen met formules wordt een soort kunstje, maar wat betekenen al die gevonden waarden? Dan komen we uit bij informeel statistisch redeneren: wat gebeurt er nou eigenlijk als je een steekproef neemt? Met simulatiesoftware, zoals TinkerPlots, kun je heel goed steekproeven nabootsen. Internationaal was men daar al mee bezig. Ik wilde dat ook in Nederland gaan gebruiken.'

> "Het mooie van onderzoek is dat je tijd hebt om het leren van de leerlingen heel precisies te analyseren."

Dan heb je een idee, maar hoe pak je het vervolgens aan?

'Ik had het jaar daarvoor al met Jos Tolboom (SLO) en Paul Drijvers (UU) een eenjarig onderzoek gedaan over het omgaan met data. Vanuit dat onderzoek kwam het idee dat je vaak bij steekproeven belandt als je leerlingen onderzoek laat doen. Ik wilde daar dus graag mee door en heb een voorstel ingediend voor een subsidie via het Dudok β-traject voor docenten die willen promoveren. Februari 2016 heb ik een voorstel ingediend met Arthur Bakker en Paul Drijvers als begeleiders. In mei 2016 werd het voorstel goedgekeurd en kreeg ik 0,6 fte voor het doen van onderzoek. Ik stond dus twee dagen voor de klas en had drie dagen voor het onderzoek. In de aanloop naar de aanvraag had ik intensief contact met mijn school. Viereneenhalf jaar een aantal minder dagen werken is behoorlijk ingrijpend.'

Je was drie dagen in Utrecht en stond twee dagen voor de klas. Hoe ging dat?
'Dat was best ingewikkeld, want wiskunde is een vak dat leerlingen drie à vier uur per week hebben. Dat betekent dat je twee keer een blokuur hebt, als je die uren op twee dagen zou plannen. Dat is niet handig. Mijn lesuren werden daarom verdeeld over drie dagen. Dat had als voordeel meer continuïteit op school, maar uiteraard als nadeel dat je meer op school bent en dat er vaker wat aan je gevraagd wordt. Die beoogde combinatie 0,6 - 0,4 is niet altijd met een schaartje te knippen. Daar komt bij dat onderzoek doen altijd meer tijd vergt dan ervoor staat. Er zit een stukje overlap in, omdat je materiaal ontwikkelt dat je in je lessen gaat testen. Maar je moet wel goed je tijd afbakenen en af en toe nee zeggen. Het is het fijnste als je dit kunt doen in goed overleg met je directie, zoals in mijn geval.'

Wat is je belangrijkste aanbeveling voor het statistiek-onderwijs in het voortgezet onderwijs?
'Ik zou in de onderbouw beginnen met het werken met steekproeven op een informele manier. Dat kan heel simpel met de blackbox-activiteit. Je hebt een fysiek doosje met twee kleuren balletjes erin met een kijkvenster. Leerlingen tellen het aantal zichtbare balletjes in beide kleuren en doen op basis daarvan een uitspraak over de populatie, in dit geval de inhoud van de blackbox. Om meer zekerheid te hebben, gaan ze vanzelf dit telproces herhalen. Ze voeren als het ware herhaalde steekproeven uit. Dit is heel laagdrempelig en je hebt meteen het idee: een steekproef is niet 100% zeker, maar je weet wel in een bepaalde richting hoe iets eruitziet. En vervolgens is de overstap naar simuleren heel eenvoudig. Die balletjes kunnen alles zijn: alle leerlingen die vanochtend ontbeten hebben, of de voorkeur voor een bepaalde sportactiviteit. De balletjes kun je in een staafgrafiek zetten en je ziet dat die een bepaalde verdeling krijgen. Vanuit de verschillende steekproeven kun je dan met een bepaalde waarschijnlijkheid uitspraken doen over de populatie.'

Wat was je onderzoeksopzet?
'Het doel van het onderzoek was het promoten van het werken met steekproeven, zodat leerlingen meer inzicht krijgen in statistisch onderzoek. Het was een ontwerp-onderzoek, wat betekent dat er meerdere cycli van (her)-ontwerp en uittesten in de lespraktijk werden uitgevoerd. Op basis van literatuur werd een eerste ontwerp gemaakt. Dat is uitgeprobeerd in één klas. Dat heb ik in mijn eigen klas gedaan in het eerste jaar. Het ontwerp is geëvalueerd en aangepast. Het herontwerp is in het jaar daarna uitgevoerd door drie docenten op twee verschillende scholen.

Blackbox met kijkvenster

Ook dat herontwerp is weer aangepast en uiteindelijk getest met 267 leerlingen. Aan het eind van de rit hebben we onderzocht wat leerlingen hebben geleerd. We hebben een toets statistische geletterdheid voor vwo 3 ontwikkeld en die laten maken door leerlingen die meededen aan het onderzoek en door 217 andere leerlingen die het reguliere programma volgden. Deze toets bestond uit een pretest en een posttest. Uit de resultaten bleek dat interventieleerlingen op alle gebieden van statistische geletterdheid meer vooruit waren gegaan, vooral op het gebied van steekproeven. Maar ze gingen dus ook vooruit op andere gebieden van statistiek die niet expliciet aan de orde waren gekomen. Vandaar mijn boodschap: je kunt een deel van de stof in de onderbouw vervangen door die inferentiële statistiek zonder dat dit ten koste gaat van de andere bestaande domeinen, want die gaan vanzelf mee.'

Wat voor reacties kreeg je van leerlingen?
'Leerlingen vinden het ontzettend leuk om te doen. Vaak omdat het anders gaat dan ze gewend zijn. Het begint met het schatten van de inhoud van de 'blackbox' met het kijkvenster. Ze zijn ontzettend nieuwsgierig en het is ook een spel: wie zit er het dichtste bij? Werken met de computer konden ze redelijk snel. De vernieuwende lesopzet was voor veel leerlingen een interessante uitdaging. Voor anderen was het ontbreken van de vertrouwde lesstructuur juist lastig. Daar komt bij dat je vooral in de beginronde als onderzoeker ook zoekende bent naar de beste aanpak en nog niet alles weet. Dat zijn leerlingen niet gewend en jijzelf als docent ook niet.' >

Computational thinking in de wiskundeles

Bereid leerlingen voor op de toekomst

Wilt u computational thinking opnemen in de wiskundeles?

Met de handhelds en software van Texas Instruments gebruikt u programmeren in Python eenvoudig in de klas! Volg diverse gratis webinars waar u Python leert benutten en tips krijgt voor praktische toepassingen in de les.

Webinars leraren

De webinars van het T^3 lerarennetwerk draaien om computationeel denken, logisch redeneren, algoritmisch structureren en programmeren in de klas. U kijkt de opgenomen webinars terug wanneer het u uitkomt!

» **resources.t3nederland.nl/webinars**

Python op de handheld

Leerlingen programmeren zelf in Python met de TI-Nspire™ CX II-T handhelds, de TI-Nspire™ CX software en TI-84 Plus CE-T Python Edition. Met de Python BootCamp leert u hoe u programmeren met TI-technologie toepast in de klas:

» **www.wil-depython.nl**

python™

education.ti.com/nl

Texas Instruments

©2021 Texas Instruments

Heb je het onderzoek gaandeweg ook bijgestuurd?
'Ja, in het begintraject werkte ik alleen met categoriale data. Denk aan de gekleurde balletjes in de blackbox en in TinkerPlots. In de tweede sessie heb ik dit uitgebreid naar numerieke data. De blackbox bestond toen uit een glazen schaal met 4000 briefjes. Op elk briefje stond de lichaamslengte en het geslacht van een leerling uit een populatie van 4000 scholieren. Uit die schaal namen de leerlingen een steekproef. De connectie van deze activiteit met TinkerPlots software is heel sterk, want dat werkt ook met kaartjes waar de data op staan. Vanuit de steekproeven die fysiek genomen waren, konden ze uitspraken doen over de populatie. Daarna gingen we ook in TinkerPlots over naar populatiemodellen met numerieke data. Een andere aanpassing was dat ik in eerste instantie alle stof in een lessenserie van tien lessen had verwerkt. Dat bleek te veel achter elkaar te zijn. Als leerlingen ergens het pad kwijt waren geraakt, hadden ze moeite er weer bij te komen. Toen heb ik besloten om de leerstof in twee blokken van zes lessen te verwerken. De eerste zes lessen alleen maar met categoriale data, de tweede sessie met numerieke data. Aan het begin van het tweede blok herhaalden we de stof uit het eerste blok en konden leerlingen die achter waren geraakt weer aanhaken. We merkten dat de stof zo beter landde bij de leerlingen.'

Wat was je grootste tegenslag en hoe heb je die overwonnen?
'Oei, dat is een moeilijke. Ik denk de eerste keer dat ik een ingediend wetenschappelijk artikel terugkreeg van de reviewers. Dan moet je nog best veel veranderen. Je hebt er al tweeënhalf jaar aan gewerkt en dan willen de reviewers het net anders. Ik was daar wel op voorbereid, want je weet dat je bij een eerste artikel niet gek moet staan te kijken dat het geaccepteerd wordt met "major revisions", zoals ze dat noemen.' Lacht: 'Eigenlijk moet je dan al blij zijn, want dan is het geaccepteerd.
Praktisch: bij de laatste sessie hadden we heel veel docenten nodig. Hoe zorg je dat je die bij elkaar krijgt? Het is uiteindelijk goed gelukt. De deelnemende docenten ben ik ontzettend dankbaar voor hun inzet en betrokkenheid. Als je een oproep plaatst, staan docenten niet meteen in de rij om mee te doen, want ze hebben het druk. Toen heb ik een aantal workshops gegeven en dat werkte beter om docenten enthousiast te maken. Ook heeft in die periode in *Euclides* nog een artikel gestaan.'

Wat heeft het onderzoek voor jou als docent opgeleverd?
'Natuurlijk veel kennis over statistiek en over hoe leerlingen leren. Als je lesopnames gaat analyseren, dan zie je dat leerlingen soms andere denkbeelden krijgen dan je verwacht. Het mooie van onderzoek is dat je de tijd hebt om dat heel precies te analyseren. Als je ziet waar termen door elkaar gaan lopen bijvoorbeeld, dan weet je waar je moet ingrijpen. Soms zijn kleine stappen voor leerlingen veel groter dan je als docent in de gaten hebt. Het verandert je hele kijk op hoe leerlingen leren en waar de valkuilen zijn.
Je gaat ook anders kijken naar de inrichting van ons onderwijs. Door internationale samenwerking kun je ideeën krijgen over aanpassingen in je eigen onderwijs. En dan bedenk je dat dat stukje statistiek met steekproeven best in vwo 3 behandeld kan worden.'

Wat adviseer je collega-docenten die onderzoek willen gaan doen?
'Het is een intensief traject van vier jaar lang. Je moet dus goed weten dat je het wilt doen en iets kiezen wat je echt heel interessant vindt. Hoe dichter je onderzoek bij je werk op school ligt, des te beter het is. Dan versterkt het elkaar en kweek je meer begrip bij je collega's op school. Beslis goed voor jezelf welke tijd je reserveert voor je onderzoek en voor onderwijs. Je kunt niet alles blijven doen.'

Na je promotie ben je weer volledig docent?
Lacht: 'Nee, onderzoek doen vind ik zo leuk. Er zijn al ideeën voor een vervolgonderzoek naar het stimuleren van hogere denkactiviteiten met digitale middelen. Maar ik zou ook niet alleen willen onderzoeken, want het contact met de leerlingen is inspirerend en afwisselend. Daarnaast de tijd hebben om leerprocessen te onderzoeken en verbeteren vind ik ontzettend boeiend.'

Meer informatie

Een instructievideo over TinkerPlots:
https://www.youtube.com/watch?v=doc5NJk0OME
De samenvatting van het proefschrift van Marianne vind je op:

vakbladeuclides.nl/967interviewdijke

Over de auteur en geïnterviewde

Marianne van Dijke-Droogers is wiskundedocente bij Csg Prins Maurits te Middelharnis en promoveert aan de Universiteit Utrecht op 30 juni 2021.
E-mailadres: *m.j.s.vandijke-droogers@uu.nl*
Website: *https://www.uu.nl/staff/MJSvanDijkeDroogers*
Liesbeth Coffeng is eindredacteur van *Euclides*.

Hugo Duivesteijn

Interview met Jan Beuving

'Blijf wiskunde geven, want het is de kortste weg naar perfectie'

Wiskundige en cabaretier Jan Beuving schreef een jaar lang columns voor *Euclides*. Studiegenoot en wiskundedocent Hugo Duivesteijn interviewde hem over zijn middelbare schooltijd, de keuze voor een wiskundestudie en een wiskundige kijk op de wereld. En hoe wiskundig is het schrijven van een liedtekst?

Schooltoneel

Op Wikipedia lees ik: 'Na zijn middelbare school studeerde Beuving wiskunde en wetenschapsgeschiedenis aan de Universiteit Utrecht, waarbij hij over laatstgenoemde studie enkele jaren langer deed dan gebruikelijk.' Als vakblad voor de wiskundeleraar zijn wij natuurlijk nieuwsgierig hoe je schooltijd is geweest. Wie was Jan gedurende zijn schooltijd?

'Ik had geen gemakkelijke schooltijd. Het kwam pas goed in vwo 4, toen ik bij het schooltoneel terechtkwam, bij toneelvereniging Persona, gerund door scheikundeleraar, meneer Van der Puijl. Het eerste jaar deed ik de techniek en daarna heb ik twee jaar meegespeeld. Toen hoorde ik ergens bij. Dat is wel een thema in mijn leven, dat ik met iedereen kan lullen, maar dat ik eigenlijk nergens echt helemaal bij hoor. Hoewel, bij mijn voetbalclub, daar hoor ik wel helemaal bij.

Ik had inhoudelijk weinig zorgen, ik kon de vakken wel aardig rooien. Ik had de eerste twee jaar wiskundeles van meneer Berghuis. Hij was ook onze mentor, een hele lieve en zachte man die nog steeds bij de voorstellingen komt kijken. Daarna één of twee jaar meneer Rigtering. Wat warrige maar vrolijke man. Dan zei je: "Meneer Rigtering wat loopt u hard." "Ja ik had nog snelheid van de trap," antwoordde hij dan.

De laatste twee jaar had ik les van meneer Konijnenberg. Die heeft iets heel belangrijks voor mij gedaan, want hij zei: "Jij moet wiskunde studeren." Hij was ook de decaan. Ik gaf aan dat ik alleen puzzeltjes wilde oplossen. Toen zei hij dat er niets anders op zat. Dat was het beste advies in mijn leven.'

Magisch niveau

'Wat ik nu doe, het theatervak, heeft zijn bedding in de middelbare school. Maar het feit dat het vaak ook over wiskunde gaat, dat ik als een wiskundige naar de wereld kijk, heb ik wel aan de wiskundestudie te danken. Indirect heb ik ook mijn liefde voor het zingen aan de studie te danken, omdat ik in mijn studietijd in koren heb gezongen, en daar heb ik ook mijn vrouw leren kennen. Ik ben dus heel dankbaar voor dat studieadvies. Maar laten we zeggen: als het advies was geweest 'je moet sociale geografie gaan studeren', had ik hier misschien ook wel gezeten, maar dan met iemand anders. Je kunt toeval ook belangrijker maken dan het misschien is.

