EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Vier artikelen over pentagrammen

Priemgetallen en delers

Ruimtelijk inzicht met virtual reality

Verschillende soorten minnen

NR.6

JAARGANG 96 - MEI 2021

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

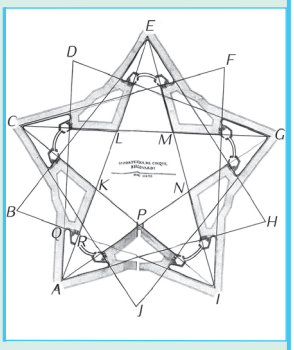
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR6

IN DIT NUMMER

KENNISMAKEN MET WISKUNDE AAN DE HAND VAN HET PENTAGRAM 4
EEN EERSTE LES AAN DE BRUGKLAS
Andrea Lubberdink

VESTINGBOUW ALS CONTEXT VOOR SINUS-, COSINUS- EN TANGENSREGEL 8
Henk Hietbrink

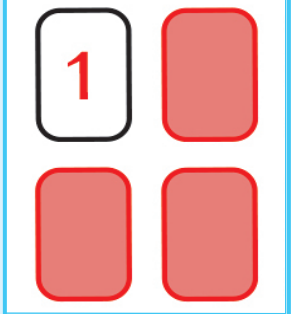


DE GULDEN SNEDE EN EEN REGELMATIGE VIJFHOEK 14
Rob van Oord

UITDAGENDE PROBLEMEN 19
OM- EN INGESCHREVEN BOLLEN
Jacques Jansen

MEER OF MINDER MINNEN 23
Sjef van Dongen

DELEN MET HELEN 27
Martin Kindt

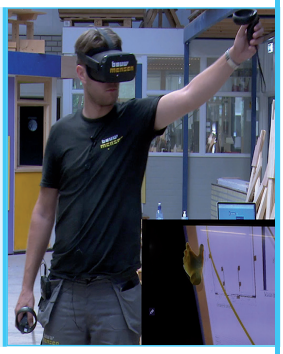


BOEKBESPREKING 32
ZEBRA 58: BESMETTELIJKE ZIEKTEN
Ernst Lambeck

AFRONDEN: GEWOON, INTELLIGENT EN MEER 33
Simon Biesheuvel

WIS EN WAARACHTIG 35

HET FIZIER GERICHT OP... 36
RUIMTELIJK INZICHT MET VIRTUAL REALITY IN HET BOUWONDERWIJS
Sylvia van Borkulo
Paul Drijvers



DE LOGARITME, GESNEDEN KOEK MET HET LOGARIT-MES 38
Etienne Tjon Sjoe Sjoe

DE THIENDE 42
Bertus van Etten

CORONACRISIS IN KENIA 43
WERELDWISKUNDE FONDS
Monica Woldinga

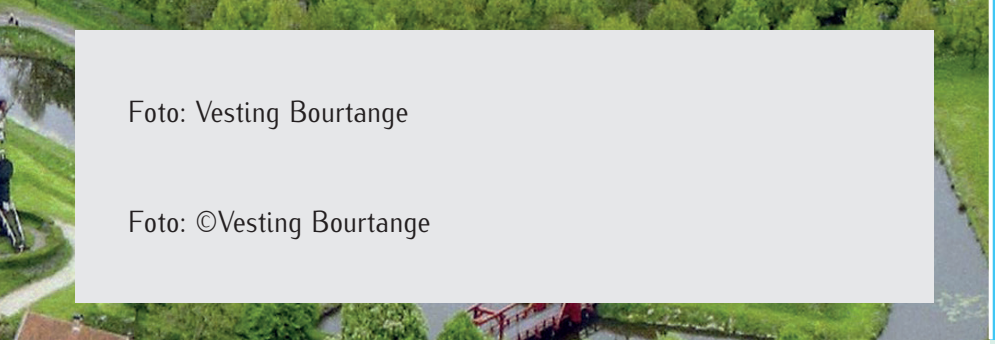


Foto: Vesting Bourtange

Foto: ©Vesting Bourtange

VASTGEROEST 44

PUZZEL 45
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

SERVICEPAGINA 46

Waardevolle producten I t/m III

Het derde deel van de serie Waardevolle producten van Gerard Koolstra is te vinden op de site. Daar staan ook de eerder verschenen twee eerste delen van de serie:

vakbladeuclides.nl/966waardevolleproducten_I-III

vakbladeuclides.nl/966waardevolleproducten_III

Kort vooraf

Door een toevallige samenloop van omstandigheden is deze *Euclides* een beetje een 'regelmatige vijfhoek special' geworden. Dat kon je al zien aan de voorkant, een fraaie foto van misschien wel 's lands mooiste vestingstadje: Bourtange. Waarmee we Naarden, Heusden en Willemstad wellicht tekort doen, maar deze steden hebben nu eenmaal geen vijfhoek als grondpatroon... Dat hoeft ook niet per se, zoals je kunt lezen in het artikel van Henk Hietbrink over de wiskunde die in vestingsteden op straat ligt. Hoe je je leerlingen met pentagrammen bezig kunt houden in een ontdekkingstocht naar symmetrieën laat Andrea Lubberdink zien in haar bijdrage. Met de bijgeleverde werkbladen kunnen je leerlingen er meteen mee aan het werk. Rob van Oord zet ons aan de slag om op verschillende wijzen regelmatige vijfhoeken met passer en liniaal te construeren. Hopelijk biedt dat inspiratie om dat ook met de leerlingen te gaan doen. Jacques Jansen gaat aan de slag met de in- en omgeschreven bollen van dodecaëders, zoals deze in de architectuur terug te vinden zijn. En dan duikt φ ook nog heel even op in deel III van de 'Waardevolle Producten' van Gerard Koolstra.

Ondertussen zijn de voorbereidingen in volle gang voor twee échte specials: de examenspecial en een ict-special die in 2022 zullen verschijnen.
Dus mocht je iets speciaals met ict doen in je wiskundeles: laat het nu al weten aan de redactie!

Lauran van Oers stuurde een reactie naar aanleiding van 'Vastgeroest' over het jaartal 2021. Dat 2021 het product is van twee opvolgende priemgetallen (43×47) ging natuurlijk wel rond in wiskundekringen. Maar dat de vorige keer dat dit optrad ($41 \times 43 = 1763$) alweer 258 jaar geleden is, en de volgende keer ($47 \times 53 = 2491$) pas over 470 jaar, is toch ook aardig om te weten. Lauran heeft vast ict ingezet om dat te berekenen...

Tom Goris

Andrea Lubberdink

Een eerste les aan de brugklas
Kennismaken met wiskunde aan de hand van het pentagram

Brugklassers maken voor het eerst kennis met wiskunde. Hoe maak je duidelijk wat wiskunde is? Het pentagram leent zich goed voor een eerste kennismaking. Leerlingen gaan op zoek naar regelmaat, congruente figuren en verhoudingen. Pythagoras komt ook voorbij. Andrea Lubberdink beschrijft haar les over pentagrammen en deelt het lesmateriaal.

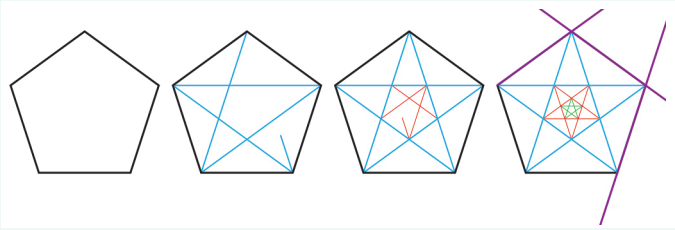
Inleiding

Een nieuw schooljaar. De brugklas komt binnenlopen voor de allereerste wiskundeles. Open, nieuwsgierige gezichten. Wat zouden we gaan doen? Wat is wiskunde eigenlijk? Het is anders dan rekenen, maar wat is er dan anders aan? Ga ik dit leuk vinden?
Zo geïnteresseerd en verwachtingsvol als in de eerste les krijg je de leerlingen niet snel weer. Dit is de kans om een indruk te geven die ze niet snel zullen vergeten. In dit artikel laat ik zien langs welke lijn de bijzondere eigenschappen van het pentagram stap voor stap door de leerlingen zelf onderzocht en ontdekt kunnen worden. [1] [2]

Pentagrammen tekenen in een regelmatige vijfhoek

In de eerste wiskundeles vinden leerlingen het spannend om meteen hun nieuwe geodriehoek te mogen gebruiken. Ze krijgen de opdracht om in een regelmatige vijfhoek de hoekpunten te verbinden. Ze zien een ster ontstaan, een pentagram, en dat is leuk. Nog leuker is het om te ontdekken dat de binnenkant van het pentagram weer een regelmatige vijfhoek is, zie figuur 1. Je kunt dus opnieuw hoekpunten verbinden. En opnieuw en opnieuw... Hoe lang kun je doorgaan? Maar als je steeds kleinere pentagrammen kunt tekenen, dan moet je ook de andere kant op kunnen en een groter pentagram kunnen tekenen. Maar welke lijnen moet je dan trekken? De eerste moeilijkheid. Op gevoel gaan tekenen gaat in dit geval altijd fout. De ster wordt altijd te klein en te krom. Je moet naar het patroon binnenin kijken om te ontdekken hoe je het patroon uitbreidt. Goed gedaan als je hebt gevonden hoe het moet. En daarna kan het patroon natuurlijk nog verder uitgebreid worden en verder, maar dat past niet meer op het papier. Is het papier eigenlijk wel nodig?

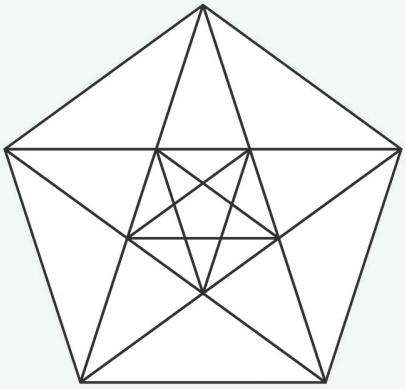
Of is het genoeg dat we de figuur ook steeds groter kunnen denken?



figuur 1

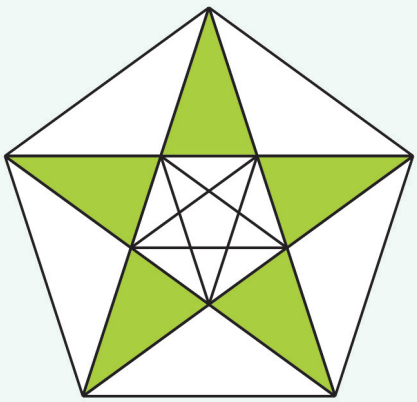
Congruente en gelijkvormige driehoeken

Na het zelf tekenen van de pentagrammen kan de aandacht gericht worden op de andere symmetrische aspecten van het pentagram en van de figuur met twee pentagrammen in een vijfhoek, zie figuur 2.



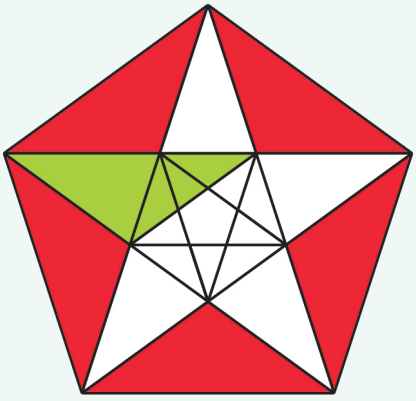
figuur 2 De figuur waar de leerlingen mee werken

De leerlingen werken verder (op werkbladen) met deze figuur. Welke vouwlijn kun je maken zodat de figuur 'op zichzelf vouwt' en hoe kun je hem draaien totdat hij weer op zichzelf valt? Een mooie gelegenheid om de termen lijnsymmetrie, draaisymmetrie en puntsymmetrie (dit laatste heeft de figuur niet) te laten vallen. De termen lijnstuk en hoek kunnen al zijn uitgelegd bij de introductie van de regelmatige vijfhoek en de (gelijkbenige) driehoek komt nu aan bod. In de figuur kun je congruente driehoeken vinden. Meer dan je denkt. Vind vier verschillende paren gelijkvormige driehoeken en kleur ze in.
Die zijn niet moeilijk te vinden.



figuur 3 Vijf congruente driehoeken. Waar is de zesde?

Maar dan komt de vraag om in een figuur er niet twee, maar zes, te vinden die congruent zijn. In figuur 3 zijn er vijf te zien. Waar is de zesde? De ontdekking van de zesde vinden de leerlingen vaak een verrassing. En is er dan ook een zevende? Hoeveel zijn er maximaal? En kun je ook zes congruente driehoeken van een andere soort vinden? Leerlingen ontdekken steeds meer mogelijkheden en kleuren congruente driehoeken op hun werkblad in. Er zijn vier verschillende driehoeken die meer dan vijf congruente driehoeken hebben in de figuur. In figuur 4 zie je een voorbeeld van zes congruente driehoeken.



figuur 4 Zes congruente driehoeken. Vind nog zes andere en nog twee keer zes andere.

De figuur barst ook van de gelijkvormige driehoeken. Hoeveel verschillende gelijkvormige driehoeken van elke soort kun je vinden? Weer zijn er veel en steeds nieuwe te ontdekken, als je langer blijft proberen. Er zijn in één figuur in totaal vijf driehoeken die gelijkvormig zijn met de driehoeken in figuur 3 en in totaal vier driehoeken die gelijkvormig zijn met de driehoeken in figuur 4.

Het pentagram

Het zelf ontdekken van de bijzondere eigenschappen van het pentagram is extra leuk als deze les is voorafgegaan door het verhaal over het ontstaan en de ontwikkeling van de wiskunde, waarin het pentagram als teken van de Pythagoreeërs (de aanhangers van Pythagoras) naar voren is gekomen. Dat verhaal staat uitgeschreven op de PowerPoint. Ook kan er vooraf of achteraf stilgestaan worden bij de tegenwoordige associaties met het pentagram, als teken van de duivel of van mensen die zich heksen noemen, of gewoon als een teken dat veel mensen heel erg mooi vinden. Wat is er dan zo bijzonder en magisch aan het pentagram?

De gulden snede en magie

Alle lijnen in de figuur snijden elkaar volgens de gulden snede. Aandacht daarvoor wordt te veel voor de eerste les van de brugklas, maar op een later moment, bijvoorbeeld als eerste les in klas 2, of als verdiepingsles, kan het onderzoeken in de figuur een vervolg krijgen in de volgende lijn.
Meet de lengte van alle verschillende lijnstukken in de figuur. Rangschik de lengtes van klein naar groot en bereken steeds het quotiënt van opeenvolgende lengtes, de langere gedeeld door de kortere. Ontdek dat er altijd ongeveer 1,6 uitkomt. Dat betekent dat een lijnstuk dat één maatje groter is, steeds ongeveer 1,6 keer zo groot is als het vorige lijnstuk.
We hebben 1,6 gevonden, maar dat is niet het precieze getal. Het precieze getal kun je met meten niet vinden. Waarom niet? Het precieze getal is een beroemd getal. Het heet het getal van de gulden snede en wordt vaak aangegeven met φ. Het is 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604628189024497072072041893911374847540880753868917521266338 62 ... en dit zijn nog lang niet alle cijfers achter de komma. Er zijn er namelijk nog oneindig veel. Toen Pythagoras al niet meer leefde bleven zijn volgelingen nog wel wiskunde doen. Ze schrokken erg van het getal uit hun eigen pentagram waarvan je nooit alle decimalen achter de komma kunt weten. (Waarom niet?)

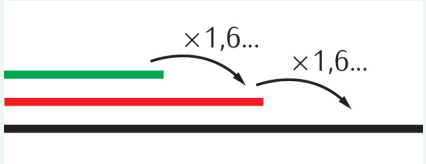
>

Ze schrokken zo erg dat ze bang werden voor getallen en waarschijnlijk ook voor hun eigen pentagram. Het leek wel een magische figuur. Waarschijnlijk is dat de reden dat er nu nog steeds mensen zijn die geloven in magie of duistere krachten achter deze figuur.

Ontdekking van irrationale getallen

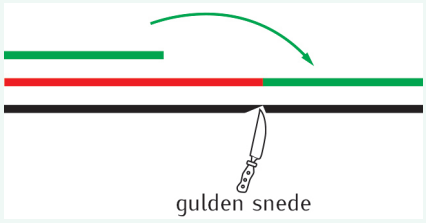
De Pythagoreeërs deden de schokkende ontdekking van een getal dat je nooit in z'n geheel kunt kennen, toen ze probeerden de grootste gemeenschappelijke deler te vinden (met het algoritme van Euclides) van de lengten van twee opeenvolgende lijnstukken in de figuur.[3] Hierover in een volgend artikel wellicht meer. De ggd bleek niet te vinden (doordat de figuur zich naar binnen toe steeds herhaalt) maar twee gehele getallen hebben altijd een ggd. De Pythagoreeërs kenden alleen gehele getallen (en verhoudingen) en deze tegenspraak was dus zeer mysterieus en in eerste instantie onoplosbaar. We kunnen het nu zien als een ontdekking van irrationale getallen, waarschijnlijk zelfs de eerste en ongeveer in dezelfde tijd als de beroemde ontdekking van de irrationaliteit van de verhouding van twee zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

In de wiskunde vinden we tegenwoordig het pentagram een mooie, symmetrische figuur en getallen met oneindig veel cijfers achter de komma vinden we heel gewoon. Er zijn zelfs oneindig veel van die getallen. Er zijn er zelfs meer van dan getallen die niet oneindig veel cijfers achter de komma hebben. Zelfs oneindig keer zoveel meer … toch wel magisch …



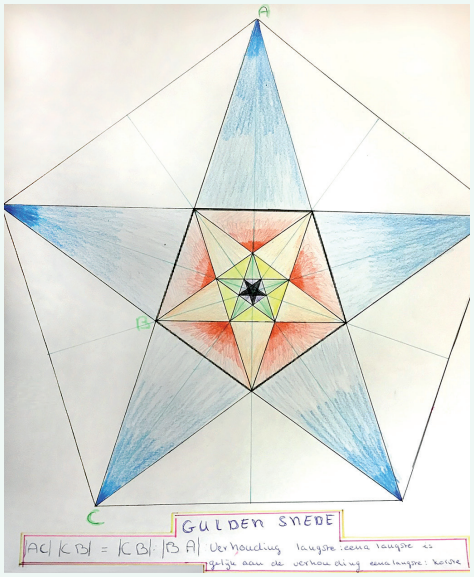
figuur 5 Als steeds langere lijnstukken precies zo zijn dat ze telkens 1,6... keer zo lang zijn als de vorige …

Het getal 1,6... heet het getal van de gulden snede omdat het een extra mooie eigenschap heeft. Als steeds langere lijnstukken precies zo zijn dat ze telkens 1,6... keer zo lang zijn als de vorige, zoals in figuur 5, dan passen twee kleinere lengtes precies in één grotere, zoals je ziet in figuur 6.



figuur 6 … dan passen twee kleinere lengtes precies in één grotere.

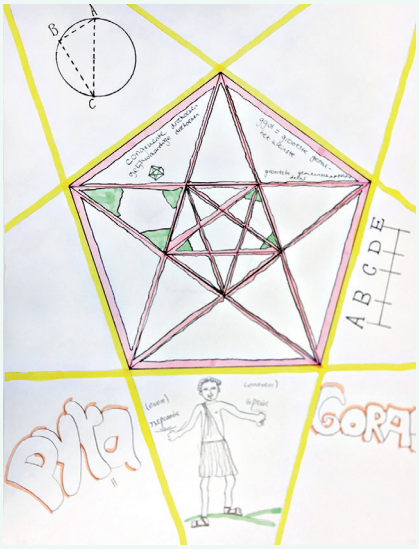
Geldt dat inderdaad voor de lijnstukken in het pentagram? De leerlingen beamen dat meteen, want dat hebben ze gezien tijdens het meten van de lengtes van de verschillende lijnstukken. Als creatieve afsluitende opdracht kan de leerlingen gevraagd worden een poster te maken van de figuur, waarin de bijzondere wiskundige eigenschappen naar voren komen. Leerlingen reflecteren daardoor op het geleerde en vinden het leuk om creatief op hun eigen manier te werk te mogen gaan.



Geschikt voor elk niveau en elk moment

De les is hier beschreven als een eerste les aan de brugklas (met een vervolgles), maar kan ook op een ander moment gegeven worden in elke onderbouwklas. Het materiaal is geschikt voor elk niveau, natuurlijk met weglatingen of toevoegingen naar eigen inzicht van de docent. In klas 3 havo/vwo kan ook de berekening van de exacte waarde van φ behandeld worden, door het oplossen van de vergelijking $1 + \varphi = \varphi \cdot \varphi$ die je krijgt door (in figuur 5 en figuur 6) voor twee opeenvolgende lengtes

1 en φ te nemen (de som van die twee lengtes is dan gelijk aan φ keer de langste, dus φ·φ).



Veel plezier met het materiaal!

De werkbladen en de PowerPoints vind je op:
vakbladeuclides.nl/966pentagram_werkbladen
vakbladeuclides.nl/966pentagram_Powerpoint1
vakbladeuclides.nl/966pentagram_Powerpoint2

Noten

[1] De les (het zijn eigenlijk drie lessen) is een vereenvoudigde en aangepaste versie van getallendag, zie *lublub.nl/getallendag*, die is voortgekomen uit onderzoek voor de eindopdracht van het college Historical Aspects of Classroom Mathematics van Steven Wepster.

[2] zie *https://lublub.nl/pentagram*.

[3] Fritz, K. von. (1945). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics, Vol*(46), pp. 242-264 en Jones, P.S. (1956). Irrationals or Incommensurables I: Their Discovery, and a 'Logical Scandal'. *Mathematics Teacher*(49), pp 123-127 en Waerden, B.L. van der.(1950). *Ontwakende wetenschap, Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde*. Groningen: Noordhoff N.V., p. 113.

Over de auteur

Andrea Lubberdink is docent wiskunde aan het Utrechts Stedelijk Gymnasium en heeft een achtergrond in de geschiedenis en filosofie van de wetenschap. Website: *https://lublub.nl* E-mailadres: *andrea@lublub.nl*

Verschenen

Titel:
Grensverleggende getallen
Ondertitel: over 0, 1, i, ∞ en andere wiskundige grootheden
Auteur: Yannick Fritschy
Uitgever: New Scientist
EAN: 9789085717157
Prijs: € 10,99
(112 pagina's; paperback)

Dankzij uitvindingen op het gebied van getallen begrijpen we steeds beter hoe de natuur in elkaar zit. Zo konden de Babyloniërs met hun zestigtallige stelsel duizenden jaren geleden al de beweging van planeten uitrekenen. Nog maar enkele eeuwen terug leidde de invoering van de nul tot een wetenschappelijke revolutie. En hoe zouden we nu virusverspreiding moeten beschrijven zonder het exponentiële getal e?
Dit boekje bespreekt op een leuke en toegankelijke manier de belangrijkste getalsuitvindingen uit de geschiedenis. Het gaat van 1 via 0 naar ∞ en daar voorbij – met speciale aandacht voor buitenbeentjes zoals het bespotte verzinsel i, de gehate wortel van twee en de gehypete gulden snede. Ondertussen kom je erachter wat getallen nou eigenlijk zijn, en waarom ze zo ontzettend handig zijn bij het beschrijven van de wereld om ons heen.

