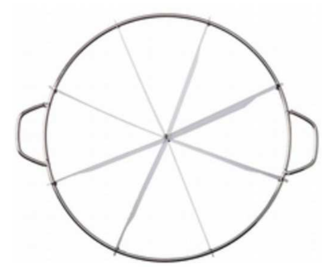
Uitwerking puzzel 96-4 **Wobien Doyer**
Eerlijk delen van ronde versnaperingen. **Lieke de Rooij**

We gaan in deze puzzel een alternatief bewijs en tevens uitbreiding van de “pizza-stelling” geven. Het idee om iets met die pizza-stelling te doen kregen we van Fred Muijrers.


figuur 1

Een banketbakker beschikt over een taartverdeler die een taart, pizza, quiche, vlaai, pannenkoek, tulband of ander rond gebak in n gelijke punten kan snijden. We zullen dat hier een n-mes noemen. Zie figuur 1 voor zo'n 8-mes. Daarbij is het de bedoeling dat je de middens van gebak (M) en n-mes (P) samen laat vallen. Maar dat blijkt niet altijd nodig.

De oorspronkelijke “pizza-stelling” [1]) luidt:
Met een 8-mes (dus voor 8 punten) hoef je de middens M en P niet samen te laten vallen en kan je de verkregen ongelijke stukken eerlijk onder twee mensen verdelen door ze om en om een punt te geven, ook als er geen enkele snede door het midden M van het gebak gaat.

Deze stelling werd al snel uitgebreid tot elk $4n$-mes met n>1.

Bij de bewijzen werden steeds goniometrische berekeningen en/of integralen gebruikt (behalve het bewijs zonder woorden voor een 8-mes zoals bij [1]).
Wij geven hier een bewijs met alleen vlakke meetkunde door de pizza op te splitsen in een buitenrand (tulband) en een cirkelvormig binnengebied (pannenkoek).
En daarbij vinden we behalve een bewijs van de "klassieke" pizzastelling ook een uitbreiding:

De conclusie die getrokken kan worden uit onderstaande uitwerking is dat we de stelling nog verder kunnen uitbreiden: het lukt met elk $2nm$-mes (met n en m >1), om de ongelijke stukken eerlijk te verdelen onder m mensen. Dit kan bewezen worden met vlakke meetkunde, zonder gebruik van limietovergangen of goniometrie.

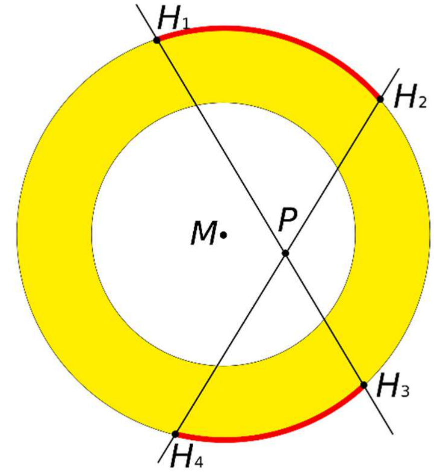
We beginnen met het snijden van een simpele gladde, maar niet platte tulband of ander rond gebak met een gat in het midden, gebakken met een vorm zoals in figuur 2. We plaatsen P ergens in het gat.


figuur 2

Opgave 1a:
We snijden met een $2n$-mes.
Bewijs voor elke n dat de som van de lengtes van elk paar overstaande boogjes (zoals bijvoorbeeld de twee rode stukjes in figuur 3) voor elk paar gelijk is.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem

