

Waardevolle producten III

Door polynomen als productvormen te schrijven doe je verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

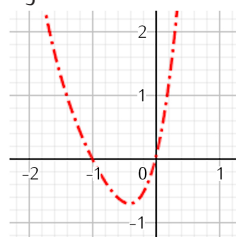
Inleiding

In deel I (*Euclides* 96-3) is een begin gemaakt met de analyse van de productvormen van derdegraadsvergelijkingen, in deel II (*Euclides* 96-4) het vervolg en nu deel III, het slot.

Vierdegraads functies

Een vierdegraads functie $x \rightarrow a(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ kan heel verschillende vormen aannemen, maar een groot aantal vormen blijft ook buiten bereik als we ons beperken tot reële waarden van p , q , r en s .

Zo kan $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 4x = x(x+1)(x^2 + 3x + 4)$ niet op deze manier geschreven worden. Een grafiek als in figuur 1 valt dan ook buiten de boot.



figuur 1

Toch blijft er genoeg over. Toepassing van de productregel voor de afgeleide geeft:

$$a[(x-q)(x-r)(x-s) + (x-p)(x-r)(x-s) + (x-p)(x-q)(x-s) + (x-p)(x-q)(x-r)].$$

Onder bepaalde voorwaarden kunnen we hiervoor ook schrijven:

$$a\left(\frac{f(x)}{x-p} + \frac{f(x)}{x-q} + \frac{f(x)}{x-r} + \frac{f(x)}{x-s}\right) = a\left(\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \frac{1}{x-r} + \frac{1}{x-s}\right)f(x) = a \frac{f(x)}{h(x)}$$

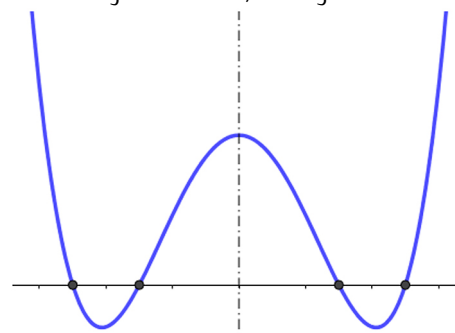
met $h(x)$ het *harmonisch totaal* ^[1] van de noemers in het linker lid.

In het algemeen geeft dit geen eenvoudig resultaat. In sommige gevallen wel. Als het gemiddelde van p en s ook het gemiddelde is van de andere twee nulpunten,

dan kunnen we schrijven (met $m = \frac{p+s}{2} = \frac{q+r}{2}$):

$$\frac{1}{h(m)} = \frac{1}{m-p} + \frac{1}{m-q} + \frac{1}{m-r} + \frac{1}{m-s} = 0$$

De termen vallen paarsgewijs tegen elkaar weg, en de afgeleide is 0. Dat is ook goed te verklaren, $x = m$ is immers symmetrie-as, zie figuur 2.



figuur 2

Voor het gemak nemen we hieronder $m = 0$, zodat de grafiek symmetrisch is t.o.v. de y -as.

Het functievoorschrift wordt dan

$$f(x) = a(x-p)(x-q)(x+p)(x+q), \text{ ook te schrijven als:}$$

$$f(x) = a(x^2 - p^2)(x^2 - q^2).$$

Hieruit volgt:

$$f'(x) = 2ax(x^2 - q^2) + 2ax(x^2 - p^2) = 2ax(2x^2 - (p^2 + q^2)) = 4ax(x^2 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)) \quad [1]$$

Direct valt af te lezen waar de toppen zich bevinden:

$$\text{bij } x = 0 \text{ en bij } x = \pm \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(p^2 + q^2)}. \quad [2]$$

Dit is ook op de volgende wijze te zien. Als we definiëren $t = x^2$, dan geldt dat $f: t \rightarrow a(t - p^2)(t - q^2)$ een kwadratische

functie is. Uiteraard ligt de top bij $t = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ (het gemiddelde van de twee nulpunten). Dit levert twee toppen op voor de grafiek bij $f(x)$.

De derde top volgt door te bedenken dat $f(t)$ ook te schrijven is als $a(p^2 - t)(q^2 - t)$, en dat $t \geq 0$.