Henk Hietbrink

Vestingbouw als context voor sinus-, cosinus- en tangensregel

Na jarenlang de hoogte van kerktorens in Nederland uitgerekend te hebben met sinus en cosinus in rechthoekige driehoeken, was Henk Hietbrink toe aan een meer uitdagende toepassing. Die vond hij in de vestingbouw van de zestiende en zeventiende eeuw.

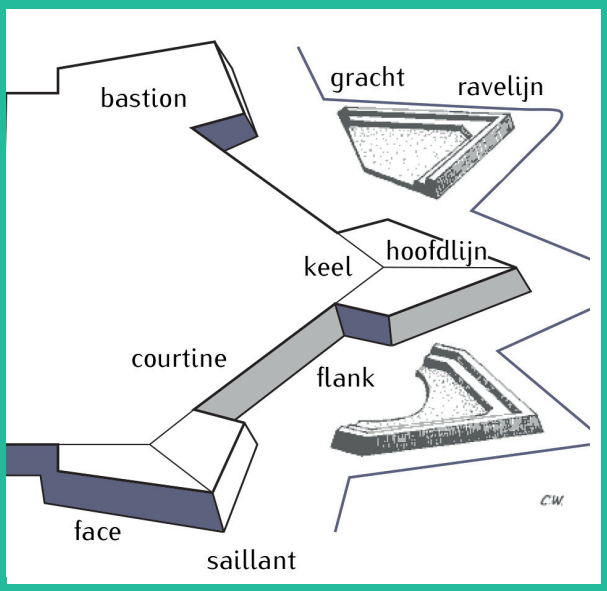
Begrippen

Uit eigen onderzoek bleek er een grote variatie in rekenmethodes te bestaan om lengtes en hoeken in een vesting te berekenen. Vooral auteurs met een wiskundige achtergrond waren meesters in het variëren van afmetingen, verhoudingen en formules voor de grootte van de hoeken. Deze auteurs leggen ook stapsgewijs uit hoe je met sinusregel en tangensregel kunt rekenen. De basisvorm van een vesting met bolwerken zie je in figuur 1. In de zeventiende eeuw verschenen de nodige boeken over vestingbouw, variërend van fraaie plaatjes- tot gedegen studieboeken. Altijd verluchtigd met mooie, regelmatige veelhoeken, van de vierhoek en de vijfhoek tot en met de twaalfhoek en verder.

Twee begrippen zijn in de vestingbouw belangrijk. In de zeventiende eeuw had men het over strijklijn en defensielijn. Tegenwoordig spreekt men van strijkende defensielijn en bestendige defensielijn. De defensielijn is de lijn vanuit het hoekpunt van de courtine en de flank naar de saillant. Een strijklijn is de lijn langs de face die begint in het snijpunt van het verlengde van de face met de courtine. De strijkhoek is dan de scherpe hoek tussen de courtine en de strijklijn en de defensiehoek is dan de scherpe hoek tussen de courtine en de defensielijn. Uit militair oogpunt was het belangrijk dat deze lijnen niet langer zijn dan het bereik van een musket: 60 roeden oftewel 720 voet, oftewel 226 meter. In de opdrachten komt daarom steeds terug hoe lang deze lijnen zijn.

Simon Stevin

Aanleiding tot dit artikel is de herdenking van Simon Stevin (1548 – 1620). Hij schreef als een van de eersten een boek in het Nederlands over het ontwerp van een



figuur 1 Kamps, van Kerkum, de Zee, Terminologie verdedigingswerken, 1999.

Een bolwerk is de uitbouw op de hoeken van de vesting. De punt van het bolwerk heet saillant. De wal tussen twee bolwerken heet courtine. De zijkanten van een bolwerk heten flanken en de voorzijden heten facen. De lijn tussen bolwerk en vesting heet keel. Militairen tekenen vaak een rechte lijn. Wiskundigen tekenen de keel in het verlengde van de courtine. De zijde van de veelhoek wordt zo benadrukt en dat vergemakkelijkt het rekenwerk. De lijn van de saillant naar de keel heet hoofdlijn. Om de vesting ligt een gracht. In de gracht liggen ravelijnen en halve manen als eilanden[1].

vesting, compleet met alle lengtes, hoogtes, breedtes etcetera. Zijn voorstel is gebaseerd op het Italiaanse systeem, met kloeke stenen bolwerken van meer dan 10 meter hoog. Kazematten werden gebouwd op de hoek van de flank met de courtine. Het zijn stenen bouwwerken met meerdere verdiepingen die dienen als opstelplaats voor de kanonnen. De kazematten liggen dus veilig aan de achterkant van het bolwerk. Van daaruit kan de verdediger langs de muren in de richting van het naastgelegen bolwerk schieten opdat een vijand niet ongezien een bom kon plaatsen bij de wallen of de bolwerken.

> "De historische context helpt om het nut van sinusregel en cosinusregel te onderstrepen."

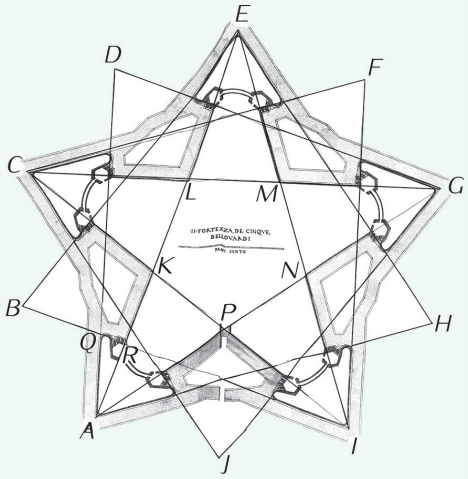
Stevins boek *Sterctenbovwing* is een prima onderwerp voor een profielwerkstuk. Zijn beschrijving bevat voldoende details om een bouwplaat of schaalmodel te maken van zijn voorstel. Zelf heb ik veel plezier beleefd aan het maken van een bouwplaat en het maken van een 3D model voor een 3D printer. Zijn verhaal is echter te omvangrijk voor een snelle, korte opdracht in een gewone les.
Stevin is belangrijk voor dit verhaal omdat hij prins Maurits adviseerde over het lesprogramma van de Duytsche Mathematique. Deze opleiding ging in 1600 in Leiden van start omdat er behoefte was aan goed opgeleide militair ingenieurs. Vestingbouw was een serieus lesdoel. Stevin stelde voor dat de opleiding gebruik zou maken van houten schaalmodellen waarin de strijklijn met touwtjes zichtbaar gemaakt kon worden. Vanaf 1610 tot 1679 werden de lessen verzorgd door de familie Van Schooten. Daarnaast waren er in de Republiek een aantal privédocenten die wiskunde en vestingbouw doceerden.

Geschiedenis

Voorbeelden van het Italiaanse systeem zijn de Utrechtse bastions Zonnenburg en Manenburg en in Maastricht de ronde torens Haet ende Nijt en De Vijf Koppen. Het oud-Nederlands vestingstelsel is geïntroduceerd door Stevins tijdgenoten, bijvoorbeeld Adriaan Anthonisz, burgemeester van Alkmaar en de vader van vestingbouwkundige Adriaan Metius. Zij bedachten een systeem van aarden wallen, van bolwerken van slechts enkele meters hoog, kanonnen op de wallen en bastions, in plaats van in kazematten, het geheel omgeven door wijde, natte grachten. Een dergelijke vesting was aanmerkelijk sneller en goedkoper te realiseren dan die zware stenen Italiaanse bouw. Hoe groot het verschil is tussen hun plannen en die van Stevin, blijkt als de hoogtes bij Stevin omgerekend worden van voeten naar meters. Een bastion van 40 voet hoog is meer dan 12 meter hoog en een gracht van 55 voet is meer dan 17 meter diep. Mooi voor een vakoverstijgende les: waar in Nederland of België kon je zoiets bouwen?
Aan het einde van de zeventiende eeuw kwam Menno van Coehoorn met het nieuw-Nederlands vestingstelsel met aanpassingen in het ontwerp van de flanken en de ravelijnen en andere constructies in de gracht.
De hele geschiedenis van de vestingbouw is een verhaal apart, maar kan in een paar zinnen worden samengevat.
In de zestiende eeuw vechten de Franse koningen en Karel V (Duitse keizer, koning van Spanje en heer der Nederlanden) om de Italiaanse steden. De Italiaanse steden worden bevestigd met wallen, bolwerken en vaak droge grachten. Vaak wint de belegeraar, maar soms winnen de belegerden. Zo ontstaat het Italiaanse vestingstelsel in de praktijk. Tijdens de tachtigjarige oorlog hebben de Nederlandse steden noch de tijd noch het geld voor stenen bolwerken. Aarden wallen zijn sneller en goedkoper te bouwen. Bovendien blijken die aarden wallen en bolwerken goed bestand tegen beschietingen.
Een uitgebreider verhaal staat op mijn website[2] en in mijn video[3].
In dit artikel behandel ik één voorbeeld van het Italiaanse systeem omdat je er zo goed aan kunt rekenen. Meetkundig gezien is het Oud-Nederlands vestingstelsel heel aantrekkelijk. Het ziet er simpel uit, maar is toch moeilijker dan je denkt. Verschillende opdrachten zijn geselecteerd met als basis een regelmatige vijfhoek. Bij alle opdrachten noem ik de naam van de auteur en de naam van het boek om aan te geven dat de opdrachten en contexten niet verzonnen zijn, maar een historische bron hebben.

Galasso Alghisi

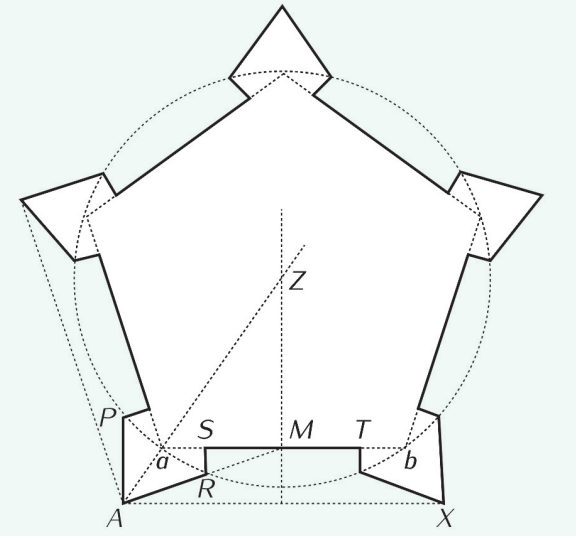
De eerste opdracht is van Galasso Alghisi da Carpi (1523 – 1573), een Italiaanse architect uit de Renaissance. Hij vond dat vestingbouw niet overgelaten kon worden aan militairen en schreef een boek over hoe een vesting met bolwerken eruit moest zien. In *Delle Fortificationi* beschrijft hij de vijfhoek tot en met de een-en-twintighoek. Dat is wiskunde, dat is stedenbouwkunde, maar staat ver af van de militaire praktijk.
De vijfhoekige vesting is gebouwd langs de lijnen van een regelmatige tienhoek. Bij deze tekening kun je vragen naar de grootte van relevante hoeken als de bolwerkshoek, *DAH*, of de grootte van de hoek *AKC* van de knik in de courtine.



figuur 2 Galasso Alghisi da Carpi, Delle fortificationi, *1570*

Voor de denkopdracht volstaat het om de oppervlakte van de binnenste vijfhoek, *KLMNP*, te geven, bijvoorbeeld één morgen, dat exact 600 vierkante roeden is. Vraag is dan om de lengte te berekenen van de wal en de zijden van een bolwerk, zie figuur 2.

Nikolaus Goldmann

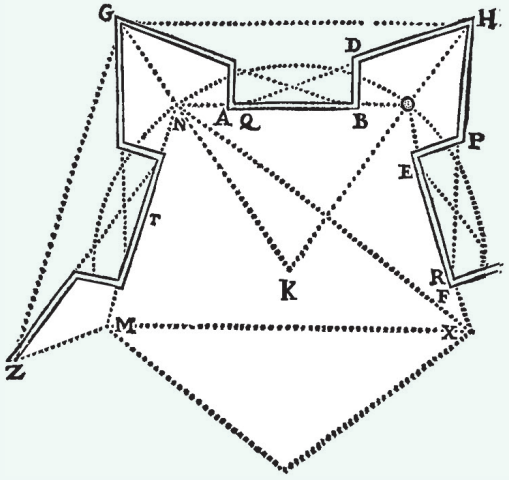


figuur 3 naar Nikolaus Goldmann, La nouvelle fortification, 1643

Nikolaus Goldmann (1611 – 1665) gaf privélessen in Leiden in de tijd dat de familie Van Schooten doceerde aan de Duytsche Mathematique. Bij zijn tekening kun je bijvoorbeeld vragen om deze op schaal te tekenen waarbij de courtine *ST* 40 roede is, de flank *RS* loodrecht staat op de courtine en 6,7 roede lang is, de keel *aS*, *Tb* ieder 9,2 roeden lang zijn en de strijklijn *AM* de courtine halverwege snijdt. Vervolgopdracht kan zijn om de grootte van de bolwerkshoek *PAR* te berekenen of de afstand *AX* tussen de punten van twee naastgelegen bolwerken of de oppervlakte van een bolwerk. Getekend kan worden op papier, maar ook met GeoGebra. Voordeel van GeoGebra is dat leerlingen al tekenend de antwoorden vinden op bovenstaande opdrachten. Wanneer je in GeoGebra een veelhoek tekent, krijg je een benadering van de oppervlakte van die veelhoek cadeau. Uiteraard moeten leerlingen nog wel zelf een berekening opstellen, maar het helpt als ze weten waar ze naartoe moeten werken. Bovendien inspireert het tekenen ook om de nodige hulplijnen en hulpvlakken te onderzoeken. Goldmann heeft in de tekening enkele slimme hulplijnen getekend. Daardoor kan de opdracht zonder sinusregel gemaakt worden, zie figuur 3.

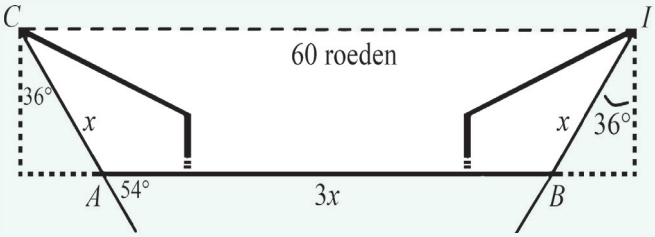
Adriaan Metius

Adriaan Metius (1571 – 1635) studeerde wiskunde in Franeker en Leiden. Zijn vader is Adriaen Anthonisz (1541-1620), vestingbouwkundige, cartograaf, wiskundige en burgemeester van Alkmaar. Adriaen Anthonisz werkte volgens de principes van het oud-Nederlands vestingstelsel. Zijn werkterrein was heel Noord-Nederland. Adriaan Metius heeft in zijn boek de ideeën van zijn vader verwerkt.



figuur 4 Adriaan Metius, Fortificatie ofte stercken-bouwinghe, *1626*

Ook deze opdracht gaat over een regelmatige vijfhoek, zie figuur 4. Gegeven is een vesting met vijf bolwerken met zijde *ON* = 540 voeten. De verhoudingen zijn dat keel : zijde = 2 : 9 en flank : zijde = 1 : 6. Opdracht is om te rekenen aan de grootte van de hoeken, bijvoorbeeld bolwerkshoek *H*, en aan de lengte van de verschillende onderdelen, bijvoorbeeld de lengte van face *DH* en de lengte van de strijklijn *HQ* en de defensielijn *AH*. Ook deze opdracht kan zonder sinusregel gemaakt worden wanneer de hulpdriehoeken toegevoegd worden. Vervolgopdrachten kunnen zijn om met dezelfde uitgangspunten een zeshoekige of zevenhoekige vesting door te rekenen. Metius ging door tot en met de twaalfhoek.



figuur 5 Naar: Petrus van Schooten, BPL 1993, Versterkingskunst. (belgice)

Pieter van Schooten

Pieter van Schooten was van 1660 tot 1679 de derde uit de familie Van Schooten die les gaf aan de Duytsche Mathematique. De tekening in figuur 5 komt uit het Leidse handschrift: BPL 1993.
Pieter construeerde een regelmatig vijfhoekige vesting met bolwerkafstand $CI = 60$ roeden. Hij berekende de grootte van de bolwerkshoek *FIY* met de formule: een derde van de omtrekshoek *ABZ* plus 30°. De lengte van de hoofdlijn *AC* verhoudt zich tot de zijde *AB* als 1 : 3. De lengte van de keel *AO* verhoudt zich tot de zijde *AB* als 1 : 5. Opdracht is bijvoorbeeld om de grootte van de defensiehoek *ADC* en de lengte van de strijklijn *CR* uit te rekenen.

Wiskundig gezien is dit een fraaie opdracht omdat je, na de exercitie van het berekenen van de grootte van de verschillende hoeken, moet beginnen met het opstellen van een vergelijking voor de lengte van de afstand tussen de bolwerkspunten. Noem x de onbekende lengte van de hoofdlijn *AC*, dan is de lengte van de zijde $AB = 3x$. De vergelijking is dan $x \cdot \sin(36°) + 3x + x \cdot \sin(36°) = 60$.
Een andere strategie is om eerst de hoeken en zijden van een vesting met zijde 10 uit te rekenen en vervolgens op zoek te gaan naar de juiste vergrotingsfactor. Met deze strategie kun je ver komen!

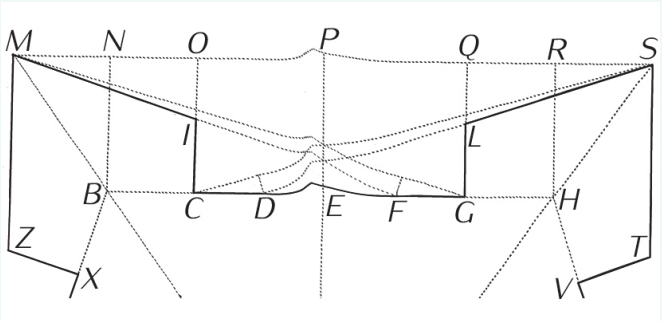
Andreas Cellarius

Andreas Cellarius werd in 1637 rector van de Latijnse school in Hoorn. Hij overleed in 1665, vijf jaar na de uitgave van zijn prachtige *Harmonia Macrocosmica* over de hemelloop. Cellarius construeerde een regelmatige vijfhoek met courtine $CG = 36$, flank $CI = 9$, face $MI = 24$ roeden. De bolwerkhoek *IMZ* werd berekend met de formule: twee derde van de omtrekshoek *CBX*, maar is hoogstens 90°.
Cellarius etaleerde zijn wiskundige kennis door de tangensregel te gebruiken. Deze regel is een mooie aanvulling op de sinusregel en de cosinusregel. In het geval van een bekende hoek tussen twee bekende zijden, kun je met de cosinusregel de lengte van de onbekende tegenoverliggende zijde berekenen, terwijl je met de tangensregel de grootte van de onbekende twee hoeken kunt berekenen. Met de tangensregel kun je in één keer de grootte van die andere hoeken uitrekenen. Zonder tangensregel moet je eerst met de cosinusregel de lengte van de derde zijde uitrekenen en dan de sinusregel gebruiken om de grootte van die andere hoeken te vinden.
In iedere driehoek *ABC* met hoeken α, β en γ en zijden $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$ geldt de tangensregel:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan(\frac{1}{2}(\alpha-\beta))}{\tan(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}$$

Wanneer je de lengte van twee zijden a en b kent en de grootte van de ingesloten hoek γ dan kun je de som van die twee andere hoeken uitrekenen omdat de hoekensom 180° is: $\alpha + \beta = 180° - \gamma$. Met de tangensregel kun je nu de onbekende $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ vinden.
Omdat $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ en $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, kun je de grootte van de onbekende hoeken α en β uitrekenen. De tangensregel hoeft van mij niet in het curriculum, maar wil ik wel noemen in het klaslokaal om het trio compleet te maken. Voor de wiskunde D-leerlingen is het een aardig uitstapje.

Opdracht bij figuur 6 is om de defensiehoek te berekenen. Een mogelijke aanpak is om eerst de grootte van alle hoeken uit te rekenen, vervolgens de lengtes van de verschillende zijden, waaronder hoofdlijn *BM* en keel *BC*, en tot slot in driehoek *BMG* de defensiehoek met de tangensregel.



figuur 6 Naar: Cellarius, Architectura militaris, 1645

>

Computational thinking in de wiskundeles

Bereid leerlingen voor op de toekomst

Met de handhelds en software van Texas Instruments gebruikt u programmeren in Python eenvoudig in de klas! Volg diverse gratis webinars waar u Python leert benutten en tips krijgt voor praktische toepassingen in de les.

Python op de handheld

Leerlingen programmeren zelf in Python met de TI-Nspire™ CX II-T handhelds, de TI-Nspire™ CX software en TI-84 CE-T Plus Python Edition. Bekijk lesactiviteiten op:

» **www.wil-depython.nl**

python™

Webinars leraren

De webinars van het T³ lerarennetwerk draaien om logisch redeneren, algoritmisch structureren en programmeren in de klas. U kijkt de opgenomen webinars terug wanneer het u uitkomt!

» **resources.t3nederland.nl/webinars**

education.ti.com/nederland

BBC micro:bit

Koppel de BBC micro:bit aan een TI-Nspire™ CX II-T handheld en stuur het microcomputertje aan met Python scripts.

Let op: update naar OS 5.3 voor deze functionaliteit!

Texas Instruments

©2021 Texas Instruments

Vergelijking

In onderstaande tabel staat een vergelijking van de opbouw van de besproken opdrachten. In dit artikel noem ik er slechts vier, maar in mijn onderzoek heb ik de aanpak van vijftien auteurs bestudeerd en ook een aantal manuscripten die mogelijk gediend hebben als college-dictaat. Deze manuscripten staan vol goniometrische berekeningen. In de besproken opdrachten zijn er twee verschillende formules voor de bolwerkshoek, maar het is verbazingwekkend hoeveel variatie wiskundigen wisten aan te brengen. In de tabel staat met welke gegevens de verschillende auteurs hun opdracht beginnen.