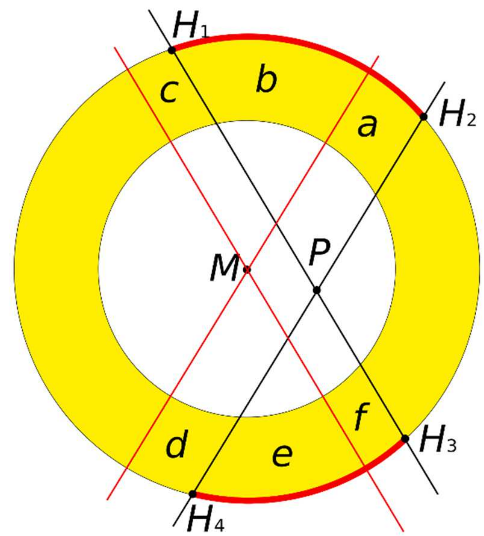
Uitwerking 1a voor een 2*n*-mes:
Kies twee overstaande bogen, in figuur 3 H_1H_2 en H_3.
Trek H_2H_3 . Dan is $\angle H_1PH_2$ (=180°/n) een buitenhoek in ΔPH_2H_3 dus $\angle PH_2H_3 + \angle PH_3H_2 = 180°/n$
$\angle PH_3H_2$ is gelijk aan de helft van boog H_1H_2 en $\angle PH_2H_3$ is gelijk aan de helft van boog H_3H_4. Dus zijn de bogen H_1H_2 en H_3H_4 samen gelijk aan $360°/n$
Dat geldt voor elke twee overstaande boogjes, dus de som van de lengtes van een paar overstaande boogjes is voor elk paar gelijk.



figuur 3

Opgave 1b.
Laat daarmee zien dat je de stukjes van de tulband , gesneden met een 2*n*-mes eerlijk kan verdelen onder *k* mensen als *k*=*n* of *k* is een deler van *n*.

Uitwerking 1b voor een 2*n*-mes:
In figuur 4 zijn de messen PH_1, PH_2, PH_3 en PH_4, getekend van een 2*n*-mes, die samen 2 overstaande stukken tulband uitsnijden.
In rood is het beeld van die messen bij verschuiving over *PM* getekend.
Zes stukjes van de tulband zijn voorzien van de namen a tot en met *f*.
De rode messen zouden natuurlijk 2 even grote stukken ($b + c$ en $d + e$) uitsnijden van elk $\frac{1}{2n}$ deel van de tulband, dus samen $\frac{1}{n}$ deel.
De stukjes a en d zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn door *M* loodrecht op H_2H_4 (niet getekend),
en de stukjes *f* en *c* zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn door *M* loodrecht op H_1H_3.
Merk op dat, door de symetrie van de tulbandvorm, de spiegelbeelden van de stukjes tulband 3-dimensionaal congruent zijn.



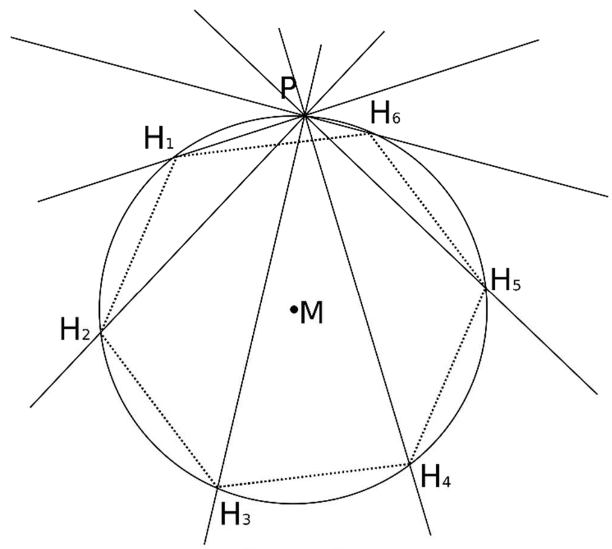
figuur 4

Dus zijn de stukjes a $+ b + f + e$ samen congruent aan d $+ b + c + e$ en bevatten de stukken die worden uitgesneden door de zwarte messen evenveel tulband als de stukken die door de rode messen worden uitgesneden, dus $\frac{1}{n}$ deel van de tulband.
Als we snijden we met een 2n-mes, dan zijn dus 2 overstaande stukken samen precies $\frac{1}{n}$ deel van de tulband.
En als we aan n mensen ieder 2 overstaande stukken geven, dan krijgen ze allemaal evenveel tulband. We hebben dus n even grote porties en die kunnen we eerlijk verdelen onder k mensen als $k = n$ of k is een deler van n.

