Gerard Koolstra

Waardevolle producten I

Door polynomen als productvormen te schrijven ontstaan er verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

Inleiding

Het is in het voorgezet onderwijs gebruikelijk om kwadratische functies te noteren als de som van machten.
Vormen als $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ komen vaker voor dan bijvoorbeeld $f(x) = 3(x-1)^2 - 27$, de vorm met afgesplitst kwadraat, of $f(x) = 3(x+2)(x-4)$, de *productvorm.*
Dit geldt algemener:
Notaties van de vorm $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ zijn populair, vooral als het gaat om opgaven waarbij toppen of raaklijnen een rol spelen. Dat is ook begrijpelijk: de somregel voor differentiëren is heel wat eenvoudiger dan de productregel.
Toch is het soms de moeite waard om de productvorm intact te laten en niet meteen uit te werken tot een som van machten. Dit kan, zoals we zullen zien, van pas komen bij het ontwerpen van 'mooi uitkomende' oefen- of toetsopgaven rond veeltermfuncties, en levert wellicht hier en daar een ontdekking op.

Eerstegraads functies

Wanneer het gaat om *lineaire* functies zijn de vormen $ax + b$ en $a(x-p)$ eenvoudig uitwisselbaar. De tweede vorm laat direct het snijpunt met de x-as zien: $(p, 0)$, en om die reden zullen we ook vooral $y = a(x-p)$ gebruiken als het gaat om een lijn door $(p, 0)$, en $y - q = a(x-p)$ of $y = a(x-p) + q$ voor lijnen door (p, q). Om complicaties te voorkomen stellen we steeds als eis dat a ongelijk aan 0 is.

Tweedegraads functies

Bij *tweedegraads* functies heeft het herschrijven van $ax^2 + bx + c$ als $a(x-p)(x-q)$, met $a \neq 0$, vaak iets meer voeten in de aarde, zeker als p en/of q niet geheel zijn.
De tweede vorm laat direct zien wat de nulpunten[1] zijn: p en q. Uiteraard heeft niet elke tweedegraadsfunctie reële nulpunten, via een verticale verschuiving kunnen we daar wel voor zorgen.
Ik beperk me tot $y = a(x-p)(x-q)$, met p en q geheel, althans rationaal. De resultaten zijn eenvoudig te generaliseren, zoals we zullen zien.
Het differentiëren van $y = a(x-p)(x-q)$ is iets lastiger dan $y = ax^2 + bx + c$, maar met de productregel is dat goed te doen:

$$y' = a \cdot 1 \cdot (x-q) + a(x-p) \cdot 1 =$$
$$a(2x - p - q) = 2a\left(x - \frac{p+q}{2}\right) \qquad [1]$$

Vooral de laatste vorm laat goed zien waar een maximum of minimum optreedt, namelijk voor $x = \frac{p+q}{2}$, het gemiddelde van p en q.
De waarde van dit maximum of minimum (oftewel de y-coördinaat van de top) is ook goed uit te drukken in p en q, een kwestie van $\frac{p+q}{2}$ substitueren voor x in $y = a(x-p)(x-q)$.

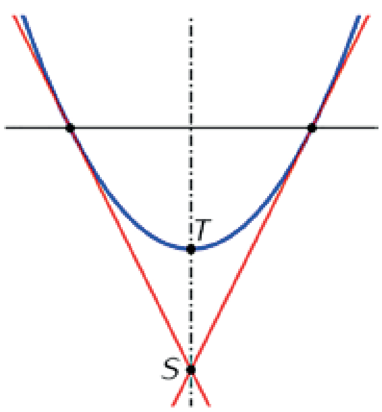
Ga na dat $\frac{p+q}{2} - p = \frac{p+q-2p}{2} = \frac{q-p}{2}$ en

$\frac{p+q}{2} - q = \frac{p+q-2q}{2} = \frac{p-q}{2}$. Dit geeft:

$$y_T = a\left(\frac{q-p}{2}\right)\left(\frac{p-q}{2}\right) = -a\left|\frac{p-q}{2}\right|^2 = -\frac{a}{4}\left|p-q\right|^2 \qquad [2]$$

$|p-q|$ is uiteraard de afstand tussen beide snijpunten met de x-as, en $\left|\frac{p-q}{2}\right|$ de afstand tussen een van genoemde snijpunten en de symmetrieas.
Toegepast op $y = 3(x+2)(x-4)$ geeft dat als y-waarde voor de top: $-\frac{3}{4} \cdot 6^2 = -27$.
Als we de parabool één eenheid naar links verplaatsen is de uitkomst snel te controleren: $y = 3(x+3)(x-3) = 3(x^2 - 9)$ heeft als (absoluut) minimum -27 voor $x = 0$.

De raaklijnen in de snijpunten met de x-as zijn vrij eenvoudig op te stellen:
Volgens [1] geldt: $f'(x) = a(2x - p - q)$. Substitutie van $x = p$ geeft: $f'(p) = a(p - q)$. Substitutie van $x = q$ zal gezien de symmetrie precies het tegengestelde opleveren: $f'(q) = a(q - p)$.
De raaklijn door $(p, 0)$ kunnen we dus schrijven als $y = a(p - q)(x - p)$.
De raaklijn door $(q, 0)$ wordt dan $y = a(q - p)(x - q) = -a(p - q)(x - p)$.
Voor het snijpunt geldt uiteraard dat $x_S = \frac{p+q}{2}$.
De y-coördinaat volgt weer door invullen:
$y_S = a(p - q)(\frac{q-p}{2}) = -\frac{a}{2}(p - q)(p - q) = -\frac{a}{2}\,|p - q|^2$. [3]
Als we dit vergelijken met [2], dan zien we dat de top van de parabool precies midden tussen dit snijpunt en de x-as zit. Dit is misschien nog wat beter in te zien door de parabool horizontaal zo te verschuiven dat de top op de y-as ligt. Gemakshalve nemen we ook $a = 1$.
We krijgen dan: $y = (x - p)(x + p) \leftrightarrow y = x^2 - p^2$ met top $(0, -p^2)$. De lijn door $P(p, 0)$ en $T(0, -p^2)$ heeft dus als richtingscoëfficiënt: p.
Uiteraard geldt nu $y' = 2x$. Dat levert voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door $P(p, 0)$: $2p$.
Hieruit volgt eenvoudig dat S precies twee keer zover van de x-as ligt als T, zie figuur 1.
Als de parabool de x-as niet snijdt kunnen we de x-as vervangen door een willekeurige horizontale lijn die de parabool wel snijdt.



figuur 1

Voorbeeld

$f(x) = -x^2 + 3x - 4$
De grafiek van f ligt geheel onder de x-as. Als we de grafiek vier eenheden omhoog schuiven krijgen we $g(x) = -x^2 + 3x = -x(x - 3)$.
We weten uit [2] en [3] dat de raaklijnen door (0; 0) en (3; 0) elkaar snijden (op de symmetrieas x = 1½) op hoogte 4½, en de top op hoogte 2¼ zit. Terug verschuiven geeft als snijpunt van de raaklijnen door (0, -4) en (3, -4) het punt (1½, ½), en als top (1½, -1¾).