Conclusie

Wiskundigen hebben zich in de zeventiende eeuw gestort op de vestingbouw. Van militaire ingenieurs werd verwacht dat ze met goniometrie konden rekenen. Iedere docent met voldoende wiskundige achtergrond ontwikkelde een eigen aanpak met eigen formules. Sommige boeken zijn decennia lang herdrukt in verschillende talen. De besproken opdrachten zijn pittig. Je kunt ze inzetten aan het einde van het hoofdstuk als wiskundige denkactiviteit. De historische context helpt om het nut van sinusregel en cosinusregel te onderstrepen. Op mijn website[2] verschijnen lesbrieven met uitwerkingen.

Noten

[1] Uit: Mohr, A.H. (1999). *Vestingbouwkundige termen* tweede druk (herziene editie; P.C. van Kerkum, P.J.M. Kamps & J de Zee (reds). Utrecht: Stichting Menno van Coehoorn. Zie ook *https://nl.wikipedia.org/wiki/Lijst_van_vaktermen_in_de_vestingbouwkunde*

[2] zie *http://www.fransvanschooten.nl/Stevin.htm*

[3] zie *https://soapbox.wistia.com/videos/aQdVRY84D7*

Over de auteur

Henk Hietbrink gaf vorig schooljaar wiskunde op het Hermann Wesselink College in Amstelveen. Momenteel doet hij onderzoek naar de wiskunde van Simon Stevin, (Vestingbouw en Interest), schrijft daarover op zijn website *www.fransvanschooten.nl* en verzorgt workshops over zonnewijzers en muqarnas.
E-mailadres: *hietbrink.h@planet.nl*

	Nikolaus Goldmann	Adriaan Metius	Pieter van Schooten	Andreas Cellarius
bolwerkshoek		formule	formule	formule
zijde		gegeven	verhouding	
afstand tussen bolwerkspunten			gegeven	
courtine	gegeven			gegeven
flank	gegeven	verhouding		gegeven
keel	gegeven	verhouding	verhouding	
face				gegeven
hoofdlijn			verhouding	
strijklijn	gegeven			
defensielijn				

Rob van Oord

De gulden snede en een regelmatige vijfhoek

Hoe construeer je een regelmatige vijfhoek met passer en liniaal? Rob van Oord legt meerdere constructies uit zodat je er met je leerlingen mee aan de slag kunt.

Inleiding

Er zijn verschillende Zebraboekjes waarin de gulden snede aan bod komt.[1] Daar kun je lezen hoe de gulden snede verhouding berekend of benaderd (bijvoorbeeld met een kettingbreuk) kan worden als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}618$ en waar je hem tegenkomt bijvoorbeeld in de natuur en bij de rij van Fibonacci. Ik word al jaren geboeid door ruimtelijke vormen als de dodecaëder en de icosaëder. Daarin komen regelmatige vijfhoeken en de guldensnedeverhouding telkens terug. Wat mij al een tijdje bezighoudt is hoe je bij een gegeven zijde de regelmatige vijfhoek kunt construeren of, wat op hetzelfde neerkomt, het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Maar ook hoe je bij een gegeven cirkel (straal) met een constructie de regelmatige vijfhoek daarin kunt vinden. Uiteraard kun je met een geodriehoek hoeken van de vijfhoek tekenen van 108° of middelpuntshoeken van 72°. Laatst las ik in een boek een diversiteit aan manieren om de constructies uit te voeren.[2] Er stonden echter geen bewijzen bij van de exactheid van de methodes. Ik heb bij elk van die methoden toen het bewijs gezocht en gevonden.
Dit was voor mij de aanleiding voor dit artikel. Op internet vond ik ook nog een manier die me aansprak.[3] Deze manier staat als 'opgave 2.9' in Zebraboekje 4.[1] Er zijn ongetwijfeld nog meer, misschien nog elegantere manieren. Ik kijk vol verwachting uit naar wat lezers hierover kunnen melden. Van mijn eerste lezer, Agnes Verweij, heb ik al een mooie manier opgestuurd gekregen. Die wil ik de lezer dan ook niet onthouden.

De gulden snede als verhouding

Eigenlijk zijn er twee verhoudingen voor de gulden snede. De verhouding *grootste* : *kleinste* $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}618$ en de verhouding *kleinste* : *grootste* $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 0{,}618$.

De grootste verhouding noemen we φ. Dan is de kleinste $\varphi - 1$ $(= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})$ of ook $1/\varphi$.
Dit laatste volgt direct uit de vergelijking waarmee φ berekend wordt, zie verderop.

Een definitie van φ is:
Wanneer een lijnstuk AB met lengte 1 (aan de kant van B) verlengd wordt met een lijnstuk BC waarbij geldt dat $AC/AB = AB/BC$ dan noemen we deze verhouding φ.
In woorden: een lijnstuk (AC) is verdeeld in twee stukken (AB en BC) waarbij moet gelden dat de verhouding van het hele lijnstuk tot het grootste deel gelijk is aan de verhouding van het grootste deel tot het kleinste deel, zie figuur 1.

figuur 1

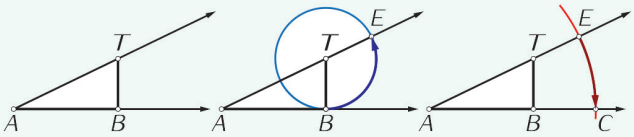
$AC = AB + BC$, dus $AC/AB = AB/BC$ kun je omschrijven naar $(AB + BC)/AB = AB/BC$
ofwel $1 + BC/AB = AB/BC$.
Vermenigvuldig alles links en rechts van het =-teken met AB/BC dan krijg je $AB/BC + 1 = (AB/BC)^2$.
Dus $\varphi + 1 = \varphi^2$ ofwel $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. (1)
Hieruit volgt dan $\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. (De andere oplossing: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -0{,}618$ is < 0, dus vervalt).
Als $AB/BC = \varphi$ dan is de omgekeerde verhouding $BC/AB = 1/\varphi$
Er geldt

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Makkelijker is dit als volgt te berekenen. Deel bij (1) alles links en rechts van het =-teken door φ, dan krijg je
$\varphi - 1 - 1/\varphi = 0$ ofwel $\varphi - 1 = 1/\varphi$ ofwel
$1/\varphi = \varphi - 1 = -½ + ½\sqrt{5} \approx 0{,}618.$ (2)

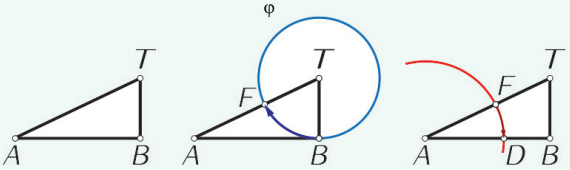
De constructie van φ met passer en liniaal

Constructie van een 'guldensnede'-punt buiten een lijnstuk: uitgaande van een lijnstuk (AB), waarvan we de lengte 1 noemen, zoeken we een lijnstuk (AC) met lengte $\varphi = ½ + ½\sqrt{5}$.
In figuur 2 is de constructie stap voor stap te volgen.
Teken een lijnstuk AB. Construeer in B lijnstuk BT, loodrecht op AB, met lengte $BT = ½AB$. [5]
Merk op dat de lengte van AT gelijk is aan $½\sqrt{5}$. Verleng lijnstuk AB in de richting van B en teken vanuit A door T een halve lijn. Teken $\odot(T, TB)$. Het snijpunt van de cirkel met de halve lijn door T noemen we E.
Nu is $AE = ½ + ½\sqrt{5}$ dus $AE = \varphi$.
Teken $\odot(A, AE)$. Het snijpunt van deze cirkel met het verlengde van lijnstuk AB noemen we C.
Dus $AC = AE = \varphi$.
Nu hebben we lijnstuk AC geconstrueerd dat door B verdeeld wordt in de gulden snede.
$AB : BC = AC : AB = \varphi : 1 = \varphi$.



figuur 2

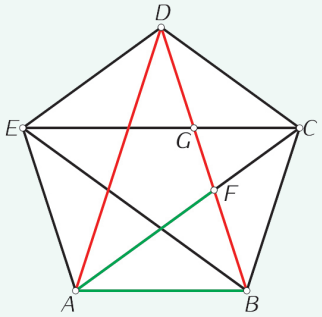
Constructie van een 'guldensnede'-punt op een lijnstuk: als je op een lijnstuk AB met lengte $AB = 1$ het punt D wilt construeren zodat $AD : DB = \varphi$ dan gaat dat als volgt, zie figuur 3.
Teken lijnstuk AB met lengte $AB = 1$. Construeer in punt B lijnstuk BT loodrecht op AB met lengte $BT = ½$ en teken lijnstuk AT (met lengte $½\sqrt{5}$). Teken $\odot(B, BT)$. Het snijpunt van deze cirkel met AT is F.
Nu is $AF = ½\sqrt{5} - ½ = 1/\varphi$, zie (2).
Teken $\odot(A, AF)$. Het snijpunt D van deze cirkel met AB verdeelt nu AB in de guldensnedeverhouding.
Immers uit $AF = AD = 1/\varphi = \varphi - 1$, zie (2), en
$DB = AB - AD = 1 - 1/\varphi = \frac{\varphi - 1}{\varphi}$
volgt dat $AD : DB = \frac{\varphi - 1}{\frac{\varphi - 1}{\varphi}} = \varphi$.



figuur 3

De gulden snede in een regelmatige vijfhoek

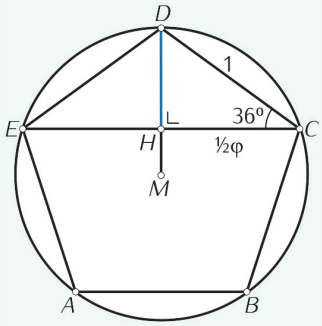
Ik ga ervan uit dat de lezer van dit artikel zelf kan nagaan dat de hoeken tussen zijden en diagonalen in een regelmatige vijfhoek en tussen de diagonalen zelf allemaal 36° zijn. Daardoor ontstaan er tal van gelijkvormige gelijkbenige driehoeken bijvoorbeeld ΔABD en ΔBFA, zie figuur 4.



figuur 4

Noem de lengte van de zijden van de vijfhoek z, en de lengte van de diagonalen d, dan is bijvoorbeeld
$AB = AF = DC = DF = z$ en $AD = AC = BD = d$, zodat $BF = d - z$. Uit de gelijkvormigheid van ΔABD en ΔBFA volgt nu bijv. dat AD/AB (= AC/AF) = AB/BF ofwel $\frac{d}{z} = \frac{z}{d-z}$. Dit is te herleiden tot $\left(\frac{d}{z}\right)^2 - \frac{d}{z} - 1 = 0$.
Dit is dezelfde vergelijking als die van de gulden snede, zie (1). Omdat $AD/AB = AC/AF$ kun je zeggen dat de diagonaal AC door F verdeeld wordt in twee stukken (AF en FC) met de guldensnedeverhouding.
Conclusie: diagonalen en zijden van een regelmatige vijfhoek hebben de guldensnedeverhouding. (3)

Er geldt dat $\sin(36°) = ¼\sqrt{10-2\sqrt{5}} = ½\sqrt{3-\varphi}$
Om te kunnen bewijzen dat de constructies met passer en liniaal exact goed zijn, is het handig om eerst te berekenen dat $\sin(36°) = ½\sqrt{3-\varphi}$ ofwel $¼\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.
Bekijk een regelmatige vijfhoek met zijn omgeschreven cirkel. Neem $z = 1$ als lengte van de zijden van de vijfhoek. Dus $CD = 1$. MD is de middelloodlijn van EC.
Dan is $HD = \sin(36°)$, zie figuur 5.



figuur 5

Omdat $CD = 1$ en $CE/CD = \varphi$ is
$HD = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{1-(\frac{1}{2}\varphi)^2}$.
Even rekenen:
$1 - (\frac{1}{2}\varphi)^2 = 1 - \frac{1}{4}\varphi^2 = 1 - \frac{1}{4}(\varphi + 1) =$
$\frac{1}{4}(3 - \varphi)$ $[=(10 - 2\sqrt{5})/16]$.
Dus $\sin(36^o) =$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(3-\varphi)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3-\varphi} \quad [= \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ ]. \qquad (4)$$

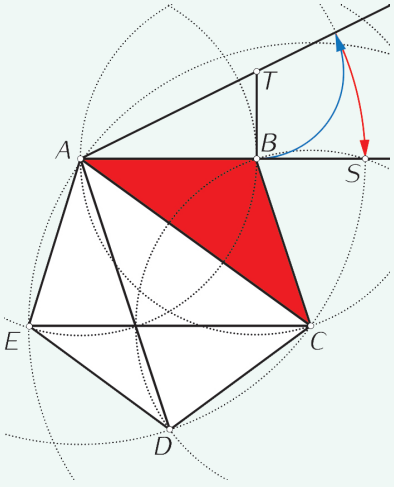
Merk op dat in dit geval de hoogte DH van ΔCDE gelijk is aan $\sin(36^o)$.

Handig om alvast te onthouden:
$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = {}^5/_4 + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} =$
${}^3/_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^2 =$
${}^5/_4 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} = {}^3/_2 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

De constructie van een regelmatige vijfhoek vanuit een gegeven zijde

Uitgaande van een gegeven zijde AB zijn er verschillende manieren om de vijfhoek te construeren. In feite komt elke manier van construeren neer op het construeren van de gulden snede. We bespreken er drie (waarvan twee op de *Euclides* website [5]).

De eerste manier
De meest eenvoudige manier is om bij de zijde AB een lijnstuk AS met lengte $\varphi \cdot AB$ te construeren. Voer de constructie uit die in figuur 2 te zien is. Daarmee heeft AS (en ook AC) de lengte die de diagonalen moeten hebben bij zijde AB. Door op de juiste manier AS en AB om te cirkelen krijg je de hoekpunten van de gevraagde regel-matige vijfhoek, zie figuur 6. Hierin hebben AB en AS de guldensnedeverhouding.



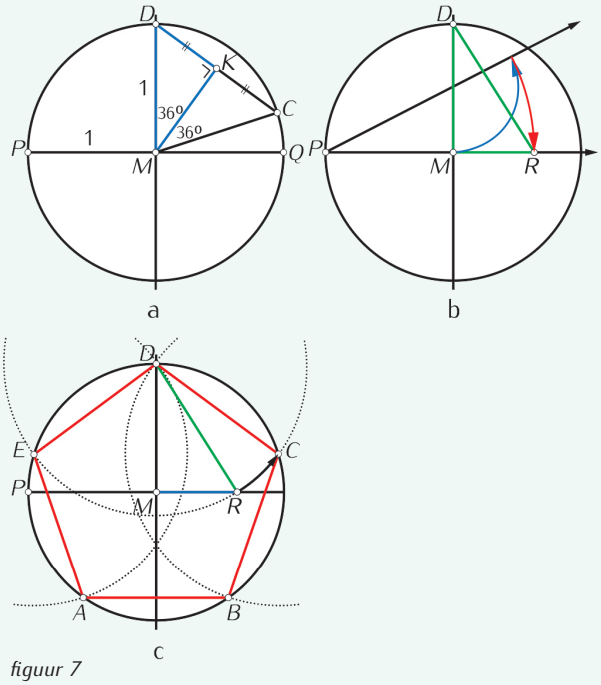
figuur 6

Bij deze manier vind je wel de vijfhoek maar niet het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de vijfhoek.

De constructie van een regelmatige vijfhoek in een gegeven cirkel

We bespreken op vier manieren hoe je bij een cirkel met gegeven straal de zijde van de regelmatige vijfhoek kunt construeren waarvan de hoekpunten precies op die cirkel liggen.

De eerste manier
Gegeven is de cirkel met straal $PM = r$. Omdat de middelpuntshoek naar een zijde (CD) van de regelmatige vijfhoek 72° is, en de middelloodlijn ervan (door M) de hoek in twee hoeken van 36° verdeelt, moet een lijnstuk van $2\sin(36^o)\cdot r$ worden geconstrueerd. Immers in ΔMKD geldt $\sin(36^o) = DK/DM = DK/r$. Neem $r = 1$. Voor zijde CD van de vijfhoek geldt dan $CD = 2\sin(36^o) = \sqrt{3-\varphi}$, (zie (4) en figuur 7a). Construeer op het verlengde van lijnstuk PM aan de kant van M punt R, zodat $PR = \varphi$, op de manier waarop in figuur 2 punt C wordt geconstrueerd, zie figuur 7b. Geldt nu dat $DR = \sqrt{3-\varphi}$, de gevraagde lengte van de zijde?
In ΔRMD geldt $MR = \varphi - 1$ en $MD = 1$, dus met de stelling van Pythagoras vind je
$DR^2 = MR^2 + MD^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})^2 + 1 =$
${}^5/_4 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} + 1 = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3 - \varphi.$ (4)
Dus inderdaad is DR de lengte van een zijde van de regelmatige vijfhoek. Met een paar keer omcirkelen kan de vijfhoek $ABCDE$ worden afgemaakt, zie figuur 7c.



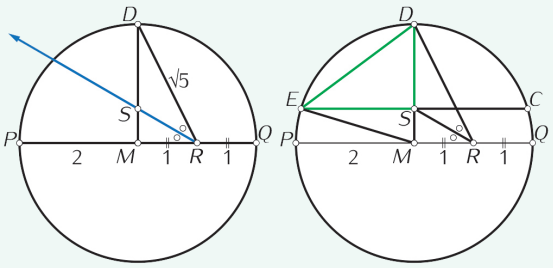
figuur 7

De tweede manier

Gegeven is de cirkel met straal $PM = 2$. Construeer het midden R van MQ op middellijn PQ. Construeer straal MD loodrecht op middellijn PQ. Construeer de deellijn van $\angle MRD$. Deze snijdt MD in punt S, zie figuur 8a.
Een stelling in de meetkunde zegt dat S nu lijnstuk MD verdeelt in stukken MS en SD met verhouding $MR : DR$.
Dus $MS = \frac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$

en $DS = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

Construeer door punt S de koorde CE evenwijdig aan PQ. Bij de middelpuntshoek op een zijde van de vijfhoek moet de lengte van de koorde gelijk zijn aan $2\sin(36^o)\cdot r$, dus in dit geval $4\sin(36^o) = 2\sqrt{3-\varphi}$, zie (4).
Met behulp van de stelling van Pythagoras in ΔDES laten we nu zien dat $DE = 2\sqrt{3-\varphi}$, zie figuur 8b.



figuur 8 a b

Eerst berekenen we ES^2 in ΔMES. $ES^2 =$

$$ME^2 - MS^2 = 4 - \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2$$

Bedenk dat

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4}$$

en dat $\frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$

$$DE^2 = DS^2 + ES^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2 + 4 - \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right)^2 + 4 - \left(\frac{2\sqrt{5}-2}{4}\right)^2$$

Deel in de breuken factor 2 weg en werk de haakjes van de kwadraten uit.
Dan is
$DE^2 = \frac{25-10\sqrt{5}+5}{4} + 4 - (\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}) =$
7½ - 2½√5 + 4 – (1½ - ½√5) = 10 – 2√5
Bedenk dat
$10 - 2\sqrt{5} = 4(3 - ½ - ½\sqrt{5}) = 4\cdot(3 - \varphi)$.
Dus DE (en ook CD) =
$2\sqrt{4\cdot(3-\varphi)} = 2\sqrt{3-\varphi} = 4\sin(36^o)$
Met een paar keer omcirkelen kan de vijfhoek $ABCDE$ worden afgemaakt.

De derde manier [4]

Om te begrijpen dat het resultaat van deze constructie klopt, berekenen we eerst de zijde (AT) van een regelmatige tienhoek, zie figuur 9a. M is het middelpunt van $\odot(M, MT)$ met straal $MT = 1$. $\angle AMT = 360^o/10 = 36^o$.
We weten dat $\sin(36^o) = ¼\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, zie (4).
Uit $\cos^2(36^o) = 1 - \sin^2(36^o)$ volgt

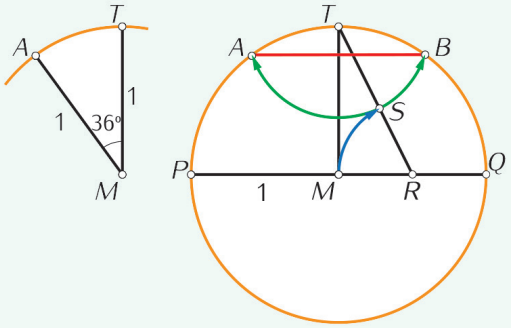
$$\cos(36^o) = \sqrt{1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

Met de cosinusregel vind je
$AT^2 = MA^2 + MT^2 - 2\cdot MA\cdot MT\cdot\cos(36^o)$,

$$\text{dus } AT^2 = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{5}} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})}\ ^* =$$

$$2 - 2\cdot½\cdot\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2})^2} =$$

$^3/_2 - ½\sqrt{5}^* = {}^5/_4 - ½\sqrt{5} + ¼ = (½\sqrt{5} - ½)^2$
Dus $AT = ½\sqrt{5} - ½$.
* Zie onder (4) wat handig was om te onthouden.



a b

figuur 9

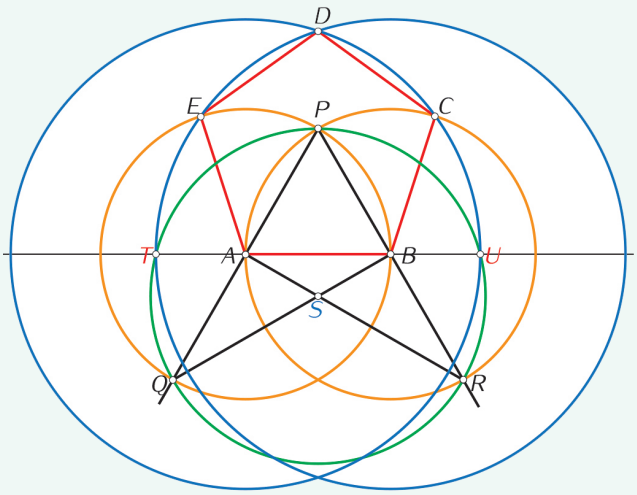
Nu de constructie van de regelmatige vijfhoek, zie figuur 9b. Gegeven is de cirkel met straal $PM = 1$. Construeer op middellijn PQ het midden R van MQ. Dus $MR = ½$.
Construeer straal MT loodrecht op middellijn PQ dus $RT = ½\sqrt{5}$.
Teken het snijpunt S van $\odot(R, RM)$ en lijnstuk RT, dus $ST = ½\sqrt{5} - ½$.
Dit is precies de lengte van de zijde van de regelmatige tienhoek. A en B zijn de snijpunten van $\odot(T, TS)$ met $\odot(M, MP)$. Merk op dat AT en BT zijden zijn van een regelmatige tienhoek.
Dus is AB vanzelfsprekend een zijde van de regelmatige vijfhoek. Iets preciezer, $\angle AMT = \angle BMT = 36^o$, waaruit volgt dat $\angle AMB = 72^o$. Dit is precies de middelpuntshoek van een regelmatige vijfhoek. Koorde AB is dus de zijde van de vijfhoek. >

De constructie van Agnes Verweij

Deze manier kreeg ik opgestuurd door Agnes Verweij nadat ze een concept van dit artikel gelezen had. Ik geef de lezer alleen de constructie van de vijfhoek. In figuur 10 staat deze constructie getekend. Ik daag je uit om zelf te bewijzen dat de figuur inderdaad een regelmatige vijfhoek oplevert.