Bij $t = 0$ is er dus, afhankelijk van het teken van a , een relatief maximum / minimum van $f(t)$. Dit levert voor $f(x)$ de top $(0, ap^2q^2)$. De y -waarde van beide andere toppen is eenvoudig te bepalen: $y_T = \frac{-a}{4}|p-q|^2$ (zie [2] uit deel 1). We hoeven alleen p en q te vervangen door de bijbehorende kwadraten: $y_T = \frac{-a}{4} \cdot (p^2 - q^2)^2$. [3]

Als geldt $p = q$, dan liggen de toppen bij $x = 0$ en bij $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2p^2} = \pm p$. Dat is niet zo verwonderlijk want dan geldt: $f'(x) = 4ax(x^2 - p^2)$.

Zijn er andere combinaties van p en q die gehele, of tenminste rationale toppen opleveren?

Uit [2] volgt dat de som van de kwadraten van p en q de helft van een kwadraat moeten zijn. Vergelijkbaar met rechthoeks zijden die volgens Pythagoras een rationale schuine zijde opleveren, maar dan net even anders. Als p en q niet gelijk zijn, geven 1 en 7 de kleinste oplossing. De toppen zitten dan bij $(0 \text{ en }) \pm 2$. Uiteraard voldoen dan alle waarden met $p = \pm 7q$ (of omgekeerd). Een paar andere combinaties voor p en q zijn: 7, 17; 7, 23; 17, 31 en 23, 47. Uiteraard zijn p en q verwisselbaar.

Voorbeeld

We gaan uit van: $g(x) = \frac{1}{20}(x+7)(x+1)(x-1)(x-7)$
 $= \frac{1}{20}(x^2 - 1)(x^2 - 49)$. De toppen van g zijn volgens [1] en [2]:
 $(-5, -28\frac{4}{5})$, $(0, 2\frac{9}{20})$ en $(5, -28\frac{4}{5})$.

Als we de grafiek één eenheid naar rechts verschuiven krijgen we:

$f(x) = \frac{1}{20}x(x+6)(x-2)(x-8) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{24}{5}x$.
 De toppen van f zijn dus $(-4, -28\frac{4}{5})$, $(1, 2\frac{9}{20})$ en $(6, -28\frac{4}{5})$.

We bekijken de raaklijn aan de grafiek van

$y = a(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)$ in het punt $(p, 0)$. Eerst de richtingscoëfficiënt: $f'(p) = 4ap(p^2 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)) = 4ap(\frac{1}{2}(p^2 - q^2)) = 2ap(p^2 - q^2)$.

Een vergelijking is $y = 2ap(p^2 - q^2)(x - p)$.

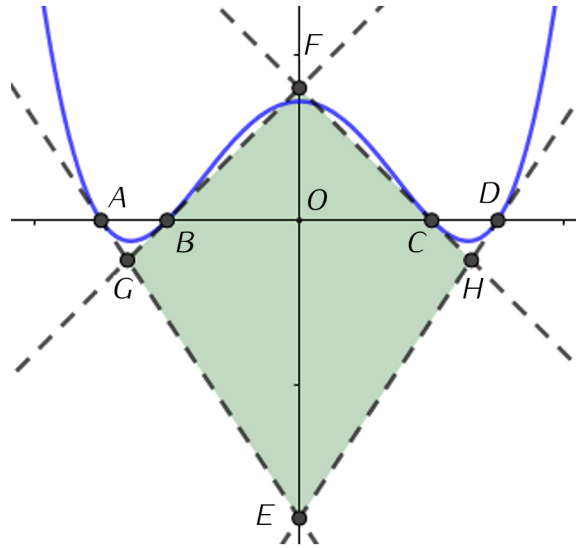
Het snijpunt met de y -as van deze raaklijn is $(0, -2a \cdot p^2(p^2 - q^2))$ [4]

Uiteraard is dit ook het snijpunt van de raaklijnen door $(-p, 0)$ en $(p, 0)$.

Verwisseling van p en q in [2] geeft de raaklijn in het punt $(q, 0)$:

$y = 2aq(q^2 - p^2)(x - q) = -2aq(p^2 - q^2)(x - q)$. [5]

De raaklijnen aan de grafiek in de snijpunten met x -as snijden elkaar dus twee aan twee op de symmetrieas.



figuur 3

De afstanden van deze punten tot de x -as verhouden zich als $p^2 : q^2$. De vier genoemde raaklijnen omsluiten een vlieger waarvan we de oppervlakte vrij eenvoudig kunnen berekenen. Gemakshalve nemen we even aan: $p > q > 0$. Het snijpunt H, zie figuur 3, van de raaklijnen in $C(q, 0)$ en $D(p, 0)$ is vrij eenvoudig te berekenen:

$$\begin{aligned} 2ap(p^2 - q^2)(x - p) &= -2aq(p^2 - q^2)(x - q) \leftrightarrow \\ p(x - p) &= -q(x - q) \leftrightarrow (p + q)x = p^2 + q^2 \leftrightarrow \\ x &= \frac{p^2 + q^2}{p + q} \end{aligned} \quad [6]$$

De y -coördinaat van H is verder niet van belang. We weten nu dat de lengte van de horizontale diagonaal GH van de vlieger gelijk is aan $\frac{2(p^2 + q^2)}{p + q}$.