Nu gaan we naar plat rond gebak zonder gat, versieringen of afwijkende rand. We zullen het hebben over een pannenkoek, in het bijzondere geval dat we het midden van het mes (P) op de rand van de pannenkoek plaatsen.

Opgave 2a:
Toon aan dat voor elke n de snijpunten van de messen van een $2n$-mes met de cirkel door P de hoekpunten zijn van een regelmatige n-hoek . P ligt ergens op een cirkelboogje van de omgeschreven cirkel van die n-hoek.

Uitwerking 2a voor een 2*n*-mes (in figuur 5 geldt n=6)**:**
P (op de cirkel) is het snijpunt van de messen, H_1, H_2 etc. de andere snijpunten van een mes en de rand van het gebak.
Alle hoeken tussen 2 opvolgende messen zijn $\frac{360°}{2n}$, dus de cirkelbogen H_1H_2, H_2H_3.......$H_{n-1}H_n$ zijn $\frac{360°}{n}$.
Dan is de overblijvende boog H_nH_1 ook $\frac{360°}{n}$ en dus zijn alle n bogen tussen de punten H_n gelijk.
De punten H_i vormen dus een regelmatige n-hoek.
(Als er messen langs de raaklijn in P lopen valt één van de hoekpunten samen met P.)

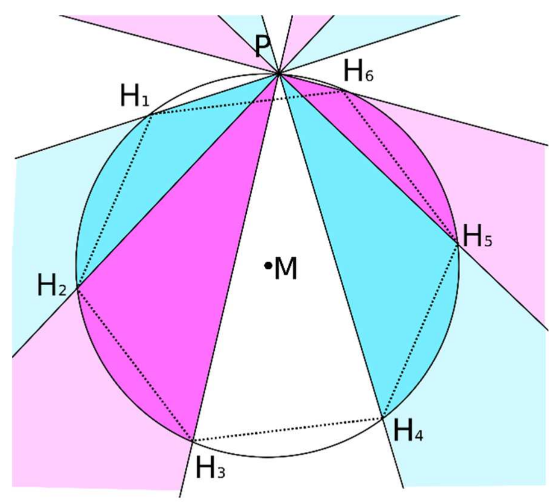


figuur 5

Merk op dat met een $2n$-mes met P op de rand van de pannenkoek, die pannenkoek wordt verdeeld in n+1 stukjes: n – 1 driehoeken plus bijbehorend cirkelsegment (= oppervlak begrensd door een deel van de cirkelomtrek en een koorde) en 2 kleine cirkelsegmentjes aan weerszijden van P. (Tenzij er messen raken aan de cirkel, dan zijn er n stukken, maar we bekijken het algemene geval waarin dat niet zo is).

Opgave 2b:
We beperken ons even tot een even veelhoek, dus gebruiken we een $4n$ mes en verdelen de pannenkoek onder n mensen.
Voor n=3 kleuren we de stukken zoals in figuur 6, waarbij de twee kleine cirkelsegmentjes naast P en het stuk waar M in ligt wit zijn gekleurd.

Toon aan:
1. Met n=3 is de som van gelijk gekleurde oppervlakten binnen de cirkel voor elk van de drie kleuren gelijk aan 1/3 van het oppervlak van de cirkel.
2. We kunnen voor elke n>1 (met een $4n$-mes) de pannenkoek eerlijk verdelen onder n of k mensen, waarbij k een deler is van n.



figuur 6

Uitwerking 2b:

1. Voor n=3: De blauwe oppervlakte bestaat uit twee driehoeken en 2 cirkelsegmentjes. De oppervlakte van de driehoeken bepalen we met behulp van de hoogtelijn uit P. De basis is dan één van de zijden van de regelmatige 6-hoek, en is dus voor beide driehoeken gelijk aan H_1H_2. De som van de twee hoogtelijnen is gelijk aan de afstand tussen de (evenwijdige) lijnen H_1H_2 en H_4H_5 en dus gelijk aan H_1H_5. De som van de oppervlaktes van de driehoeken is dus gelijk aan $\frac{1}{2}H_1H_2 \cdot H_1H_5$ en dus gelijk aan de som van de oppervlakte van de driehoeken H_1H_2M en H_4H_5M (waarbij M het middelpunt is van de pannenkoek). Dat is dus precies $\frac{1}{3}$ deel van de oppervlakte binnen de regelmatige 6-hoek. En natuurlijk zijn de twee cirkelsegmentjes samen even groot als $\frac{1}{3}$ deel van het deel van de cirkel buiten de zeshoek. Het blauwe oppervlakte binnen de cirkel is dus $\frac{1}{3}$ deel van de hele cirkel.
   Datzelfde geldt voor de roze oppervlakte binnen de cirkel. En omdat het blauwe en het roze deel elk $\frac{1}{3}$ deel van de cirkel is is het witte deel ook gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel van de cirkel en zijn de 3 porties pannenkoek gelijk.
2. Algemeen: we zagen in opgave 2a dat we met een $2n$-mes $n+1$ stukjes zijn, waarvan er $n-1$ bestaan uit een driehoek met tophoek P en basis één van de zijden van een regelmatige n-hoek en een cirkelsegment.
   Met een $4n$-mes hebben we dus $2n-1$ van dat type stukken. $2n-2$ van die stukken vormen $n-1$ paren die, net als de blauwe stukken in figuur 6, tegenover elkaar liggen.
   We kunnen dan met dezelfde redenering als in opgave 2b1 laten zien dat zo'n paar $\frac{1}{n}$ deel van de cirkel is, en dus zijn de 3 overblijvende stukjes (overeenkomend met de witte stukjes uit figuur 6) ook samen $\frac{1}{n}$ deel van de cirkel. We hebben dus n gelijke porties, die we eerlijk kunnen verdelen over n mensen, of als k een deler van n is, onder k mensen.

De "pizza-stelling" gaat echter over het geval dat het gebak met een $4n$-mes over twee personen wordt verdeeld en wel door de gesneden punten om en om uit te delen.

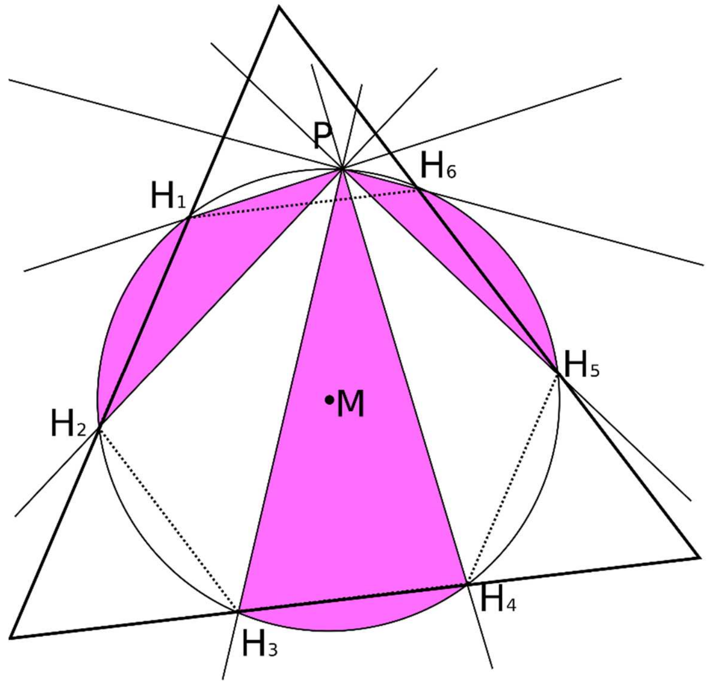
We hebben hierboven gesneden met een $4n$-mes om n gelijke porties te krijgen. Als n even is hebben we dan een even aantal gelijke porties, die we eerlijk kunnen verdelen over 2 personen, maar dat lukt niet als n oneven is.