Gegeven is zijde AB. Teken het snijpunt P (boven AB) van $\odot(A, AB)$ en $\odot(B, BA)$. Teken vanuit P door A een halve lijn en ook een vanuit P door B. Teken de snijpunten Q respectievelijk R van die halve lijnen met $\odot(A, AP)$ respectievelijk $\odot(B, BP)$. Teken het snijpunt S van AR en BQ. Teken de snijpunten T (aan de kant van A) en U (aan de kant van B) van de lijn door A en B met $\odot(S, SP)$. Nu hebben AU en AB de guldensnedeverhouding. (Bewijs dit, maak gebruik van de verhoudingen in een 30 °- 60 °- 90 °- driehoek)

Teken het snijpunt D van $\odot(A, AU)$ en $\odot(B, BT)$. (je kunt het snijpunt boven AB dan wel onder AB nemen, al naar gelang er ruimte is op je blaadje). Teken het snijpunt C van $\odot(A, AU)$ en $\odot(B, BA)$. Teken het snijpunt E van $\odot(B, BT)$ en $\odot(A, AB)$. Vijfhoek $ABCDE$ is nu een regelmatige vijfhoek. Teken de vijfhoek.



figuur 10

Tot slot

Ik hoop dat ik de lezer heb kunnen inspireren om zelf ook regelmatige vijfhoeken te gaan construeren. Ik zou het mooi vinden als je dit ook met je klas gaat doen. Maak van de manier(en) die je uitkiest eerst een stappenschema voor de leerling (zoals ik deed bij de manier van Agnes Verweij). In hoeverre je met de klas wilt bewijzen of de gekozen constructie klopt, laat ik aan jullie over. Als je in een klas twaalf even grote (gekleurde) vijfhoeken hebt, dan kun je er een dodecaëder mee maken. Mail me gerust als je nog vragen hebt of een andere manier voor een constructie.

Op de site staat een aanvulling op dit artikel.

vakbladeuclides.nl/966guldensnede

Noten

[1] *Zebra 4 De Gulden Snede* – Wim Kleijne, Ton Konings p. 6-8, 10-12, 22, 23
Zebra 33 Ontwikkelen met Kettingbreuken - Martin Kindt, Piet Lemmens p. 19, 20
Zebra 55 De Meetkunst van Albrecht Dürer – Martin Kindt p.21-23
Zebra 57 Wortel 2 – Rob Bosch, Pieter Miedema p.47-49

[2] Vincent, R. (2007). *Géometrie du nombre d'or.* Saint Ouen: Chalagan editions.

[3] Zie ook NWD 2019 Handout workshop blok 3, Wiskunde, daar zit wat in (deel 1, p.6 met een foutje in r.1☹)
https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen/handouts-presentaties-en-fotos-2019

[4] zie *http://www.zefdamen.nl/CropCircles/Constructions/pentagon/pentagon_ne.htm* en ook Opgave 2.9 in Zebra 4.

[5] Zie: *vakbladeuclides.nl/966guldensnede*

Over de auteur

Rob van Oord is docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, daarna als invaller op scholen in de regio.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Jacques Jansen

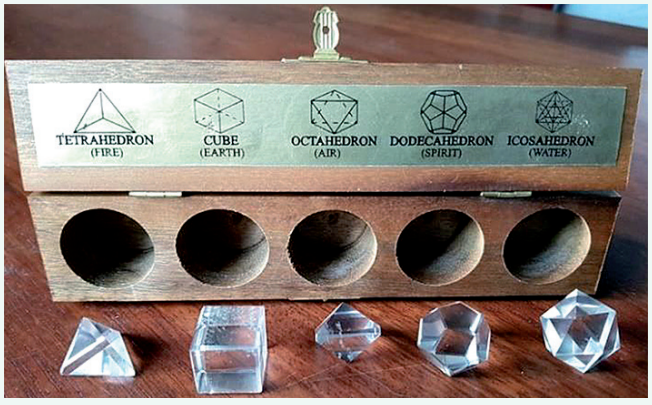
Uitdagende problemen

Om- en ingeschreven bollen

In de architectuur komen platonische lichamen voor, zoals de kubus en de dodecaëder. Jacques Jansen gaat in op de verhoudingen van de afmetingen van dodecaëdergebouwen aan de hand van de in- en omgeschreven bol.

Inleiding

In het Zebraboekje *Vormen en verhoudingen in de architectuur*[1] wordt onder andere een huis bekeken met de vorm van een dodecaëder oftewel een regelmatig twaalfvlak. Een voor de hand liggende vraag is: hoe vind je de hoogte van een dodecaëderhuis als je de afmetingen van het vijfhoekige grondvlak weet? In het boekje wordt het verband tussen hoogte en ribbelengte meegedeeld maar in dit artikel gaan we het bewijzen en afleiden. We zullen zien welke rol er voor de gulden snede is weggelegd.
De platonische lichamen halen we even uit een kistje, zie figuur 1. Even opfrissen: het zijn veelvlakken waarvan de zijvlakken allemaal gelijke, regelmatige vlakke veelhoeken zijn en waarbij er in ieder hoekpunt evenveel zijvlakken samenkomen.



figuur 1

Een Duitse architect gebruikt de vorm van de dodecaëder om er een woonhuis mee te ontwerpen, zie figuur 2.

figuur 2

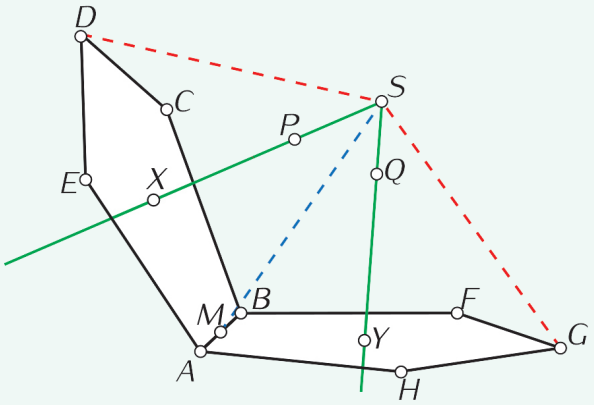
Bollen

De belangrijkste eigenschap van de regelmatige veelvlakken is: elk platonisch lichaam heeft een omgeschreven en ingeschreven bol waarbij de middelpunten hetzelfde zijn[2]. Hoe bewijs je dat die bollen bestaan en hoe druk je de stralen van die bollen uit in de lengte van een ribbe? Dat gaan we bekijken.
Laten we de (eenheids)kubus als voorbeeld nemen. De lengte van een ribbe is dan 1. Het middelpunt van beide bollen is het snijpunt van de vier lichaamsdiagonalen. De omgeschreven bol, waar de acht hoekpunten op liggen, heeft als straal de lengte van een halve lichaamsdiagonaal en die is gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Het is ook makkelijk in te zien dat de straal van de ingeschreven bol die de zes grensvlakken raakt, gelijk is aan een halve ribbelengte en dus gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Bij een dodecaëder zijn het bewijs en de berekeningen iets ingewikkelder.
Zie het dodecaëderhuis in figuur 2. Het zal duidelijk zijn dat de hoogte van het huis, de diameter van de

ingeschreven bol, afhankelijk is van de lengte van een ribbe van de dodecaëdervorm.

Bewijs dat de bollen ook echt bestaan

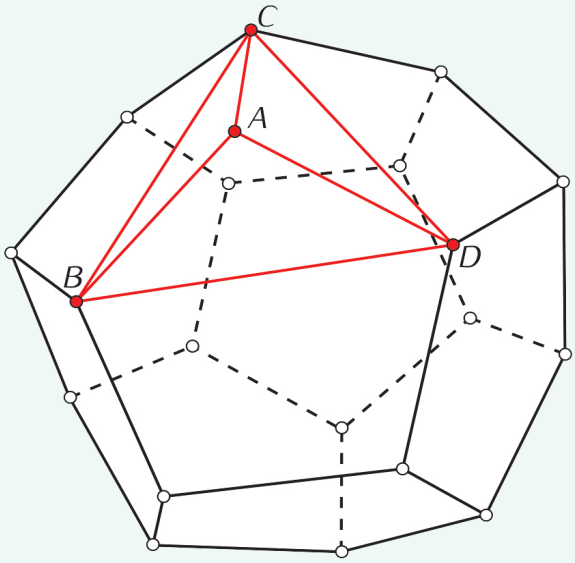
We beperken ons tot de dodecaëder, maar in grote lijn gaat onderstaand verhaal ook op voor de icosaëder, het regelmatig twintigvlak dus. We laten eerst zien dat die bollen ook echt bestaan. Eerst de ingeschreven bol dan de omgeschreven bol. Daarna drukken we de straal r van de ingeschreven bol uit in de ribbelengte a van de dodecaëder. Dat wordt een indrukwekkend verband waarin het gulden snede getal φ verwerkt is.



figuur 3

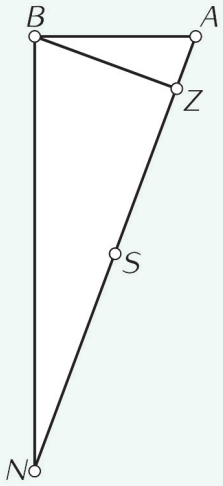
We nemen twee aangrenzende zijvlakken van de dodecaëder, regelmatig vijfhoek *ABCDE* en regelmatig vijfhoek *ABFGH*, zie figuur 3. Punt M is het midden van gemeenschappelijke ribbe *AB*. Punten *X* en *Y* zijn achtereenvolgens de middelpunten van de omgeschreven cirkels van de vijfhoeken. Ook de rotatieassen, *XP* en *YQ*, van beide grensvlakken zijn getekend. Beide rotatieassen staan loodrecht op ribbe *AB* net zoals de lijnstukken *XM* en *YM*. Elke lijn in vlak *XMY* staat loodrecht op ribbe *AB*. De rotatieassen door de punten *X* en *Y* liggen in vlak *XMY*. Ze hebben verschillende richtingen en snijden elkaar dus. Dat snijpunt noemen we *S*.
Vlak *XMY* noemen we een standvlak van de twee grensvlakken. $\angle XMY$ noemen we een standhoek van beide grensvlakken.
Merk op dat $\Delta XMS \cong \Delta YMS$ (zzR). Dus $SX = SY$ en $\angle XMS = \angle YMS$ (halve standhoeken). De lengte van lijnstuk *SX* ligt vast omdat *SX* een rechthoekszijde is van rechthoekige driehoek *SXM* waarbij de lengte van lijnstuk *XM* en de grootte van $\angle XMS$ als vaste gegevens van de dodecaëder beschouwd kunnen worden. Rotatieas *XP* zal ook gesneden worden door de draaiassen van de vier andere vlakken die grenzen aan vlak *ABCDE* en wel in punt *S*. De afstanden van punt *S* tot de twaalf grensvlakken zijn hetzelfde, waaruit volgt dat *S* te beschouwen is als middelpunt van de ingeschreven bol van de dodecaëder.
Merk ook op dat $\Delta DXS = \Delta GYS$ (zhz). Dus $SD = SG$.
Dat geldt ook voor de overige andere 18 hoekpunten. Punt *S* is dus ook middelpunt van de omgeschreven bol.

Berekening van de straal van de omgeschreven bol

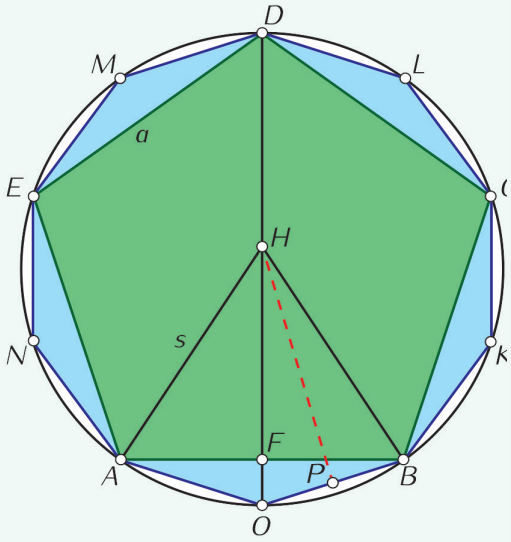


figuur 4

We bekijken een dodecaëder met ribbelengte a. We kiezen een hoekpunt uit van de dodecaëder: punt A, zie figuur 4. Laten de hoekpunten B, C en D de omringende punten zijn. De vier punten bepalen een driezijdige piramide waarvan het grondvlak een gelijkzijdige driehoek is waarvan de zijden diagonalen zijn in regelmatige vijfhoeken.
Uit punt A laten we een loodlijn neer op grondvlak BCD. Het voetpunt noemen we Z. De Italiaanse wiskundige Luca Pacioli (1447-1517) gaf al aan dat de verhouding van een diagonaal van een regelmatige vijfhoek met zijn zijde gelijk is aan het guldensnedegetal φ: ½ + ½√5.
Er geldt
BD = DC = CB = a φ. En BZ = ⅔√3 ½a φ = $\frac{a \cdot \varphi}{\sqrt{3}}$.
Op het verlengde van loodlijn AZ ligt middelpunt S en het diametrale hoekpunt van A dat we N noemen. De straal van de omgeschreven bol van de dodecaëder noemen we R. Merk op dat zowel ΔABZ als ΔNBA rechthoekig zijn. Deze driehoeken zijn ook gelijkvormig, zie figuur 5. In deze figuur treffen we a en R aan die we graag met elkaar in verband brengen: $\frac{AB}{AZ} = \frac{AN}{AB}$. AB = a en AN = 2R maar we moeten nog een uitdrukking vinden voor AZ.



figuur 5



figuur 6

Beschouw ΔABZ en merk op dat

$$AZ^2 = a^2 - \tfrac{1}{3}a^2\varphi^2 = a^2\left(\frac{3-\varphi^2}{3}\right).$$

Uit de verhoudingen volgt $a^2 = 2R \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3-\varphi^2}{3}}$ en hiermee kun je straal R uitdrukken in ribbelengte a en guldensnedegetal φ. Met de eigenschappen van de meetkundige rij ..., $\frac{1}{\varphi}$, 1, φ, φ^2, ... , een term is de som van twee voorgaande termen, zul je vinden dat $R = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a \cdot \varphi$. Ga dat maar eens na!

Berekening van de straal van de ingeschreven bol

De straal van de ingeschreven bol noemen we r en is gelijk aan de lengte van de loodlijn uit het middelpunt S neergelaten op één van de vijfhoekige grensvlakken. Dat grensvlak duiden we aan met ABCDE. Het voetpunt van de loodlijn noemen we H. We kiezen een van de hoekpunten van dat grensvlak uit, bijvoorbeeld hoekpunt A. ΔSHA is dan een rechthoekige driehoek waarbij $\angle SHA$ de rechte hoek is. Er geldt: $SA^2 = AH^2 + SH^2$. De straal van de omgeschreven bol is R, dus SA = R. (SH = r). BH is een straal van de omgeschreven cirkel van de vijfhoek die we kunnen uitdrukken in a, waarbij a weer de ribbelengte van de dodecaëder is. De straal van de omgeschreven cirkel geven we aan met s, zie figuur 6. AH = OH = BH = s.

In de omgeschreven cirkel van de regelmatige vijfhoek hebben we ook een regelmatige tienhoek getekend zodat er vijf gemeenschappelijke hoekpunten zijn. Kijk naar ΔOBH. Het is een bijzondere driehoek. Deze gelijkbenige driehoek met een tophoek van 36° is een gulden driehoek. Dat betekent dat elk van de gelijke benen gelijk is aan de basis maal het guldensnedegetal. Dus HO = HB = φ OB. OB = s/φ en AB = a.
We passen de cosinusregel toe vanuit de middelpuntshoek AHB:
$a^2 = s^2 + s^2 - 2s \cdot s \cdot \cos(\angle AHB)$. Die cosinus willen we vervangen. We laten uit middelpunt H een loodlijn neer op OB. Het voetpunt noemen we P.
Merk op dat $\angle PBH = \angle AHB = 72°$. Zie dan ΔHPB in figuur 6 waarbij

$$PB = \tfrac{1}{2}OB : \cos(\angle PBH) = \frac{PB}{HB} = \frac{s/2\varphi}{s} = \frac{1}{2\varphi}$$

Dus $a^2 = 2s^2 - s^2/\varphi$ en $s^2 = \frac{a^2}{2-1/\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \cdot a^2$

Dat laatste moet je maar even nagaan met de φ-eigenschappen.
Terug naar rechthoekige ΔSHA. We merkten al op dat $SA^2 = AH^2 + SH^2$. We vullen variabelen R, r en s in, herschrijven en vinden:
$r^2 = R^2 - s^2$ waarbij voor de straal van de omgeschreven bol we al gevonden hadden dat $R = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a \cdot \varphi$.
Dat ook ingevuld geeft: $r^2 = \tfrac{3}{4}a^2\varphi^2 - a^2\varphi/\sqrt{5}$ en tot slot

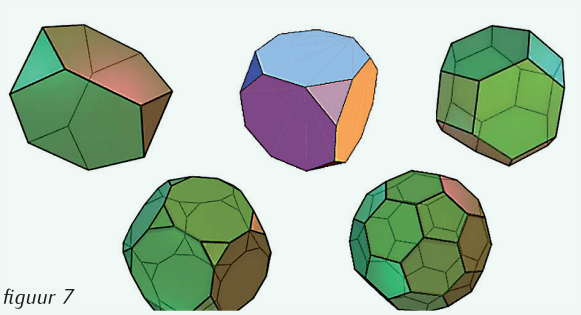
$$r = a \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}\varphi^2 - \frac{\varphi}{\sqrt{5}}}.$$

Voor een dodecaëderhuis met ribbelengte 4 m vinden we voor de hoogte tweemaal de straal van de ingeschreven bol en dat geeft 8,91 m.

Afknottingen

Je kunt natuurlijk veranderingen aanbrengen bij de vormen van de platonische lichamen. Je kunt dat zo doen dat dat niet ten koste gaat van de symmetrie, en dat noemen we dan afknotten. >

Een afknotting van een veelvlak krijg je door aan ieder hoekpunt of aan iedere ribbe een even groot, vlak stuk af te zagen. Zo ontstaan deels halfregelmatige veelvlakken, zie figuur 7. De vermoedelijke ontdekker hiervan is de Griekse wiskundige Archimedes (287 - 212 v.C.). Er zijn nog acht andere veelvlakken die behoren tot de archimedische lichamen.



figuur 7

Eén daarvan is de rhombicuboctahedron. De Nationale Bibliotheek in Wit Rusland heeft deze vorm, zie figuur 8. Dit kwam voor in een eindexamenopgave van wiskunde C VWO in 2012 van het eerste tijdvak.

figuur 8

De Colombiaanse architect Manuel Villa werd geïnspireerd door de vorm van de afgeknotte octaëder en ontwierp een houten huisje met een rond dakvenster, zie figuur 9.

figuur 9

Een uitdaging

Een kubuswoning in Nederland, je vindt ze bijvoorbeeld in Helmond, zie figuur 10, heeft een inhoud van ongeveer 400 m^3. Onderzoek nu hoe je de afmetingen van het huis van Villa (zie figuur 9) moet kiezen om aan deze inhoud te komen.

figuur 10

Een aantal bewijzen die bij dit artikel horen, vind je op:

vakbladeuclides.nl/966bollen

Noten

[1] Deze Zebra van Jacques Jansen en Karen de Kort verschijnt binnenkort.

[2] Molenbroek, P. (1931). *Leerboek der Vlakke Meetkunde.* Groningen/Batavia: Noordhoff en Molenbroek, P. (1923). *Leerboek der Stereometrie.* Groningen/Batavia: Noordhoff.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

Sjef van Dongen

Meer of minder minnen

De ene min is de andere niet. Door de bewerking *het tegengestelde nemen* in te voeren en de minnen op verschillende manieren uit te spreken, worden gevleugelde vuistregels als 'min maal min is plus' veel begrijpelijker [1].

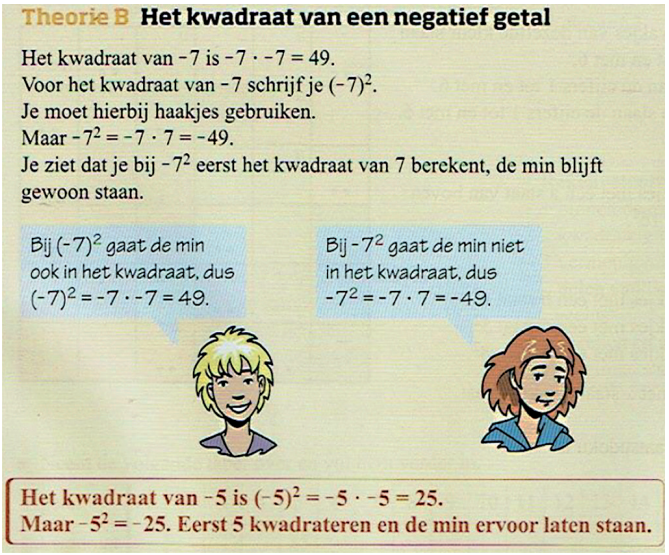
Inleiding

Veertig jaar geleden stroomde ik als elektrotechnisch ingenieur het wiskundeonderwijs van de middelbare school in. We gebruikten toen al *Getal & Ruimte* van, destijds, Educaboek. Ook in die tijd was het gebruik van het minteken al een doorn in het oog. In een brief, geschreven aan het schrijversteam van *Getal & Ruimte*, stelde ik voor om het minteken, zeker in de onderbouwdelen, in drie kleuren aan te bieden om aan te geven of er een *aftrekking*, een *negatief* getal of de bewerking *het tegengestelde nemen* bedoeld werd. Het antwoord van het schrijversteam was: wij zien de noodzaak hiervan niet in...
De ontwikkeling van de rekenmachine laat zien dat het wel degelijk iets uitmaakt: de eerste modellen hadden maar één toets met daarop het minteken terwijl de moderne rekenmachines vaak twee van zulke toetsen hebben. Om een onderscheid te maken zijn in dit artikel álle *bewerkingen* cursief gezet.