De lengte van EF volgt uit [4] en [5]:

$$2aq^2(p^2 - q^2) + 2ap^2(p^2 - q^2) = 2a(p^2 + q^2)(p^2 - q^2).$$

De oppervlakte van $EHFG$ is dus:

$$\frac{1}{2} \times 2a(p^2 + q^2)(p^2 - q^2) \times \frac{2(p^2 + q^2)}{p + q} = 2a(p - q)(p^2 + q^2)^2.$$

Om een positieve uitkomst te garanderen kunnen we de formule $2|a(p - q)|(p^2 + q^2)^2$ gebruiken.

De tweede afgeleide van $f: x \mapsto a(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)$ is met behulp van [1] vrij eenvoudig te berekenen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4a(x^2 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)) + 4ax \cdot 2x = \\ 4a(3x^2 - \frac{1}{2}(p^2 + q^2)) &= 2a(6x^2 - (p^2 + q^2)). \end{aligned}$$

Nu geldt $f''(x) = 0 \leftrightarrow [(immers a \neq 0)] x^2 = \frac{p^2 + q^2}{6} \leftrightarrow$

$$x = \pm \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{6}} = \pm \frac{1}{6} \sqrt{6(p^2 + q^2)}. \quad [7]$$

Als er sprake is van drie toppen wijst deze vergelijking ook de x -coördinaten van beide buigpunten aan. De berekening van de y -coördinaat van beide buigpunten kan als volgt:

$$y = a\left(\frac{p^2+q^2}{6} - p^2\right)\left(\frac{p^2+q^2}{6} - q^2\right) = a\left(\frac{q^2-5p^2}{6}\right)\left(\frac{p^2-5q^2}{6}\right) = \frac{a}{36}(p^2-5q^2)(q^2-5p^2). \quad [8]$$

De y -coördinaten van de buigpunten zijn dus altijd rationaal, maar voor de x -coördinaten geldt dat niet. Uit [6] volgt dat, wanneer $p^2 + q^2$ gelijk is aan een zesde van een kwadraat, we goed zitten. Maar dat blijkt een onmogelijkheid^[2]. Een symmetrische vierdegraadsfunctie met rationale nulpunten, toppen én buigpunten blijkt dus niet zo eenvoudig te vinden. Om dit te illustreren is het misschien aardig om [7] te herschrijven:

$$x = \pm \frac{1}{6} \sqrt{6(p^2+q^2)} = \pm \frac{1}{6} \sqrt{6} \cdot \sqrt{p^2+q^2}.$$

Uiteraard zijn lang niet alle vierdegraadsfuncties symmetrisch, maar de verschilfunctie met de lijn door beide buigpunten (indien aanwezig) is dat wel!

Om dit laten zien gaan we gemakshalve uit van het bestaan van twee buigpunten, symmetrisch t.o.v. de oorsprong: $B_1(-b, f(-b))$ en $B_2(b, f(b))$. Zo nodig verschuiven we dus wat, dit tast het betoog niet aan. De tweede afgeleide van een vierdegraads polynoom is kwadratisch. Omdat moet gelden $f''(x) = 0$ in beide buigpunten kunnen we dus schrijven:

$$f''(x) = a(x+b)(x-b) = a(x^2-b^2) = ax^2 - ab^2.$$

$f'(x)$, de afgeleide van $f(x)$, is een primitieve hiervan:

$f'(x) = \frac{1}{3}ax^3 - ab^2x + C$ (met C een constante). Het functievoorschrift $f(x)$ zelf krijgen we door nogmaals te primitiveren:

$$f(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + Cx + D \text{ (met } D \text{ constant).}$$