Derdegraads functies

Interessanter wordt het bij derdegraadsfuncties. We gaan uit van $f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$, met $a \neq 0$. Voor de goede orde: niet alle derdegraads functies zijn zo te schrijven als we uitgaan van reële waarden voor p, q, en r. Ook niet na verticale verschuiving.
De grafiek bij $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$ bijvoorbeeld, snijdt elke horizontale lijn in slechts één punt. De grafiek is overal stijgend, wat eenvoudig kan worden geverifieerd met de afgeleide $f'(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$.
Deze grafiek heeft geen toppen.
Alle derdegraads functies *met twee toppen* zijn (wel) via een verticale verschuiving te herleiden tot de vorm: $f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$.
We kunnen er ook voor zorgen dat zo'n grafiek maar één gemeenschappelijk punt met de x-as heeft. Als geldt $p = q = r$, dan krijgen we $f(x) = a(x - p)^3$. In dat geval is het punt $(p, 0)$ buigpunt, met een horizontale raaklijn.

Zoals gezegd is het uitgangspunt:
$f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$.
Met de productregel is de afgeleide goed te berekenen, maar wat lastiger te vereenvoudigen:
$f'(x) = a[(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)]$. [4]
In het algemeen zijn de punten met horizontale raaklijn niet zo eenvoudig te zien. Bij een grafiek van een derdegraads functie zitten de toppen niet precies halverwege tussen twee naburige snijpunten met de x-as.
We komen hier later op terug.

Buigpunt

Het buigpunt van de grafiek is wel eenvoudig te berekenen met behulp van de drie, niet noodzakelijk verschillende nulpunten. Gemakshalve spreken we af: $k = \frac{p+q+r}{3}$. Het punt $B(k, f(k))$ is het buigpunt van de grafiek. Het ligt voor de hand voor het bewijs de tweede afgeleide te gebruiken.
Hoewel een vorm als $(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)$ mogelijk niet zo uitnodigt tot differentiëren (naar x) is het goed te doen. De afgeleide van $(x - q)(x - r)$ is $x - r + x - q = 2x - (r + q)$.
Voor de andere twee termen geldt mutatis mutandis hetzelfde. Dit geeft: (afgezien van een constante factor): $f''(x) = 6x - 2(p + q + r)$. Hieruit volgt dat $f''(x) = 0 \leftrightarrow$

$$x = \frac{p+q+r}{3} \leftrightarrow x = k$$

>

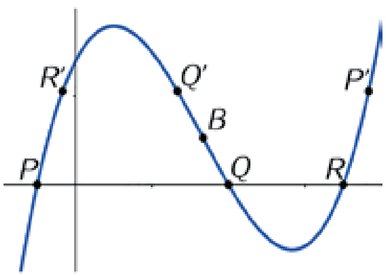
Omdat er in dit geval gegarandeerd tekenwisseling plaatsvindt bij $x = k$, is het ook zeker dat er echt een buigpunt is. De y-coördinaat van het buigpunt is uiteraard $f(k) = a(k - p)(k - q)(k - r)$.
We kunnen $k - p$ schrijven als

$\frac{p+q+r}{3} - \frac{3p}{3} = \frac{1}{3}(-2p + q + r)$, en voor $k - q$ en $k - r$ geldt iets dergelijks.
De y-coördinaat van het buigpunt is dus uitgedrukt in p, q, en r:

$$y_B = \frac{a}{27}(-2p+q+r)(p-2q+r)(p+q-2r) \qquad [5]$$

Het buigpunt is tevens punt van symmetrie van de grafiek. Een mooie manier om dat te zien, is de grafiek zo te verschuiven dat het buigpunt samenvalt met de oorsprong. Uitgaande van $p < q < r$ betekent dit dat $q = 0$. (Het buigpunt moet dan samenvallen met het middelste snijpunt met de x-as) en dat $r = -p$.

(Er moet gelden $\frac{p+0+r}{3} = 0 \leftrightarrow p + r = 0$).
We kunnen dus schrijven $g(x) = ax(x - p)(x + p) = -ax(p - x)(p + x)$. Uit de laatste vorm volgt bijna direct dat $g(-x) = -g(x)$, wat bewijst dat de oorsprong punt van symmetrie is van (de grafiek van) g. Als we de grafiek nu weer terug verschuiven over de vector $\begin{pmatrix} k \\ f(k) \end{pmatrix}$ blijft het buigpunt punt van symmetrie.
Op basis van deze symmetrie weten we dat behalve de punten $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ en $R(r, 0)$ ook de punten $P'(2k - p; 2f(k))$ etc. op de grafiek liggen, zie figuur 2.



figuur 2

Voorbeeld

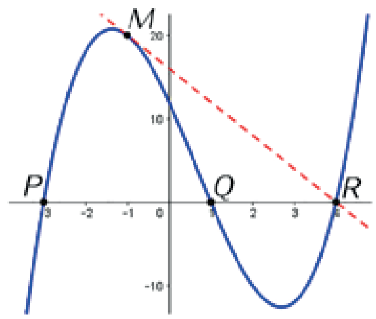
$f(x) = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 7)$. $k = \frac{-2+1+7}{3} = 2$ en

$f(k) = \frac{1}{5} \times 4 \times 1 \times -5 = -4$.

Het punt van symmetrie, tevens buigpunt, is dus $B(2, -4)$. De snijpunten met de x-as zijn uiteraard $P(-2, 0)$, $Q(1, 0)$ en $R(7, 0)$. Spiegeling in $B(2, -4)$ geeft ook nog $P'(6, -8)$, $Q'(3, -8)$ en $R'(-3, -8)$.

Middens

Een punt op de grafiek dat even ver van deze twee snijpunten met de x-as ligt, is ook interessant. Laten we als voorbeeld eens kijken naar de grafiek bij $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4)$ die de x-as snijdt in $P(-3, 0)$, $Q(1, 0)$ en $R(4, 0)$. De middelloodlijn van PQ gaat door $(-1, 0)$, en snijdt de grafiek in het punt $M(-1, 20)$, zie figuur 3.