De bewerking *het tegengestelde nemen*

De tekst in figuur 1 laat zien hoe het wiskundeonderwijs nog steeds worstelt met het minteken. Wat bedoelt de auteur met de opmerking: 'De min gaat niet of gaat ook in het kwadraat?' Het geschetste probleem kan worden opgelost door in het wiskundeonderwijs meer aandacht te besteden aan de bewerking: *het tegenstelde nemen*.

Ter illustratie: $-a$ wordt vaak gelezen als 'negatief a' of als 'min a'. Maar wat wordt gelezen als we a vervangen door 'negatief 6' of 'min 6'? Lezen we '– –6' als 'negatief negatief zes' , 'min min zes', 'min negatief zes' of 'negatief min 6'?!



Theorie B Het kwadraat van een negatief getal

Het kwadraat van -7 is $-7 \cdot -7 = 49$.
Voor het kwadraat van -7 schrijf je $(-7)^2$.
Je moet hierbij haakjes gebruiken.
Maar $-7^2 = -7 \cdot 7 = -49$.
Je ziet dat je bij -7^2 eerst het kwadraat van 7 berekent, de min blijft gewoon staan.

Bij $(-7)^2$ gaat de min ook in het kwadraat, dus $(-7)^2 = -7 \cdot -7 = 49$.

Bij -7^2 gaat de min niet in het kwadraat, dus $-7^2 = -7 \cdot 7 = -49$.

Het kwadraat van -5 is $(-5)^2 = -5 \cdot -5 = 25$.
Maar $-5^2 = -25$. Eerst 5 kwadrateren en de min ervoor laten staan.

figuur 1 Getal & Ruimte 1 havo/vwo deel 2 twaalfde editie, blz. 12

Het begrip tegengestelde kan een oplossing bieden. Bij veel schoolvakken wordt veelvuldig het begrip tegenstelde gebruikt als het om grootheden gaat. Een grootheid is een eigenschap die te meten is. De uitkomst van zo'n meting is een getal (maatgetal) en een afgesproken eenheid. Bijvoorbeeld: de winst is 3 dollar. Winst is de grootheid, '3' het maatgetal en 'dollar' de eenheid. Veel grootheden kennen een bijbehorende tegengestelde grootheid, zie tabel 1 op pagina 24.

Grootheid	Tegengestelde grootheid	Eenheid
winst	verlies	euro, dollar, ...
verlenging	verkorting	meter, minuut, ...
lengtetoename	lengteafname	meter, inch, centimeter
groei	krimp	meter, procent, euro....
procentuele toename	procentuele afname	procent(punt)
daling	stijging	meter, graad, ...
vordering	schuld	euro, dollar, ...
positieve lading	negatieve lading	Coulomb
....	....	....

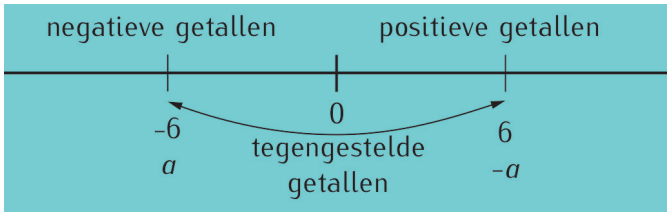
tabel 1 Grootheden en tegengestelde grootheden

Maatgetallen, verkregen bij metingen van grootheden, worden vaak gebruikt om mee te rekenen. Het *optellen* en *aftrekken* van maatgetallen is alleen zinvol als ze betrekking hebben op dezelfde grootheid en dezelfde eenheid. Bijvoorbeeld de vraag:
Wat is de winst in twee achtereenvolgende weken, als
A: de winst in de eerste week is 4 dollar en de winst in de tweede week is 3 euro;
B: de winst in de eerste week is 4 euro en het verlies in de tweede week is 3 euro.
In beide gevallen heeft de optelling 4 + 3 geen betekenis, omdat of de eenheden of de grootheden verschillen.

Maar als we B nader bekijken: winst en verlies zijn tegengestelde grootheden, zodat gesteld mag worden dat 3 euro verlies gelijk is aan het tegengestelde van 3 euro winst. Bij de meting van de (grootheid) winst in de eerste en tweede week zouden de maatgetallen respectievelijk worden: '4' en 'het tegengestelde van 3'. De winst in de twee achtereenvolgende weken is dan wel te berekenen met de optelling: 4 + het tegengestelde van 3. Spreken we af het minteken '–' als symbool te gebruiken voor: *het tegengestelde van,* dan schrijven we de totale winst in de twee achtereenvolgende weken als: 4 + –3 euro.

Een definitie

Rest nog te definiëren wat bedoeld wordt met de bewerking: *het tegengestelde nemen van* een getal. Die definitie zou kunnen luiden: het tegengestelde van een getal a op de getallenlijn vind je op diezelfde getallenlijn na het spiegelen van het getal a ten opzichte van 0. Zie figuur 2. (Veelal wordt volstaan met het noemen van de eigenschap van 'het tegengestelde van een getal a' namelijk: 'het tegengestelde van een getal a' + 'het getal a' = 0.
Dit lijkt meer een controle op de uitgevoerde bewerking dan op de bewerking zelf...).



figuur 2

Uit figuur 2 wordt duidelijk dat de volgende beweringen I en II waar zijn:
I Het tegengestelde van 6 is negatief 6
II Het tegengestelde van negatief 6 is 6.
Omdat het minteken '–' nu als symbool gebruikt wordt, zowel voor het woord 'negatief' als voor de woorden 'tegengestelde van', zal de codering van de beweringen I en II dubbelzinnig worden:
I – 6 = – 6
II – – 6 = 6.
Om te voorkomen dat er gelezen wordt:
I 'negatief zes is gelijk aan negatief zes'
II 'het tegengestelde van het tegengestelde van zes is gelijk aan zes'
is een aanvullende afspraak nodig: *plaats negatieve getallen tussen haakjes.* Deze afspraak wordt in *Getal & Ruimte* ook voorgesteld, zie figuur 3.
I: –6 = (–6) de 6 in het linkerlid staat niet tussen haakjes dus lees niet 'negatief zes' maar 'het tegengestelde van 6'.
II: –(–6) = 6 het linkerlid wordt gelezen als: tegengestelde van negatief zes.

Opmerking: Als duidelijk is dat het negatieve getal geen tussenuitkomst maar de einduitkomst van een berekening is, dan zouden de haakjes weggelaten kunnen worden.

Theorie B Formules met *x* en *y*

Bij de formule $y = x^2 + 4$ kun je voor x allerlei getallen invullen.
Vul je $x = 5$ in, dan krijg je $y = 5^2 + 4 = 25 + 4 = 29$.
Vul je $x = -5$ in, dan krijg je $y = (-5)^2 + 4 = 25 + 4 = 29$.

Het kwadraat van -5 is $(-5)^2$, dus haakjes zetten.

figuur 3 Getal & Ruimte 1 havo/vwo deel 2 twaalfde editie, blz. 16

Nu de bewerking *neem het tegengestelde van* is ingevoerd moet deze ook een plaats krijgen in de prioriteitenlijst. *Het tegengestelde nemen* is een unaire bewerking, zoals *worteltrekken* en *machtsverheffen*. Het is gebruikelijk om de unaire bewerkingen een hogere prioriteit toe te kennen dan de binaire bewerkingen (*vermenigvuldigen*, *delen*, *optellen*, *aftrekken* enz.).
De afspraak van de berekeningsvolgordes (prioriteitsregels), nu aangevuld met de bewerking *neem het tegengestelde van*, zou als volgt kunnen luiden:

1) **H** *reken* eerst *uit* wat tussen (Haakjes) staat
2) **M W** *Machtsverheffen*, *kwadrateren*, *Worteltrekken*
3) **T** *het Tegengestelde nemen*
4) **v d** *vermenigvuldigen*, *delen*
5) **o a** *optellen*, *aftrekken*

Met de aanvullende regel:
Lijkt een getal betrokken te zijn bij twee bewerkingen met dezelfde prioriteit, voer dan eerst die bewerking uit, die bij het lezen van links naar rechts het eerst voorkomt. [2]
Ezelsbrug voor een brugklasleerling:

Een **H**eleboel (**M**oderne **W**eetgrage) **T**ieners (vinden **d**ie) (**o**plossingen **a**ardig)
Een **H**eleboel (**W**eetgrage **M**oderne) **T**ieners (**d**ie vinden) (**a**ardige **o**plossingen)

Het rekenwerk in figuur 1 wordt hierdoor op de volgende manier duidelijker:
-7^2 wordt gelezen als 'het tegengestelde van 7 in het kwadraat'. Het getal 7 lijkt te horen bij de bewerking *tegengestelde nemen* en bij de bewerking *kwadrateren*.

Volgens de prioriteitsregels gaat *kwadrateren* voor, dus het wordt –49 (het tegengestelde van 49) het antwoord is (–49). Omdat negatief 49 een uitkomst is mogen de haakjes weggelaten worden. Conclusie: $-7^2 = -49$.

Wil je de leerlingen laten begrijpen wat er berekend moet worden, laat ze dan ook hóren wat er staat. Lees het minteken niet als 'min' maar daar waar nodig als 'eraf', 'negatief' of 'tegengestelde van'.
Voorbeeld:
Bereken: $-4 \times - - 7$ [1], [2]
Begin met het voorlezen van de opgave: 'Bereken: het tegengestelde van 4 keer het tegengestelde van het tegengestelde van 7.'

De uitwerking is vervolgens:

–4 x – – 7	= (–4) x – –7	negatief 4 keer het tegengestelde van het tegengestelde van 7
	= (–4) x –(–7)	negatief 4 keer het tegengestelde van negatief 7
	= (–4) x 7	negatief 4 keer 7 [1]
	= –28	negatief 28

Relatie tussen de bewerkingen

We kijken naar de relatie tussen *tegengestelde nemen*, *optellen* en *aftrekken*. In de onderstaande tabel is af te lezen op welke manieren de auto-voorraad op 1 juli 2019 is te berekenen. De eerste berekening gaat uit van de wetenschap dat inkoop van een positief aantal auto's de voorraad vergroot en de verkoop van een positief aantal auto's de voorraad verkleint. Wetend dat inkoop en verkoop tegengestelde grootheden zijn geeft ons de tweede en derde mogelijkheid om de voorraad op 1 juli 2019 te berekenen.

Blijkbaar is de bewerking erbij 25 te vervangen door eraf het tegengestelde van 25 en de bewerking eraf 50 te vervangen door het tegengestelde van 50.

Magazijngegevens van autohandel: On The Road			
Voorraad 1 januari 2019	1-ste kwartaal	2-de kwartaal	Voorraad 1 juli 2019
200 auto's	Inkoop 25 auto's	Verkoop 50 auto's	200 + 25 – 50 = 175
200 auto's	Inkoop 25 auto's	Inkoop -50 auto's	200 + 25 + -50 = 175
200 auto's	Verkoop -25 auto's	Verkoop 50 auto's	200 – -25 –50 = 175

>

Bovengenoemde benaderingen rechtvaardigen de stelling(en):
Eraf een getal is te vervangen door *erbij het tegengestelde van dat getal* [3]
Erbij een getal is te vervangen door *eraf het tegengestelde van dat getal*

Voorbeeld:
Bereken: $-4 \times -3 + -7- - 3$ [2]
In woorden: 'het tegengestelde van 4 keer het tegengestelde van 3 erbij het tegengestelde van 7 eraf het tegengestelde van 3'.

Berekening:

$-4 \times -3 + -7- - 3$	$= (-4) \times (-3) + (-7) - (- 3)$	de bewerkingen *tegengestelde nemen* zijn uitgevoerd
	$= 12 + (-7) - (- 3)$	negatief 4 keer negatief 3 levert 12 [1]
	$= 12 - 7 + 3$	erbij negatief 7 is vervangen door eraf 7, eraf negatief 3 is vervangen door erbij 3
	$= 8$	

Noten

[1] Vermenigvuldigen met negatieve getallen zal in een van de volgende edities van *Euclides* toegelicht worden.

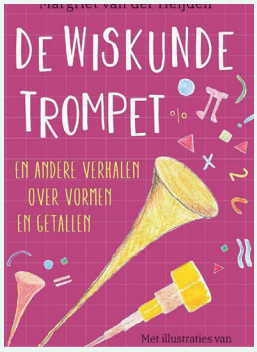
[2] In de opdracht $-4 \times -3 + -7- - 3$ lijkt het getal 4 te horen bij de bewerkingen 'tegengestelde nemen' en vermenigvuldigen. Het 'tegengestelde nemen' heeft de hoogste prioriteit. Het getal 3 lijkt te horen bij de bewerkingen 'tegengestelde nemen' en optellen. De bewerking 'tegengestelde nemen' heeft de hoogste prioriteit. Het getal 7 lijkt te horen bij de bewerkingen 'tegengestelde nemen' en aftrekken. Ook hier heeft de bewerking 'tegengestelde nemen' de hoogste prioriteit.

[3] Deze stellingen komen in de plaats van het veel gebruikte: min en plus is min en min en min is plus.

Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna was hij 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent.
E-mailadres: *jjacvandongen@hotmail.com*

Verschenen



Titel: De Wiskundetrompet
Ondertitel: en andere verhalen over vormen en getallen
Auteur: Margriet van der Heijden
Illustraties: Iris Rijsman
Uitgever: Nieuwezijds B.V.
ISBN: 9789057125379
Prijs: € 16,95
(131 pagina's; paperback)

Voor een taart staan honderd mensen in de rij. De eerste krijgt één honderdste stukje taart. De tweede krijgt twee honderdste van de rest van de taart. De derde krijgt daarna drie honderdste en zo door. Op welke plek in de rij krijg je het grootste stuk?
De wiskundetrompet laat zien hoeveel muziek er in wiskunde zit en wat een trompet met een taart te maken heeft. Het boek staat vol gekke logische puzzels en vrolijke wiskunde.
Welke getallen gedragen zich als hagelstenen? Hoe zeg je wiskundig: 'Ik hou van jou?' Wat is het geheim van de dennenappel? En wat is de overeenkomst tussen het getallenpaar 4 en 10, het paar 6 en 21 en het paar 10 en 55?

Martin Kindt

Delen met helen

Weten onze leerlingen nog wat priemgetallen zijn? Of hoe gemeen delers kunnen zijn? En moet er op school niet wat meer eer worden bewezen aan de koningin van de wiskunde?

Priem

Ooit stond ik met een van mijn kleindochters voor de deur van haar ouderlijk huis. Ik wees naar het huisnummer 101 en zei: dat is een priemgetal. Zij zat in, schat ik nu, groep 6 van de basisschool en vroeg: 'opa, wat is dat, een priemgetal?' 'Dat is een getal dat je niet kunt delen'. Na enig nadenken: 'opa, het is toch twee keer vijftig-en-een-half?'

Aan de wiskundige Kronecker wordt de uitspraak *Die Ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk* toegedicht. Ik heb het sterke vermoeden dat met 'gehele getallen' hier 'natuurlijke getallen' wordt bedoeld. 'Negatieve gehele getallen' kunnen misschien op het conto van de duivel worden geschreven, althans naar de mening van sommige leerlingen. En wat te denken van auteurs die hekserij met ijsblokjes als didactische reken-hulp bedachten? Even terug naar het gesprek met Lolotte, ik weet het niet meer zo precies, maar ik heb toen verteld wat een priemgetal is en dat heeft ze wel vastgehouden, want toen ze 11 jaar werd, waren haar broer en zus 7 en 13. *'Nu zijn we drie priemgetallen!'* Ik riposteerde met de vraag: stel dat jullie alle drie heel oud worden, hoe vaak komt het dan weer voor dat jullie tegelijkertijd een priem-leeftijd hebben? Ik kreeg een sms-je terug: 13 – 17 – 19 en 37 – 41 – 43, met de tekst: *ik weet het niet zeker, ik geloof het.*
Dat 67 – 71 – 73 te ver weg was, om maar te zwijgen van 97 – 101 – 103 of nog sterker 103 – 107 – 109, daar kon ik wel inkomen.
Maar 'geloven' binnen de wiskunde is als vloeken in de kerk. Hoe zit het nu met die 101? Zouden brugklassers op het idee kunnen komen dat je hier voor een bewijs van 'priemschap' slechts hoeft vast te stellen dat 101 niet deelbaar is door 2, 3, 5 of 7?

Hoeveel delers?

Ik stel me voor met een klas iets aan deelbaarheid en priemgetallen te doen. Ik deel een ingevulde functietabel uit of presenteer die op het bord:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$F(n)$	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

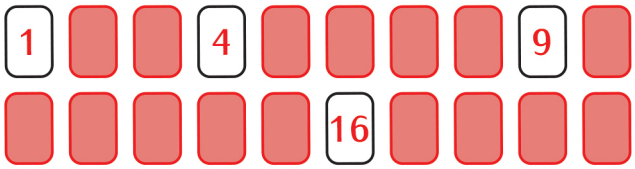
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$F(n)$	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8

Ik zou nog wat verder gaan, zeg tot $n = 50$, maar dan zonder de rode getallen ingevuld, met het verzoek - bij voorkeur aan kleine groepjes van twee of drie leerlingen - om die samen in te vullen. Op geen enkele manier heb ik gehint naar delers of deelbaarheid. Ik heb ook geen idee, of mijn leerlingen hier enigszins raad mee weten, maar ben er om, waar nodig, licht sturende vragen te stellen. Je hoopt dat er leerlingen zijn die wel eens van priemgetallen hebben gehoord en dan opmerken dat die hier steeds de uitkomst 2 opleveren. De stap naar het aantal delers is dan niet heel groot meer. En misschien wordt door een >

enkele bolleboos opgemerkt dat de schaarse oneven uitkomsten lijken te passen bij kwadraatgetallen...

In dit kader moet ik denken aan een kaartjespuzzel die ik heel vroeger wel eens op school, en minder vroeger op nascholingsessies, heb gepresenteerd. Materiaal: een set van 50 kaarten[1], die aan één kant bedrukt zijn met één getal, van 1 tot en met 50:

De opdracht hierbij is:
(1) Leg de kaartjes met nummer boven en in volgorde van de nummers voor je op tafel in een rechthoekig patroon en in rijen van tien.
(2) Draai dan eerst alle kaartjes om waarvan het nummer een 2-voud is. Draai daarna alle kaartjes om waarvan het nummer een 3-voud is, ook als dit, zoals bij 6, inmiddels niet meer zichtbaar is. Doe hetzelfde bij alle 4-vouden, 5-vouden, enzovoort.
Als de opdracht correct is uitgevoerd, liggen de meeste kaartjes met de onderkant boven. De eerste twee rijen zijn dan zó:



De sprongen tussen de kaartjes met zichtbaar nummer nemen regelmatig toe en je hoopt dan dat er leerlingen zijn die verrast de kwadraatgetallen herkennen. De verklaring van dit fenomeen berust op het tellen van delers. Dit kaartspel kan ook heel goed dienst doen als instap van een les over delers en deelbaarheid.[2]

Sommen van delers

Het idee van het voortzetten van functietabellen, kan worden vervolgd met:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S(n)$	12	28	14	24	24	31	18	39	20	42

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$S(n)$	32	36	24	60	31	42	40	56	30	72

Hoe knoop je hier een touw aan vast? Een hint kan zijn om te kijken wat er bij 'n is priem' past. Het ziet er naar uit dat in zo'n geval geldt: $S(n) = n + 1$. Dit zou de leerling op het spoor van 'som van de delers' kunnen zetten. Checken en voortzetten is hierna een goede activiteit. Daarbij neem ik aan dat voordien al een strategie is gepasseerd om systematisch de delers van een getal op te sporen.
En ... hier zijn versnellingen mogelijk! Als je weet dat $S(2) = 3$ en $S(3) = 4$, weet je ook dat $S(6) = 3 \times 4 = 12$. Hoe zit dat? Probeer het maar bij andere 'buurtallen'. Deze 'productregel' lijkt altijd op te gaan! In formule: $S(n) \times S(n^+) = S(n \times n^+)$ met $n^+ = n + 1$.
De productregel gaat ook op voor twee verschillende priemgetallen p en q en dit kan simpel met algebra worden bewezen:
$S(p) = 1 + p$, $S(q) = 1 + q$,
$S(pq) = 1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$
Helaas, zoals direct kan worden geverifieerd, de productregel geldt niet voor elk paar getallen. De vraag rijst dan: wanneer wél, wanneer niet. Hoe onderzoek je dit? Wel, breid de tabel van $S(n)$ eventueel nog wat uit tot bijvoorbeeld $n = 50$ en zoek dan naar paren (a, b) waarvoor $S(a) \times S(b) \neq S(ab)$. Al gauw zal blijken dat de productregel niet opgaat als a en b allebei even zijn en evenmin als a en b beide een 3-voud zijn, ...
Het vermoeden kan dan opkomen, dat het al dan niet hebben van een gemeenschappelijke deler groter dan 1 cruciaal is voor het niet of wel geldig zijn van de productregel. Een opstapje naar een bewijs kan plaatsvinden via vermenigvuldigingstabellen.
Neem bijvoorbeeld $a = 4$ en $b = 6$, respectievelijk met delers 1, 2, 4 en 1, 2, 3, 6.
$S(4) \times S(6) = (1 + 2 + 4) \times (1 + 2 + 3 + 6)$

×	1	2	3	4
1	1	2	3	6
2	2	4	6	12
4	4	8	12	24

De rode getallen in de tabel zijn juist de delers van 24 en je ziet zo dat $S(4) \times S(6) > S(24)$.
De tabel bij bijvoorbeeld $S(5) \times S(6)$ is:

×	1	2	3	6
1	1	2	3	6
5	5	10	15	30

en de rode producten zijn nu juist alle delers van 30 en dus $S(5) \times S(6) = S(30)$.
Deze twee tabellen zijn paradigmatisch. Als a en b buiten 1 een gemeenschappelijke deler d hebben, dan komt d twee keer voor in de vermenigvuldigingstabel van de delers en overschrijdt de som van die uitkomsten de som van de delers van ab. Hebben a en b behalve 1 geen delers gemeen, dan zijn de uitkomsten in de tabel precies de delers van ab. In dit laatste geval heten a en b *relatief priem* of *onderling ondeelbaar*.

Het al of niet opgaan voor $S(a) \times S(b) = S(ab)$ hangt dus af van de grootste gemene deler van a en b, notatie ggd(a, b). De regel $S(n) \times S(n^+) = S(n \times n^+)$ is nu ook duidelijk, want een gemene deler van twee opeenvolgende getallen, moet ook een deler van het verschil (= 1) van die getallen zijn!