Ik was heel dol op Latijn en Frans, wiskunde vond ik oké. Ik ben vrij goed in het zien van analogieën, zonder dat ik er iets van begrijp. Jan Hogendijk, hoogleraar aan de Universiteit Utrecht, noemde dat altijd 'het magische niveau'. Ik heb heel erg veel op magisch niveau gedaan in mijn leven. Van statistiek heb ik bijvoorbeeld ook nooit iets begrepen. Ik word weleens gebeld door collega's om mee te helpen voor een statistiekding dat ze willen schrijven voor een scène of conference. Dan stuur ik ze door naar Ionica Smeets, want, sorry, daar weet ik niks vanaf. Vakinhoudelijk ben ik echt dramatisch eigenlijk...'

'Noblesse oblige'

Eigenlijk zeg je: 'Wiskunde was niet zo belangrijk, maar die man was wel belangrijk.' Je luisterde wel klakkeloos naar je wiskundeleraar.

'Zeker, meneer Konijnenberg was belangrijk, maar als je het goed gaat ontleden zijn heel veel docenten belangrijk.

Ik mocht vorig najaar optreden bij het 115-jarig bestaan van mijn oude middelbare school. Toen heb ik een column voorgelezen over de natuurkundeleraar die de technische dienst runde. Die man is inmiddels overleden, en ik ben nog aan zijn sterfbed geweest, een week voordat hij stierf. Die bijdrage sloot af met de constatering dat het uiteindelijk maar om één ding gaat en dat is dat een leerling gezien wordt op een zeker moment.
De eerste drie jaren heb ik, denk ik, wel een beetje verloren rondgelopen met mijn brooddoos, maar uiteindelijk ben ik gezien. Gezien door de docent Latijn, de wiskundedocent, de natuurkundedocent en de groep mensen van de toneelvereniging. Uiteindelijk was ik ergens ingebed.
Er zijn ook basisschooldocenten van wie je veel leert. Ik had in groep acht een werkstuk gemaakt over de Olympische Spelen en ik kreeg een 8. We hadden beoordelingscriteria daarvoor: er werd gekeken naar opbouw, inhoud, schrijfstijl en verzorging. Op alle vier de punten had ik een half punt aftrek gekregen. Helemaal onderaan was een vak voor opmerkingen: "Dit is natuurlijk een prima werkstuk", schreef de meester, "en je krijgt ook niet voor niks een 8. Maar als ik dit lees, denk ik toch, volgens mij kan die jongen veel beter dan dit. Noblesse oblige Jan."
Ik was elf, dus ik ging naar meester Kaasschieter toe en vroeg: "Noblesse oblige, wat betekent dat?" Hij had het opgeschreven omdat hij wist dat ik het zou komen vragen. "Het betekent 'adeldom verplicht'. Laat zien wat je in je mars hebt." Dat is iets waar ik ook nog vaak aan denk. Je moet je talenten niet begraven.'

Wiskunde en liedteksten

Wiskunde is een wetenschap die geheel gebouwd is op regels en afspraken. Een exacte wetenschap. Is er een verband tussen wiskunde en cabaret, met andere woorden, hoe rijm jij die twee aan elkaar?

'Voor een bewijs moet je van *A* naar *B*. Om dat pad te bewandelen moet je je houden aan de regels. Datzelfde geldt voor een liedtekst. Je vertelt een verhaal of een grap. Die zit altijd in een tekst of een opsomming. Je hebt regels van rijm en ritme. In die zin lijken de twee op elkaar, binnen de beperkingen op zoek naar een pad. Het schrijven van een liedtekst is heel wiskundig. De kunst is dat je in het lied niet hoort dat het wiskundig is. Veel wiskundigen houden van Drs P, want je hoort de structuur. Maar: het verhaal van een boer die zijn kleinkind redt, moet je niet heel strak opschrijven, want anders wordt het verhaal ook strak. In het slechtste geval hoor je dat ik heb lopen wringen om het in de mal te krijgen. Voor een wiskundig bewijs geldt dat ook. Soms heb je een bewijs dat heel elegant uit je pen rolt, soms is een bewijs heel lelijk. Euclides met de draaiende driehoek is een prachtig bewijs door zijn historie. Dat geldt ook voor liedteksten; het is het allermooist als die een bepaalde mate van elegantie hebben. Dat kan ook in de strakheid/degelijkheid zitten.

Als je een wiskundig bewijs ziet als een tocht door een dichtbegroeid woud van open plek A naar open plek B, zijn er volgens mij drie types wiskundigen te onderscheiden:

- Type 1 begint gewoon te kappen. Uiteindelijk komt hij of zij op de andere open plek, niet zelden zigzaggend.
- Type 2 denkt eerst heel lang na en bespreekt waar de open plek is, en hakt dan in één rechte lijn naar B.
- Type 3 (dat ben ik) kan het alleen als hij achter iemand aanloopt. Je snapt het stap voor stap, maar je kunt dat niet zelf bepalen.

Bij een liedtekst kan ik dat wel. Die bouw ik vaak echt op als een wiskundig bewijs en dan weet ik waar ik heen wil. Maar soms begin ik ook gewoon.'

Inspiratie oproepen

'Net als wiskunde is liedteksten schrijven een kwestie van heel veel doen. Ik heb daarbij geleerd om de inspiratie op te roepen na een les van Jurrian van Dongen. Dat kan ook om 9 uur 's ochtends. Bijvoorbeeld bij een lied over paalzitten, dan ga ik achter mijn bureau zitten, lees ik artikelen over paalzitten en dan ben ik begonnen.
Als een wiskundestudie ergens voor helpt is het het vermogen om te leren structureren. Maar verder leer je het meest door veel te doen. Datzelfde zal ook gelden voor docenten. Je wordt een steeds betere docent door het vaker te doen, je hebt meer gereedschap.'

Schoonheid en verhalen

Als tekstschrijver en cabaretier probeer je het publiek net als een docent iets mee te geven. Wat zou je de wiskundedocenten mee willen geven?

'Tip: Vertel het menselijke verhaal achter de formule. Dat klinkt wat vaag, maar als je een goede anekdote over bijvoorbeeld Pythagoras hebt, zoals dat die stelling helemaal niet door hem bedacht is, vertel dan het verhaal bij de abstractie van de wiskunde. Dat kan een krantenverhaal zijn, of een verhaal uit de geschiedenis. Het verhaal achter de cijfers, daarin kunnen nog veel meer mensen zich aangesproken voelen. Ik ben redelijk goed in Frans geworden want ik heb heel veel *l'Equipe* gelezen. Ik wist heel veel van sport, dus ik kon raden wat woorden betekenden. Zo heb ik Frans geleerd.
Als iemand heel veel van voetbal houdt kun je vragen naar >

de wedstrijd van gisteren. Stel dat het 3-2 is geworden: op hoeveel manieren kun je die uitslag bereiken? Dus: zoek de leerling in dat vak.
Een tip is een advies, dat vind ik een beetje lastig, want het is advies van een cabaretier aan docenten. Mijn tip is misschien ook een top. Want veel docenten doen dit misschien al.

Top: Blijf wiskunde geven. Wiskunde is het enige perfecte dat we hebben in ons leven. Uiteindelijk gaan mensen voor de schoonheid van die perfectie vallen. Ook als een leerling vloekend en tierend, of append en tiktokkend, de les doorgaat en met moeite een vier haalt, dan ben ik ervan overtuigd dat er ergens een zaadje geplant is van schoonheid. Wiskunde heeft een niet al te best imago, en is dus over het algemeen niet het lievelingsvak.

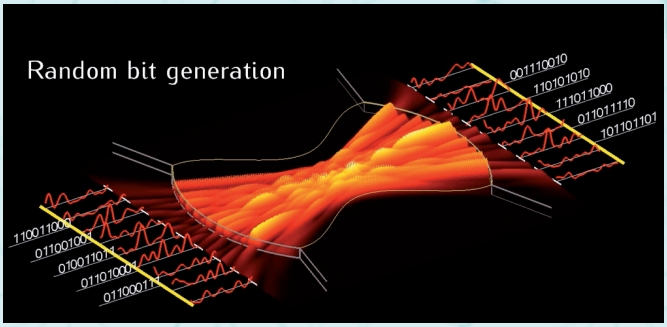
Maar stiekem is het onbewust meegeven van die schoonheid het mooiste vak van de school. Blijf wiskunde geven, want het is de kortste weg naar perfectie.'

Over de auteur en geïnterviewde

Jan Beuving is wiskundige, cabaretier en tekstschrijver. Vanaf september 2021 is Jan terug in het theater met het programma *Restante*. Meer informatie: *http://janbeuving.nl/*
Hugo Duivesteijn is docent wiskunde op Werkplaats Kindergemeenschap VO in Bilthoven. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *hugoduivesteijn@gmail.com*

Wis en Waarachtig

Nog sneller willekeuriger getallen maken



Een nieuw lasersysteem produceert willekeurige getallen veel sneller dan de huidige technieken en maakt ze bovendien nóg willekeuriger. Willekeurige getallen komen in de digitale wereld op allerlei plekken van pas. Computers gebruiken ze met name om informatie te versleutelen, zodat berichten niet onderschept kunnen worden. Dat is bijvoorbeeld bij onlinebetalingen van groot belang. Momenteel worden de benodigde willekeurige getallen vooral gegenereerd door de computers zelf. Die getallen zijn strikt genomen niet echt willekeurig. Ze worden gevormd op basis van een ingewikkeld algoritme. Als een hacker erin slaagt zo'n algoritme te ontrafelen, kan die voorspellen wat de volgende 'willekeurige' getallen zullen worden. het lasersysteem opwekt, zijn wel volstrekt onvoorspelbaar – en daarmee de getallenreeksen ook. Zelfs als je dezelfde laser bezit, kun je de patronen niet namaken. Het systeem is daarmee veiliger dan computeralgoritmes. Hoe kun je eigenlijk met willekeurige getallen informatie versleutelen? Een versimpeld voorbeeld:
stel dat je het bericht 'hoera' verstuurt. Dat kan een computer versleutelen door elke letter een willekeurig aantal plekken in het alfabet te laten opschuiven. Hij laat bijvoorbeeld de *h* en de *o* zes plekken opschuiven, en de andere drie letters elk acht plekken. De sleutel is dan 66888 en het bericht wordt 'numzi'. Alleen iemand die de sleutel kent, kan dit bericht ontcijferen. Omdat de sleutel gebaseerd is op een willekeurig getal, is die voor een hacker onmogelijk te raden. En het heeft geen zin om alle mogelijke sleutels te proberen – dat zijn er veel te veel.
Naar: *www.newscientist.nl*

Allie (15 jaar) verovert brons bij EGMO

Het Nederlandse team in de duinen bij Egmond aan Zee. V.l.n.r.: Maud, Allie, Samantha en Naomi

Allie Zong uit Veldhoven heeft in april bij de tiende European Girls' Mathematical Olympiad een bronzen medaille veroverd. Aan deze wedstrijd voor middelbare scholieres deden 213 meisjes uit 37 Europese en 18 niet-Europese gastlanden mee. De vijftienjarige Allie, die zelf pas in de derde klas zit, zette een knappe prestatie neer door 149 van deze meisjes achter zich te laten.
Net als vorig jaar vond het evenement niet plaats in het organiserende land, Georgië, maar als wedstrijd-op-afstand. De Nederlandse deelneemsters namen deel vanuit Egmond aan Zee. Zij behaalden de volgende resultaten:

13 punten – BRONS:	Allie Zong (15 jaar, Veldhoven, 3e klas, Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven)
3 punten:	Samantha Li (18 jaar, Nuenen, 6 vwo, Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven)
3 punten:	Naomi Zwaneveld (18 jaar, Den Haag, 6 vwo, Montaigne Lyceum Den Haag)
2 punten:	Maud van Bokhoven (18 jaar Bemmel, 6 vwo, Stedelijk Gymnasium Nijmegen)

Medaillewinnares Allie, die al twee jaar deelneemt aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, stond vrij nuchter in de wedstrijd: 'Ik ben niet per se voor een medaille gegaan, maar dacht: "Ik doe gewoon mijn best en dan zien we wel wat er gebeurt." Gelukkig waren de opgaven heel leuk en zat ik vol met ideeën. Na viereneenhalf uur was ik natuurlijk nog lang niet klaar. Ik ben heel blij en verrast met de medaille! En het was erg gezellig om als Nederlands team bij elkaar te zijn; in veel andere landen werd vanuit huis meegedaan.'
In totaal ontvingen 52 van de 213 deelneemsters een bronzen medaille, 30 een zilveren medaille en 27 een gouden medaille. In het officieuze landenklassement haalde Nederland een 35e plaats van de 55 deelnemende teams.
Bron: *https://www.wiskundeolympiade.nl/*

Directeur PWN in Songfestival Podcast

In de tweede aflevering van de *Officiële Songfestival Podcast* komt een item voor over de puntentelling bij het Songfestival. Het blijkt zo te zijn dat al tijdens de uitzending berekend kan worden wie de winnaar gaat worden. Wil Schilders, directeur van PWN (Platform Wiskunde Nederland) , wordt hierover geïnterviewd. U kunt de aflevering van de Podcast beluisteren op *https://www.nporadio2.nl/podcasts/de-officiele-songfestival-podcast*.
Bron: *platformwiskunde.nl*

Abelprijs

László Lovász, *Avi Wigderson*

De Abelprijs is dit jaar gewonnen door de Hongaar László Lovász (Loránd Eötvös Universiteit, Boedapest) en de Israëliër Avi Wigderson (Institute for Advanced Study, Princeton). Het is de eerste keer dat deze 'Nobelprijs voor de wiskunde' wordt toegekend aan onderzoek in de theoretische informatica, het vakgebied dat zich bezighoudt met de mogelijkheden van computers én met hun beperkingen. Lovász werd onder meer bekend dankzij het zogeheten LLL-algoritme, genaamd naar Lovász en de Nederlandse broers Hendrik en Arjen Lenstra. Een andere Nederlander die met Lovász samenwerkte is Lex Schrijver, die met Lovász in veertig jaar 27 artikelen publiceerde. Schrijver noemt de toepassing van methoden uit de klassieke wiskunde, zoals meetkunde en algebra, op problemen uit moderne gebieden zoals algoritmiek 'een van Lovász' grootste verdiensten'. 'Zijn diepe inzicht in de combinatorische en algoritmische potentie van algebra en meetkunde is uniek. Veel van zijn resultaten zijn baanbrekend en zouden zonder hem waarschijnlijk nog steeds niet gevonden zijn,' aldus Schrijver. Lovász werkte niet veel samen met Wigderson, met wie hij het prijzengeld van 7,5 miljoen Noorse kronen (ongeveer 750.000 euro) deelt, maar allebei zijn ze wegbereider in de theoretische informatica. Lovász is meer de wiskundige van de twee, Wigderson de informaticus. Wigderson leverde belangrijke bijdragen aan onder meer de zogeheten 'zero knowledge-bewijzen': technieken om te bewijzen dat je kennis hebt van bepaalde geheime informatie, zónder die informatie openbaar te maken. Ze zijn inmiddels onmisbaar in de bankenwereld.
Bron: *NRC Handelsblad,* 19 maart 2021

Sietske Tacoma

Het FIzier gericht op...