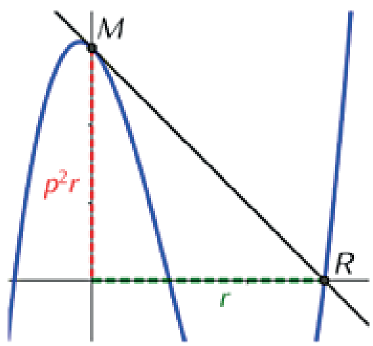


figuur 3

Nu geldt
$f'(x) = (x - 1)(x - 4) + (x + 3)(x - 4) + (x + 3)(x - 1)$ en dus $f'(-1) = 10 - 10 - 4 = -4$.
De raaklijn door M kunnen we schrijven als $y - 20 = -4(x + 1) \leftrightarrow y = -4x + 16 \leftrightarrow y = -4(x - 4)$ en snijdt de x-as dus precies in R!
Om te laten zien dat dit algemeen geldt, is het (weer) handig om de grafiek een stukje te verschuiven. We zorgen dat de middelloodlijn van PQ samenvalt met de y-as. Ook zorgen we via verticaal krimpen/rekken ervoor dat $a = 1$.
We kunnen nu schrijven: $f(x) = (x - p)(x + p)(x - r)$. Nu geldt: $f(0) = p^2r$ en dus $M = (0, p^2r)$ en $f'(x) = (x + p)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x + p) = 2x(x - r) + x^2 - p^2$. Hieruit volgt: $f'(0) = -p^2$.
We zagen eerder al dat

geldt $f(0) = p^2r$ en dus geldt: $f'(0) = \frac{f(0)}{0-r} = -p^2$ en dat

is eigenlijk voldoende om in te zien dat de raaklijn door R gaat, zie figuur 4. We kunnen eventueel de vergelijking van de raaklijn door M schrijven als $y - p^2r = -p^2x$ en dan geeft invullen van $(r, 0)$ bevestiging van wat we eigenlijk al wisten.



figuur 4

Het kan uiteraard ook zonder bovenstaande transformaties. Gemakshalve definiëren we $m = \frac{p+q}{2}$, en we gebruiken wat we eerder bij de tweedegraadsfuncties zagen: $m - p = \frac{q-p}{2}$ en $m - q = \frac{p-q}{2} = -(m-p)$.

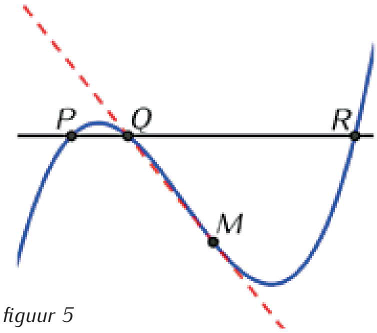
Hieruit volgt: $(m-p)(m-q) = -(m-p)^2 = -(\frac{p-q}{2})^2 = -\frac{1}{4}|p-q|^2$. Waarbij $|p-q|$ weer de afstand is tussen P en Q. Nu hebben we:

$f'(m) = a[(m-q)(m-r) + (m-p)(m-r) + (m-p)(m-q)] = a[-(m-p)(m-r) + (m-p)(m-r) - (m-p)^2] = -\frac{a}{4}\cdot|p-q|^2$ [6]

en: $f(m) = a(m-p)(m-q)(m-r) = -\frac{a}{4}\cdot|p-q|^2(m-r) = f'(m)(m-r)$ [7]

De raaklijn door M aan de grafiek kan geschreven worden als: $y - f(m) = f'(m)(x-m)$ en dus, zie [7], als $y - f'(m)(m-r) = f'(m)(x-m)$. Voor het snijpunt van deze lijn met de x-as geldt $y = 0$ en dus:
$-f'(m)(m-r) = f'(m)(x-m) \leftrightarrow [f'(m) \neq 0]\ -(m-r) = (x-m) \leftrightarrow r - m = x - m \leftrightarrow x = r$.

Het bewijs laat ook zien dat M niet per se op de middelloodlijn van twee *naburige* snijpunten hoeft te liggen. Figuur 5, waar M op de middelloodlijn van PR ligt, illustreert dit.



figuur 5

In deel II komt aan bod: top op de x-as, raaklijn door het buigpunt en toppen en nulpunten rationaal. In deel III gaat het over vierdegraads vergelijkingen.

Noten

[1] Nulpunten zijn geen punten maar getallen: de oplossingen van $f(x) = 0$.

Gerard Koolstra

Waardevolle producten II

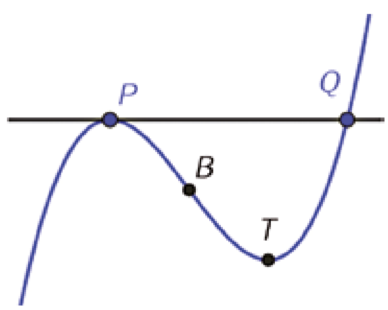
Door polynomen als productvormen te schrijven doe je verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

Inleiding

In deel I (*Euclides* 96-3) is een begin gemaakt met de analyse van de productvormen van derdegraadsvergelijkingen. Daar gaan we nu mee verder.

Top op de x-as

Als we uitgaan van een derdegraads kromme met twee toppen, kunnen we deze natuurlijk ook zo verschuiven dat een van de toppen precies op de x-as terechtkomt. Als we de linkertop op de x-as plaatsen kunnen we de functie daarna schrijven als $f(x) = a(x-p)^2(x-q)$, zie figuur 1.



figuur 1

De x-coördinaat van het buigpunt is nu $\frac{2p+q}{3}$: het gewogen gemiddelde van p en q, waarbij p twee keer meetelt door het dubbele nulpunt. Merk op dat het buigpunt horizontaal gezien precies ligt op een derde van PQ. De y-coördinaat berekenen we met:

$$y_B = \frac{a}{27}(-p+q)(-p+q)(2p-2q) = -\frac{2a}{27}(q-p)^3$$

Spiegelen van P in B geeft de tweede top

$$T: \left(\frac{2p+q}{3}, -\frac{4a}{27}(q-p)^3\right) \qquad [1]$$

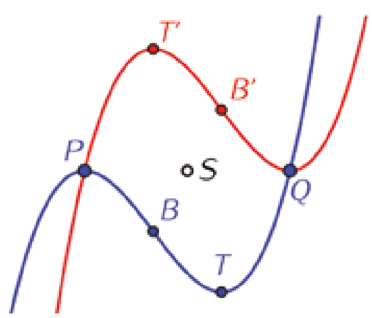
Dit punt ligt horizontaal gezien precies op twee derde van PQ.

Als we uitgaan van $f(x) = a(x-p)^2(x-q)$ ziet de afgeleide er ook wat prettiger uit:
$f'(x) = a[2(x-p)(x-q) + (x-p)^2] =$
$a[(x-p)(3x-(2q+p)]$.

Hiermee zijn de x-coördinaten van de toppen uiteraard ook te berekenen.
Wanneer we de rechtertop kiezen als raakpunt met de x-as wordt het functievoorschrift $f(x) = a(x-q)^2(x-p)$.
In dat geval geldt:

$$x_B = \frac{p+2q}{3} \text{ en } x_T = \frac{2p+q}{3}$$

Horizontaal gezien verwisselen ze van plaats.
De y-coördinaten zijn nu respectievelijk $\frac{2a}{27}(q-p)^3$ en $\frac{4a}{27}(q-p)^3$. Verticaal gezien is er sprake van een spiegeling in de x-as. We kunnen dit korter en krachtiger formuleren met behulp van punt S, het midden van P en Q. Beide krommen, $y = a(x-p)^2(x-q)$ en $y = a(x-q)^2(x-p)$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. punt S, zie figuur 2.



figuur 2

Bij spiegeling in $S(\frac{p+q}{2}, 0)$ heeft een punt (x_1, y_1) als beeldpunt: $(p + q - x_1, - y_1)$.
Om aan te tonen dat $y = a(x - p)^2(x - q)$ en $y = a(x - q)^2(x - p)$ elkaars spiegelbeeld zijn, gaan we uit van een punt (x_1, y_1) op $y = a(x - p)^2(x - q)$ en laten zien dat $(p + q - x_1, - y_1)$ op de kromme $y = a(x - q)^2(x - p)$ ligt. Een kwestie van invullen en uitwerken:
$a(p + q - x_1 - q)^2(p + q - x_1 - p) =$
$(p - x_1)^2(q - x_1) = -(x_1 - p)^2(x_1 - q) = -y_1$.