Volmaakte getallen

$S^*(n) = S(n) - n$ is de som van de zogeheten *aliquote* delers van n. [3]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	0	1	1	3	1	6	1	7	4	8

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S	1	16	1	10	9	15	1	21	1	22

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S	11	14	1	36	6	16	13	28	1	42

Er zijn drie soorten uitkomsten in de tabel. De rood gedrukte zijn kleiner, de blauwe groter en de groene gelijk aan het bijbehorende getal n. Op grond van aliquote delersommen kunnen de natuurlijke getallen in drie types worden verdeeld:
(1) *tekortkomend* (*deficiënt*) als $S^*(n) < n$
(2) *overvloedig* (*abundant*) als $S^*(n) > n$
(3) *volmaakt* (*perfect*) als $S^*(n) = n$
Deze indeling is bij de Grieken te vinden, bijvoorbeeld bij Nikomachos (ca 60 - 120). Maar Euclides die vier eeuwen eerder leefde, gaf in boek 7 van de *Elementen* al de definitie van een volmaakt getal. In boek 9 kwam hij daarop terug en bewees dat elk getal dat van de vorm $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ is, waarbij niet alleen p, maar ook $2^p - 1$ priem is, volmaakt is. [4]

p	$a = 2^{p-1}$	$b = 2^p - 1$	$a \times b$
2	2	3	6
3	4	7	28

p	$a = 2^{p-1}$	$b = 2^p - 1$	$a \times b$
5	16	31	496
7	64	127	8128

De aliquote delers van 496 zijn 248, 124, 62, 31, 16, 8, 4, 2 en 1. Hun som is 496, tel maar op van rechts naar links, handig en snel! Net zo voor 8128.
Nikomachos, kende deze vier volmaakte getallen en kwam tot de conclusie dat volmaakte getallen dun gezaaid zijn. Hij dacht ook dat er tussen elk tweetal opeenvolgende machten van 10 precies één zo'n getal zou liggen. Dit is gebleken onwaar te zijn, ze zijn nog veel zeldzamer dan Nikomachos dacht. Bij de volgende priemwaarde voor p, dus 11, geldt $a = 1024$, $b = 2047 = 23 \times 89$, niet priem dus. Dat betekent dat $a \cdot b$ een overvloedig getal is, daar kom ik direct op terug.
Maar nu eerst het bewijs voor de stelling van Euclides. Dit verloopt soepel met de eerder behandelde productregel voor de functie S. Stel $n = ab$ met $a = 2^{p-1}$ en b is een priemgetal gelijk aan $2^p - 1$. >

Er geldt $S(ab) = S(a)S(b)$ want a en b zijn relatief priem.
$S(a) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1 = b$ [5]
$S(b) = 1 + (2^p - 1) = 2^p = 2a$
Dus $S(n) = 2ab = 2n$ en $S^*(n) = S(n) - n = n$.

Dat n overvloedig is als $a = 2^{10}$ en $b = 2^{11}$–1 volgt uit $S(b) = S(23 \cdot 89) = 24 \cdot 90 > 2a$.
De eis dat $2^p - 1$ priem moet zijn is dus *nodig*. Dat betekent nog niet dat er bewezen is dat er buiten de getallen van Euclides geen andere volmaakte getallen zijn. Euler bewees als eerste dat de voorwaarde '$2^p - 1$ is priem' ook *voldoende* is, dus dat er behalve de getallen van Euclides geen andere *even* volmaakte getallen bestaan.[4] Het op 8128 volgende volmaakte getal blijkt gelijk te zijn aan $2^{12}(2^{13} - 1) = 33\,550\,336$.

Dit getal figureerde in de titel van een prachtig artikel uit 1995 van Niek Brokamp (*Nieuwe Wiskrant*, jaargang 14, nr.3) met als toevoeging: *een volmaakte voltreffer*. De auteur had zijn vwo6 klas gevraagd om na 6 en 28 drie volgende volmaakte getallen te vinden, en de klas slaagde binnen drie dagen! De computer werd daarbij ingezet. Niet om op te zoeken - van Wikipedia hadden ze toen nog nooit gehoord - maar om te rekenen en te programmeren. De formule van Euclides was niet verklapt, die werd ontdekt! Hoe mooi kan wiskundeonderwijs zijn als leerlingen zich werkelijk uitgedaagd voelen en zelfstandig aan een onderzoek mogen werken!
Priemgetallen van de vorm $2^p - 1$ zijn fameus. Zij spelen een rol als sleutel bij geheime codes. Er zijn nu 51 van zulke Mersennegetallen en dus ook 51 volmaakte getallen bekend. Van oneven volmaakte getallen kan alleen gezegd worden dat er tot nu toe geen exemplaren gevonden zijn. Evenmin is bekend of het aantal volmaakte getallen oneindig is, zoals Nikomachos wel gedacht heeft.

Bevriende getallen

Een queeste die verwant is aan de zoektocht naar volmaakte getallen is die naar paren bevriende getallen. Het instapvoorbeeld is het paar (220, 284). De lezer kan controleren dat $S^*(220) = 284$ en $S^*(284) = 220$. Ofwel: de som van de aliquote delers van de een is gelijk aan de ander en vice versa. Dit paar was in de school van Pythagoras bekend en zou symbool hebben gestaan voor de ware vriendschap tussen twee mensen. Natuurlijk is er gezocht naar een formule, á la die van Euclides voor volmaakte getallen, om paren bevriende getallen te beschrijven. Daarin slaagde de Arabische wiskundige Thabit ibn Qurra (826 – 901) en zijn recept kwam - in ultieme vorm - hierop neer:

ALS
$p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$
priem zijn voor zekere waarde van n,
en $a = 2^n pq$ en $b = 2^n r$
DAN zijn a en b bevriende getallen

Onder de loep het klassieke voorbeeld:
$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $n = 2$, $p = 11$ en $q = 5$
$284 = 2^2 \cdot 71$, $n = 2$, $r = 71$.
Ja, er is voldaan aan de regel van Thabit.
Nu het bewijs van die regel. Merk eerst op dat $S^*(a) = b$ en $S^*(b) = a$ equivalent is met $S(a) = a + b = S(b)$.
Omdat p, q en r priem moeten zijn, geldt:
$S(p) = 3 \cdot 2^n$, $S(q) = 3 \cdot 2^{n-1}$, $S(r) = 9 \cdot 2^{2n-1}$
met als gevolg $S(p) \cdot S(q) = S(r)$.
Hieruit volgt dan
$S(a) = S(2^n)S(pq) = S(2^n)S(p)S(q) = S(2^n)S(r) = S(b)$.
De gelijkheid van $S(a)$ en $S(b)$ is nog niet voldoende, er moet nog worden aangetoond dat $S(b)$ gelijk is aan $a + b$ ofwel $2^n(pq + r)$.
Nu geldt: $S(b) = (1 + 2 + \ldots + 2^n)(r + 1) = (2^{n+1} - 1) \cdot 9 \cdot 2^{2n-1} = 9 \cdot (2^{3n} - 2^{2n-1})$.
$S(b) = a + b$ zou dus gelijkwaardig moeten zijn met $pq + r = 9 \cdot (2^{2n} - 2^{n-1})$ en dat blijkt, na wat algebra, inderdaad het geval te zijn!

Thabits recept werkt alleen als p, q en r elk priem zijn. Dit is niet het geval bij $n = 3$, want dan geldt $p = 23$, $q = 11$, maar $r = 287 = 7 \cdot 41$. Voor $n = 4$ gaat het wel goed: $p = 47$, $q = 23$, $r = 1151$ zijn alle drie priem. Dit levert dan op dat 17 296 en 18 416 dikke vrienden zijn. Dit paar ontdekte Fermat. Aan Mersenne deelde hij zijn recept mee:

*Begin met de meetkundige rij **2, 4, 8**, ...*
*Vermenigvuldig de termen met **3** en schrijf de uitkomsten eronder. Trek daar **1** van af en schrijf de uitkomsten erboven.*
*De onderste rij is: **6 · 12 – 1, 12 · 24 – 1**, ...*
*Als het getal in die rij priem is (zoals **71**) en dat in dezelfde kolom en de bovenste rij ook (**11**), dan zijn **71 · 4 = 284** en **5 · 11 · 4 = 220** bevriend.*
*Net zo: **1151 · 16 = 18 416** en **23 · 47 · 16 = 17 296**.*

5	11	23	47
2	4	8	16
6	12	24	48
	71	287	1151

Discrete wiskunde is relevant

Van tijd tot tijd staan onze wiskundeleerplannen ter discussie en van tijd tot tijd wordt dan ook het domein getaltheorie genoemd. Vaak met het argument dat het uitdaagt tot onderzoek, redeneren en bewijzen. Activiteiten die het hart van de wiskunde vormen! Je kunt het ook ruimer zien en pleiten voor meer *discrete wiskunde* in het voortgezet onderwijs. Of het nu om getaltheorie, combinatoriek, grafentheorie, differentierekening gaat, een veel gedeelde ervaring is dat leerlingen die gebieden als concreet, boeiend en relevant ervaren. Wat wil een mens nog meer?

Dat Fermats rekenwijze equivalent is met het eerder beschreven algoritme is duidelijk, de lezer kan dat controleren. Bekende mathematici in Fermats tijd, als Descartes en Frans van Schooten jr., hebben zich eveneens bezig gehouden met onderzoek naar paren bevriende getallen. Euler overtrof later al zijn voorgangers en vond in totaal 64 bevriende paren. Anders dan bij de regel van Euclides voor volmaakte getallen, zijn de getallen van Thabit ibn Qurra niet de enige bevriende even getallen. Door een jonge Italiaan (16), Niccolo Paganini[6], werd in 1866 een paar bevriende getallen ontdekt dat niet voldoet aan Thabits criterium. Hij vond het paar (1184, 1210). Even narekenen.

$$
\begin{array}{ccc}
1184 = 2^5 \cdot 37 & & 1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2 \\
\downarrow s & & \downarrow s \\
(2^6 - 1) \cdot 38 = 2394 & & 3 \cdot 6 \cdot (1 + 11 + 121) = 2394 \\
\downarrow & & \downarrow \\
s^*(1184) = 1210 & & s^*(1210) = 1184
\end{array}
$$

Hoe Paganini zijn getallen heeft ontdekt, is niet bekend.

Noten

[1] Heel goed is daar ook het kaartspel *The Mind* (White Goblin Games) voor te gebruiken: honderd kaarten met de getallen 1 t/m 100 er op.

[2] Dit 'spel' lijkt een beetje op de beroemde zeef van Eratosthenes die priemgetallen uitzeeft. Het verschil is dat de 'kaartjes' daarbij niet mogen worden teruggedraaid.

[3] De aliquote delers van n zijn de delers van n die kleiner zijn dan n (inclusief 1).

[4] Zie ook M. Kindt, Wat te bewijzen was, nummer 28, Freudenthal Instituut

[5] Want $1 + S(a) = 2 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p$

[6] Niet te verwarren met de beroemde violist met bijna dezelfde naam.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Boekbespreking

Ernst Lambeck

Zebra 58: Besmettelijke ziekten

Titel: Besmettelijke ziekten
Auteur: Don Klinkenberg en Swier Garst
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2020
Zebra-reeks, deel 58, 62 pagina's, paperback
Prijs: € 10,00

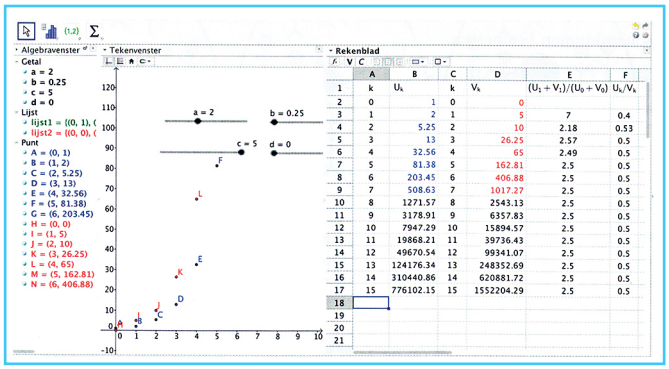
Nee, dit is geen boekje over de coronapandemie. Het boekje lag reeds enkele weken voor de eerste lockdown van maart 2020 in mijn postvak. Het boekje bouwt stap voor stap een wiskundig model op over de verspreiding en bestrijding van besmettelijke ziekten in het algemeen en is daarmee toevallig wel zeer actueel.

Een eerste model

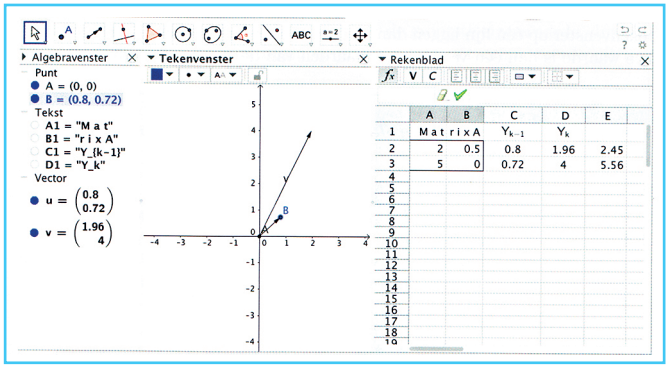
In eerste instantie bouwen de schrijvers een discreet model. Uitgangspunt zijn dan de generaties geïnfecteerden: de 0^e generatie bestaat uit de mensen met wie de epidemie begint, de mensen die door deze 0^e generatie worden besmet vormen de 1^e generatie, zij besmetten op hun beurt de 2^e generatie, enzovoort. Hierbij komt ook al het rondom de coronapandemie veel besproken *R*-getal aan de orde: het getal *R* – het zogenaamde reproductiegetal – is het gemiddeld aantal mensen dat door een geïnfecteerd persoon wordt besmet. De groei van het aantal geïnfecteerden is dan een exponentiële groei met groeifactor *R*. Maar deze voorstelling van zaken is wel erg eenvoudig. Het getal *R* hangt af van diverse factoren zoals latente en infectieuze periode, het aantal contacten dat men heeft, het percentage van de populatie dat vatbaar is voor de ziekte, enzovoort. Met behulp van deze gegevens wordt het actuele reproductiegetal *R* berekend. De *R* op het moment dat nog 100% van de populatie vatbaar is wordt het basisreproductiegetal R_0 genoemd. De schrijvers laten zien dat als een fractie van tenminste $1 - 1/R_0$ wordt gevaccineerd er sprake is van groepsimmuniteit, en dat de epidemie dan zal uitsterven. Maar wat als een vaccin niet perfect werkt?

Matrixrekening

In dat geval ontstaan er geïnfecteerden die gevaccineerd zijn en geïnfecteerden die niet gevaccineerd zijn. Dit leidt tot een nieuw model met gevaccineerden en ongevaccineerden, waarmee het verloop per generatie kan worden doorgerekend. Daarbij wordt gebruik gemaakt van matrixrekening, en dan vooral 2 × 2-matrices, waarbij kort de rekenregels voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen worden uitgelegd. Het reproductiegetal *R* komt nu tevoorschijn als de grootste eigenwaarde van de volgende-generatiematrix. Een rekenblad van GeoGebra wordt gebruikt om het verloop van het aantal geïnfecteerden en eigenvectoren zichtbaar te maken, zie figuren 1 en 2.



figuur 1



figuur 2

Modellen als hiervoor zijn echter vaak niet handig, epidemieën ontwikkelen zich in de tijd en niet in generaties.

SIR-model

Daarom wordt overgestapt op een continu model, en dan komen er differentiaalvergelijkingen tevoorschijn. Zolang de fractie vatbaren min of meer constant blijft is de groei exponentieel, maar als die fractie verandert wordt het model aangepast door veranderingen in het aantal vatbare en herstelde (dus immune) personen mee te nemen. We komen dan uit bij het SIR-model: *S* van susceptible (vatbaar), *I* van infected en *R* van recovered (hersteld). Dit model bestaat uit een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen. Niet echt oplosbaar, maar er zijn wel numerieke oplossingen te vinden. Het boekje eindigt dan ook met enkele grafieken van zo'n oplossing voor een model behorend bij influenza.

Tot slot

Ik denk dat een ruim deel van dit boekje geschikt is voor alle leerlingen (zowel vwo wiskunde A als B), pas als differentiaalvergelijkingen om de hoek komen kijken zullen de meeste leerlingen het wat lastiger krijgen. In 19 hoofdstukken worden stap voor stap de modellen opgebouwd. Elk hoofdstuk begint met een opsomming van de inhoud en bevat een aantal opgaven. De antwoorden en uitwerkingen hiervan zijn te vinden op de site van Epsilon. Is er nog wat aan te merken op het boekje? Afgezien van een enkel typefoutje en het ontbreken van het verschijnsel tweede en derde golf eigenlijk niet. Misschien is het nog jammer dat er niet wat uitgebreider is ingegaan op het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen, nu werd eigenlijk volstaan met de opmerking dat de grafieken van oplossingen werden getekend door met kleine tijdstapjes telkens een volgend punt te berekenen. Maar dat biedt de geïnteresseerde leerling dan wellicht wel weer een startpunt voor een eigen onderzoek.
Kortom, voor mij een geslaagd boekje dat de lezer een mooi inzicht biedt in de wiskunde die Don Klinkenberg, een van de schrijvers en infectiemodelleur bij het RIVM, waarschijnlijk op een veel hoger niveau dagelijks gebruikt.

Zie voor een grotere weergave van de figuren 1 en 2:

vakbladeuclides.nl/966zebra

Over de auteur

Ernst Lambeck is wiskundedocent op het Newmancollege te Breda en hij is lid van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *ernstlambeck@online.nl*

Simon Biesheuvel

Afronden: gewoon, intelligent en meer

Afronden blijft de gemoederen bezig houden. Simon Biesheuvel zet zeven aandachtspunten op een rijtje.

1. Afronden op twee decimalen gaat volgens de regel: is de derde decimaal een getal uit 0 t/m 4, dan laat je alleen de eerste twee decimalen staan, is het een getal uit 5 t/m 9, dan tel je 0,01 bij het getal op en laat je daarna alleen de eerste twee decimalen staan. Dit noem ik *domweg* afronden.

2. Er is ook *intelligent* afronden. Als je elke maand € 17,50 in een oude sok stopt, na hoeveel maanden kun je iets van € 1250 kopen? Deel je 1250 door 17,50 dan krijg je 71,42... en na *intelligent* afronden vind je het antwoord: na 72 maanden.

3. In het examen vwo wiskunde A 2019 1e tijdvak opgave 12 staat: 'Bereken met behulp van differentiëren voor welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.'

Tegenwoordig staat bijna altijd in examens na de vraag de zin: Geef je antwoord in ... (bijvoorbeeld één decimaal). Het lijkt de bedoeling dat er nagedacht mag worden en niet alleen het antwoord *domweg* moet worden afgerond. Het woord afronden wordt hier in het examen zelfs niet meer genoemd.

Vroeger stond er vaak: Rond je antwoord af op één decimaal. En dat lijkt meer op een extra opdracht en wel de opdracht tot *domweg* afronden. De bedoeling is nu 'afgeleide = 0' op te lossen (dit geeft 5,65...) en het antwoord in één decimaal te geven, dus 5,7. Af en toe stelt iemand bij examenbesprekingen (ik bedoel de besprekingen die georganiseerd worden door de NVvW) de vraag: moet je die niet controleren of 5,6 niet een grotere inhoud geeft? Maar altijd is de conclusie: nee, dat hoeft niet, want anders waren er in het CV wel punten voor die controle gegeven. Blijkbaar moet je in dit geval toch *domweg* afronden. Maar om de een of andere reden kan ik daar wel mee leven.

4. We bekijken nu een opgave waarin het antwoord een interval is. Gegeven is de functie $f(t) = 18 - t^2$.
Los op: $f(t) \geq 8$. Geef je antwoord in één decimaal.
Je antwoord is in eerste instantie: $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ en dan moet je $\sqrt{10}$ (= 3,16..) volgens mij *intelligent* afronden. Je krijgt dan [-3,1; 3,1] omdat het *domweg* afronden naar [-3,2; 3,2] onder andere de t-waarde 3,2 bevat en $f(3,2)$ is kleiner dan 8. Mijn conclusie is: bij een interval moet je het 'interval in' afronden. Dat klinkt niet lekker dus zeg ik maar: bij een interval moet je *naar binnen* afronden.

5. Bij de formules voor havo wiskunde A 2019 1e tijdvak staat de volgende formule op het formuleblad met bij onderdeel 11 de vraag naar een interval.

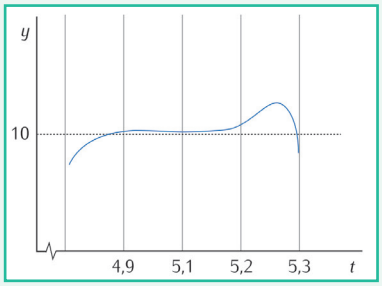
Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

3p **11** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kandidaten met een onvoldoende voor filosofie. Geef de grenzen in één decimaal.

Uit eerdere gegevens bij deze opdracht kun je vinden: $p = 217/950$ en $n = 950$. Dit geeft het interval [0,2011..., 0,2556...] en *domweg* afgerond en in procenten wordt dit [20,1; 25,6] en dit geeft het CV. Neem je echter voor p de afgeronde waarde 0,288 dan krijg je het interval [0,2007; 0,2552] en *domweg* afgerond en in procenten wordt dit [20,1; 25,5]. Dit geeft het CV ook als mogelijkheid en alleen dit laatste antwoord krijg je toevallig ook als je *naar binnen* afrondt. Verder staat tussen haakjes als ook goed antwoord [20,0; 25,6] en dat is vreemd, want het is niet *domweg*, niet *intelligent* en niet *naar binnen* afronden. Het is *naar buiten* afronden. Blijkbaar wil men niet zo streng zijn en meerdere afrondingen goed rekenen. Het 95% betrouwbaarheidsinterval zit tussen twee andere intervallen in: eerst [0; 20,11...] dan [20,11...; 25,56...⟩ en als laatste ⟨25,56...; 100]. Bij alle drie de intervallen kun je de grenzen afronden op één decimaal.
Naar binnen afronden geeft dan: [0; 20,1] dan [20,2; 25,5] en als laatste [25,6; 100] en dat lijkt me een juiste oplossing. Het is beter dan het middelste interval te laten beginnen met 20,1 waarbij je een getal van het eerste interval afsnoept. Waarom zou je?
Vraag aan het CvTE: zou voortaan het *naar binnen* afronden bij een 95% betrouwbaarheidsinterval het juiste antwoord kunnen zijn en (voorlopig) als extra antwoord anders afronden erbij met de mededeling: hiervoor hoeft geen punten aftrokken te worden. En dit volhouden tot de wiskundemethodes ook op *naar binnen* afronden zijn overgestapt. Dat zou betekenen dat het afronden zoals vermeld is in de afgelopen september-mededeling (vakspecifiek) onder het kopje correctievoorschrift herroepen moet worden. [1]

6. Ook wel aardig is de volgende grafiek



Ik wil de t-waarde bij het maximum aflezen op één decimaal en ook het interval waarvoor geldt dat $f(t) \geq 10$.
Het maximum is bij $t \approx 5{,}26$.
Dat wordt met één decimaal $t = 5{,}3$ (*domweg* afronden).
Het interval is ongeveer [4,88; 5,29] en *naar binnen* afronden geeft [4,9; 5,2] en het leuke is dat de afgeronde t-waarde van het maximum niet in dit gebied ligt.