Hypothesetoetsen met automatische feedback

Het toetsen van statistische hypotheses is een belangrijke vaardigheid voor iedereen die (wetenschappelijke) uitspraken wil onderbouwen. Net als leerlingen in het voortgezet onderwijs vinden studenten het redeneren met de bijbehorende variabelen, kansen, verdelingen en hypotheses vaak moeilijk. Sietske Tacoma bespreekt een hulpmiddel: online oefenopgaven met geautomatiseerde intelligente feedback. Wellicht is dat ook bruikbaar in het vwo?

De logica van hypothesetoetsen

In de wetenschap worden vaak hypotheses getoetst. Stel bijvoorbeeld dat een aantal docenten leerlingen uit één klas elke week digitale huiswerkopgaven geeft en een andere klas vergelijkbare huiswerkopgaven op papier. Na een half jaar vergelijkt een onderzoeker de toetsresultaten van beide groepen leerlingen. De vraag is dan of het digitale huiswerk een verschil maakt voor de toetsresultaten. Deze vraag wordt vertaald naar een *alternatieve hypothese:*

$$H_1\text{: } \mu_{\text{digitaal}} \neq \mu_{\text{papier}}$$

Hierin is μ_{digitaal} het gemiddelde cijfer dat leerlingen halen met digitaal huiswerk, en μ_{papier} het gemiddelde cijfer dat leerlingen halen met huiswerk op papier. De alternatieve hypothese is dus de bewering dat deze gemiddelde cijfers niet gelijk zijn. De hypothese die precies het tegenovergestelde beweert noemen we de *nulhypothese:*

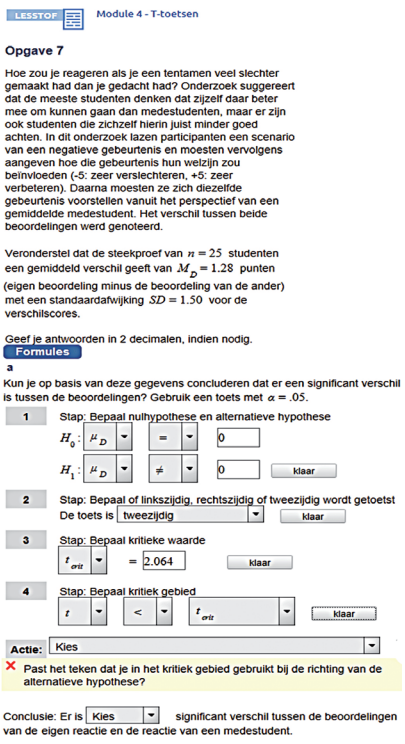
$$H_0\text{: } \mu_{\text{digitaal}} = \mu_{\text{papier}}$$

Met een hypothesetoets kunnen we nu de kans berekenen op een verschil in gemiddeldes dat minimaal zo groot is als we in onze steekproeven hebben gevonden, onder de aanname dat de nulhypothese waar is. Door deze kans te vergelijken met een vooraf gekozen significantieniveau, bepalen we of dit experiment erop duidt dat digitaal huiswerk tot andere toetscijfers leidt dan papieren huiswerk.

Veel studenten vinden dit redeneren met kansen en aannames lastig. In mijn promotieonderzoek hebben we daarom onderzocht of we leerlingen digitaal konden ondersteunen in dit leerproces. We hebben hiervoor in de digitale leeromgeving Numworx [1] een opgavetype ontwikkeld waarin studenten zelf hypothesetoetsen uitvoeren en feedback krijgen op dit proces. Vervolgens hebben we bekeken of studenten profijt hadden van deze opgaven en de feedback die ze hierin kregen.

Hypothesetoetsen in een online leeromgeving

Om in een online leeromgeving een hypothesetoets te kunnen uitvoeren, moet een student alle stappen in het toetsproces kunnen doen. Naast het opstellen van hypotheses moet de student onder andere het significantieniveau kunnen vastleggen, aan kunnen geven of de toets een- of tweezijdig is, een kritiek gebied kunnen bepalen, de waarde van een toetsingsgrootheid kunnen berekenen en de *p*-waarde kunnen bepalen. Het is belangrijk dat de student zelf de volgorde van de stappen kan kiezen, om de logica van hypothesetoetsen te leren doorgronden. We hebben daarom in Numworx stapsgewijze opgaven ontwikkeld, waarin studenten steeds een volgende stap uit een verzameling stappen kunnen kiezen. Afhankelijk van de gekozen stap verschijnt de inhoud van de stap op het scherm en kan de student de stap verder aanvullen, zoals te zien is in figuur 1. Zie ook de video die we hierover hebben gemaakt.[2]

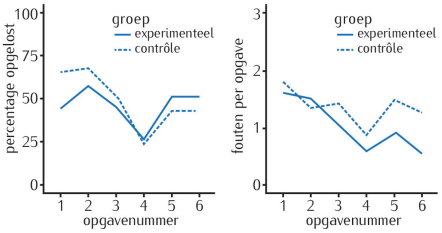


figuur 1 Een stapsgewijze hypothesetoetsopgave in Numworx. Bij 'Actie' kiest de student steeds een nieuwe stap, die vervolgens op het scherm verschijnt en verder aangevuld kan worden.

Zulke stapsgewijze opgaven zijn extra kansrijk als de student tijdens het oplossen van de opgave, na elke stap, feedback krijgt.[3] Om dit in Numworx mogelijk te maken hebben we samen met collega's Bastiaan Heeren en Johan Jeuring van het departement Informatica van de Universiteit Utrecht een zogenaamde *domain reasoner* ontwikkeld. Na elke stap beoordeelt de domain reasoner of de oplossing tot nu toe correct en consistent is. Als de oplossing niet correct is, geeft de domain reasoner aan wat er mis is. Dat kan een missende stap zijn, bijvoorbeeld wanneer een student een kritiek gebied bepaalt zonder eerst te specificeren wat de hypotheses zijn. Het kan ook een incorrecte stap zijn, bijvoorbeeld als een student aangeeft de nulhypothese te verwerpen, terwijl de *p*-waarde groter is dan het significantieniveau. Bij elke mogelijke fout hebben we feedback geformuleerd die de student moet helpen zijn of haar fout te ontdekken en verbeteren.

Onderzoeksresultaten

We hebben met ruim 800 studenten in het eerste jaar van een opleiding binnen de sociale wetenschappen, zoals psychologie, twee experimenten uitgevoerd met de stapsgewijze hypothesetoetsopgaven en de feedback van de domain reasoner. In beide experimenten kregen studenten in de experimentele groep feedback van de domain reasoner, terwijl studenten in de controlegroep alleen te zien kregen of hun stappen goed of fout waren. Studenten in beide groepen werkten met de stapsgewijze opgaven, dus met de experimenten bekeken we alleen het effect van de feedback die de domain reasoner gaf op de prestaties van de studenten. In de experimenten zagen we dat studenten het in het begin moeilijk vonden om te werken met de opgaven en de bijbehorende feedback: ze wisten (nog) niet goed welke stappen ze moesten doen en kregen dan ook vaak feedback dat hun oplossing fouten bevatte. In het eerste experiment zagen we in latere opgaven dat studenten die feedback kregen van de domain reasoner minder fouten gingen maken en er beter in slaagden de opgaven op te lossen dan studenten in de controlegroep, zie figuur 2. Voor een uitgebreide bespreking van de resultaten van beide experimenten, inclusief statistisch onderbouwde uitspraken, verwijs ik graag naar de artikelen die we hierover hebben geschreven.[4], [5] Op deze plek wil ik de resultaten als volgt samenvatten: studenten hadden tijd nodig om aan de feedback te wennen, maar leken er daarna wel profijt van te hebben en gaven aan er veel van te leren. Helaas hebben we in de tentamencijfers geen verschillen gezien, maar daarvoor hebben we de studenten misschien ook niet genoeg hypothesetoetsopgaven aangeboden.



figuur 2 Percentage studenten dat de opgave correct oploste (links) en gemiddeld aantal redeneerfouten per opgave (rechts) in de experimentele groep en controlegroep

Tot slot

Voor iedereen met een Numworx-account is het eenvoudig om nieuwe opgaven van dit type te maken, dankzij de koppeling met de domain reasoner: je hoeft alleen de beginsituatie (alternatieve hypothese en steekproefgegevens) in te voeren en de rest van het nakijken gaat automatisch. Naast studenten in het hoger onderwijs kunnen ook middelbare scholieren veel profijt hebben van het op deze manier oefenen met hypotheses toetsen. En ik denk dat er nog veel meer toepassingen zijn voor zulke stapsgewijze opgaven. Ik ben bijvoorbeeld heel benieuwd of het ook lukt om leerlingen hiermee meetkundige bewijzen te laten construeren. Het opgavetype is inmiddels beschikbaar in de auteursomgeving van Numworx. Maak jij een mooie stapsgewijze opgave voor jouw leerlingen in Numworx?

Noten

[1] *www.numworx.nl*

[2] *https://www.youtube.com/watch?v=toXFJhFJI5w*

[3] VanLehn, K. (2011). The relative effectiveness of human tutoring, intelligent tutoring systems, and other tutoring systems. *Educational Psychologist,* 46(4), 197-221. Doi: 10.1080/00461520.2011.611369

[4] Tacoma, S., Heeren, B., Jeuring, J., & Drijvers, P. (2020). Intelligent Feedback on Hypothesis Testing. In: *Artificial Intelligence in Education* 30, pp. 616 – 636.

[5] Tacoma, S. Drijvers, P., & Jeuring, J. (2020). Combined inner and outer loop feedback in an intelligent tutoring system for statistics in higher education. *Journal of Computer Assisted Learning 2020.* DOI: 10.1111/jcal.12491

Over de auteur

Sietske Tacoma heeft bij het Freudenthal Instituut promotieonderzoek gedaan naar geautomatiseerde feedback in universitair statistiekonderwijs en meegewerkt aan de ontwikkeling van Numworx. Haar promotoren zijn Paul Drijvers en Johan Jeuring. Thans werkt Sietske als docent statistiek en data science bij de Hogeschool Utrecht. Emailadres: *sietske.tacoma@hu.nl*

Peter Kop

Formules schetsen om symbol sense te bevorderen

Hoe kun je het inzicht van leerlingen in formules bevorderen? En kunnen ze daarmee ook beter algebraïsche problemen oplossen? Op deze vragen zocht Peter Kop een antwoord in zijn promotie. In twee artikelen laat hij zien hoe het schetsen van formules via herkennen en redeneren daarbij kan helpen.

Inleiding

Inzicht in formules, dat wil zeggen het doorzien van de structuur van formules en zijn componenten en het kunnen redeneren met en over de formules, is een aspect van symbol sense. Symbol sense is een breed concept dat te maken heeft met wanneer en hoe symbolen te gebruiken bij probleem oplossen.[1] Drijvers e.a. [2] zien symbol sense als complementair aan basisvaardigheden, als een soort kompas voor die basisvaardigheden. Bijvoorbeeld: het uitwerken van haakjes is een basisvaardigheid maar wanneer het verstandig is om haakjes uit te werken is een kwestie van symbol sense. Er is onvoldoende bekend hoe symbol sense systematisch is te onderwijzen. Veel leerlingen hebben een gebrekkig inzicht in algebraïsche formules en een gering vertrouwen in eigen algebraïsch denken en redeneren. Met als gevolg dat ze zich vaak focussen op basisvaardigheden en identieke opgaven.[3]
In dit onderzoek richten we ons op de vraag hoe inzicht in formules systematisch bevorderd kan worden bij leerlingen in bovenbouw vwo en of dat hun symbol sense bij het oplossen van algebraïsche problemen bevordert. Dit doen we via het schetsen van formules. Bij een formule moet een schets van de grafiek gemaakt worden met de hand, dus zonder technologie.
Sommige ouderen zullen dit associëren met het functie-onderzoek dat in de jaren '70 en '80 in het voortgezet onderwijs aanwezig was: leerlingen moesten bij deze opdracht altijd een vast stappenplan afwerken: domein, nulpunten, tekenoverzicht van functie, afgeleide, tekenoverzicht van afgeleide, extremen, asymptoten, waarna de grafiek getekend werd. Enkele voorbeelden van functies die in de centrale eindexamens met de opdracht 'onderzoek de functie en teken de grafiek' voorkwamen:
$f(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{2}{x+1}$ (1977-I);

$f(x)=\frac{4x-4}{(x+1)^2}$ (1981-II); $f(x)=\frac{x^3+2}{x}$ (1974-I);

$f(x)=2x\cdot e^{1-x}$ (1974-II); $f(x)=\frac{8x-8}{x^3}$ (1983-II).

Door de beschrijvingen hieronder zal duidelijk worden dat er hier, in tegenstelling tot destijds, geen sprake is van een algoritmische aanpak met zijn focus op algebraïsch rekenen. Ons onderwijs richt zich op het onderwijzen van het schetsen van formules met inzicht, waardoor leerlingen leren structuur te zien in formules en te redeneren met en over formules. In dit eerste artikel doen we verslag van het onderzoek en de resultaten,[4], [5] in het tweede deel geven we een onderbouwing hiervan.

Hoe schetsen experts formules?

In eerdere studies onderzochten we hoe experts formules schetsen.[6], [7] De experts waren wiskundige masters die in hun werk regelmatig formules schetsen zoals o.a. universitaire docenten calculus en examenmakers. Zij zullen bij dit schetsen toch zeker symbol sense gebruiken. Hun aanpak liet zich goed beschrijven door herkenning en heuristisch zoeken, als herkenning tekortschoot. De herkenning liet zich beschrijven door vijf herkenningsniveaus: complete herkenning, herkenning van functiefamilies (zoals exponentiële functies, polynoomfuncties, enzovoort), opsplitsen van functie in sub-functies, herkenning van enkele karakteristieke kenmerken van de grafiek, geen herkenning van de grafiek en een strategisch onderzoek doen naar de grafiek, geen herkenning en enkel punten berekenen. Naast deze herkenning gebruikten experts kwalitatief redeneren en nauwelijks berekeningen. Dit kwalitatief redeneren werd gebruikt bij bijvoorbeeld het optellen/vermenigvuldigen van grafieken van subfuncties en bij het bepalen van het

oneindig gedrag van functies. Bij kwalitatief redeneren is de focus op de globale vorm van de grafiek, globale beschrijvingen, en wordt genegeerd wat niet relevant is in de probleemsituatie.[8] Onze analyse van expertgedrag, de principes van 'hoe complexe vaardigheden te onderwijzen'[9] en de meta-heuristiek 'bevragen van de formule'[10]' [11] (Wat herken ik hier? Welke strategie zou ik kunnen gebruiken?) vormden de basis voor het GQR-ontwerp (Graphing formulas through recognition and qualitative reasoning): een lessenserie met vijf taken met hulp en reflectie. Deze serie van vijf lessen van 90 minuten werd aan een vwo5 wiskunde B-klas van 21 leerlingen gegeven. De lessen startten steeds met een korte klassikale bespreking van maximaal tien minuten waarin algemene feedback besproken werd en expertgedrag gedemonstreerd werd, zoals het kwalitatief redeneren en het 'bevragen van de formule'. Na deze bespreking gingen de leerlingen in tweetallen of drietallen aan het werk met de opdrachten. Aan het eind van de les leverde ieder groepje de uitwerkingen van de reflectievragen in voor feedback.