De y -coördinaten van de buigpunten kunnen we nu berekenen:

$$f(b) = \frac{a}{12}b^4 - \frac{a}{2}b^4 + Cb + D = -\frac{5a}{12}b^4 + Cb + D.$$

$$\text{Hieruit volgt direct: } f(-b) = -\frac{5a}{12}b^4 - Cb + D.$$

Vanwege de puntsymmetrie moet gelden:

$$f(-b) + f(b) = 0. \text{ Hieruit volgt } D = \frac{5a}{12}b^4, \text{ zodat}$$

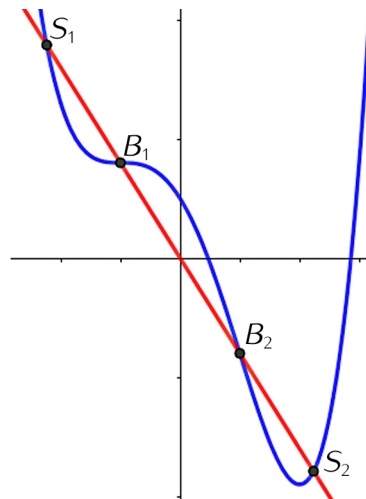
$f(\pm b) = \pm Cb$. De lijn door beide buigpunten wordt nu: $y = Cx$. We definiëren de verschilfunctie

$g : g(x) = f(x) - Cx$. Dus:

$$g(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + D = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + \frac{5a}{12}b^4.$$

Dit is te herschrijven als:

$$g(x) = \frac{a}{12}(x^4 - 6b^2x^2 + 5b^4) = \frac{a}{12}(x^2 - 5b^2)(x^2 - b^2).$$



figuur 4

Functie g is niet alleen symmetrisch in de y -as, maar er is ook een duidelijk verband tussen de nulpunten: $\pm b\sqrt{5}$ en $\pm b$. Hieruit volgt, zie figuur 4, onder andere: $S_1S_2 : B_1B_2 = S_1O : B_1O = \sqrt{5} : 1$ en dus:

$$\frac{S_1B_1}{B_1B_2} = \frac{S_1O - B_1O}{2B_1O} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ en } \frac{S_1B_2}{B_1B_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

De gulden snede duikt hier verrassende wijze op! Hoewel... de factor $\sqrt{5}$ komt niet helemaal uit de lucht vallen:

Volgens [8] geldt bij een symmetrische vierdegraadsfunctie dat de y -coördinaten van de buigpunten gelijk zijn aan: $\frac{a}{36}(p^2 - 5q^2)(q^2 - 5p^2)$. Bij de verschilfunctie met de lijn door de buigpunten moet deze uitkomst uiteraard 0 zijn. Voor het gemak veronderstellen we even $0 < p < q$. Nu geldt: $p^2 - 5q^2 < 0$, en dus ook $\frac{a}{36}(p^2 - 5q^2)(q^2 - 5p^2) = 0 \leftrightarrow q^2 - 5p^2 = 0 \leftrightarrow q^2 = 5p^2 \leftrightarrow q = p\sqrt{5}$.

Over de door de grafiek van f en de door de lijn ingesloten vlakdelen valt ook het nodige te vertellen^[3] maar dat laat ik nu even liggen.

Voorbeeld

De functie $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 3x$ heeft buigpunten bij $x = -3$ en bij $x = 1$. De y -coördinaten zijn respectievelijk -180 en -16 . De lijn l door beide buigpunten is te schrijven als $y = \frac{164}{4}(x-1) - 16 \leftrightarrow y = 41x - 57$.

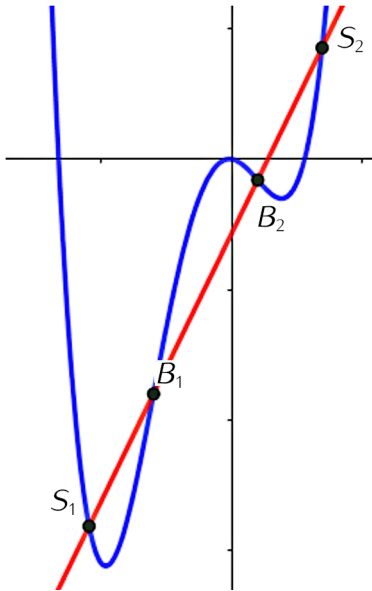
Als we de grafiek één eenheid naar rechts zouden schuiven, dan worden de x -coördinaten van de snijpunten met l : $\pm 2\sqrt{5}$ en ± 2 . Nu zijn dat van links

naar rechts: $-1 - 2\sqrt{5}$, -3 , -1 en $-1 + 2\sqrt{5}$.