7. Dan nog iets leuks tot slot: ik leer mijn leerlingen altijd dat je niet in twee stappen mag afronden. Dus 5,45 wordt op helen afgerond 5 en niet eerst 5,5 en dan 6. (behalve in coronatijd als je het SE-cijfer eerst op één decimaal en daarna op een geheel getal moet afronden, maar zonder corona is dit uit den boze). Natuurlijk mag dan het volgende ook niet: Cas rondt af op één decimaal en Simon op een geheel getal. Maar als ik op mijn Casio GR intyp: 13717421.05 × 9 dan krijg ik als antwoord 123456789.5 en rond ik dit af op het gehele getal 123456790. Maar nu heeft Casio de eerste afronding gedaan (er komt echt iets met 45 achter de komma uit) en ik deed de tweede afronding. Gelukkig komt zo'n opgave vrijwel nooit voor en mocht het een keer op een eindexamen wel gebeuren: dan heeft mijn leerling hetzelfde antwoord als ik en is er geen probleem, omdat ik bij die leerling mijn antwoord dan goed reken ☺.

Noot

[1] *https://www.examenblad.nl/vakspecifiek/vakspecifieke-info-wiskundea-havo/2021/f=/info_wiskundeA_havo_ce_2021_v2.0_def.pdf*

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

Wis en Waarachtig

Computers kunnen prijsafspraken maken

Geheime prijsafspraken behoren doorgaans tot het domein van rokerige afdakjes bij internationale beurzen en borrels in lelijke wegrestaurants. Maar ook computers kunnen aan 'collusie' doen, zo concluderen wetenschappers van de Universiteit van Amsterdam. Zij programmeerden een algoritme dat niet simpelweg bij de concurrent afkijkt of de prijs daar hoger is (om daarna z'n eigen prijs op te schroeven), maar dat de beste prijs voor beide partijen berekent. Als de concurrent datzelfde algoritme draait en op dezelfde 'collusieprijs' uitkomt, dan hebben ze in feite prijsafspraken gemaakt. Het algoritme bestaat uit twee delen, en werkt vooralsnog alleen in een duopolie, waarbij twee bedrijven de markt domineren. Het eerste deelalgoritme wil een kartel vormen. Het berekent, op basis van verkoopprijzen en voorraadgegevens, de prijs die de gezamenlijke winst van de twee bedrijven zo hoog mogelijk maakt. Het tweede deelalgoritme concurreert. Dat leert welke prijs het moet kiezen om de individuele winst van het bedrijf zo hoog mogelijk te maken. Beide algoritmes draaien naast elkaar en telkens worden de twee uitkomsten vergeleken. Het algoritme met de beste uitkomst mag dan verder rekenen. Als slechts één bedrijf het algoritme gebruikt, komt die op de beste concurrerende prijs. Maar als ze allebei dit algoritme gebruiken, dan leren zij allebei los van elkaar de optimale kartelprijs, zonder informatie uit te wisselen. *Bron: NRC, 27 januari 2021*

Forse onzekerheden in simulaties Covid-19 pandemie

Computermodellen om de sterftecijfers van Covid-19 te voorspellen bevatten aanzienlijke onzekerheden in de voorspellingen, zo blijkt uit een internationale studie onder leiding van onderzoekers van UCL in Londen en het CWI. Wouter Edeling van het CWI legt uit: 'Voor modellen met een groot aantal parameters zoals CovidSim, is het erg moeilijk om te bestuderen welk effect onzekerheden in de inputparameters hebben op onzekerheden in de output. Het hebben van veel parameters betekent dat de rekenkosten buitensporig hoog zullen zijn - vaak aangeduid als de "vloek van dimensionaliteit". We onderzoeken hoe we de berekeningen zo efficiënt mogelijk kunnen uitvoeren, door uit te zoeken welke parameters het belangrijkst zijn voor de onzekerheden in de output. Door te focussen op deze parameters wordt het mogelijk om goede kansvoorspellingen te doen, die door overheden kunnen worden gebruikt bij hun beslissingen.'

De nieuwe methoden zijn erg effectief. Bij het testen van de robuustheid van CovidSim ontdekte het onderzoeksteam dat, hoewel de code 940 parameters bevatte, er 60 belangrijk waren, en dat er daarvan slechts 19 de variantie in de outputvoorspellingen domineerden. De helft van de totale variatie in hun resultaten was terug te voeren op slechts drie van de 940 invoerparameters: de latentietijd van de ziekte (de tijd tussen besmetting en besmettelijkheid), de tijd die een geïnfecteerde nodig heeft om zichzelf te isoleren, en de doeltreffendheid van social distancing. Terwijl de latentietijd een biologische parameter is, houden de andere twee verband met de interventiescenario's en het menselijk gedrag. Hoewel ze een moeilijke modelleringstaak vertegenwoordigen, kunnen deze parameters (en de verschijnselen die ze modelleren), in tegenstelling tot de biologische aspecten, worden beïnvloed door het overheidsbeleid.
Naar: Wiskunde Persdienst

Martinus Veltman overleden

Martinus Veltman. Foto: Tom Goris

Op 4 januari jl. overleed Nobelprijswinnaar Martinus Veltman op 89-jarige leeftijd. Veltman ontving de Nobelprijs in 1999 samen met Gerard 't Hooft. De twee helderden de kwantumstructuur van de elektrozwakke interacties in de natuurkunde op.
In 2003 gaf Veltman de lustrumvoordracht van het Mathematisch Congres in Nijmegen. Vlak voor hij zou beginnen kwam onverwacht Guusje ter Horst (toen burgemeester van Nijmegen) binnen om het Wiskundig Genootschap het predicaat Koninklijk te verlenen. Daarbij sprak ze de woorden: 'Ik had op het eindexamen een drie voor wiskunde. En kijk eens wat ik geworden ben...'
De reactie even later van Veltman: 'Ik had een negen voor wiskunde. En kijk eens wat ik geworden ben ...'
Bron: NAW juni 2003 en www.nu.nl

Sylvia van Borkulo en Paul Drijvers

Het FIzier gericht op...

Ruimtelijk inzicht met Virtual Reality in het bouwonderwijs

Virtual reality wordt veel in games gebruikt, maar kan ook in het onderwijs worden ingezet. Piloten en chirurgen maken er bijvoorbeeld gebruik van in trainingen. In dit artikel bespreken we het gebruik van VR voor het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht in de opleiding tot timmerman in de Beroepsbegeleidende Leerweg (BBL).

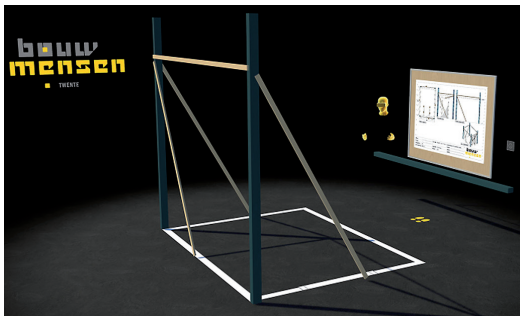
Van 2D naar 3D

figuur 1 Leerling-timmerman met VR-bril en 'handhelds'

Een timmerman maakt gebruik van technische bouwtekeningen. Deze tekeningen geven in 2D aan wat er gebouwd moet worden en de timmerman vertaalt deze naar de 3D werkelijkheid. Dit vereist specifieke ruimtelijke vaardigheden, zoals het oriënteren in de ruimte en het visualiseren van vormen en objecten. Deze ruimtelijke vaardigheden ontbreken tegenwoordig vaak bij leerlingen-timmerman, omdat ze de juiste technische achtergrond of vooropleiding missen. De vooropleiding varieert van de meer technisch beroepsgerichte leerwegen vmbo tot een overgangsbewijs van klas 3 naar 4 van havo of vwo. De technische bagage van de leerlingen loopt daardoor enorm uiteen. Steeds meer studenten ondervinden moeilijkheden bij het lezen van technische tekeningen in het beroepsonderwijs.

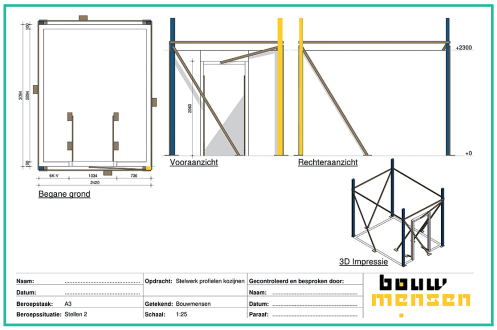
Begeleid oefenen

Om deze studenten te helpen hun ruimtelijk inzicht te verbeteren, hebben Bouwmensen Twente en 3D-visualisatiebedrijf The Virtual Dutch Men een VR-applicatie ontwikkeld. Bouwmensen Twente is een opleidingsbedrijf dat diverse bouwopleidingen in de BBL (Beroepsbegeleidende Leerweg) aanbiedt, zoals timmerman, metselaar en tegelzetter. De VR-applicatie is gericht op bouwopdrachten en bevat een zogeheten stelopdracht die doorlopen moet worden en die op verschillende moeilijkheidsniveaus herhaald wordt.



figuur 2 De stelopdracht in de VR-applicatie

Vanuit een werkbord met bouwtekeningen wordt de student door de stappen heen begeleid door een sprekende 'avatar', zie figuur 2. Met korte instructies van deze avatar wordt de student wegwijs gemaakt in de applicatie en de opdracht. De student pakt telkens met de handheld (een controller die je in je hand houdt) de lat die voor het werkbord klaarligt en plaatst die in het bouwwerk op de plek die met een gele markering is aangegeven op de bouwtekeningen. De bouwtekeningen omvatten drie aanzichten en een tekening van het gehele bouwwerk in 3D, zie figuur 3.

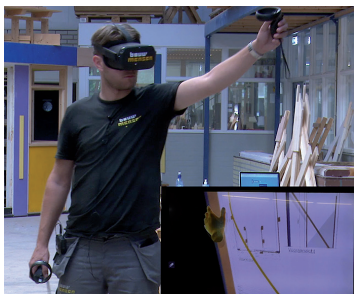


figuur 3 Het werkbord met bouwtekeningen in de VR-applicatie

Studenten kunnen vrij rondlopen op de virtuele werkplek om zich te oriënteren. Op de bouwtekeningen is steeds met geel aangegeven waar de huidige balk geplaatst moet worden. Een lat wordt geplaatst door naar de goede plek toe te lopen en de lat vlak bij de bestemming te houden. Als de plek correct is, wordt de geplaatste balk groen. Als het fout is, kleurt de balk rood en moet je je fout verbeteren om door te kunnen gaan. De stelopdracht wordt drie keer doorlopen. Bij iedere herhaling wordt de begeleiding door de avatar minder en voert de student de opdracht meer zelfstandig uit met behulp van de tekeningen.

Onderzoek VR-applicatie

We onderzochten hoe studenten Bouw werkten met deze VR-applicatie, en hoe deze hen hielp om ruimtelijk inzicht te ontwikkelen. Vijf leerlingen-timmerman van Bouwmensen Utrecht, een instructeur van Bouwmensen Utrecht en een instructeur van Bouwmensen Twente doorliepen de VR-applicatie en werden na afloop geïnterviewd. Als voorbereiding hierop deden de leerlingen-timmerman enkele computertaken in de Numworx Digitale Wiskunde Omgeving, die gericht waren op ruimtelijk inzicht en het lezen van profieltekeningen (zie [1] voor voorbeelden van dergelijke taken). Verder hebben 25 studenten van Bouwmensen Twente na het gebruik van de VR-applicatie een vragenlijst ingevuld over wat ze van de VR-applicatie vonden.



figuur 4 Leerling-timmerman aan het werk met de VR-applicatie

Resultaten

Uit de video-opnames en interviews met studenten bleek dat de VR-applicatie heel eenvoudig te gebruiken was en dat ze het leuk vonden om te doen. De Numworx-taken waren een prettige opwarmoefening. Studenten oefenden verschillende dingen in de VR-applicatie: zich oriënteren in de ruimte door het lezen van de bouwtekeningen, het opzoeken van de goede plaats en daarna het plaatsen van de onderdelen. Ze doorliepen de opdracht steeds sneller en maakten gaandeweg minder fouten. De instructeurs hadden zoals verwacht genoeg aan een enkele blik op de tekening om de latten op de goede plek te plaatsen. Uit de vragenlijst bleek dat studenten heel positief waren over de VR-applicatie en het gebruik ervan voor het onderwijs. Het merendeel vond de VR-applicatie duidelijk (77%), makkelijk in het gebruik (80%), en leuk om te gebruiken (83%). Op de vraag of ze liever instructies van een persoon kregen, werd overwegend 'neutraal' (niet eens, niet oneens) geantwoord (60%). Uit de interviews bleek dat de VR-applicatie vooral gezien werd als een mooie aanvulling op de instructie in de werkplaats. Een instructeur meldde dat het doorlopen van de VR-applicatie zo'n twintig minuten kostte, terwijl dezelfde opdracht in de werkplaats gewoonlijk minstens drie uur duurt. Een werkplaats inrichten met materialen en de constructie daadwerkelijk in elkaar zetten en daarna weer opruimen kost immers veel meer tijd.

Conclusie

We concluderen dat de VR-applicatie een eenvoudig te gebruiken, motiverende en efficiënte manier is om zowel kennis van stelopdrachten te verwerven als ruimtelijk inzicht. Het kan bovendien een leuke en nuttige aanvulling zijn op het reguliere bouwonderwijs. Met de VR-applicatie kan op een voor studenten gemakkelijke en aansprekende manier extra aandacht worden besteed aan het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht. In de toekomst zouden meer soorten bouwopdrachten kunnen worden ontwikkeld om verder bij te dragen aan het verbeteren van ruimtelijk inzicht bij studenten bouw.

Een vergroting van figuur 2 vind je op: *vakbladeuclides.nl/966fizier*

Noot

[1] zie *https://app.dwo.nl/vo/?hash=#c:197986*

Meer informatie

Kavanagh, S., Luxton-Reilly, A., Wuensche, B., & Plimmer, B. (2017). A Systematic Review of Virtual Reality in Education. *Themes in Science and Technology Education, 10*(2), 85–119.

Hol, H., & Steeman, G. (2016). *Virtual reality in het onderwijs.* Kennisnet.nl. *https://www.kennisnet.nl/fileadmin/kennisnet/publicatie/Virtual_reality_in_het_onderwijs.pdf*

Over de auteurs

Sylvia van Borkulo is universitair docent bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *s.vanborkulo@uu.nl.* Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

Etienne Tjon Sjoe Sjoe

De logaritme, gesneden koek met het Logarit-mes

Het Logarit-mes is een model dat de mogelijkheid biedt om rekenregels voor de logaritme zelf te kunnen reconstrueren waardoor die beter te begrijpen zijn. Het is gebaseerd op het herhaald delen van oppervlakten, gevisualiseerd door het Logarit-mes en bedacht door de auteur van dit artikel.

Inleiding

Het logaritmisch verband vind je in het dagelijks leven terug, onder meer bij berekeningen over renteloopti jden en voorspellingen bij virusuitbraken (groeimodellen). In het voortgezet onderwijs wordt de logaritme geïntroduceerd als de inverse van het exponentieel verband:

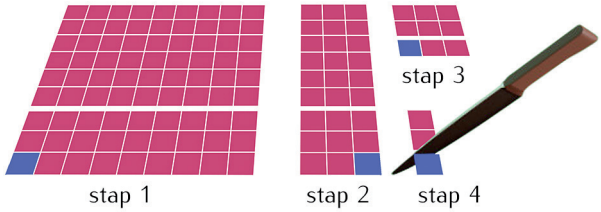
Als $y = g^x$ dan is $x = {}^g\log(y)$

Hierna worden al vrij snel de rekenregels voor de logaritme langs algebraïsche weg afgeleid. Misconcepties en fouten zijn hiervan het gevolg. Het Logarit-mesmodel biedt een context waarmee al doende meer inzicht wordt verkregen in de vaak onbegrepen rekenregels. Het algebraïseren is in de bespreking zoveel mogelijk achterwege gelaten, het accent wordt meer gelegd op het *weten waarom*.

Het model

Het ^{G}logarit-mes is een mes waarmee je $1/G^{\text{e}}$-deel van een oppervlak afsnijdt, de rest gooi je weg. De modelvraag luidt: 'Hoeveel keer moet het snijden van $1/G^{\text{e}}$ worden herhaald om met één vierkantje te eindigen wanneer je start met een gegeven aantal vierkantjes?' Oftewel bepaal het aantal benodigde logarit-messneden voor het gegeven oppervlak. Het antwoord wordt genoteerd als:

^{G}logarit-mes(*aantal vierkantjes*) = *aantal benodigde messneden*



figuur 1

Bij het voorbeeld in figuur 1 worden de vier stappen in het snijproces met een ^{3}logarit-mes bij 81 vierkantjes afgebeeld.
Als lesmateriaal kunnen vierkante (lego)blokjes, geruit papier en schaar of blanco papier en een pen gebruikt worden. Er is ook een GeoGebra-app[1] hiervoor ontwikkeld.
Het model start met vierkantjes gelegd in een rij of rechthoek. Uiteindelijk gaat het model over op een lege rij of - rechthoek.

Vierkantjes op een rij

figuur 2

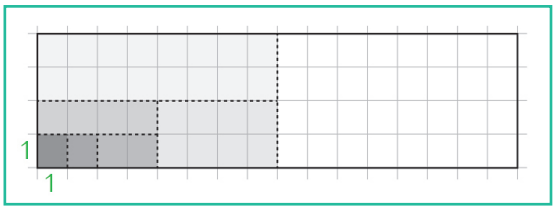
In figuur 2 wordt de modelvraag toegepast op 27 vierkantjes met een ^{3}logarit-mes.
In de bovenste rij staan de 27 vierkantjes. Na de eerste, tweede en derde keer snijden blijven er resp. 9, 3 en tot slot 1 vierkantje over.

Stapsgewijs wordt dit:
^{3}logarit-mes(*27 vierkantjes*) =
1 *snede* + ^{3}logarit-mes(*9 vierkantjes*) =
2 *sneden* + ^{3}logarit-mes(*3 vierkantjes*) =
3 *sneden* + ^{3}logarit-mes(*1 vierkantjes*)
Er waren dus 3 sneden nodig.
Als stimulans richting het inverse verband zouden vragen kunnen worden gesteld als: 'Hoeveel vierkantjes zouden er zijn geweest wanneer er vier keer was gesneden?' of 'Hoeveel vierkantjes zouden er geweest zijn wanneer er 2 messneden benodigd waren?'

Interessant wordt het wanneer je leerlingen laat onderzoeken wat het snijden met een ^{3}logarit-mes oplevert bij 0, 1, 3, 6, 9, 18, 24 en 27 vierkantjes. Hieronder volgt een aantal mogelijke uitkomsten:
Bij 0 vierkantjes kun je niet snijden om op 1 vierkantje te komen. Wanneer je met 1 vierkantje start hoef je niet meer te snijden, dus 0 sneden. Bij 3, 9 en 27 vierkantjes komt het perfect uit op 1, 2 respectievelijk 3 sneden.
De overige situaties komen uit op een schattingsprobleem. De eerste drie uitkomsten zijn vrij evident. In het vierde geval zal de koppeling worden gevonden met het exponentiële verband. Immers om met 1 vierkantje te eindigen moet bij de voorlaatste snede het aantal vierkantjes gelijk zijn aan 1 × 3. Bij elke voorgaande stap is het aantal drie keer zo groot. In het geval van het schatten, is de auteur de mening toegedaan dat een nauwkeurigheid van één of meerdere decimalen het doel voorbijstreeft. Het is voldoende om te weten dat een oppervlakte met een grootte van bijvoorbeeld 18 vierkantjes resulteert in een antwoord tussen 2 en 3 messneden want 18 ligt tussen 9 en 27.

Vierkantjes in een rechthoek

Wanneer de vierkantjes in een rechthoek worden geplaatst, dan kan worden aangesloten op bestaande kennis over de oppervlakte. Als de oppervlakte constant is, dan zijn de breedte en de hoogte omgekeerd evenredig. In relatie tot de logaritme kan worden onderzocht of de keuze van lengte en breedte invloed heeft op het aantal logarit-messneden bij een constante oppervlakte.