Vijf taken

In taak 1, een matchingopgave, moeten de leerlingen formules van basisfuncties als $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = 0{,}5^x$, $y = \ln(x)$, $y = |x|$ koppelen aan hun grafiek.
In taak 2, gebaseerd op het werk van Swan (2005)[12], komen transformaties van basisfuncties aan bod.
In de taak moeten leerlingen de overeenkomsten en verschillen tussen een tweetal functies zoals $y=2\sqrt{x}-4$, $y=2\sqrt{x-4}$ en $y = -3^x$, $y = 3^{-x}$.
In taak 3 moet een formule gesplitst worden in twee basisfuncties, bijvoorbeeld $y = \sqrt{x}(3x - 6)$ wordt gesplitst in sub-functies $y = \sqrt{x}$ en $y = 3x - 6$, die beide geschetst kunnen worden waarna de beide grafieken vermenigvuldigd kunnen worden via kwalitatief redeneren. In taak 4, gebaseerd op het werk van Burkhardt & Swan (2013) [13], worden twee equivalente formules en de grafiek gegeven met de vraag: welke kenmerken van de grafiek kunnen eenvoudig uit de formules afgelezen worden? Bijvoorbeeld $y = (x - 4)^2 - 1$ en $y = (x - 5)(x - 3)$ en de bijbehorende parabool.
Taak 5 gaat over het strategisch onderzoek naar grotere delen van de grafiek met behulp van kwalitatief redeneren, zoals over het oneindig gedrag, dat informatie geeft over de staarten van de grafiek, en of een grafiek steeds stijgend of dalend is. Bijvoorbeeld: wat kun je zeggen over de y-waarden als $x \to +\infty$ bij de functies $y = 0{,}6^x \cdot x^{60}$, $y = 52{,}7 / (1 + 62{,}9 \cdot 0{,}692^x)$, kies hierbij uit $y \to +\infty$; $y \to a \neq 0$; $y \to 0$; $y \to -\infty$

Resultaten van leerlingen

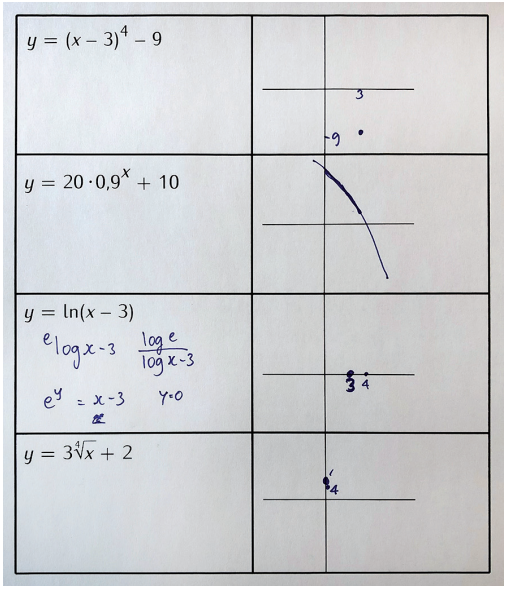
Om de effecten van de lessenserie te meten gebruikten we een pre-test, post-test en retentie-test vier maanden na de post-test (in de 6e klas). Zes leerlingen werden gevraagd om in de pre-test en post-test hardop te denken terwijl ze de test maakten. De leerlingen moesten steeds in 30 minuten veertien formules schetsen (zeven simpele en zeven meer complexere) zoals: $y = (x - 3)^4 - 9$;
$y = 20 \cdot 0{,}9^x + 10$;

$y = \ln(x - 3)$; $y = 3\sqrt[4]{x} + 2$; $y = -x + 2^x$;

$y = \sqrt{x}(x - 2)(x - 6)$;

$y = 3x\sqrt{x+2}$; $y = \dfrac{2x^2+8}{x^2-9}$.

Daarnaast was er een herkenningstaak waarin veertien formules gekoppeld moesten worden aan een correcte grafiek.



figuur 1

In figuur 1 zien we hoe een leerling in de pre-test probeerde een aantal grafieken te schetsen. De leerlingen hadden in de pre-test grote moeite met het schetsen van deze functies. Ze bleken geen beeld te hebben van >

basisfuncties als 2^x of ln(x). Gemiddeld waren drie van de veertien grafieken correct en bij de herkenningstaak gemiddeld drie van de veertien goed. Enkel excellente leerlingen bleken zich te kunnen redden door hun (kwalitatief) redeneren. In de post-test waren de resultaten significant beter: ruim negen goede grafieken bij de eerste taak en tien goede antwoorden bij de herkenningstaak. In de retentie-test waren de resultaten iets minder geworden maar nog steeds significant beter dan in de pre-test: gemiddeld zeven goede grafieken en acht goede antwoorden bij de herkenningstaak. De verbetering van het aantal goede grafieken was voornamelijk te danken aan de verbetering van het aantal goede grafieken van de simpele functies.

Uit de 'hardop denken' transcripties bleek dat, behalve de excellente leerlingen die vrijwel alles foutloos deden, de leerlingen nog moeite hadden met het optellen/vermenigvuldigen van subgrafieken. De leerlingen gaven in een vragenlijst na de post-test aan dat zij dachten dat hun herkenning van basisfunctiefamilies verbeterd was, dat zij meer strategieën gebruikten om grafieken te tekenen en dat zij de formules meer bevraagden, kortom, dat ze de 'formules beter begrepen'.

Symbol-sense-test

Helpt dit schetsen van formules nu ook bij het oplossen van andere algebraïsche problemen? We ontwikkelden een symbol-sense-test van twintig vragen, acht grafiekentaken waarin expliciet naar een grafiek gevraagd werd of gegeven werd, en twaalf niet-standaard algebrataken die opgelost konden worden via redeneren en/of grafieken schetsen. De symbol sense bij het schetsen van formules, het doorzien van de structuur van de formule en het kwalitatief redeneren, kan dus als een deelverzameling gezien worden van de symbol sense die nodig is bij het oplossen van niet-standaard algebrataken, waarbij naast het doorzien van formules en redeneren, ook strategisch werk, als switchen naar grafieken, een rol speelt. De test werd door de 21 leerlingen die de lessenserie hadden gevolgd gemaakt en ook nog door 93 andere vwo6 leerlingen van vijf verschillende scholen door heel Nederland.

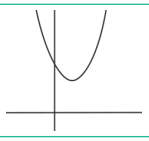
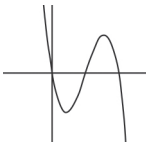
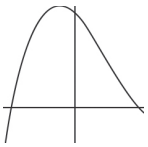
Voorbeelden van algebrataken

— Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking: $5\ln(x) = \frac{1}{2}x - 10$?
— Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $2^x = 2^{-x} + 3$?
— Los de ongelijkheid op (voor welke waarde(n) van x geldt): $x(x - 1) > 4x$
— Als x groot is kan de functie $f(x) = (3e^{-x^2} + x^2)^3 + \frac{70}{x^4}$ benaderd worden door:
A. $y = x^6$
B $y = x^5$
C $y = 70x^{-4}$
D $y = 27e^{-3x^2}$
E. anders
Omcirkel het beste alternatief en geef een toelichting.

Correlatie

We vonden bij de resultaten van de 114 leerlingen een behoorlijke correlatie tussen de scores op de grafiekentaken en de scores op de algebrataken (R = 0,630). Uit een gedetailleerdere analyse bleek dat leerlingen die hoger scoorden op de grafieken taken ook meer symbol sense strategieën gebruikten bij de algebrataken. De 21 leerlingen van de lessenserie deden het, volgens verwachting, beter op de grafiekentaken, maar ze scoorden ook

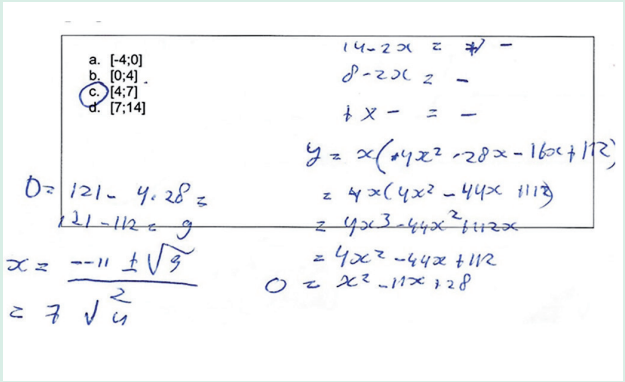
Voorbeelden van grafiekentaken

Hier zie je de grafiek van $f_p(x) = (x - p)^2 + 2p$ voor $p = 1$. Schets de grafiek van f_p voor een waarde van p groter dan 1. Licht je antwoord toe.	
Bedenk een formule die bij deze grafiek kan passen.	
Schets een grafiek van $y = 4x\sqrt{x+5}$.	
Zijn alle kenmerken van de grafiek van $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})$ in beeld gebracht? A Ja B Nee, er ontbreken relevante kenmerken van de grafiek.	

beter op de algebrataken. De 'hardop denken' transcripties van dezelfde zes leerlingen suggereerden dat deze leerlingen hun inzicht in formules en vaardigheden om formules te schetsen met herkenning en redeneren ook gebruikten bij de algebrataken. De volgende figuren tonen het werk van leerlingen.

Opgave: Kies het goede alternatief: het maximum van de functie $y = x(14 - 2x)(8 - 2x)$ ligt tussen: A [-4 ; 0]; B [0 ; 4]; C [4 ; 7]; D [7 ; 14].

Leerling 1 gebruikt weinig symbol sense: hij start berekeningen om de nulpunten te vinden en realiseert zich niet dat die direct uit de formule af te lezen zijn.



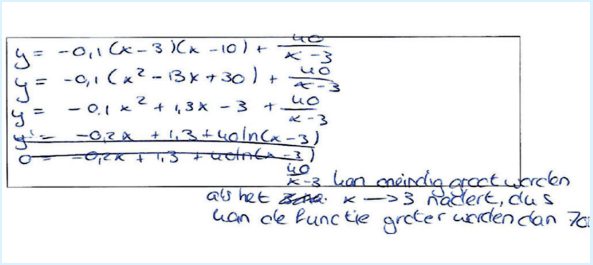
figuur 2

De bijbehorende transcriptie: 'Wat gebeurt er als ik x heel groot maak: $14 - 2x$ wordt negatief, $8 - 2x$ negatief, dus, + keer – keer – ; dat wil je niet; als x erg negatief, $14 - 2x$ erg positief, keer erg positief en dan … ; nee, werk haakjes uit, deel door x; delen door 4; (lost de vergelijking $x^2 - 11x + 28 = 0$ op en vindt $x = 4$ en $x = 7$); dus de top ligt tussen 4 en 7."

Leerling 2 gebruikt symbol sense (hij maakt een schets en switcht dus van representatie).

figuur 3

Opgave: Kan de uitkomst van $y = -0{,}1(x - 3)(x - 10) + \frac{40}{x-3}$ groter worden dan 70? Leerling 3 gebruikt symbol sense nadat hij aanvankelijk met berekeningen start. De voortgang wordt gemonitord en heroverwogen, waarna de verticale asymptoot wordt herkend en via een kwalitatieve redenering met 'als x iets groter is dan 3 …..' het goede antwoord wordt gevonden.



figuur 4

'Eerst haakjes uitwerken $x^2 - 13x + 30 + 40/(x - 3)$; kan dit groter worden dan 70? Ik probeer de top te vinden, dan kijken of het een bergparabool is of zoiets; maar er is ook een gebroken functie. Is het een parabool en is de top onder of boven de 70 en dan 40 ….. (maakt berekeningen). Nee, dit zal niet werken; ik denk dat ik wat punten bereken; er is een verticale asymptoot bij $x = 3$; dus als x - 3 erg klein is dan wordt dit deel erg groot en domineert de rest van de functie; … x - 3 kan oneindig klein worden en dan zal de breuk erg groot worden en gemakkelijk boven de 70 komen.'

Opgave: Welke waarde(n) kan y aannemen als $y = 24 - 0{,}01(x + 5)^4$?

Leerling 4 gebruikt symbol sense bij de redenering: 'y kan niet groter zijn dan 24 omdat het een 'in de macht 4 functie' is; dan is het altijd positief, dus $0{,}01(x + 5)^4$ is altijd positief, dus y kan niet groter zijn dan 24; dus $y \leq 24$'

>

Conclusie

Op basis van deze resultaten concludeerden we dat het onderwijzen van het schetsen van formules met het GQR-ontwerp een methode kan zijn die leerlingen inzicht in formules systematisch leert en dat dit inzicht in formules ook de symbol sense om algebraïsche taken op te lossen bevordert. Ook in de toekomst zal dit vermogen om formules te doorzien en er betekenis aan te geven een belangrijk aspect van symbol sense blijven. Als technologie het manipuleren van algebraïsche formules nog verder zal overnemen, zullen mensen wel de resultaten hiervan moeten interpreteren, globale schattingen moeten kunnen maken van de resultaten en moeten begrijpen wat er aan de hand is. Daarom zou inzicht in formules een basisvaardigheid moeten worden.

Noten

De noten bij dit artikel vind je op de website van *Euclides*.

vakbladeuclides.nl/967symbolsense

Over de auteur

Peter Kop is vakdidacticus bij ICLON, lerarenopleiding in Leiden, docent aan de GSG LeoVroman, en redactievoorzitter van de Zebrareeks.
E-mailadres: *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl*

Mededeling

Symposium 'Coryfeeën met ideeën'

Symposium 'Coryfeeën met ideeën'

De werkgroep Geschiedenis van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren organiseert ook in 2021 een symposium, op 2 oktober. Het thema dit jaar is *Coryfeeën met ideeën*. We hebben sprekers uitgenodigd die hun licht laten schijnen op de vakdidactische visie van vedettes uit het wiskundeonderwijs, zowel in Nederland als daarbuiten.
Evenals vorig jaar zal het symposium online plaatsvinden. Wie zich aanmeldt voor dit symposium ontvangt half september een link naar de vijf opgenomen lezingen, met het verzoek deze vóór 2 oktober te bekijken, op de site van de NVvW en eventuele vragen en opmerkingen digitaal in te dienen.