Toch zou dat volgens de "pizza-stelling" ook moeten lukken met bijvoorbeeld het 12-mes van fig. 6.
Daartoe tekenen we behalve de in de cirkel ingeschreven $2n$-hoek ook een n-hoek, dus in figuur 6 een 3-hoek. Dat doen we door de zijden van de $2n$-hoek om en om te verlengen, zodanig dat daarbij P binnen die $2n$-hoek ligt. Zie figuur 7 voor n=3.
We kleuren zoals in de figuur de gebieden om en om roze. De rest binnen de cirkel is wit, dus inclusief de twee kleine cirkelsegmentjes links en rechts van P.

Opgave 2c

Laat zien dat de oppervlakte van het roze gekleurde deel gelijk is aan de helft van de oppervlakte van de cirkel en dus dat de pizza-stelling bewezen is voor n=3 als P op de rand van de pizza of pannenkoek ligt.

Uitwerking 2c:
Oplossing voor *n* oneven:



figuur 7

Een van de 2 deelnemers krijgt het roze deel van de cirkel. Dat deel bestaat uit n van de $2n$ gelijke cirkelsegmenten buiten de regelmatige $2n$-hoek, en dat is dus de helft van de delen buiten de $2n$-hoek.
We moeten dus nog laten zien dat het roze deel binnen de $2n$-hoek de helft van de oppervlakte van de $2n$-hoek is.
Het roze deel binnen de $2n$-hoek bestaat uit n driehoeken (in figuur 7 de driehoeken H_1H_2P, $H_3H_4P\ en\ H_5H_6P$), allemaal met gelijke basis $b = H_1H_2$ (= zijde regelmatige zeshoek).
De som van de oppervlakten is dan $\frac{1}{2} \cdot bS$, waarin S de som van de loodlijnen uit P op de zijden van de n-hoek. (in figuur 7 dus 3 loodlijnen uit P op de zijden van de driehoek)

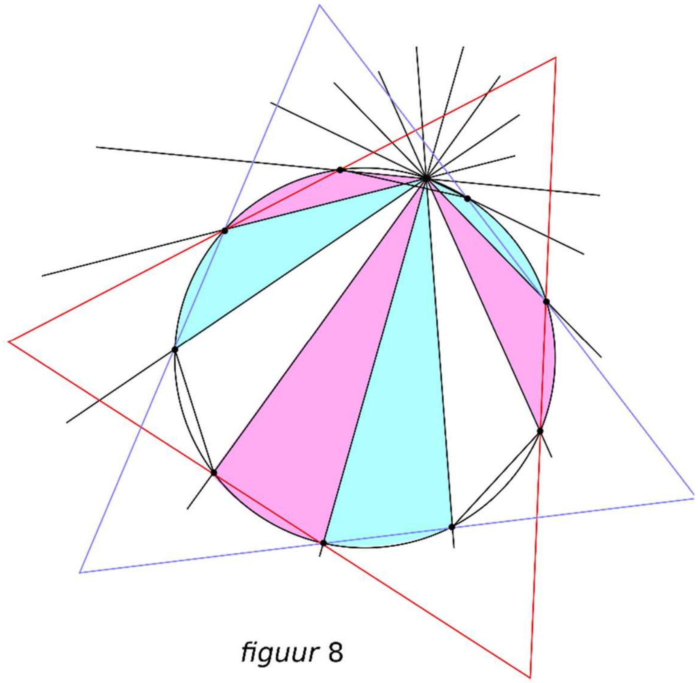
We gebruiken nu een hulpstelling waarvan we aannemen dat je die kent:
De som van de afstanden van een punt P binnen een regelmatige n-hoek tot alle zijden is onafhankelijk van de plaats van P (zie bewijs op blz. 9).

Volgens die stelling is dus $S = nMH_1$
Dan is de som van de oppervlakten $\frac{1}{2} \cdot bS = n \cdot \frac{1}{2} H_1H_2 \cdot MH_1$
De oppervlakte van de hele $2n$-hoek is natuurlijk $2n \cdot \frac{1}{2} H_1H_2 \cdot MH_1$, dus de som van de roze driehoeken is daarvan de helft.
De oppervlakte van het roze deel van de cirkel is dus de helft van de oppervlakte van de hele cirkel. QED
Merk op dat we het hier niet alleen hebben bewezen voor n=3, maar ook voor elk $2n$-mes met oneven n.