Lijn l snijdt de grafiek van f in beide buigpunten, B_1 en B_2 , en bovendien in de punten S_1 en S_2 . Nu geldt:

$$|B_1B_2| = \sqrt{4^2 + 164^2} = \sqrt{26912} = 116\sqrt{2} \text{ en}$$

$$|S_1S_2| = 116\sqrt{2} \times \sqrt{5} = 116\sqrt{10}. \text{ Zie figuur 5.}$$



figuur 5

Een andere manier om symmetrie te garanderen is uit te gaan van de vorm $y = a(x - p)^2(x - q)^2$.

Zoals eenvoudig is na te gaan raakt deze grafiek de x -as in $(p, 0)$ en $(q, 0)$ en is de lijn $x = (p + q)/2$ symmetrieas.

Uiteraard zijn $(p, 0)$ en $(q, 0)$ twee toppen van de grafiek. De derde top ligt op de symmetrieas. Voor de y -coördinaat geldt:

$$y = a\left(\frac{p+q}{2} - p\right)^2\left(\frac{p+q}{2} - q\right)^2 = a\left(\frac{q-p}{2}\right)^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \\ = a\left(\frac{p-q}{2}\right)^4 = \frac{a}{16}|p - q|^2. \quad [9]$$

De overeenkomst met de top van een parabool is duidelijk en verklaarbaar.

We kunnen $y = a(x - p)^2(x - q)^2$ immers ook schrijven als $y = a((x - p)(x - q))^2$ of desgewenst als $y = \frac{1}{a}(a(x - p)(x - q))^2$.

De buigpunten bepalen we weer met de tweede afgeleide. We starten met $f(x) = a(x - p)^2(x - q)^2$. Met behulp van de productregel krijgen we dan:

$$f'(x) = a(2(x - p)(x - q)^2 + 2(x - q)(x - p)^2) = \\ 2a(x - p)(x - q)(2x - (p + q)).$$

Door nogmaals de productregel toe te passen krijgen we:

$$f''(x) = 2a[(x - q)(2x - (p + q)) + \\ (x - p)(2x - (p + q)) + 2(x - p)(x - q)] = \\ 2a(6x^2 - 6(p + q)x + p^2 + q^2 + 4pq).$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(p + q)x + p^2 + q^2 + 4pq = 0$$

(immers $a \neq 0$). Voor een buigpunt, of liever gezegd een paar buigpunten, is het in dit geval nodig en voldoende dat de discriminant groter dan 0 is.

$$\text{Er geldt: } D = 36(p + q)^2 - 24(p^2 + q^2 + 4pq) = \\ 12p^2 - 24pq + 12q^2 = 12(p - q)^2.$$

We zien nu dat er buigpunten zijn als p en q niet samenvallen, maar ook dat de bijbehorende

x -coördinaten *niet rationaal* zijn als p en q dat wel zijn.

Voor rationale oplossingen van $f''(x) = 0$ is het immers nodig dat $\sqrt{12(p - q)^2} (= 2|p - q|\sqrt{3})$ rationaal is.

De x -coördinaten van de twee buigpunten zijn te schrijven als: $\frac{p+q}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}|p - q|$. [10]

De kleinste van deze twee geven we aan met x_1 .

Voor het berekenen van de y -coördinaat nemen we aan dat $p < q$. Dan geldt:

$$x_1 - p = \frac{p+q}{2} - \frac{|p-q|}{6}\sqrt{3} - p = \frac{q-p}{2} - \frac{q-p}{6}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)(q - p) \\ x_1 - q = \frac{p+q}{2} - \frac{|p-q|}{6}\sqrt{3} - q = \frac{p-q}{2} - \frac{p-q}{6}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)(p - q)$$

Invullen in $y = a(x - p)^2(x - q)^2$ geeft $\frac{a}{36}|p - q|^4$.

Uiteraard geeft de invullen van de tweede mogelijkheid van [10] dezelfde uitkomst.

Ook de aanname $p < q$ is niet essentieel, en alleen bedoeld om de berekening iets te vereenvoudigen.

Noten

- [1] h is het *harmonisch totaal* van $k - p$, $k - q$ en $k - r$. Over dit begrip, verwant aan het harmonisch gemiddelde, is meer te lezen in mijn artikel in *Euclides* 94-5.
- [2] Niet zo moeilijk te bewijzen door gebruik te maken van het feit dat oneven kwadraten modulo 8 gelijk zijn aan 1.
- [3] Dit kwam aan de orde in het CE wiskunde B vwo van 2014 (1e tv). Zie ook *Euclides* 90-3 pg 10

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: gerardk@xs4all.nl