Op zaterdag 2 oktober vindt er een live online panelgesprek plaats tussen de sprekers, waarbij ook inbreng van de kijkers zeer op prijs wordt gesteld.
De sprekers en onderwerpen zijn:

- Margriet van der Heijden: 'Tatiana Afanassjewa en de wiskundedidactiek'
- Harm Jan Smid: 'Jan Versluys als exponent van zijn tijd'
- Danny Beckers: 'Suus Freudenthal en haar man: onderwijsvernieuwing en onderwijsidealen als uitgangspunt voor nieuw wiskundeonderwijs'
- Dirk de Bock en Bert Zwaneveld: 'Piet Vredenduin, wiskundeleraar en selfmade didacticus'
- Hilde Eggermont en Michel Roelens: 'Afgeleiden, integralen en continuïteit definiëren: de historische weg in de klas'

Meer informatie is te vinden op de website van de vereniging *https://nvvw.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis/*
Voor toegang tot de lezingen en deelname aan het live-gedeelte is aanmelden verplicht. Deelname is gratis, met de mogelijkheid tot een vrijwillige bijdrage.

Koen Stulens

Mathe-Magische Kunst 2021

Inleiding

Mathe-Magische Kunst 2021 zit erop. De coding challenge in de programmeertalen Python en TI-Basic, startte tijdens de coronasluiting van de scholen in het voorgezet onderwijs. De organisatoren beoogden in een tijd van afstandsonderwijs een bij het curriculum aansluitende opdracht te bieden. Met een aantrekkelijk prijzenpakket voor de leerlingen en een mooi STEM pakket voor de scholen.

> "Leerlingen werden uitgedaagd om creatief te zijn met wiskunde."

Wie schrijft de beste code en maakt de mooiste kunst?

Het idee achter de challenge was om leerlingen uit te dagen om creatief te zijn met wiskunde. En zo te laten zien dat algoritmisch denken en coderen tot magische kunst leiden. Het betreft een zoektocht naar de mooiste optische illusies, creatieve graphics of bijzondere vorm- en kleurcombinaties. Het leidde tot mooie resultaten, discipline overstijgend denken en werken met wiskunde als basis.

In totaal schreven 25 leerlingen uit Nederland en België in. Texas Instuments maakte veel werk van de support en begeleiding, samen met de begeleidende docenten: van inspirerende voorbeelden op de website tot de gelegenheid van chatten voor de deelnemers. Het T^3-docentennetwerk [1] organiseerde een hele serie webinars voor (wiskunde)docenten over computational thinking, in totaal met meer dan driehonderd deelnemers. Uit de geldige inzendingen (voortgezet onderwijs, 14-19 jaar) selecteerde de jury de winnaars.

Jury

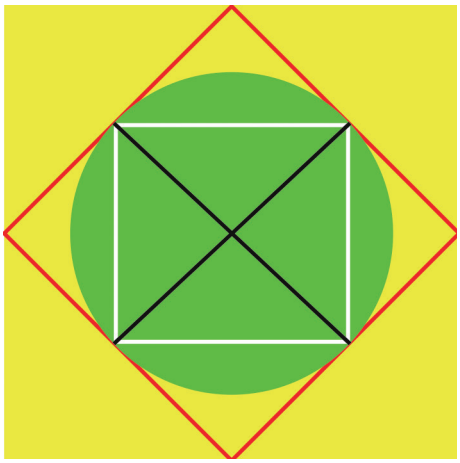
De jury van vijf kijkt naar de kwaliteit en het niveau van het script en de originaliteit en creativiteit van het kunstwerk. Ook de actualiteit of 'het verhaal over de code' speelt een rol. Met een optionele video 'the making of' konden bonuspunten verdiend worden. De jury van vijf:
Felienne Hermans - bestuurslid i&i, hoofddocent LIACS / Leiden University
Anneke Thurlings - hoofdredacteur NVOX, wis- en natuurkundige en (amateur)-schilder
Jos Tolboom - leerplanontwikkelaar vo bij SLO
Ludovic Wallaart - T^3 Nederland, docent wiskunde aan het Etty Hillesum lyceum in Deventer – wiskundige en filosoof
Rolf Ornée – TI, voorzitter

Winnende inzendingen

Op maandag 3 mei werden de volgende winnaars bekend gemaakt:

Ben van Elderen (Lodewijk College, Terneuzen) - Geometrische graphics

Ben gebruikte heel wat meetkundige eigenschappen en constructies (raaklijnen, loodlijnen, ingeschreven cirkels), om een geometrische constructie te laten uitvoeren door een machine. Aan de hand van berekeningen met cartesische coördinaten vertaalde Ben de constructie naar Python-code om zo deze geometrische figuur te tekenen.



figuur 1 Geometrische Graphics – Ben van Elderen

>

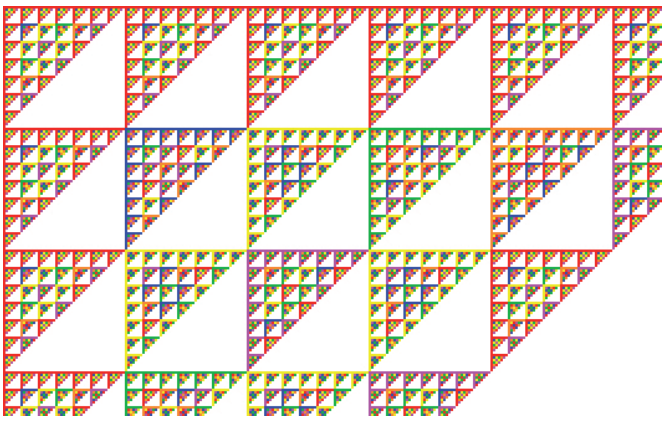
Job Vonk (Het Heerenlanden, Leerdam) – De Mandelbrot verzameling

Job programmeerde een versie van de Mandelbrot-verzameling, De graphic die in 1980 aan de basis lag om complexe en chaotische fenomenen te beschrijven en met elkaar te vergelijken en het boek *The Fractal Geometry of Nature* van Benoit Mandelbrot. Job converteerde het scherm van de grafische rekenmachine tot een deel van het complexe vlak en voerde de nodige iteraties uit om de pixels een bepaalde kleur te geven en de output te laten tekenen.

figuur 2 De mandelbrot verzameling – Job Vonk

Yoran De Sutter (College ten Doorn – Adegem (B)) – Zeef van Sierpinski

Yoran combineerde de getallen van de driehoek van Pascal, de coördinaten van de pixels van het scherm van zijn grafische rekenmachine en iteraties om deze mooie versie te coderen en te tekenen van de zeef van Sierpinski.

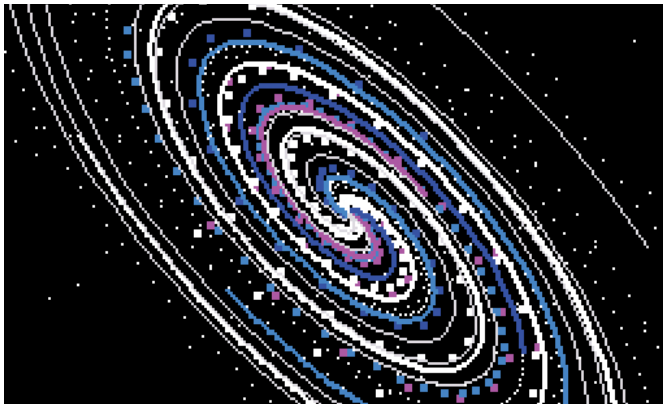


figuur 3 Zeef van Sierpinski – Yoran De Sutter

De zeef van Sierpinski is een fundament van de wereld van fractal computer graphics en gaf aanleiding tot het ontstaan van geïtereerde functiesystemen (IFS); die o.a. worden gebruikt voor beeldcompressie. Yoran combineerde zijn iteratieve code met verschillende kleuren en een optie voor het bepalen van de pixelsgrootte om zo verschillende variaties te laten plotten.

Arne van Iterson (Het Heerenlanden, Leerdam) – Space

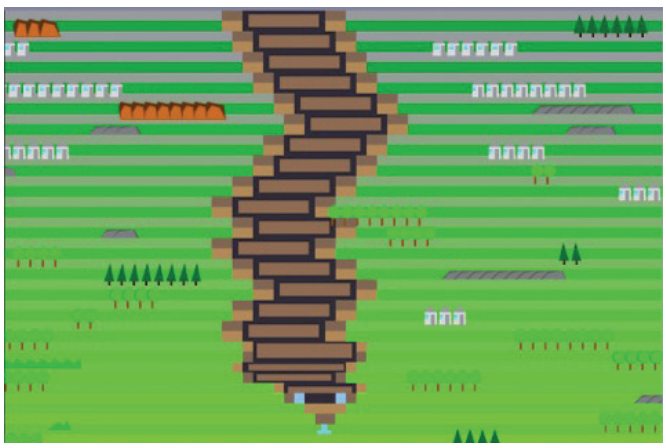
Arne tovert spiralen van Archimedes op het scherm, gebruikmakend van parameterkrommen om zo een voorstelling te coderen en te tekenen van sterrenstelsels. Arne maakt gebruik van random-commando's om kleine variaties in de output te generen en maakt optimaal gebruik van het geheugen om de output zo snel mogelijk op het scherm te plotten.



figuur 4 Space – Arne van Iterson

Florent Roosen (Athénée Royal Charles Rogier Luik (B)) - Python in een veranderende wereld

Florent heeft een bewegende generator voor willekeurige landschappen gemaakt met TI-Draw-, Random- en Time-modules. Hij laat ons de impact van de mens op het milieu zien door de ogen van een python. Na verloop van tijd worden er steeds meer huizen gebouwd en raakt het milieu vervuild.



figuur 5 Python in een veranderende wereld – Florent Roosen

Tot slot

Wedstrijden als deze zijn uitstekend toepasbaar als leeropdracht. In veel gevallen leren de leerlingen ook van elkaars aanpak. Ze krijgen plezier in het programmeren en grafisch weergeven van wiskundige modellen. Ook projectaanpak, het onderzoeken en het ontdekken van de mogelijkheden van beschikbare devices gaat spelenderwijs. Er komt dan ook zeker een vervolg. De aanstaande EU Coding week [2] is daarvoor een prima aanleiding.
Tot slot bedankt de organisatie de begeleidende docenten, juryleden en uiteraard de scholen. Aan de scholen van de deelnemers zijn inspirerende STEM pakketten beschikbaar gesteld. Deze bestaan uit TI-Innovator™ Rover, Hub, handheld en een licentie TI-Nspire™ CX Premium lerarensoftware.

Noten

[1] T^3 Nederland (Teachers Teaching with Technology) is een groep docenten wiskunde en exacte vakken. Zij ontwikkelen lesmateriaal en nieuwe didactische werkvormen in combinatie met technologie. T^3 Nederland wordt ondersteund door Texas Instruments en al haar partners.

[2] De EU-programmeerweek is een burgerinitiatief waarin creativiteit, probleemoplossing en samenwerking worden gestimuleerd door middel van programmeren en andere technische activiteiten. Het idee erachter is om programmeren zichtbaarder te maken, om jongeren, volwassenen en ouderen te laten zien hoe je ideeën met programmeercode tot leven kunt brengen, om deze vaardigheden te ontsluieren en om gemotiveerde mensen bij elkaar te brengen om te leren. Zie *https://codeweek.eu/*

Over de auteur

Koen Stulens is dit jaar 18 jaar in dienst bij Texas Instruments. In 1998 begon hij als T^3 consulent, in 2011 als educatief consultant, beide in combinatie met zijn werkkring bij de Universiteit in Hasselt (B). In 2007 stapte hij volledig over naar TI.

NUL

Nul is het aantal golven in een vijver vol met ijs.

Nul is het aantal kippen met een geldig rijbewijs.

Nul is het aantal M&M's dat Rembrandt heeft gegeten.

Nul is het aantal smartphones dat Piet Hein heeft stukgesmeten.

Nul is het aantal keepers in een badmintonpartijtje.

Nul is het aantal x'en in het woord 'fazanteneitje'.

Nul is het aantal cirkels met wel zeven stompe hoeken.

Nul is het aantal pinguïns dat de Noordpool wil bezoeken.

Nul is het aantal duo's dat muziek maakt met z'n drieën.

Nul is het aantal taartjes met slechts zeven calorieën.

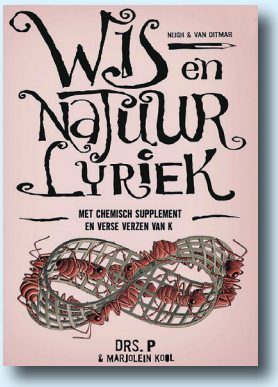
Nul is het aantal aardbeien in pruimenconfiture.

Nul is het aantal wilde haren in Beatrix' coiffure.

Nul is zo ontzettend veel, dus neem nul niet te licht.

Nul is het aantal regels dat nog rest van dit gedicht.

Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek *van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. Dit gedicht over nul is een van de nieuwe gedichten.*

Boekbespreking

Ger Limpens

Grensverleggende getallen

Titel: Grensverleggende getallen
Ondertitel: Over 0, 1, i, ∞ en andere wiskundige grootheden
Auteur: Yannick Fritschy
Uitgever: Veen Media, 2020
ISBN: 978-90-8571-7157
104 pagina's paperback
Prijs: € 10,99

Uren leesgenot

Dat er zich op gezette tijden een nieuw boek over getallen aandient, is niet verbazingwekkend, dunkt me. Per slot van rekening vormen getallen het hart van (veel) wiskunde en alleen al daarom zullen veel auteurs met een wiskundige/exacte achtergrond zich op dit thema werpen. En daar komt nog bij dat het tijdsgewricht waarin we leven een immer groter wordende nadruk legt op allerlei kwantitatieve aspecten van en in onze samenleving en dan doel ik niet eens alleen op de veelheid aan getallen waarmee getracht wordt de dagelijkse ontwikkeling van de coronapandemie inzichtelijk te maken. In de wiskunde-afdeling van mijn boekenkast weet ik zonder problemen verschillende boeken tevoorschijn te toveren die de pretentie hebben iets over/rond getallen te verdietsen voor een wiskundig publiek. Ik denk dan bijvoorbeeld aan 'De schaal van Richter en andere getallen' van Mary Blocksma en Hans van Maanen. Of John Allen Paulos met 'Er was eens een getal' dan wel David Wells met 'Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen'. De eerste vraag die zich aandient bij de presentatie van het boek 'Grensverleggende getallen' van Yannick Fritschy is dan uiteraard of dit werk nog iets toe weet te voegen aan die veelheid aan (populariserende) getallenliteratuur. Antwoord op die vraag is wat mij betreft: zeker wel. En daarmee heb ik voor mijn gevoel meteen aan mijn eigen belangrijkste opdracht voldaan: een lezer van *Euclides* zou zich, na deze mededeling, wat mij betreft blind op dit boek kunnen storten en daarmee enkele uren leesgenot en misschien ook wel kennisverrijking ondergaan.