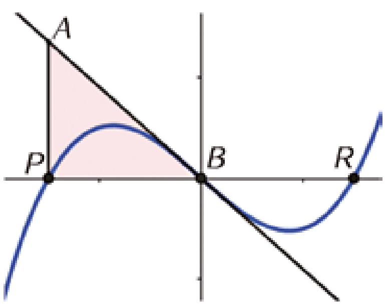
Het is misschien goed om erop te wijzen dat, uitgaande van rationale waarden voor a, p en q, de toppen (en uiteraard ook het buigpunt) rationale waarden hebben. Het is ook niet zo moeilijk om waarden voor p en q te kiezen waarbij alle x-coördinaten geheel zijn.

Voorbeeld

Als we uitgaan van $p = -1$ en $q = 5$ (zodat het verschil $q - p$ een drievoud is), krijgen we $y = a(x + 1)^2(x - 5)$, met toppen (-1, 0) en (3, $-32a$). Met $a = ¼$ krijgen we dan (1, 0) en (3, -8) als toppen, en (1, -4) als buigpunt. Desgewenst verschuiven we de grafiek nog wat naar boven, bijvoorbeeld drie eenheden. Het functievoorschrift wordt dan $y = ¼\,(x + 1)^2(x - 5) + 3$ en dit is ook te schrijven als: $y = ¼x^3 - ¾x^2 - 2¼x + 1¾$, en we weten nu zeker dat de toppen (en het buigpunt) 'mooi uitkomen'. Daar staat tegenover dat er geen enkele garantie meer is dat ook de nulpunten mooi uitkomen. We komen later terug op de vraag hoe ervoor gezorgd kan worden, dat zowel de snijpunten met de x-as als de toppen rationale coördinaten hebben.

Raaklijn door het buigpunt

Het opstellen van de raaklijn door het buigpunt is een mooie oefening waar doorgaans de functie zelf, de eerste en de tweede afgeleide een centrale rol spelen. We bekijken eerst de situatie waarbij het buigpunt in de oorsprong ligt, zie figuur 3.



figuur 3

Uitgaande van $g(x) = ax(x - p)(x + p)$ krijgen we:
$g'(x) = a[(x - p)(x + p) + x(x + p) + x(x - p)] =$
$a(3x^2 - p^2) \rightarrow g'(0) = -ap^2$.
De raaklijn door het buigpunt heeft dus als vergelijking $y = -ap^2x$.
Dat betekent dat in figuur 3 AP gelijk is aan $-ap^3$ en de oppervlakte van driehoek PBA gelijk aan $\frac{a}{2}p^4$.
Nu het algemene(re) geval. Als het buigpunt niet op de x-as ligt geldt (met $k = \frac{p+q+r}{3}$):

$$f'(k) = a(k - q)(k - r) + a(k - p)(k - r) + a(k - p)(k - q) =$$

$$\frac{f(k)}{k-p}+\frac{f(k)}{k-q}+\frac{f(k)}{k-r} =$$

$$f(k)\left(\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}\right) \qquad [2]$$

De raaklijn door het buigpunt is nu te schrijven als:
$y - f(k) = f'(k)(x - k) \leftrightarrow$

$$y - f(k) = f(k)\left(\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}\right)(x - k)$$

We stellen $\frac{1}{h}=\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}$ [1].

De vergelijking van de raaklijn in het buigpunt kan nu geschreven worden als:

$$y - f(k) = f(k)\ \frac{1}{h}\ (x - k) \qquad [3]$$

Voor het snijpunt van de raaklijn door het buigpunt met de x-as geldt nu:
$-f(k) = f(k)\ \frac{1}{h}\ (x - k) \leftrightarrow$

$[f(k) \neq 0]\ \frac{1}{h}(x - k) = -1 \leftrightarrow$

$$x - k = -h \leftrightarrow x = k - h \qquad [4]$$

Voorbeeld

$y = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 7)$. Hier geldt: $k = \frac{-2+1+7}{3} = 2$ en
$f(k) = \frac{1}{5} \times 4 \times 1 \times -5 = -4$. Het buigpunt is dus (2, -4).
We kunnen nu (het omgekeerde van) h berekenen:
$\frac{1}{h}=\frac{1}{2--2}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2-7} = \frac{21}{20}$, dus $h = \frac{20}{21}$.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn door het buigpunt is (zie [2; 3]): $-4\cdot\frac{21}{20} = -\frac{21}{5} = -4\frac{1}{5}$.
Een vergelijking van de buigpuntraaklijn is dus

$y + 4 = -4\frac{1}{5}(x - 2)$.

Desgewenst kan dit herschreven worden als

$y = -4\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$ of $y = -4\frac{1}{5}(x - 1\frac{1}{21})$.

Deze raaklijn snijdt de x-as dus in $(1\frac{1}{21}, 0)$.
De x-coördinaat is inderdaad gelijk aan $k - h$.
Immers: $2 - \frac{20}{21} = 1\frac{1}{21}$.

Toppen en nulpunten rationaal

Zoals eerder gemeld is de vergelijking $f'(x) = 0$ in de vorm: $(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)$ niet zo eenvoudig op te lossen. Bij wijze van uitzondering gaan we dit schrijven als som van machten van x.
Uitwerken geeft:
$3x^2 - 2(p + q + r)x + pq + pr + qr = 0 \leftrightarrow$

$$x^2 - 2\left(\frac{p+q+r}{3}\right)x + \frac{pq+pr+qr}{3} = 0$$

Merk op dat het gemiddelde van p, q en r (ofwel de x-coördinaat van het buigpunt) hier een rol speelt, evenals het gemiddelde van pq, pr en rq.

Met de afspraken $k = \frac{p+q+r}{3}$ en $l = \frac{pq+pr+qr}{3}$ kunnen

we de oplossing van $f'(x) = 0$ kort noteren:
$x^2 - 2kx + l = 0 \leftrightarrow$
$(x - k)^2 = k^2 - l \leftrightarrow$
$x = k \pm \sqrt{k^2 - l}$ [5]

Deze uitdrukking bevestigt dat het buigpunt precies het midden van de twee toppen is.
Als we uitgaan van hele, of in ieder geval rationale, waarden voor p, q en r (en a) bepaalt de uitkomst van $k^2 - l$ of de coördinaten van de toppen rationaal zijn.
Als we $k^2 - l$ weer uitdrukken in p, q en r krijgen we:

$$k^2 - l = \left(\frac{p+q+r}{3}\right)^2 - \frac{pq+pr+qr}{3} =$$

$$\frac{(p+q+r)^2}{9} + \frac{pq+pr+qr}{3} =$$

$$\frac{(p+q+r)^2 - 3(pq+pr+qr)}{9}$$

Als $(p + q + r)^2 - 3(pq + pr + qr)$ een kwadraat is, zeg n^2, dan is $k^2 - l$ het kwadraat van een getal $\frac{n}{3}$.
Om de berekeningen wat te vereenvoudigen veronderstellen we $p = 0$ (en $r \neq 0$). $(p + q + r)^2 - 3(pq + pr + qr)$ gaat dan over in $(q + r)^2 - 3qr = q^2 - qr + r^2$.
Wanneer ook geldt $q = 0$ is deze vorm altijd het kwadraat van r, en dus $k^2 - m$ gelijk aan $\left(\frac{r}{3}\right)^2$.