Opgave 2d: En wat is er mogelijk als we met een 18-mes snijden?

Uitwerking 2d:
Een 18-met is een $2n$-mes met oneven n. De snijpunten van de messen met de rand van de pannenkoek vormen nu een regelmatige 9-hoek. Net als in opgave 2b2 kunnen we nu gelijkzijdige driehoeken tekenen waarvan de zijden (deels) samenvallen met zijden van de 9-hoek zodanig dat P binnen de driehoeken valt. Het zijn er nu 2 in plaats van één.

In figuur 8 is van die driehoeken één rood en één blauw.
Van de stukken waarin de pannenkoek wordt verdeeld zijn er 3 die door een zijde van de blauwe driehoek worden doorsneden, en die stukken kleuren we lichtblauw. En de 3 stukken die worden doorsneden door een zijde van de rode driehoek kleuren we roze.



figuur 8

We laten nu zien dat de 3 blauwe stukken samen $\frac{1}{3}$ van de cirkel vormen:
De 3 blauwe stukken bestaan elk uit een cirkelsegment en een driehoek.
De 3 blauwe cirkelsegmenten zijn $\frac{1}{3}$ van de 9 cirkelsegmenten buiten de 9-hoek, en alle cirkelsegmenten zijn even groot.
De 3 blauwe driehoeken zijn, zoals we zagen in opgave 2b2, samen even groot als 3 driehoeken met dezelfde basis en de tophoek in het middelpunt van de cirkel. Dat is $\frac{1}{3}$ van de regelmatige 9-hoek.
De 3 blauwe stukken zijn dus $\frac{1}{3}$ van de cirkel.
Hetzelfde geldt voor de 3 roze stukken.
En dus zijn de witte stukken ook $\frac{1}{3}$ van de cirkel.

We kunnen dus met een 18-mes met *P* op de rand van een pannenkoek 3 even grote porties maken.

We kunnen dit resultaat nog veralgemenen:
Bewering: als we een $2mn$-mes hebben met m en n beide >1 er een pannenkoek mee snijden met *P* op de rand van de pannenkoek dan kunnen we m gelijke porties maken.

Uitleg: Met een $2mn$-mes krijgen we een regelmatige mn-hoek. We kunnen dan $m-1$ regelmatige n-hoeken met de zijden langs de zijden van de mn-hoek maken zodanig dat *P* in het inwendige van de n-hoek ligt.
De stukken die het mes uitsnijdt die worden doorsneden door dezelfde n-hoek zijn dan $\frac{1}{m}$ deel van de cirkel. We hebben dan $m-1$ porties van $\frac{1}{m}$ deel van de cirkel. Dan zijn de stukjes die overblijven dus ook $\frac{1}{m}$ deel van de cirkel, en hebben we m porties van $\frac{1}{m}$ deel van de cirkel.

En nu de pizza-stelling zelf, als *P* ergens in het binnen gebied van het gebak ligt, gebruik makend van een 4*n*-mes.

Opgave 3:
Bewijs de pizza-stelling voor elk 4*n*-mes, (dus voor 2 personen om en om verdelen) aan de hand van de gegevens verkregen uit opgaven 1 en 2.