Schaken en spinazie

Voor de lezer die toch iets meer wil weten vooraleer aan het lezen te slaan, is het volgende wellicht relevant. Fritschy is iemand met een brede interesse. Dat blijkt niet alleen uit zijn achtergrond (studies natuurkunde, sterrenkunde en klassieke talen) maar ook uit dit boek. En die brede interesse maakt hij op heel toegankelijke wijze kenbaar. In dit boek passeren, behalve heel veel getallen, op speelse wijze ook verwijzingen naar, bijvoorbeeld, Irma Sluis, the Counting Crows, alfabetzinnen, schaken en spinazie. Dit is, en dat zal duidelijk zijn, een zeer incomplete opsomming... De hoofdstukindeling van dit boek is grotendeels gebaseerd op de chronologie van de introductie/uitvinding/ontdekking van diverse getallen.

Getallenstelsels

Deel 1 heeft als titel 'Nieuwe getallenstelsels' en daarin worden (onder andere) het ontstaan van het getalsbesef, diverse getalnotaties en getallenstelsels (Romeinse cijfers, Babylonische getallensysteem, het binaire en het tientallig stelsel) besproken. Ongetwijfeld voor velen van ons niet nieuw maar toch slaagt Fritschy er in zaken aan te dragen waar ik tot voor kort geen weet van had. Zo wist ik niet dat er ten tijde van de Franse Revolutie serieuze pogingen zijn ondernomen om een twaalftallig stelsel in te voeren en ook de mislukte poging van de Zweedse koning Karel XII (1682 - 1718) om een 64-tallig stelsel van de grond te krijgen was mij onbekend.

Nieuwe getallen

Deel 2 'Nieuwe getallen' richt zich, ook min of meer op chronologische basis, op allerlei bijzondere getallen of aspecten die direct met getallen te maken hebben. De uitvinding (of is het toch de ontdekking? Fritschy stipt dit kentheoretische aspect hier en elders aan zonder echter uitsluitsel te geven over zijn eigen standpunt) van het getal 0 wordt aan de orde gesteld. Hij vestigt daarbij de aandacht op de dubbele functie die het begrip 0 heeft in ons huidige getallensysteem: het symbool 0 dat lang op zich liet wachten in de getalnotatie om 'lege plekken' aan te duiden binnen een talstelsel enerzijds en anderzijds het getal 0 om aan te geven dat er 'niets' is van datgene wat je zou willen tellen. Terzijde: Fritschy maakt me ook hier weer wat wijzer want zo wist ik niet (wellicht tot mijn schaamte) dat we een weliswaar miniem maar serieus grensconflict met België zouden kunnen hebben over het getal 0 dat in Nederland als neutraal maar in België als zowel positief als negatief gezien wordt. Ook nieuw voor mij was de mededeling dat de hindoekalender wel een jaar 0 kent, dit in tegenstelling tot de voor ons gebruikelijke jaartelling.

Reële getallen

In een volgende paragraaf wordt aandacht gevraagd voor negatieve getallen. Fritschy slaagt erin de verwondering en onwennigheid die er in het verleden ten opzichte van deze getallen (net zoals die er was ten opzichte van het getal 0) bestonden, duidelijk te maken. Vanuit ons huidige perspectief voelen negatieve getallen als – excusez le mot – heel natuurlijk aan maar een vrij recent voorbeeld over het gebruik van negatieve getallen op Britse krasloten maakt duidelijk dat dit nog steeds niet voor iedereen het geval is. Vervolgens passeren getallen als $\sqrt{2}$, π, de gulden snede en het eulergetal e de revue. In deze paragrafen wordt, uiteraard, niet alleen aandacht gegeven aan de zojuist genoemde specifieke getallen maar ook aan algemenere aspecten ervan, zoals het irrationaal, algebraïsch of transcendent zijn van getallen of het verschijnsel normale getallen.

Uitbreiding reële getallen

In de direct eropvolgende paragraaf worden uitbreidingen van de reële getallenverzameling beschreven. Imaginaire en complexe getallen worden via een historisch schetsje geïntroduceerd. En zoals we weten houdt het daar niet bij op: Fritschy vraagt uiteraard ook aandacht voor de quaternionen en de octonionen. De zestiendimensionale uitbreiding die vervolgens door hem genoemd wordt, de sedenionen, was voor mij onbekend. Maar op dat moment zitten we eigenlijk al in de wiskundewereld waarvoor (nog?) geen toepassingen bekend zijn. Complexe getallen zijn heel relevant gebleken bij berekeningen met elektrische schakelingen of wisselstroom. Ook de quantummechanica [1] zou zonder complexe getallen niet van de grond gekomen zijn. En die quaternionen hebben, Fritschy citerend, behoorlijk veel praktische betekenis bij het beschrijven van bewegingen in computerprogramma's en videogames. En ook octonionen bewijzen zinvolle diensten in bijvoorbeeld de snaartheorie. Maar daar houdt het kennelijk voorlopig dan ook mee op. In de een-na-laatste paragraaf van dit hoofdstuk komt een andersoortige uitbreiding van de gebruikelijke verzameling getallen aan de orde, te weten het begrip oneindig.[2] Fritschy zet de wiskundige grootheden Hilbert en Cantor die daarbij een belangrijke rol gespeeld hebben in het zonnetje en gebruikt deze paragraaf tevens als een introductie op de volgende die als titel heeft '1 + 1 = 2'. Een ogenschijnlijke open deur maar in deze paragraaf maakt Fritschy heel duidelijk in welke crisis de wiskunde zich bij het begin van de twintigste eeuw bevond. Ook nu spelen Cantor en Hilbert belangrijke rollen maar ook mannen als Bertrand Russell, de Nederlandse grondlegger van het intuïtionisme L.E.J. Brouwer en Kurt – onvolledigheidsstelling – Gödel komen voorbij. We krijgen, al met al, een korte en uiterst informatieve schets van de grondslagenstrijd die honderd jaar geleden woedde. Al met al een fraaie apotheose van de ontwikkeling van een systeem dat veel groter en complexer is dan velen wellicht denken.

Bijzondere inzichten

Dat laatste komt nog eens opnieuw aan de orde in de epiloog die hier – en je kunt er behoorlijk over twisten of dat geestig is of flauw – aangeduid wordt met het kopje 'e-π-loog'. Hier probeert Fritschy het geheel naar een wat hoger plan te tillen en het vakoverstijgende aspect van getallen en meer in het algemeen wiskunde te duiden en te benadrukken. Wellicht is dat een gevolg van de niet puur wiskundige achtergrond van Fritschy. Hoe een en ander ook zij, deze slotparagraaf leverde voor mij weer enkele bijzondere inzichten op: het is niet zo bijzonder dat we onze gewone wereld met 'gewone' getallen kunnen beschrijven maar het is wel uiterst curieus om te constateren dat we vervolgens complexe getallen blijken te kunnen gebruiken om quantummechanicaverschijnselen te kunnen beschrijven. Hij citeert vervolgens Robbert Dijkgraaf als deze constateert dat de natuurwetenschappelijke wereld er tot op heden nog niet in geslaagd is een sluitende unificatietheorie op te stellen. Dijkgraaf voorspelt, dixit Fritschy, echter dat een nog te ontwikkelen nieuwe wiskundige taal die slag nog zal gaan slaan. Een fraaie voorspelling wat mij betreft. En in mijn ogen eigenlijk zelfs wat mooier dan het op zich wat flauwe einde van het boekje waarbij Fritschy zich woordspelig uitlaat over de toekomst van tellen en de wiskunde. Maar dat is slechts een kleine smet op een verder erg geslaagd boek.

Noten

[1] Zelf zou ik eerder 'kwantummechanica' willen schrijven in lijn met de gangbare schrijfwijze in de fysica.

[2] Hier past wel nog een kritische kanttekening: Fritschy suggereert in deze paragraaf dat er in zijn beleving enig licht zou zitten tussen 0,999... en 1 maar in mijn beleving past daar geen foton tussen.

Over de auteur

Ger Limpens was toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*

Dick Klingens

De bissectricestelling en wat er zo bij komt kijken

Dick Klingens raakte geïnspireerd door het lezen van de hoofdstukken 6 (Verhoudingen van lijnstukken), 8 (Gelijkvormigheid) en 20 (Oppervlakte en omtrek van de cirkel) en Aanvullingen uit het boek Planimetrie voor M.O. en V.H.O. van C.J. Alders (1904 – 1969) uit 1958. Dit artikel is opgedragen aan Cor Alders.[1]

Dick Klingens overleden

Vlak voor het verschijnen van deze *Euclides* bereikte ons het verdrietige bericht dat Dick Klingens onverwachts is overleden. Dick heeft nog de drukproef van dit artikel nauwgezet gecontroleerd. Met toestemming van zijn familie publiceren we dit artikel. De tijd was te kort om een In memoriam te schrijven en te plaatsen waarin we stilstaan bij alles wat Dick heeft betekend voor *Euclides* en het wiskundeonderwijs. Dat volgt in nummer 97-1.

Inleiding

De zogeheten bissectricestelling behoort niet meer (expliciet) tot de basiskennis binnen het huidige meetkundeprogramma van het voortgezet onderwijs, nu daarin vooral aan de analytische aspecten van de vlakke meetkunde aandacht wordt gegeven. In hetgeen volgt ga ik juist daarom in op enkele synthetische aspecten van de stelling en op 'wat er zoal bij kan komen kijken'. En, ik zal dat doen zonder goniometrie.

De stelling, ongebruikelijk bewezen

De bedoelde euclidische stelling luidt:

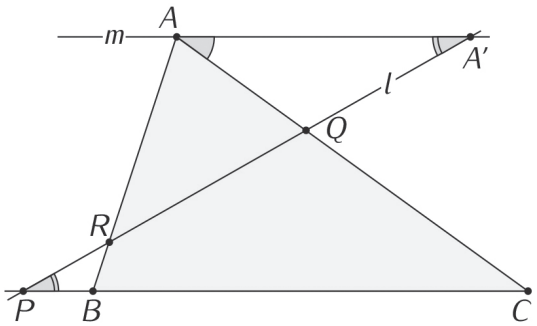
Stelling 1 (bissectricestelling). Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde van die hoek in stukken die zich verhouden als de opstaande (aangrenzende) zijden.

Van deze stelling zal ik, zoals de kop van deze paragraaf al aangeeft, een bewijs geven dat niet zo bekend is, en zeker ook omdat het daarbij te gebruiken 'hulpmiddel', een transversaal, al lange tijd niet meer in het curriculum voorkomt. Daarom volgt er eerst een definitie daarvan.

Definitie. Een (rechte) lijn die de drie zijden van een driehoek snijdt en niet door een hoekpunt daarvan gaat, is een transversaal van die driehoek.

De bekendste eigenschap van een transversaal is vervat in de stelling van Menelaos[2]:

Stelling 2 (Menelaos). Snijdt de transversaal l de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in opvolgend de punten P, Q, R, dan geldt[3]:
$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = 1$

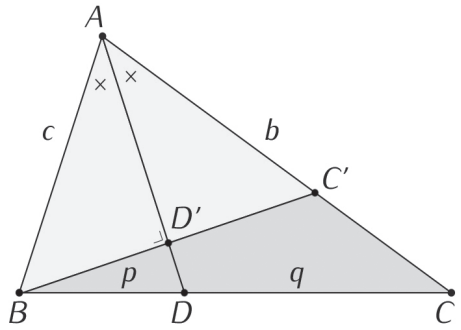


figuur 1

Bewijs. Zie figuur 1. Met A' als snijpunt van de lijn l met de lijn m door A die evenwijdig is met BC, zijn de driehoeken QCP en QAA' gelijkvormig (hh).
Dus: $QC : QA = CP : AA'$
De driehoeken RAA' en RBP zijn eveneens gelijkvormig (hh), zodat: $RA : RB = AA' : BP$
Met deze kennis kan ik schrijven:

$$(BCP)\cdot(CAQ)\cdot(ABR) = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB} =$$
$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{CP}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BP} = \frac{PB}{PC}\cdot\frac{-CP}{-BP} = 1$$

En hiermee kan dan het (ongebruikelijke) bewijs van stelling 1 redelijk eenvoudig worden geleverd.



figuur 2

Eerste bewijs van stelling 1

In de configuratie van figuur 2 moet dus bewezen worden:
$BD : CD = BA : CA = c : b$
De loodlijn uit B op AD snijdt de lijnen AD, AC in opvolgend D', C'. Dan is driehoek ABC' gelijkbenig (met top A), zodat ook $BD' = C'D'$.
Ik beschouw nu driehoek BCC' met als transversaal de lijn $AD'D$. Volgens stelling 2 geldt dan in die driehoek:

$$\frac{DB}{DC}.\frac{AC}{AC'}.\frac{D'C'}{D'B}=1 \Rightarrow \frac{DB}{DC}.\frac{AC}{AB}.\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow BD:CD=c:b$$

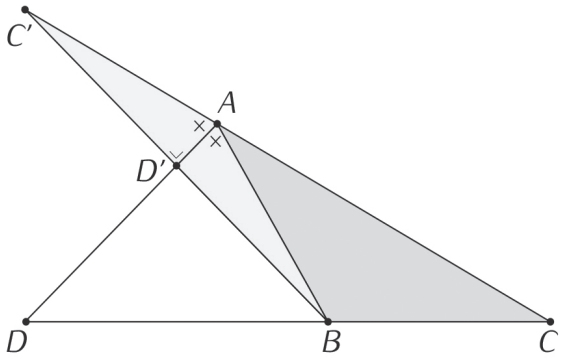
Opmerkingen
1) Er zijn natuurlijk ook andere verschijningsvormen van de bissectricestelling. Zo is met $BD = p$, $CD = q$ natuurlijk $p : q = c : b$. Met $BC = a$ is dan:

$$BD=p=\frac{ac}{b+c},\quad CD=q=\frac{ab}{b+c}$$

2) In figuur 3 is AD de *buitenbissectrice* van hoek A. Ook hier geldt: $BD : CD = c : b$
Het hierboven staande bewijs (van stelling 1) kan onveranderd worden gebruikt om de juistheid van deze eigenschap te bewijzen. Bij een binnenbissectrice spreekt men van een *inwendige* verdeling van de overstaande zijde, bij een buitenbissectrice van een *uitwendige* verdeling van die zijde.

3) Met een bewijs uit het ongerijmde kan ook de *omgekeerde* stelling van stelling 1 worden bewezen.
Stelling 1 (omgekeerd). Als een lijn door een hoekpunt van een driehoek de overstaande zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de opstaande zijden, dan is die lijn een bissectrice van de betreffende hoek.