In dat geval geldt: $f(x) = ax^2(x - r)$ en dus:
$f'(x) = 2ax(x - r) + ax^2 = ax(3x - 2r)$.
Hieruit valt af te leiden dat er toppen zijn voor $x = 0$ en $x = \frac{2r}{3}$.

Iets algemener geldt dat de grafiek van de functie $f(x) = a(x - p)^2(x - r)$ altijd toppen met rationale coördinaten heeft, een voor $x = p$ en een voor $x = \frac{p+2r}{3}$.

Dit laatste kan, zonder differentiëren, snel berekend worden door te bedenken dat bij een derdegraads functie het buigpunt precies tussen beide toppen in ligt, en de x-coördinaat van het buigpunt in dit geval (dus $p = q$) gelijk is aan $\frac{2p+r}{3}$.

De *som* van de x-coördinaten van beide toppen moet dus gelijk zijn aan $\frac{4p+2r}{3}$.

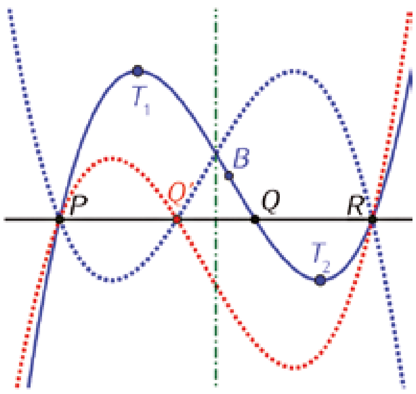
Omdat de ene top ligt bij $x = p$ $(= \frac{3p}{3})$ moet de andere top liggen op de lijn $x = \frac{p+2r}{3}$.

Maar uitgaan van $p = q = 0$ is uiteraard een echte beperking. Die laten we nu los. Wel gaan we gemakshalve uit van $p = 0$ en $0 < q < r < 100$. Via een aanpak die we hier niet uit de doeken zullen doen[2], kunnen we berekenen dat $q^2 - qr + r^2$ een kwadraat is voor de volgende paren:

q	5	7	9	11	13	15	17	19
r	8	15	24	35	48	63	80	99

Omdat verwisseling van q en r in de uitdrukking $q^2 - qr + r^2$ deze niet verandert, mogen we in principe in bovenstaande tabel q en r ook verwisselen.
Maar we hadden afgesproken dat $q < r$.
Interessanter is dat we q mogen vervangen door $r - q$.
Immers
$(r - q)^2 - (r - q)r + r^2 =$
$r^2 - 2rq + q^2 - r^2 + qr + r^2 =$
$q^2 - qr + r^2$.
Maar er is meer: Hierboven namen we steeds aan $p = 0$. In feite staan alle bovenstaande tweetallen (q, r) voor *reeksen* drietallen. Zo hoort bij het tweetal (5, 8) niet alleen het drietal (0, 5, 8) maar alle drietallen van de vorm $(p, p + 5, p + 8)$. De getallen kunnen ook allemaal met een rationale factor vermenigvuldigd worden. Dit kan allemaal ingezien worden door de grafiek in gedachten >

horizontaal te verplaatsen, of horizontaal te vermenigvuldigen met een rationaal getal. Om in te zien dat we bijvoorbeeld het drietal (-1, 4, 7) door het drietal (-1, 2, 7) kunnen vervangen is het misschien aardig om de grafiek van $y = (x + 1)(x - 4)(x - 7)$ te vergelijken met die van $y = -(x + 1)(x - 2)(x - 7)$, zie figuur 4.



figuur 4

Zij zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $x = 3$. Wanneer we deze laatste grafiek weer spiegelen in de x-as krijgen we $y = (x + 1)(x - 2)(x - 7)$. Beide laatstgenoemde grafieken snijden de x-as in de punten P, Q' en R. Merk op dat $PQ' = QR$ en $Q'R = QP$. Meer algemeen gaat het om een spiegeling in de verticale lijn $x = \frac{p+r}{2}$, door het midden van PR.

Voorbeeld

We gaan uit het eerste tweetal in de tabel: (5, 8). We veranderen dit in (3, 8). Dit geeft het drietal (0, 3, 8), wat we transformeren tot (-2, 1, 6). We weten dus dat bijvoorbeeld $y = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 6)$ twee toppen heeft met rationale coördinaten. De berekening van deze coördinaten loopt via het bepalen van $k^2 - l$ (zie [5]).
In dit geval geldt $p = -2$, $q = 1$ en $r = 6$, zodat

$$k = \frac{-2+1+6}{3} = \frac{5}{3},\ k^2 = \frac{25}{9} \text{ en}$$

$$l = \frac{pq+pr+qr}{3} = \frac{-2-12+6}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Dit geeft voor de x-coördinaten van de toppen:

$$x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{8}{3}} = \frac{5}{3} \pm \frac{7}{3} \leftrightarrow$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ of } x = 4$$

De toppen zijn $(-\frac{2}{3}, 2\frac{26}{27})$ en $(4, -7\frac{1}{5})$.

Noten

[1] h is het *harmonisch totaal* van $k - p$, $k - q$ en $k - r$. Over dit begrip, verwant aan het harmonisch gemiddelde, is meer te lezen in mijn artikel in *Euclides* 94-5.

[2] Voor achtergronden zie bijvoorbeeld: Martin Kindt (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut, p. 90.

Gerard Koolstra

Waardevolle producten III

Door polynomen als productvormen te schrijven doe je verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

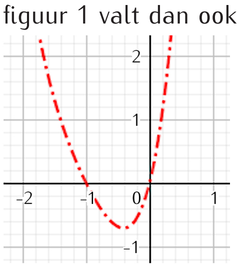
Inleiding

In deel I (*Euclides* 96-3) is een begin gemaakt met de analyse van de productvormen van derdegraadsvergelijkingen, in deel II (Euclides 96-4) het vervolg en nu deel III, het slot.

Vierdegraads functies

Een vierdegraads functie $x \to a(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ kan heel verschillende vormen aannemen, maar een groot aantal vormen blijft ook buiten bereik als we ons beperken tot reële waarden van p, q, r en s.