Uitwerking 3:

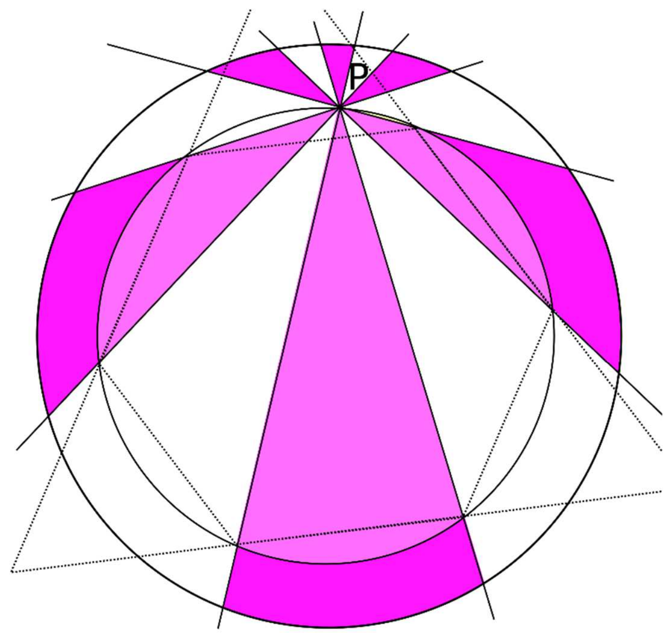
We kunnen de pizza zien als een combinatie van de tulband uit opgave 1 en de pannenkoek uit opgave 2.

Voor het snijden vaan een pizza zetten we het centrum P van het mes op een willekeurige plaats in de pizza. We tekenen een cirkel die de pizza voorstelt en een tweede cirkel met het zelfde middelpunt door het punt P. Het mes snijdt dan de binnenste cirkel zoals we hiervoor een pannenkoek sneden. We noemen hierna dat cirkeloppervlak de "pannenkoek" Het overige deel vam de pizza heeft dezelfde vorm als de tulband uit opgave 1. In opgave 1 stond het centrum van het mes in het inwendige van de ring, maar de uitkomsten van opgave 1 gelden natuurlijk ook voor het limietgeval daarvan, als P op de binnenrand van de ring staat. We noemen de buitenste ring daarom de "tulband".

Figuur 9 geeft de situatie weer voor een 12-mes. De binnenste cirkel wordt op dezelfde manier verdeeld als in figuur 7 in opgave 2c. We bewezen daar dat we de pannenkoek met een 4n-mes kunnen verdelen onder 2 mensen, één die de roze stukken krijgt en één die de witte stukken krijgt.

Hoe de stukken van de "tulband" in figuur 9 worden verdeeld ligt daarmee deels al vast. De stukken van de "pannenkoek" zitten na het snijden vast aan een stuk van de "tulband".

Het "verlengde" van de 3 roze stukken van de pannenkoek moeten dus ook roze zijn (we gebruikten daarvoor een iets donkerder kleur roze).



figuur 9

We weten dat in de "tulband" gesneden met een 2k-mes 2 overstaande stukken samen $\frac{1}{k}$ van de tulband vormen. Als we de stukken van de "tulband" tegenover de bovengenoemde stukken ook roze maken dan hebben we 3 paren overstaande stukken, en dat is de helft van alle paren.

Dus is zowel de helft van de pannenkoek als de helft van de tulband roze, en kunnen we de stukken om-en-om uitdelen aan de 2 deelnemers.

Opgave 4:

Maar we hebben ook uitbreidingen van de pizza-stelling waarbij we het gebak verdelen over meer dan twee personen. Bedenk of het dan noodzakelijk is dat we met een 4n-mes snijden.

Leg uit met welke n-messen dat kan voor een tulband of een pannenkoek en voor hoeveel personen?

Uitwerking 4:

We zagen in opgave 2d dat als we een pannenkoek snijden met een $2mn$-mes met m en n beide >1 met P op de rand van de pannenkoek we m gelijke porties kunnen maken. Daarmee kunnen we ook verdelingen van een pizza maken voor meer dan 2 personen.