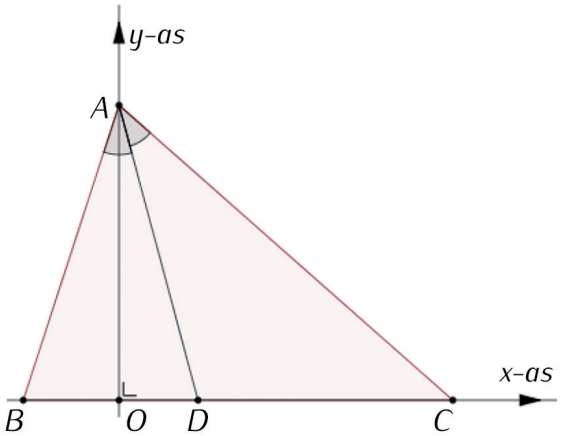
In paragraaf 1 van de appendix[4], staat het bedoelde bewijs.



figuur 3

Tweede bewijs van stelling 1

Een *analytisch* bewijs van stelling 1 is overigens redelijk elementair. Ik kies daartoe een orthogonaal assenstelsel xOy waarvan de x-as de drager is van de zijde BC van driehoek ABC en waarvan de y-as door het punt A gaat; zie figuur 4.



figuur 4

Ik ga dan uit van $A = (0, r)$, $B = (-p, 0)$, $C = (q, 0)$ met p, q, $r > 0$ en $p < q$. Vergelijkingen van de opstaande zijden zijn dan:
AB: $y = \frac{r}{p}(x + p)$
AC: $y = -\frac{r}{q}(x - q)$
Volgens een 'bekende formule'[5] is dan de vergelijking van het bissectricepaar van hoek A:

$$\left|\frac{rx-py+pr}{\sqrt{r^2+p^2}}\right|=\left|\frac{rx+qy-qr}{\sqrt{r^2+q^2}}\right|$$

De x-coördinaat x_D van het punt D ($y_D = 0$) voldoet dan, met $c = AB = \sqrt{(r^2 + p^2)}$, $b = AC = \sqrt{(r^2 + q^2)}$
en na deling door r, aan de vergelijking:

$$\left|\frac{x+p}{c}\right|=\left|\frac{x-q}{b}\right| \Rightarrow b(x + p) = \pm c(x - q)$$

Omdat $x_D > 0$ is, moet in de laatste vergelijking het minteken gebruikt worden. Dan is:

$$bx + bp = -cx + cq \Rightarrow x_D = \frac{-bp+qc}{b+c}$$

en daarmee is, met $p + q = a$:

$$BD = p + \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}c = \frac{ac}{b+c}$$

$$\text{en } CD = q - \frac{-bp+qc}{b+c} = \frac{p+q}{b+c}b = \frac{ab}{b+c}$$

waaruit opnieuw blijkt (zie opmerking 1 hierboven) dat $BD : CD = c : b$

N.B. De keuze van $p < q$ in het bewijs heeft natuurlijk geen invloed op de algemene geldigheid van de stelling. Als $p = q$ is, is de driehoek A-gelijkbenig. En daarin is stelling 1 triviaal.

Andere bewijzen van de bissectricestelling

Voor een iets gecompliceerder bewijs van stelling 1 dat *alleen* op gelijkvormigheid van driehoeken is gebaseerd, verwijs ik naar paragraaf 2 van de appendix. Daarin staat ook het meest gebruikelijke bewijs.

Een bewijs van de bissectricestelling waarin gebruik gemaakt wordt van *omtrekshoeken* (op een cirkel), staat meestal *niet* in de leerboeken, omdat de daaraan ten grondslag liggende theorie later in het curriculum aan de orde kwam/komt. Ik heb (een deel van) die theorie opgenomen in de appendix (zie paragraaf 3). Hieronder gebruik ik dan omtrekshoeken voor het bewijs van stelling 1.

Derde bewijs van stelling 1

In figuur 5 snijdt de A-bissectrice van driehoek ABC de zijde BC in het punt D en de omcirkel van de driehoek ook in het punt D'.

Nu is:

$\angle BAD = \frac{1}{2}\text{bg}(BD') = \angle D'BC$ (*omtrekshoeken*)

$\angle D'AC = \frac{1}{2}\text{bg}(D'C) = \angle DCD'$ (*omtrekshoeken*)

De bogen BD' en CD' zijn daarmee dus aan elkaar gelijk. Voorts zijn de driehoeken ABD' en BDD' gelijkvormig (hh), zodat:

$AB : BD = BD' : DD'$ (1)

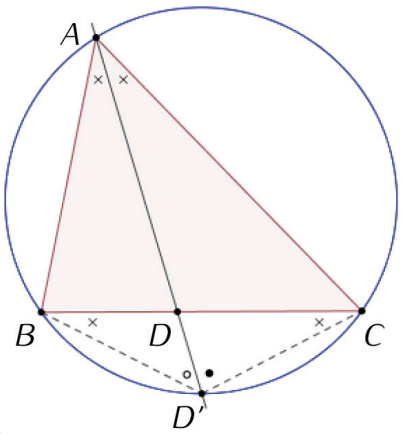
En de driehoeken ACD' en CDD' zijn dat eveneens, zodat:

$AC : CD = CD' : DD'$ (2)

En driehoek BCD' is D'-gelijkbenig, zodat:

$BD' = CD'$ (bij gelijke bogen horen gelijke koorden)(3)

Uit (1), (2) en (3) volgt:



figuur 5

$AB : BD = AC : CD$ of ook $BD : CD = AB : AC$

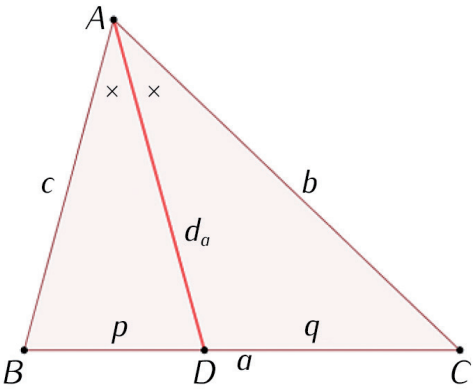
En dit is wat in stelling 1 is verwoord.

De bissectriceformule

De uitdrukking waarmee de lengte van een bissectrice van een driehoek kan worden berekend indien de lengtes van de zijden van die driehoek gegeven zijn, staat bekend als de *bissectriceformule*. Die formule luidt voor de bissectrice $d_a = AD$ (met punt D op BC) van hoek A van driehoek ABC (met a, b, c als lengtes van de zijden):

$d_a^2 = bc - pq$ (4)

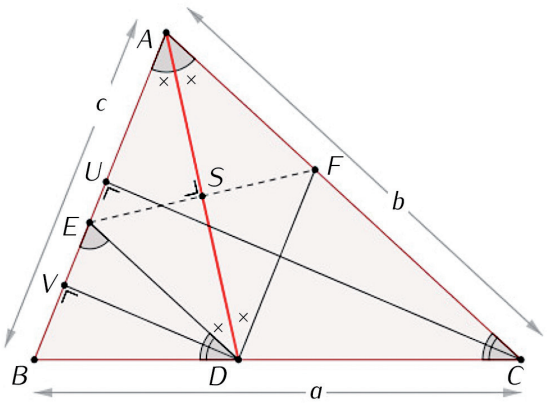
waarbij dan weer $BD = p$ is en $CD = q$, zie figuur 6.



figuur 6

De bissectriceformule wordt meestal afgeleid met de *stelling van Stewart* [6]. Ik zal hier echter een bewijs laten volgen waarin een ruit een bijzondere rol speelt. Twee andere bewijzen, de eerste met gebruik van gelijkvormigheid en de tweede met gebruik van de stelling van Pythagoras, staan in de appendix (paragraaf 4).

In figuur 7 is $DE \parallel CA$, $DF \parallel BA$, $CU \perp AB$, $DV \perp AB$, en is S het snijpunt van EF en de A-bissectrice AD van driehoek ABC. Vierhoek $AEDF$ is dan een parallellogram, en omdat AD ook bissectrice is van de hoek A daarvan, is $AEDF$ een *ruit*. Van het feit dat $AE = DE$ is, zal ik een enkele keer gebruik maken. En in die ruit is (natuurlijk)



figuur 7

ook $AS = \frac{1}{2}AD$. Volgens de bissectricestelling is:
$BD : CD = AB : AC = c : b$
Ook hier gebruik ik $BD = \frac{ac}{b+c}$. Uit de gelijkvormigheid

(*hh*) van de driehoeken *BDE* en *BCA* volgt:

$$BD : BC = DE : CA \Rightarrow DE = \frac{CA}{BC} \cdot BD = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{bc}{b+c} \ (= AE) \qquad (5)$$

De driehoeken *ADV* en *AES* zijn eveneens gelijkvormig (*hh*), zodat:
$AD : AE = AV : AS \Rightarrow AD : AE = AV : \frac{1}{2}AD \Rightarrow$
$AD^2 = 2AV \cdot AE \qquad (6)$
En het rechterlid van uitdrukking (6) verdient nu verdere uitwerking. Opnieuw gelijkvormigheid: driehoek *EVD* is gelijkvormig (*hh*) met driehoek *AUC*, waaruit volgt:

$$EV : AU = DE : CA \Rightarrow EV : AU = DE : b \Rightarrow$$

$$EV = AU \cdot \frac{DE}{b} \overset{\text{MET (5)}}{=} AU \cdot \frac{c}{b+c} \qquad (7)$$

In de driehoeken *BUC* en *AUC* is dan:
$a^2 = CU^2 + BU^2 = (b^2 - AU^2) + (c^2 - AU^2) =$

$b^2 + c^2 - 2c \cdot AU$ zodat: $AU = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
En nu blijkt met relatie (7):

$$EV = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{c}{b+c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)}$$

Uit $AV = AE + EV$ en opnieuw (5) volgt dan:

$$AV = \frac{bc}{b+c} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2(b+c)} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)}$$

En met deze laatste uitdrukking gaat relatie (6) over in:

$$AD^2 = 2 \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)} \cdot \frac{bc}{b+c} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \qquad (8)$$

Of ook:

$$d_a^2 = bc - \frac{ac \cdot ab}{(b+c)(b+c)} = bc - pq$$

En ja, dit is uitdrukking (4).

Voor de appendix bij dit artikel zie:
vakbladeuclides.nl/967bissectricestelling

Noten

[1] Zie ook: Vredenduin, P.G.J. (1969). In memoriam Cor Alders. *Euclides, jaargang*(44), nr. 5, p. 129.

[2] Naar Menelaos van Alexandrië (70 – 130, Egypte). Menelaos gebruikte de stelling in zijn boek *Sphaerica* bij de behandeling van driehoeken op een boloppervlak. Zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Menelaus_of_Alexandria* en *https://nl.wikipedia.org/wiki/Stelling_van_Menelaos* De op deze laatste pagina gegeven eigenschap wijkt iets af van de hierboven staande door een ander uitgangspunt, in dit artikel namelijk het begrip deelverhouding; zie [3].

[3] Met drie collineaire, verschillende punten *P*, *Q*, *X* is de zogeheten deelverhouding (*PQX*) van het lijnstuk *PQ per definitie* gelijk aan $\varepsilon \cdot XP/XQ$. Daarbij moet rekening gehouden worden met de oriëntatie van die (deel)lijnstukken. Ligt *X* op het lijnstuk *PQ*, dan is $\varepsilon = -1$; ligt *X* op een verlengde van *PQ* dan is $\varepsilon = 1$.

[4] Zie de website van *Euclides* voor de appendix bij dit artikel.

[5] Hier staat niets anders dan dat de afstand van een punt met coördinaten (*x*, *y*) tot de lijn *AB* gelijk is aan de afstand van datzelfde punt tot de lijn *AC*. Een bissectrice van een hoek wordt hier opgevat als de *meetkundige plaats* van de punten die *gelijke* afstand hebben tot de benen van die hoek

[6] Naar Matthew Stewart (1717-1785, Schotland). Zie *https://nl.wikipedia.org/wiki/Matthew_Stewart* Voor de naar hem vernoemde stelling zie bijvoorbeeld: http://www.pandd.demon.nl/stewart.htmv

Over de auteur

Vlak voor het verschijnen van deze *Euclides* overleed Dick Klingens onverwachts. Van 2000 tot 2014 was hij (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).

Friemelmolen

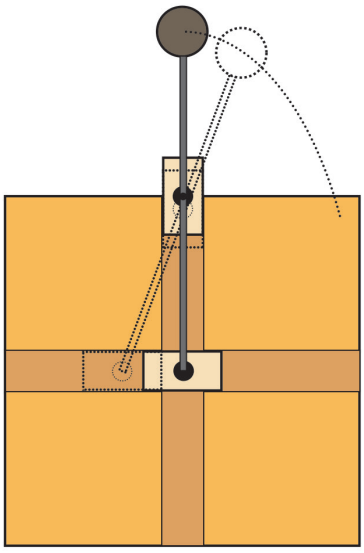
Het kwam allemaal door mijn vader...

Pieter Slooten

Ik was zestien en juffrouw Pijl was mijn wiskundelerares in de vijfde van de hbs. Ze heette nadrukkelijk juffrouw Pijl, of kortweg Pijl, omdat ze ongehuwd was. Dat hoorde toen zo. Ze was zo'n dertig jaar, had een soort bochel en bezat een scherpe stem. Je zou verwachten dat haar dat niet populair maakte. Maar dat was niet zo. Ze was eerlijk, humorvol, en liet je heel duidelijk weten wat er in de les en in de wiskunde voor regels waren, waaraan je je moest houden.

Een dergelijke glasheldere duidelijkheid had iets aantrekkelijks, iets mathematisch bijna. In de klas werd ze daarom door bijna iedereen hoog gewaardeerd bij algebra, analytische meetkunde, goniometrie en stereometrie.
Zo kwam het dat we elkaar uitdaagden op het gebied van wiskunde. Zij haalde me over om aan de wiskunde-olympiade mee te doen, maar we hadden het ook over haar beklimming van de Matterhorn. Ze gaf me extra oefenmateriaal en één keer heb ik haar een opdracht gegeven.

Dat kwam, zoals ik al aangaf, allemaal door mijn vader. Hij had een zakelijk contact in Finland en had op bezoek aldaar een geschenk gekregen. Dit noemde hij de *friemelmolen*. De Finse vrienden hadden mijn vader ervan overtuigd dat het nut ervan was te 'friemelen'. Dus zomaar iets doms te frunniken, waardoor je gedachten vrijer zouden kunnen stromen.



figuur 1 De friemelmolen

Het apparaat zelf is eenvoudig. Zoals van Finnen kan worden verwacht is het gemaakt uit eenvoudig berkenhout. Een blokje van 12 bij 12 cm, met een hoogte van 6 cm. Op de bovenzijde zijn twee goten uitgefreesd, loodrecht op elkaar. Ze verdelen de bovenzijde in vier vierkanten. Door de goten kunnen twee houten glijders bewegen, die allebei via scharnieren aan één grote zwengel zijn bevestigd. Aan het uiteinde van de zwengel richt zich een soort handgreep omhoog. Dit nodigt uit om aan de zwengel te draaien. Als je dat doet bewegen de glijders heen en weer in de gootjes. Een grappig gezicht, zie figuur 1.