Zo kan $x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 4x = x(x+1)(x^2+3x+4)$ niet op deze manier geschreven worden. Een grafiek als in figuur 1 valt dan ook buiten de boot.



figuur 1

Toch blijft er genoeg over. Toepassing van de productregel voor de afgeleide geeft:

$a[(x-q)(x-r)(x-s) + (x-p)(x-r)(x-s)$
$+ (x-p)(x-q)(x-s) + (x-p)(x-q)(x-r)]$.

Onder bepaalde voorwaarden kunnen we hiervoor ook schrijven:

$$a\left(\frac{f(x)}{x-p}+\frac{f(x)}{x-q}+\frac{f(x)}{x-r}+\frac{f(x)}{x-s}\right)=a\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}+\frac{1}{x-s}\right)f(x)$$
$$=a\frac{f(x)}{h(x)}$$

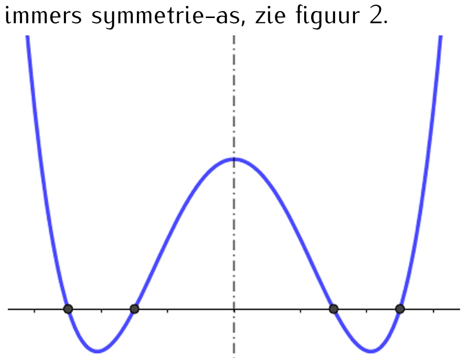
met $h(x)$ het *harmonisch totaal* [1] van de noemers in het linker lid.

In het algemeen geeft dit geen eenvoudig resultaat. In sommige gevallen wel. Als het gemiddelde van p en s ook het gemiddelde is van de andere twee nulpunten,

dan kunnen we schrijven (met $m = \frac{p+s}{2} = \frac{q+r}{2}$):

$$\frac{1}{h(m)}=\frac{1}{m-p}+\frac{1}{m-q}+\frac{1}{m-r}+\frac{1}{m-s}=0$$

De termen vallen paarsgewijs tegen elkaar weg, en de afgeleide is 0. Dat is ook goed te verklaren, $x = m$ is immers symmetrie-as, zie figuur 2.



figuur 2

Voor het gemak nemen we hieronder $m = 0$, zodat de grafiek symmetrisch is t.o.v. de y-as.

Het functievoorschrift wordt dan

$f(x) = a(x-p)(x-q)(x+p)(x+q)$, ook te schrijven als:

$f(x) = a(x^2-p^2)(x^2-q^2)$.

Hieruit volgt:

$f'(x) = 2ax(x^2-q^2) + 2ax(x^2-p^2) = 2ax(2x^2-(p^2+q^2))$
$= 4ax(x^2 - ½(p^2+q^2))$ [1]

Direct valt af te lezen waar de toppen zich bevinden:

bij $x = 0$ en bij $x = \pm\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}} = \pm½\sqrt{2(p^2+q^2)}$. [2]

Dit is ook op de volgende wijze te zien. Als we definiëren $t = x^2$, dan geldt dat $f: t \to a(t-p^2)(t-q^2)$ een kwadratische

functie is. Uiteraard ligt de top bij $t = ½(p^2 + q^2)$ (het gemiddelde van de twee nulpunten). Dit levert twee toppen op voor de grafiek bij $f(x)$.
De derde top volgt door te bedenken dat $f(t)$ ook te schrijven is als $a(p^2 - t)(q^2 - t)$, en dat $t \geq 0$.
Bij $t = 0$ is er dus, afhankelijk van het teken van a, een relatief maximum / minimum van $f(t)$. Dit levert voor $f(x)$ de top $(0, ap^2q^2)$. De y-waarde van beide andere toppen is met behulp van [2] (uit deel 1) eenvoudig te bepalen. We hoeven alleen p en q te vervangen door de bijbehorende kwadraten: $y_T = \frac{-a}{4} \cdot (p^2 - q^2)^2$. [3]

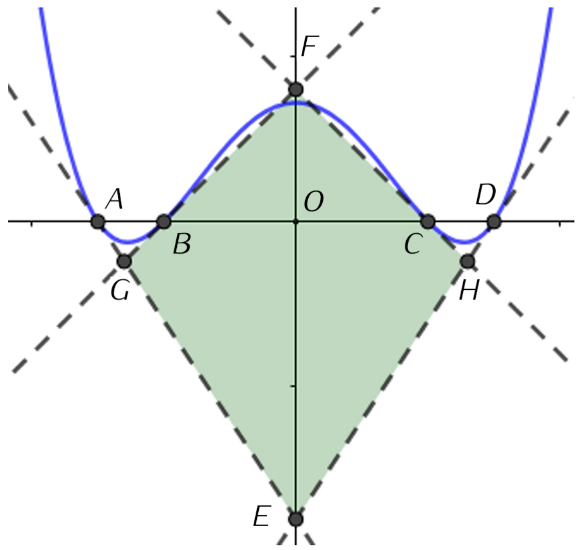
Als geldt $p = q$, dan liggen de toppen bij $x = 0$ en bij $x = \pm½\sqrt{2 \cdot 2p^2} = \pm p$. Dat is niet zo verwonderlijk want dan geldt: $f'(x) = 4ax(x^2 - p^2)$.
Zijn er andere combinaties van p en q die gehele, of tenminste rationale toppen opleveren?
Uit [2] volgt dat de som van de kwadraten van p en q de helft van een kwadraat moeten zijn. Vergelijkbaar met rechthoekszijden die volgens Pythagoras een rationale schuine zijde opleveren, maar dan net even anders. Als p en q niet gelijk zijn, geven 1 en 7 de kleinste oplossing. De toppen zitten dan bij (0 en) ±2.
Uiteraard voldoen dan alle waarden met $p = \pm 7q$ (of omgekeerd). Een paar andere combinaties voor p en q zijn: 7, 17; 7, 23; 17, 31 en 23, 47. Uiteraard zijn p en q verwisselbaar.

Voorbeeld

We gaan uit van: $g(x) = \frac{1}{20}(x + 7)(x + 1)(x - 1)(x - 7)$ $= \frac{1}{20}(x^2 - 1)(x^2 - 49)$. De toppen van g zijn volgens [1] en [2]: $(-5, -28\frac{4}{5})$, $(0, 2\frac{9}{20})$ en $(5, -28\frac{4}{5})$.
Als we de grafiek één eenheid naar rechts verschuiven krijgen we:
$f(x) = \frac{1}{20}x(x + 6)(x - 2)(x - 8) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{24}{5}x$.
De toppen van f zijn dus $(-4, -28\frac{4}{5})$, $(1, 2\frac{9}{20})$ en $(6, -28\frac{4}{5})$.