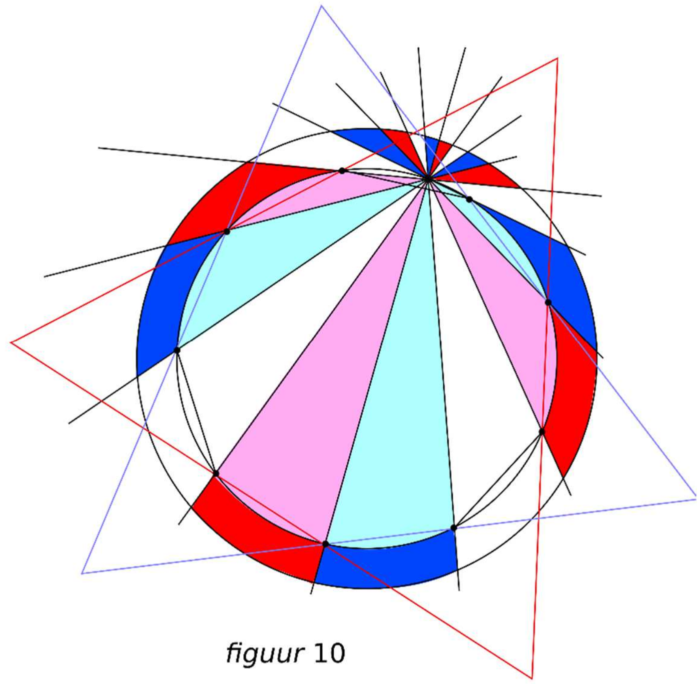
Net als in opgave 3 kunnen we de pizza voorstellen als een middendeel in de vorm van een pannenkoek en een rand er omheen in de vorm van een tulband.

In figuur 10 ziet u de pannenkoek van figuur 8 met een 18-mes uit opgave 2d terug als het middendeel van een pizza, met een tulband eromheen.

De punten van de pannenkoek zijn op dezelfde manier verdeeld als in figuur 8, en onze conclusie in opgave 2d was:

Met een $2mn$-mes kunnen we een verdeling maken in m gelijke porties.

$m-1$ van die porties bestaan elk uit n punten die samen $\frac{1}{m}$ van de pannenkoek bevatten.



figuur 10

Net als in opgave 3 moeten de verlengden van de gekleurde stukken dezelfde kleur krijgen (in de tekening iets donkerder).

De overstaande stukken in de tulband van de gekleurde stukken krijgen ook dezelfde kleur, zodat de tulband stukken met dezelfde kleur $\frac{1}{m}$ van de tulband bevatten.

We hebben dan $m-1$ porties die elk zowel $\frac{1}{m}$ van de pannenkoek als $\frac{1}{m}$ van de tulband bevatten. Het witte deel bevat dan natuurlijk ook elk zowel $\frac{1}{m}$ van de pannenkoek als $\frac{1}{m}$ van de tulband.

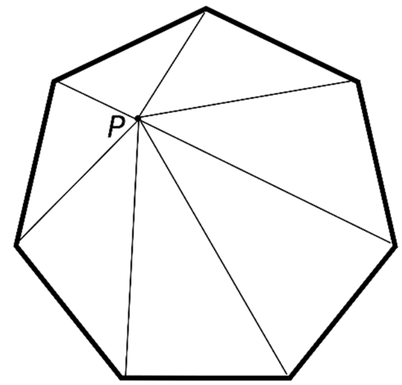
Conclusie: met een $2mn$-mes (met m en n >1) kunnen we een pizza eerlijk verdelen in m porties.

Anders geformuleerd: als we snijden met een $2m$-mes en k<m met k is een deler van m, dan kunnen we de stukken eerlijk verdelen onder k mensen.

Een $4n$-mes is dus alleen nodig als er verdeeld wordt onder een even aantal personen.

Hulpstelling:

Bewijs dat de som S van de loodlijnen uit P binnen een regelmatige n-hoek op de zijden van de n-hoek onafhankelijk is van de plaats van P (Zie figuur 11):



figuur 11

Verbindt P met alle hoekpunten van de n-hoek zodat er n driehoeken ontstaan. De oppervlakte van de n-hoek is dan te schrijven als de som van de oppervlakten van de driehoeken: $\sum \frac{1}{2} \cdot h_i \cdot z = \frac{1}{2} \cdot z \sum h_i$, waarin h_i de hoogtelijnen in de driehoeken en z de zijde van de veelhoek is.
De som van de hoogtelijnen is dus onafhankelijk van de plaats van P.