Het domme gefriemel (om meer ontspannen te kunnen denken) heeft iets bijzonders. Het was me op school al opgevallen dat de knop van de zwengel geen cirkel beschrijft bij het ronddraaien. Het moest zoiets als een ellips zijn, vond ik. Juffrouw Pijl vond dit ook en aan haar dus de mooie taak dit te bewijzen. Vijf kantjes uitwerking gaf ze me na enkele weken met het bewijs, en ik was diep onder de indruk.

Maar ik moet eerlijk bekennen dat ik het bewijs later nooit meer heb nagedaan. Tot een paar weken geleden, en dus 55 jaren later dan de oorspronkelijke uitleg. Van die oude versie kan ik me niets meer herinneren, maar heb op goed geluk een paar aannames gedaan en het bewijs was niet meer dan één tekening en zes regels met uitwerking. Gek toch, dat ik blij was die puzzel te hebben opgelost. Dat dan weer wel. Zie jij het bewijs ook? Ik zie je oplossingen graag tegemoet...
Plezier ermee!

Over de auteur

Pieter Slooten was docent (filosofie van de) natuurkunde bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg en tevens de grote (natuurkunde) inspirator voor de hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *slootenbriet@gmail.com*

Verenigingsnieuws

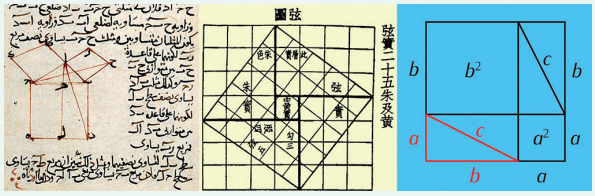
Jaarvergadering/studiedag 2021

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 6 november 2021**.

Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:15 uur
Plaats: Ichtus College,
Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Het bestuur houdt er rekening mee dat de jaarvergadering/studiedag nog niet op de ons zo bekende manier doorgang kan vinden. Zodra er meer duidelijkheid ontstaat rond de beperkende maatregelen m.b.t. het coronavirus, laten we je via *Euclides*, de nieuwsbrief en de website weten hoe de jaarvergadering/studiedag dit jaar vormgegeven wordt.



Oproep voor bijdragen: thema diversiteit

We leven in een zeer diverse samenleving en dat beïnvloedt ook ons wiskundeonderwijs. Docenten en leerlingen verschillen in vaardigheden, interesses en achtergrond. Bovendien heeft elke wiskundedocent zijn/haar eigen visie op leren en onderwijzen. En de onderwerpen binnen de wiskunde zijn ook divers met hun eigen didactische benaderingen.
Deze studiedag is een mooie kans om ervaringen uit te wisselen rond het omgaan met en benutten van die diversiteit. Wij kunnen veel van elkaar leren, net als leerlingen met diverse achtergronden en interesses voor wiskunde veel van elkaar kunnen leren. De kracht ligt dan juist in het samenwerken en het voorkomen van individuele trajecten. Samenwerken door leerlingen, maar ook door ons, met elkaar en met docenten van andere vakken en opleidingen, om de diverse toepassingen van wiskunde in beeld te houden.
We nodigen wiskundedocenten uit die, samen of alleen, hun ervaringen willen delen met andere wiskundedocenten. Je kunt daarbij denken aan zelf ontworpen lessen in de diverse geledingen vmbo, havo en vwo op het gebied van wiskunde A, B, C en D, diverse mogelijkheden voor (digitaal) toetsen, maar ook aan het uitdragen van expertise op het gebied van de wiskunde en het wiskundeonderwijs zelf.
En ook, niet te vergeten, over het gebruik maken van de expertise uit diverse andere vakken, schoolculturen of andere landen. We kunnen nog zoveel van elkaar leren! Dus deel jouw wiskundekennis of ervaring door een workshop te geven op deze zeer diverse studiedag.

Heb je ideeën voor een workshop over dit thema of misschien wel over een heel ander onderwerp?
Dan horen we die graag! Mail naar de organisatie van de studiedag *(studiedag@nvvw.nl)*.

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering (Concept) Agenda:

1 Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
2 Jaarrede van de voorzitter
3 Notulen van de jaarvergadering van 7 november 2020
4 Jaarverslagen 2020/2021
  4.1 Jaarverslag van de NVvW
  4.2 Jaarverslag van *Euclides*
5 Financiën
  5.1 Jaarrekening en balans 2020/2021
  5.2 Verslag kascommissie en decharge van de penningmeester
  5.3 Vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie
6 Bestuursverkiezing
7 Rondvraag
8 Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

Nadere informatie volgt.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 6 november 2021.

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 6 november 2021. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (*hoofdbureau@nvvw.nl*).

Wereldwiskunde Fonds

Boeken voor Burkina Faso

Hervé Millet

Record

Sommige van onze projecten lopen jarenlang, bijvoorbeeld bij de ondersteuning van een wiskundestudent in Kenia, maar een enkele keer is de tijd tussen de aanvraag en de afronding van een project slechts veertien dagen. Dat is wel een record!

Agrarische school

Wij ontvingen een aanvraag voor wiskundeboeken voor een agrarische school in Burkina Faso, de Lycée Agricole Privé. Dit is een kostschool waarin de leerlingen de eerste vier jaar gewoon een middelbare schoolopleiding volgen, aangevuld met wat landbouw en veeteelt, en de laatste vier jaar zich volledig richten op de agrarische vakken.
Tot het moment dat ze boeken kregen moesten de leerlingen alle lesstof overschrijven van het bord. In maart ontving de school zo'n 300 wiskundeboeken uit het Fonds. De wiskundedocent Yaya was compleet in extase. De leerlingen realiseren zich nog niet eens wat hen overkomen is. Gevolg is nu dat er in de lessen veel meer tijd is om inhoudelijk op de leerstof in te gaan, de docent meer gelegenheid heeft voor participatief onderwijs, waardoor hopelijk de resultaten bij de examens zullen stijgen.

Het Wereldwiskundefonds betaalde wiskundeboeken voor het Lycée Agricole Privé

Over de auteur

Hervé Millet is de oprichter van de stichting ASAP (https://asap-foundation.org/nl). Deze organisatie ondersteunt projecten in Burkina Faso die als doel hebben om armoede te verlichten en welzijn te verbeteren.
E-mailadres: *rv.millet@gmail.com*

Vrij vertaald door Monica Woldinga van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: *mwoldinga@gmail.com*

Π

Een kreet die nooit verdwijnt:
'Wiskunde kent geen eind.'
Zelfs een vast getal als pi,
kent geen einde na de drie.
Men kan altijd wel verder rekenen,
of er nog een grafiek bij tekenen.
Toch, grafentheorie heeft wel een einde,
kijk maar naar dit bewijs uit het gerijmde.
Men kan uitbreiden, onderverdelen,
tot een graaf begint te vervelen.
Dan maakt men met gemak korte metten,
door er gewoon een punt achter te zetten.

Lourens Schuijtemaker, OSG West-Friesland te Hoorn

Olympiadepuzzel 96-7
Kaartspel

Esther Bod

PZZL

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl*

Birgit en Quintijn spelen een kaartspel. Er zijn twaalf kaarten, waarop de getallen 14, 17, 25, 28, 41, 47, 52, 58, 71, 74, 82 en 85 staan. De kaarten worden tussen beide spelers verdeeld, maar ze krijgen niet noodzakelijk evenveel kaarten. Iedere speler krijgt minimaal één kaart. De spelers spelen om beurten een kaart uit. De speler die begint mag een kaart naar keuze spelen; in alle beurten daarna moet het eerste cijfer van de nieuwe kaart gelijk zijn aan het laatste cijfer van de vorige kaart. Als de ene speler bijvoorbeeld kaart 14 speelt, dan mag de andere speler 41 of 47 spelen. Een speler verliest als hij geen kaart meer kan spelen.
Birgit mag beginnen. Daarom krijgt Quintijn aan het begin meer kaarten.
Met hoeveel kaarten moet Quintijn minimaal beginnen om zeker te weten dat hij het spel kan winnen, ongeacht hoe de kaarten geschud zijn?

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 6 augustus naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 5

Voor de puzzel *Ridders en schurken* hebben we 21 inzendingen ontvangen.
Bij deze puzzel draaide het erom te achterhalen wie er de waarheid sprak en wie niet. Door het combineren van de verschillende uitspraken, en het feit dat liegende schurken links van de schat moeten staan en niet-liegende schurken juist rechts van de schat, waren de plaats van de schat en de identiteit van de schurken en ridders te achterhalen. Bij deze opgave is ook de beredenering van het antwoord erg belangrijk. Door stap voor stap de verschillende uitspraken te gebruiken, kan beredeneerd worden wie een ridder of een schurk is en waar de schat ligt. Deze puzzel trok veel schatzoekers en de meeste inzenders gingen er ook met de schat vandoor!

(Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.)

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 16 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Klaas-Jan Wieringa.

vakbladeuclides.nl/967olympiadepuzzel

Top 10 ladderstand t/m puzzel 96-4

1	J. Remijn	153
2	G. Bouwhuis	119
3	H. Huisman	117
4	M. Woldinga	115
5	F. Göbel	114
6	S. Zondervan	112
7	J. Meerhof	84
8	H. Bakker	84
9	D. Dopheide	62
10	L. Cizkova	61

We feliciteren J. Remijn van harte met de ladderprijs.

Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2021

Vr 24/09

LANDELIJK
Onderwijs meets Onderzoek
organisatie: NVvW

Za 02/10

ONLINE
Symposium Visies op wiskundeonderwijs
organisatie: werkgroep Geschiedenis (NVvW)

Za 06/11

JAARVERGADERING EN STUDIEDAG
De jaardag van de NVvW zal dit jaar hopelijk live plaats kunnen vinden, maar zal in elk geval doorgaan op 6 november organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 96

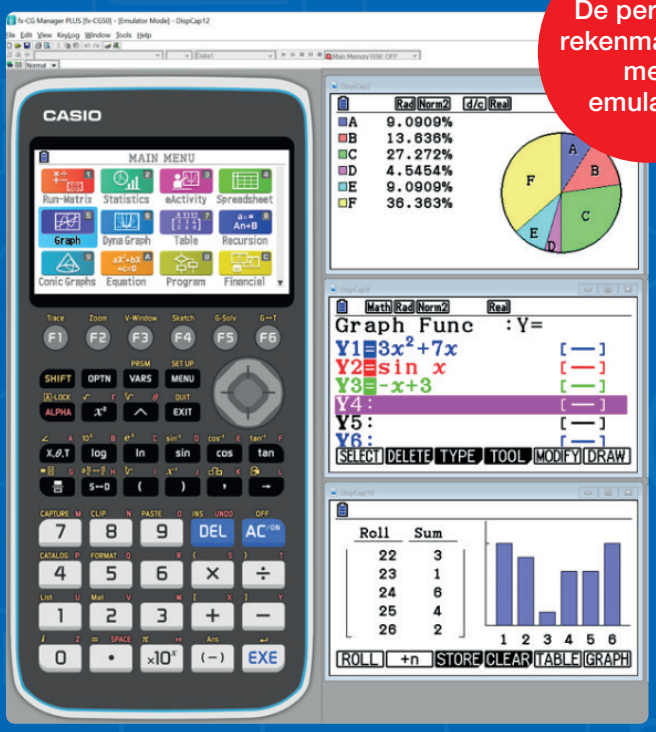
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	7 september 2021	14 juni 2021
2	26 oktober 2021	23 augustus 2021
3	14 december 2021	11 oktober 2021
4	25 januari 2022	15 november 2021
5	15 maart 2021	3 januari 2022
6	3 mei 2022	28 februari 2022
7	21 juni 2022	25 april 2022

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

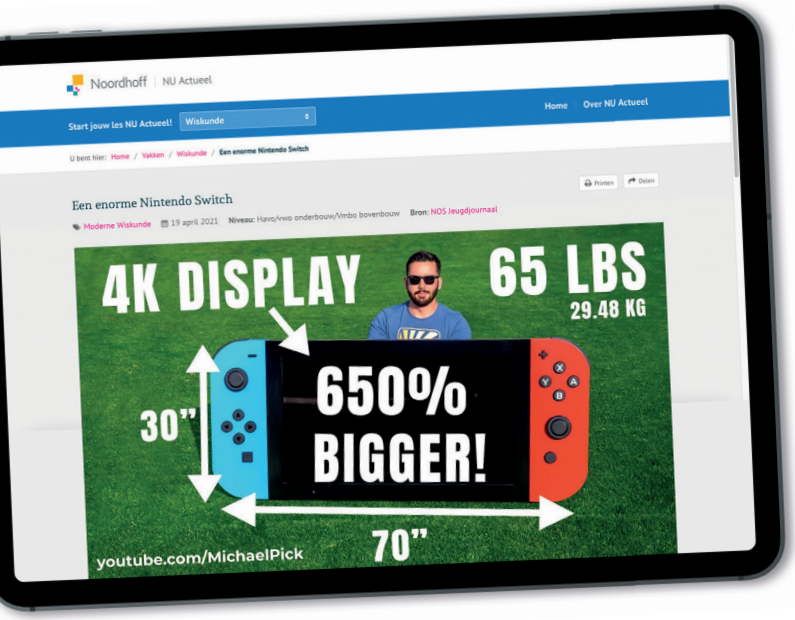
ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

Ken je NU Actueel al?

Dit zijn actuele fragmenten met prikkelende vragen die aansluiten op de belevingswereld van je leerlingen. Ideaal om in te zetten als lesopener! Er verschijnt regelmatig een nieuwe NU Actueel.

MODERNE WISKUNDE



Een enorme Nintendo Switch

Een Amerikaan bouwde een enorme Nintendo Switch. De enorme Nintendo Switch is 70 inch lang en 30 inch breed. Een gewone Nintendo Switch is 9,4 inch lang en 4 inch breed en weegt 0.88 lbs.

Opdrachten:

1. Hoe vaak past de lengte van een gewone Nintendo Switch in deze enorme Nintendo Switch?

2. Welke schaal hoort hier bij? De schaal is 1 : ….. (Rond het getal op de puntjes af op twee decimalen.)

3. Klopt die schaal ook voor de breedte?

4. Een gewone Nintendo Switch weegt 0.88 lbs. Als de grote Nintendo Switch een exacte kopie zou zijn, zou deze enorme Nintendo Switch dan meer of minder dan 65 lbs wegen?

5. Op de afbeelding zie je dat het scherm 650% groter is. Klopt dat wel?

6. In de video hoor je hoe lang deze enorme Nintendo Switch in cm is en hoe veel deze weegt in kg. Een inch = 2,54 cm en 1 lbs (Imperial pound) = 0,45359237 kilogram. Ga na of de afmetingen en het gewicht in de video kloppen.

Bronnen: Jeugdjournaal, YouTube filmpje, Nintendo

Benieuwd? Neem zelf een kijkje:
nuactueel.noordhoff.nl/vakken/wiskunde

Noordhoff

Brengt je verder