We bekijken de raaklijn aan de grafiek van $y = a(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)$ in het punt $(p, 0)$. Eerst de richtingscoëfficiënt: $f'(p) = 4ap(p^2 - ½(p^2 + q^2)) = 4ap(½(p^2 - q^2)) = 2ap(p^2 - q^2)$.
Een vergelijking is $y = 2ap(p^2 - q^2)(x - p)$.
Het snijpunt met de y-as van deze raaklijn is $(0, -2a \cdot p^2(p^2 - q^2))$ [4]
Uiteraard is dit ook het snijpunt van de raaklijnen door $(-p, 0)$ en $(p, 0)$.
Verwisseling van p en q in [2] geeft de raaklijn in het punt $(q, 0)$:
$y = 2aq(q^2 - p^2)(x - q) = -2aq(p^2 - q^2)(x - q)$. [5]

De raaklijnen aan de grafiek in de snijpunten met x-as snijden elkaar dus twee aan twee op de symmetrieas.



figuur 3

De afstanden van deze punten tot de x-as verhouden zich als $p^2 : q^2$. De vier genoemde raaklijnen omsluiten een vlieger waarvan we de oppervlakte vrij eenvoudig kunnen berekenen. Gemakshalve nemen we even aan: $p > q > 0$. Het snijpunt H, zie figuur 3, van de raaklijnen in $C(q, 0)$ en $D(p, 0)$ is vrij eenvoudig te berekenen:
$2ap(p^2 - q^2)(x - p) = -2aq(p^2 - q^2)(x - q) \leftrightarrow$
$p(x - p) = -q(x - q) \leftrightarrow (p + q)x = p^2 + q^2 \leftrightarrow$
$x = \frac{p^2 + q^2}{p + q}$ [6]

De y-coördinaat van H is verder niet van belang. We weten nu dat de lengte van de horizontale diagonaal GH van de vlieger gelijk is aan $\frac{2(p^2 + q^2)}{p + q}$.

De lengte van EF volgt uit [4] en [5]:
$2aq^2(p^2 - q^2) + 2ap^2(p^2 - q^2) = 2a(p^2 + q^2)(p^2 - q^2)$.
De oppervlakte van $EHFG$ is dus:
$½ \times 2a(p^2 + q^2)(p^2 - q^2) \times \frac{2(p^2 + q^2)}{p + q} = 2a(p - q)(p^2 + q^2)^2$.
Om een positieve uitkomst te garanderen kunnen we de formule $2|a(p - q)|(p^2 + q^2)^2$ gebruiken.

De tweede afgeleide van $f : x \to = a(x^2 - p^2)(x^2 - q^2)$ is met behulp van [1] vrij eenvoudig te berekenen:
$f''(x) = 4a(x^2 - ½(p^2 + q^2)) + 4ax \cdot 2x =$
$4a(3x^2 - ½(p^2 + q^2)) = 2a(6x^2 - (p^2 + q^2))$.
Nu geldt $f''(x) = 0 \leftrightarrow$ [(immers $a \neq 0$] $x^2 = \frac{p^2 + q^2}{6} \leftrightarrow$
$x = \pm\sqrt{\frac{p^2 + q^2}{6}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6(p^2 + q^2)}$. [7]

Als er sprake is van drie toppen wijst deze vergelijking ook de x-coördinaten van beide buigpunten aan. De berekening van de y-coördinaat van beide buigpunten kan als volgt:

$$y = a\left(\frac{p^2+q^2}{6} - p^2\right)\left(\frac{p^2+q^2}{6} - q^2\right) = a\left(\frac{q^2-5p^2}{6}\right)\left(\frac{p^2-5q^2}{6}\right)$$
$$= \frac{a}{36}(p^2-5q^2)(q^2-5p^2). \qquad [8]$$

De y-coördinaten van de buigpunten zijn dus altijd rationaal, maar voor de x-coördinaten geldt dat niet. Uit [6] volgt dat, wanneer $p^2 + q^2$ gelijk is aan een zesde van een kwadraat, we goed zitten. Maar dat blijkt een onmogelijkheid[2]. Een symmetrische vierdegraadsfunctie met rationale nulpunten, toppen én buigpunten blijkt dus niet zo eenvoudig te vinden. Om dit te illustreren is het misschien aardig om [7] te herschrijven:

$x = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6(p^2+q^2)} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{6}\cdot\sqrt{p^2+q^2}$.

Uiteraard zijn lang niet alle vierdegraadsfuncties symmetrisch, maar de verschilfunctie met de lijn door beide buigpunten (indien aanwezig) is dat wel!

Om dit laten zien gaan we gemakshalve uit van het bestaan van twee buigpunten, symmetrisch t.o.v. de oorsprong: $B_1(-b, f(-b))$ en $B_2(b, f(b))$. Zo nodig verschuiven we dus wat, dit tast het betoog niet aan.

De tweede afgeleide van een vierdegraads polynoom is kwadratisch. Omdat moet gelden $f''(x) = 0$ in beide buigpunten kunnen we dus schrijven:

$f''(x) = a(x+b)(x-b) = a(x^2 - b^2) = ax^2 - ab^2$.

$f'(x)$, de afgeleide van $f(x)$, is een primitieve hiervan:

$f'(x) = \frac{1}{3}ax^3 - ab^2x + C$ (met C een constante). Het functievoorschrift $f(x)$ zelf krijgen we door nogmaals te primitiveren:

$f(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + Cx + D$ (met D constant).

De y-coördinaten van de buigpunten kunnen we nu berekenen:

$f(b) = \frac{a}{12}b^4 - \frac{a}{2}b^4 + Cb + D = -\frac{5a}{12}b^4 + Cb + D$.

Hieruit volgt direct: $f(-b) = -\frac{5a}{12}b^4 - Cb + D$.

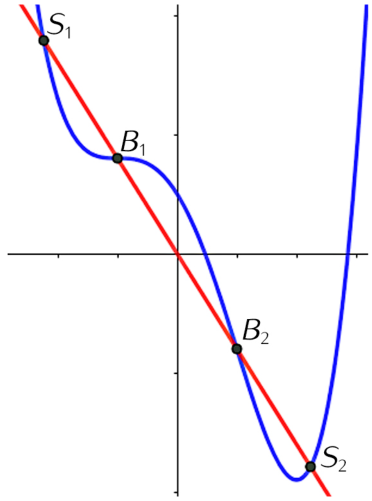
Vanwege de puntsymmetrie moet gelden:

$f(-b) + f(b) = 0$. Hieruit volgt $D = \frac{5a}{12}b^4$, zodat $f(\pm b) = \pm Cb$. De lijn door beide buigpunten wordt nu: $y = Cx$. We definiëren de verschilfunctie $g : g(x) = f(x) - Cx$. Dus:

$g(x) = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + D = \frac{a}{12}x^4 - \frac{a}{2}b^2x^2 + \frac{5a}{12}b^4$.

Dit is te herschrijven als:

$g(x) = \frac{a}{12}(x^4 - 6b^2x^2 + 5b^4) = \frac{a}{12}(x^2 - 5b^2)(x^2 - b^2)$.



figuur 4

Functie g is niet alleen symmetrisch in de y-as, maar er is ook een duidelijk verband tussen de nulpunten: $\pm b\sqrt{5}$ en $\pm b$. Hieruit volgt, zie figuur 4, onder andere: $S_1S_2 : B_1B_2 = S_1O : B_1O = \sqrt{5} : 1$ en dus:

$\frac{S_1B_1}{B_1B_2} = \frac{S_1O - B_1O}{2B_1O} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ en $\frac{S_1B_2}{B_1B_2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

De gulden snede duikt hier verrassende wijze op! Hoewel… de factor $\sqrt{5}$ komt niet helemaal uit de lucht vallen:

Volgens [8] geldt bij een symmetrische vierdegraadsfunctie dat de y-coördinaten van de buigpunten gelijk zijn aan: $\frac{a}{36}(p^2 - 5q^2)(q^2 - 5p^2)$. Bij de verschilfunctie met de lijn door de buigpunten moet deze uitkomst uiteraard 0 zijn. Voor het gemak veronderstellen we even $0 < p < q$. Nu geldt: $p^2 - 5q^2 < 0$, en dus ook $\frac{a}{36}(p^2 - 5q^2)(q^2 - 5p^2) = 0 \leftrightarrow q^2 - 5p^2 = 0 \leftrightarrow q^2 = 5p^2 \leftrightarrow q = p\sqrt{5}$.

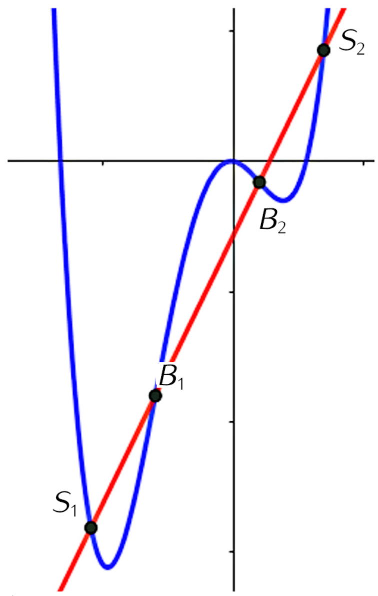
Over de door de grafiek van f en de door de lijn ingesloten vlakdelen valt ook het nodige te vertellen[3] maar dat laat ik nu even liggen.

Voorbeeld

De functie $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 3x$ heeft buigpunten bij $x = -3$ en bij $x = 1$. De y-coördinaten zijn respectievelijk -180 en -16. De lijn l door beide buigpunten is te schrijven als $y = \frac{164}{4}(x-1) - 16 \leftrightarrow y = 41x - 57$.

Als we de grafiek één eenheid naar rechts zouden schuiven, dan worden de x-coördinaten van de snijpunten met l: $\pm 2\sqrt{5}$ en ± 2. Nu zijn dat van links

naar rechts: $-1 - 2\sqrt{5}$, -3, -1 en $-1 + 2\sqrt{5}$.
Lijn l snijdt de grafiek van f in beide buigpunten, B_1 en B_2, en bovendien in de punten S_1 en S_2. Nu geldt:
$|B_1B_2| = \sqrt{(4^2 + 164^2)} = \sqrt{26912} = 116\sqrt{2}$ en
$|S_1S_2| = 116\sqrt{2} \times \sqrt{5} = 116\sqrt{10}$. Zie figuur 5.



figuur 5

Een andere manier om symmetrie te garanderen is uit te gaan van de vorm $y = a(x - p)^2(x - q)^2$.
Zoals eenvoudig is na te gaan raakt deze grafiek de x-as in $(p, 0)$ en $(q, 0)$ en is de lijn $x = (p + q)/2$ symmetrieas.
Uiteraard zijn $(p, 0)$ en $(q, 0)$ twee toppen van de grafiek. De derde top ligt op de symmetrieas. Voor de y-coördinaat geldt:

$$y = a\left(\frac{p+q}{2} - p\right)^2\left(\frac{p+q}{2} - q\right)^2 = a\left(\frac{q-p}{2}\right)^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$$
$$= a\left(\frac{p-q}{2}\right)^4 = \frac{a}{16}\,|p - q|^2. \qquad [9]$$

De overeenkomst met de top van een parabool is duidelijk en verklaarbaar.
We kunnen $y = a(x - p)^2(x - q)^2$ immers ook schrijven als $y = a((x - p)(x - q))^2$ of desgewenst als
$y = \frac{1}{a}(a(x - p)(x - q))^2$.
De buigpunten bepalen we weer met de tweede afgeleide. We starten met $f(x) = a(x - p)^2(x - q)^2$. Met behulp van de productegel krijgen we dan:
$f'(x) = a(2(x - p)(x - q)^2 + 2(x - q)(x - p)^2) =$
$2a(x - p)(x - q)(2x - (p + q))$.
Door nogmaals de productregel toe te passen krijgen we:
$f''(x) = 2a[(x - q)(2x - (p + q)) +$
$(x - p)(2x - (p + q)) + 2(x - p)(x - q)] =$
$2a(6x^2 - 6(p + q)x + p^2 + q^2 + 4pq)$.

$f''(x) = 0 \leftrightarrow 6x^2 - 6(p + q)x + p^2 + q^2 + 4pq = 0$
(immers $a \neq 0$). Voor een buigpunt, of liever gezegd een paar buigpunten, is het in dit geval nodig en voldoende dat de discriminant groter dan 0 is.
Er geldt: $D = 36(p + q)^2 - 24(p^2 + q^2 + 4pq) =$
$12p^2 - 24pq + 12q^2 = 12(p - q)^2$.
We zien nu dat er buigpunten zijn als p en q niet samenvallen, maar ook dat de bijbehorende x-coördinaten *niet rationaal* zijn als p en q dat wel zijn.
Voor rationale oplossingen van $f''(x) = 0$ is het immers nodig dat $\sqrt{12(p-q)^2}$ $(= 2|p - q|\sqrt{3})$ rationaal is.
De x-coördinaten van de twee buigpunten zijn te schrijven als: $\frac{p+q}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}\,|p - q|$. [10]
De kleinste van deze twee geven we aan met x_1.
Voor het berekenen van de y-coördinaat nemen we aan dat $p < q$. Dan geldt:

$$x_1 - p = \frac{p+q}{2} - \frac{|p-q|}{6}\sqrt{3} - p = \frac{q-p}{2} - \frac{q-p}{6}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)(q - p)$$
$$x_1 - q = \frac{p+q}{2} - \frac{|p-q|}{6}\sqrt{3} - q = \frac{p-q}{2} - \frac{p-q}{6}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\right)(p - q)$$

Invullen in $y = a(x - p)^2(x - q)^2$ geeft $\frac{a}{36}|p - q|^4$.
Uiteraard geeft de invullen van de tweede mogelijkheid van [10] dezelfde uitkomst.
Ook de aanname $p < q$ is niet essentieel, en alleen bedoeld om de berekening iets te vergemakkelijken.

Noten

[1] h is het *harmonisch totaal* van $k - p$, $k - q$ en $k - r$. Over dit begrip, verwant aan het harmonisch gemiddelde, is meer te lezen in mijn artikel in *Euclides* 94-5.
[2] Niet zo moeilijk te bewijzen door gebruik te maken van het feit dat oneven kwadraten modulo 8 gelijk zijn aan 1.
[3] Dit kwam aan de orde in het CE wiskunde B vwo van 2014 (1e tv).
Zie ook *Euclides* 90-3 pg 10

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*