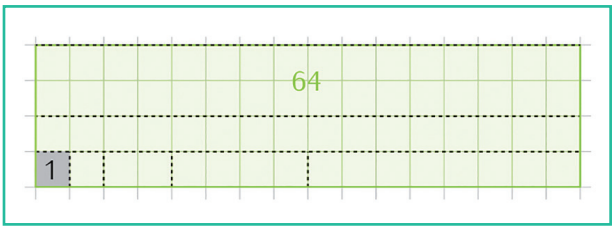
figuur 3

Als voorbeeld nemen we een ^{2}logarit-mes voor een oppervlakte van 64 vierkantjes. Wanneer leerlingen dit onderzoeken komen ze tot de conclusie dat bij alle rechthoeken het totaal aantal sneden steeds 6 is, ongeacht de wijze van snijden, zolang de oppervlakte maar 64 vierkantjes blijft. In figuur 3 is gekozen voor een rechthoek van 16 × 4 en is er willekeurig in breedte- en hoogterichting gesneden.

oppervlakte van 64 vierkantjes		aantal messneden	
breedte	hoogte	in de breedte	in de hoogte
64 :2	1 ×2	6 -1	0 +1
32	2	5	1
...	...	...	...
1	64	0	6

figuur 4

De tabel in figuur 4 geeft een inventarisatie weer van mogelijke rechthoeken. Bij een gegeven (rij)breedte en (kolom)hoogte staat het bijbehorende aantal sneden in respectievelijk de breedte en de hoogte. Wat verandert er met de messneden wanneer de breedte wordt gehalveerd van bijvoorbeeld 32 naar 16? Dan hoeft er in de breedte (rij) één keer minder te worden gesneden, doch één keer meer in de hoogte. Er komen immers twee keer zoveel rijen bij, 2 × 32 wordt 4 × 16.



figuur 5

In figuur 5 is de rechthoek systematisch gesneden, eerst wordt in de hoogte het aantal rijen gereduceerd tot één rij. Vervolgens wordt in die ene rij doorgesneden tot er één vierkantje overblijft. Deze sequentiële handeling maakt duidelijk waarom de bewerking optellen in plaats van vermenigvuldigen moet worden gebruikt in de rekenregel:
^{G}logarit-mes(*aantal rijen* × *aantal vierkantjes per rij*) =
^{G}logarit-mes(*aantal rijen*) + ^{G}logarit-mes(*aantal vierkantjes per rij*)

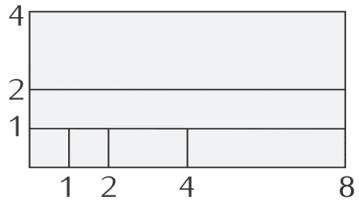
Door het laten ervaren van de vraag: 'Hoeveel keer moet ik minder snijden wanneer ik slechts één rij wil logaritmiseren in plaats van het totaal (alle rijen)?' wordt de volgende rekenregel duidelijk:

^{G}logarit-mes(*breedte*) =
^{G}logarit-mes(*breedte* × *hoogte*) – ^{G}logarit-mes(*hoogte*)

Hieronder volgen twee andere vragen waarbij de 'rijstrategie' kan worden gebruikt:

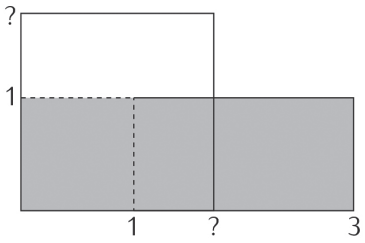
1. Hoeveel extra ^{2}logarit-messneden zijn er nodig wanneer een rij vier keer langer wordt? De nieuwe rij bestaat dus uit vier oude rijen. Door de oude rijen op elkaar te stapelen ontstaat een rechthoek. Anders gesteld, hoeveel sneden zijn er nodig om van vier naar één rij te komen?
2. Stel dat er 5 ^{3}logarit-messneden nodig zijn voor een hele lange rij vierkantjes. Hoeveel zijn er dan nodig voor een negen keer zo kleine rij?

Overgang naar lege rechthoek en - strook



figuur 6

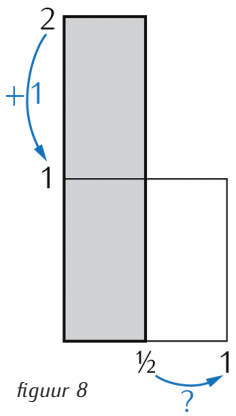
Figuur 6 bevat minder gegevens dan, doch dezelfde informatie als figuur 5. In de lege rechthoek zijn de vierkantjes weggelaten; alleen de afmetingen en sneden zijn aangegeven. Lege modellen geven wat meer mogelijkheden om te werken met grotere oppervlakten en andere grondtallen. Het snijden hoeft wat minder exact te zijn. Deze wat abstractere modellen zijn onder meer te gebruiken bij vraagstukken met breuken en wortels.



figuur 7

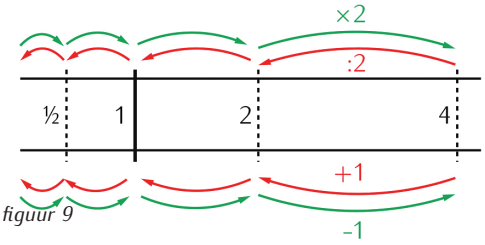
Bij een ^{3}logarit-messnede hoort een figuur met een oppervlakte van 3 vierkantjes, ongeacht de vorm (figuur 7). De zijde van het vierkant moet dus $\sqrt{3}$ lang zijn. Om naar een vierkant van 1 bij 1 te gaan, wordt er zowel in de hoogte als in de breedte $1/\sqrt{3}$e deel afgesneden. Dus bij een oppervlak van $\sqrt{3}$ hoort een halve messnede.

Wat nu wanneer het startoppervlakte kleiner is dan 1? (breuken)
In figuur 8 heeft de rechthoek van ½ × 2 een oppervlakte van 1, de logarit-mes moet dus gelijk zijn aan 0. Volgens de gevonden formule bij figuur 5 geldt voor een rechthoek



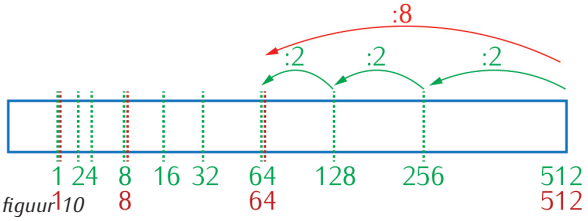
figuur 8

van 2 × ½: ^{2}logarit-mes (2 × ½) = ^{2}logarit-mes (2) + ^{2}logarit-mes (½) = 1 + ^{2}logarit-mes (½) = 0
Dus moet ^{2}logarit-mes(½) = -1, een *negatieve messnede*.



figuur 9

Er kan ook geredeneerd worden vanuit de lege strook, een lege rechthoek van 1 hoog. In figuur 9 stelt een rode pijl een ^{2}logarit-messnede in de strook voor, een halvering van de oppervlakte. Een groene pijl stelt een 'reparatie' van een ^{2}logarit-messnede voor, dus een verdubbeling van de oppervlakte van de strook. Bij een rode pijl tellen we dus één erbij op voor het bepalen van het aantal sneden, bij een groene pijl trekken we juist één eraf omdat we de gemaakte snede ongedaan maken.
Bij een oppervlakte van 4 zijn er twee rode pijlen nodig om te eindigen met 1 vierkantje. Maar het kan ook met drie rode en één groene pijl. Om van een ½ naar 1 te gaan dient de snede bij ½ te worden 'gerepareerd'.
Dus ^{2}logarit-mes(½) = -1.

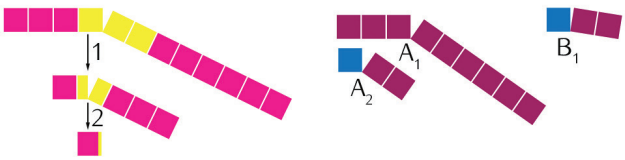


figuur 10

Met de lege strook wordt het ook makkelijker om de overgang van het ene naar het andere grondtal te demonstreren. In figuur 10 wordt met de 3 kleine groene messneden evenveel gesneden als met 1 grote rode messnede.

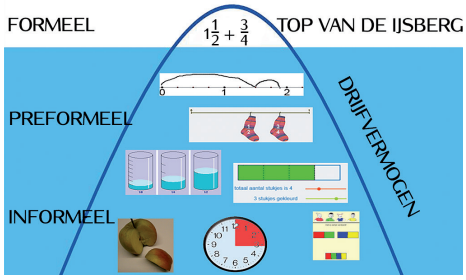
Verkeerd gesneden?

Het model kan ook gebruikt worden om 'denkfouten' te demonstreren. Denkfouten die bijvoorbeeld ontstaan wanneer leerlingen zich laten verleiden tot overgeneralisatie bij een visuele gelijkenis. Een voorbeeld hiervan is $^{3}\log(9 + 3) = {}^{3}\log(9) + {}^{3}\log(3)$: een verleidelijke doch verkeerde toepassing van de distributieve eigenschap van logaritme t.o.v. optellen, 'herkend' bij het vermenigvuldigen: $3 \times (9 + 3) = 3 \times 9 + 3 \times 3$.



figuur 11

De snijhandelingen in figuur 11 geven de verschillen weer. Rechts is er sprake van twee aparte snijgroepjes A en B. Links daarentegen vormen de vierkantjes één groep, weliswaar verdeeld over twee rijtjes; er zijn iets meer dan twee sneden nodig. Die laatste fractionele snede kan niet fysiek worden afgebeeld. Het antwoord ligt tussen 2 en 3 sneden.



figuur 12

Nabeschouwing

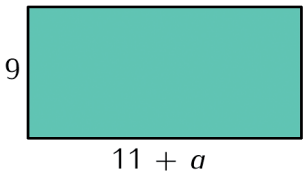
De gekozen context van dit model biedt vanuit een Realistic Mathematics Education perspectief voldoende mogelijkheden om vanuit de informele en preformele wereld de wetmatigheden van het logaritmisch en exponentieel verband te verkennen (zie figuur 12).[2] Door de gekozen notatie van het ^{G}logarit-mes( ) wordt min of meer een koppeling gemaakt naar de formele notatie.

Discussie

Vanwege het fysieke karakter van de context kleven aan het Logarit-mes model twee beperkingen. Een daarvan is dat snijden wordt geassocieerd met kleiner worden, dus met grondtallen groter dan 1. Een ander punt is dat in het dagelijks leven het aantal sneden altijd een geheel getal is en ook nooit negatief. Een fractionele snede is wel te construeren maar vrij moeilijk voor te stellen. Het gebruik van de lege rechthoek en de lege strook heft de laatstgenoemde beperking op. Volgens Pauline Vos [3] blijkt dat een introductie van logaritmen via een procesmatige benadering met getallen een significant positief effect heeft op het correct antwoorden en beter onthouden van logaritmeregels. Mijn inschatting is dat het effect met dit tastbaar/concreet model nog groter zal zijn. Hier is uiteraard onderzoek voor nodig.

Tot slot

Zoveel docenten, zoveel zinnen. Ik nodig je bij dezen uit om naar eigen inzicht dit model in te zetten in het leerproces over rekenregels voor de logaritme en ben benieuwd naar jouw ervaring. De uitsmijter, zie figuur 13... Gebruik het Logarit-mes om te achterhalen wat a is, wanneer ^{3}logarit-mes$(9 \times (11 + a)) = 5$.



figuur 13

Noten

[1] Zie *https://www.geogebra.org/m/yasjyew9*

[2] Webb, C., van der Kooij, H. & Geist, M. (2011). Design Research in the Netherlands: Introducing Logarithms Using Realistic Mathematics Education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, Spring-Summer, Volume 2, 47-52.

[3] Vos, P. & Espedal, B.(2015). Logaritme: Een betekenisvolle aanpak met herhaald delen. *Euclides*, *91*(3), 4-6.
Zie ook: *https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/091_2015-16_03_vos.pdf*

Dank gaat uit naar mijn sparringpartners Daan van Smaalen en Kenneth Tjon Soei Sjoe.

Over de auteur

Etienne Tjon Sjoe Sjoe is eerstegraads wiskundedocent (zzp-er) en heeft lesgegeven op de Pabo (HvA) en diverse vo-scholen in Amsterdam. Tijdens de studiedagen van de NVvW, heeft hij de workshop 'Ervaar de logaritme met het Logarit-mes' verzorgd. E-mailadres: *Etienne.TSS@gmail.com*.

Bertus van Etten

De Thiende

De teller-noemernotatie van breuken is een bron van misbegrip. Bertus van Etten pleit voor het afschaffen van de breukstreep.

Inleiding

De *Adviezen van de Coördinatiegroep Curriculum.nu* zijn openbaar gemaakt. Wat moeten onze leerlingen kennen en kunnen is de centrale vraag waarover 125 leraren en 18 schoolleiders uit het primair- en voortgezet onderwijs zich hebben gebogen. Voor de negen leergebieden presenteren zij hun adviezen voor de onderwijsinhoud van morgen. Met belangstelling heb ik de adviezen voor het leergebied rekenen & wiskunde gelezen. De samenstellers pleiten voor een aantal essentiële veranderingen die het curriculum actueler kunnen maken en het curriculum meer laten aansluiten op toekomstige ontwikkelingen. In Curriculum.nu wordt gesproken over het gebruik van breuken in het primair en voortgezet onderwijs. Ik zie wekelijks op een bassischool dat leraren en leerlingen moeite hebben met breuken in de teller-noemernotatie. Veel leerlingen leren een aantal recepten, maar vaak weten ze niet wat ze doen.

Breuken in het dagelijks leven

Het probleem is dat de breuken in teller-noemernotatie niet de breuken zijn die in het dagelijks leven gebruikt worden. Breuken optellen en vermenigvuldigen in de teller-noemernotatie gebeurt alleen nog in groep 7 en 8 van de basisschool. De breuk van alle dag is een kommagetal of een percentage. De Nederlandse grutter waar *weggooien zonde* is, geeft 35% korting. De timmerman meet de hoogte van een deur als één meter vierennegentig en nog wat, of preciezer: 1,943 meter. De uitslag van een schaatswedstrijd gaat in duizendsten van een seconde. Er wordt met kommagetallen gerekend. De kassabon is een optelling van kommagetallen. De vloeroppervlakte van een kamer bereken je door kommagetallen te vermenigvuldigen. Een breuk heeft heel vele namen. Zo is $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$. De waarde van de breuk is niet afhankelijk van de wijze waarop de breuk geschreven wordt. Welke naam men kiest hangt af van de rekencontext waarin de breuk een rol speelt.

Nieuw denkschema

Er is nog iets anders. Rekenen in teller-noemernotatie past niet in het denkschema dat leerlingen hebben opgebouwd. Ze hebben een denkschema gebaseerd op hun ervaringen met gehele getallen: 0, 1, 2, ... Ze vinden het vreemd dat $\frac{1}{2}$ meer is dan $\frac{1}{3}$ terwijl 2 toch kleiner is dan 3. Bij de vermenigvuldiging $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ is het antwoord kleiner dan de deelnemende getallen. Dat past niet bij het denken van de leerling. Leerlingen begrijpen een optelling van gehele getallen als samenvoegen van aantallen. Een vermenigvuldiging van gehele getallen is een herhaalde optelling: $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$. Dat denkschema werkt niet bij breuken in een teller-noemernotatie. In de vermenigvuldiging $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ herken je geen herhaalde optelling.

Trucjes

Kortom wanneer je met breuken in teller-noemernotatie gaat rekenen, dan botst het bestaande denkschema over gehele getallen met het nieuwe denkschema over breuken. Aan leerlingen wordt niet duidelijk gemaakt dat optellen en vermenigvuldigen met breuken in de teller-noemernotatie een nieuw soort optellen en vermenigvuldigen is. De leerlingen zullen een paar trucjes leren (die ze later weer zullen vergeten). 'Gelijknamig maken' en 'delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde' zijn recepten die niet lang stand houden. Zo blijft het breukbegrip voor veel leerlingen een onbegrijpelijk iets. Werken met kommagetallen vraagt om een uitbreiding van een denkschema. Werken met breuken in teller-noemer notatie vraagt om een nieuw denkschema. Dat laatste is moeilijk voor de leerlingen en tijdrovend voor de leraar.

Ook in het voorgezet onderwijs is de breukstreep een onnodig instrument. We kunnen rekenen met negatieve machten, Zo kun je $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ook schrijven als $f(x) = x + x^{-1}$. Herschrijven tot $f(x) = (x^2 + 1)\cdot x^{-1}$ heet in verouderde breukentaal: gelijknamig maken. De afgeleide van $f(x) = x + x^{-1}$ wordt: $f'(x) = 1 - x^{-2} = (x^2 - 1)\cdot x^{-2}$. Een rekenregel om een quotiënt te differentiëren kan ook in de prullenbak: $(fg^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = (f'g - fg')\cdot g^{-2}$.

Dus...

Om het curriculum te laten aansluiten bij toekomstige ontwikkelingen moeten we de breukstreep afschaffen... Breuken in teller-noemernotatie afschaffen en vervangen door kommagetallen zal Simon Stevin (1548 - 1620) veel plezier doen. Hij stelde dit al voor in 1586 in zijn boek *De Thiende De beghinselen der weeghconst.*

Over de auteur

Bertus van Etten is gepensioneerd wiskunde- en vakdidactiekdocent bij de Fontys lerarenopleiding in Tilburg.
E-mailadres: *n.van.etten@upcmail.nl*

Wereldwiskunde Fonds

Coronacrisis in Kenia

Monica Woldinga

Africa Family Foundation

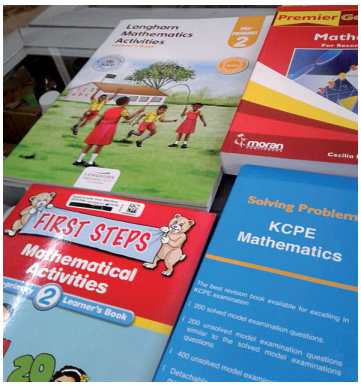
In de provincie Kisumu, nabij het Victoriameer, ligt het district Seme, waar de *Africa Family Foundation* op diverse manieren het onderwijs aldaar ondersteunt. Het Wereldwiskunde Fonds deed mee in twee deelprojecten: de opleiding van student Enos Nyamor tot wiskundeleraar, en de financiering van wiskundeboeken en whiteboards voor de schoolkinderen van Seme.

http://africafamily.nl

Enos Nyamor

Opleiding tot wiskundeleraar

Uit de nieuwsbrief van de *Africa Family Foundation:*
Enos heeft met goed gevolg zijn bachelor afgesloten! Feest natuurlijk, zoals jullie ook kunnen zien op de foto. Hij is daarmee een prachtig voorbeeld voor de andere kinderen in het dorp. Veel van de kinderen krijgen in hun opvoeding maar beperkt het belang van onderwijs mee. Met Enos gaat het nu super goed en hij heeft een mooie toekomst in het vooruitzicht. Het is mooi om te zien hoe graag hij dit wil uitdragen en hoe hij nu al in staat is de andere kinderen vooruit te helpen. Hij is een inspiratie voor de jongere kinderen maar zeker ook voor ons!
Begin 2020 is Enos aan zijn masteropleiding begonnen. De coronacrisis begon kort na de start van zijn opleiding. Voor de studenten werden onlinelessen georganiseerd. Veel studenten hebben hier geen gebruik van kunnen maken omdat ze niet de beschikking hadden over een laptop maar Enos gelukkig wel. Vanaf oktober mochten de studenten weer naar de universiteit toe en volgen zij dus weer fysiek college. In januari 2021 kon Enos beginnen aan het tweede jaar van zijn master!
Enos: "I want to say I'm fine, the laptop is good, I use it in meetings and online classes and also doing researches online. I'm so happy and I would be more happy to also help the program support many more vulnerable people in future. The computer has been of immeasurable help to me. Thank you so much."



Wiskundeboeken aangeschaft met steun van het WWF

Wiskundeboeken

De wiskundeboeken voor de Seme-kinderen werden goed gebruikt. Kinderen mochten de wiskundeboeken lenen om thuis verder te leren na de waarschuwing van Enos: 'don't get dirt on them!'
Dat was tot de coronacrisis uitbrak en de scholen sloten. Nu zijn de kinderen dus verstoken van onderwijs, krijgen ze niet hun dagelijkse maaltijd op school, en zitten de hele dag thuis. Sommigen van hen komen in de sloppenwijken in aanraking met criminaliteit. Meer dan anders komen er tienerzwangerschappen voor. Voor zover mogelijk wordt geprobeerd contact met de kinderen te houden en een aantal studiecentra in te richten. *Africa Family* probeert om de kinderen uit het project te voorzien van voedselpakketten, zodat ze in ieder geval elke dag iets te eten hebben. Ook de overheid deelt voedsel uit, maar dat zijn massale bijeenkomsten met kans op besmetting en er zijn ook zelfs mensen in de drukte vertrapt.
Op 4 januari zijn de scholen in Kenia weer opengegaan en kan worden bekeken welke schade is aangericht aan de toekomst van de kinderen.

Over de auteur

Monica Woldinga is medewerker pr en voorzitter van de werkgroep Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: *mwoldinga@xs4all.nl*

Vastgeroest

'Ik leer het nooit'!

Ab van der Roest

Toetsvragen maken

Herken je dit? Je maakt een toets, maar je wilt niet alleen maar letterlijk terugvragen. Je stelt dus vragen waarbij je van tevoren denkt: 'Hier ga ik commentaar op krijgen.' Maar nadat de klas de toets gemaakt heeft blijft het commentaar achterwege en bij het nakijken wordt zo'n vraag door een groot deel van de groep goed gemaakt. Je vraagt je dan af, of de vraag toch goed was, of toch te veel herkenbaar. Maar, gelukkig heeft niemand schade geleden. Het tegenovergestelde komt ook veel voor. Je stelt een vraag op de toets waarvan je verwacht dat leerlingen die meteen en zonder veel nadenken kunnen beantwoorden. Je hebt de stof behandeld, de leerlingen hebben ermee geoefend en je beschouwt de vraag als bijna uit de categorie reproduceren, maar zeker als toepassen in een bekende situatie. Maar bij het corrigeren van de toets blijken de meeste leerlingen allerlei wegen in te slaan die jij niet van tevoren bedacht hebt. Niet zo erg, maar bijna geen enkele leerling komt tot het goede antwoord en na deze vraag worden de resterende vragen onder grote tijdsdruk gemaakt. Eigenlijk is de toets een beetje verknoeid door die ene vraag en je vraagt je vertwijfeld af of je ooit zult leren om de toetsvragen goed in te schatten.

'Ik leer het nooit!'

Na bijna veertig jaar ervaring kan ik nog steeds niet goed inschatten of een toets zulke vragen bevat. Bij de laatste toetsweek was er weer zo'n toets, die me de verzuchting bezorgde: 'Ik leer het nooit!'.
Vwo-5 wiskunde B. In de methode *Getal & Ruimte* wordt behandeld dat de lijnen l: $ax + by = c$ en k: $px + qy = r$ samenvallen als $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$. Ik probeer de leerlingen bij dit stukje stof op het spoor te krijgen dat dit niets nieuws is, maar dat we dat allang weten. Want uitgaande van 'evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt' is meteen in te zien dat $-\frac{a}{b}=-\frac{p}{q}$ en dat is eenvoudig te herleiden tot $\frac{a}{p}=\frac{b}{q}$. Door deze evenredigheid en 'het gelijk zijn' van de vergelijkingen moet die evenredigheid ook gelden voor c en r. Mijn advies aan de leerlingen is dan om deze regel niet apart te gaan leren (denk aan onze beperkte geheugencapaciteit), maar om te gebruiken wat al lang in ons systeem aanwezig is. Dan de toetsvraag die letterlijk uit de toetsbundel komt:

> De lijn k snijdt de assen in de punten $A(p + 2, 0)$ en $B(0, 2p - 2)$.
> De lijn l snijdt de assen in de punten $C(2p, 0)$ en $D(0, q + 1)$.
> 4p Bereken algebraïsch voor welke p en q de lijnen samenvallen

Juist omdat ik de leerlingen geadviseerd heb niet meteen naar de in het boek gehanteerde formule te grijpen, maar eerst eens goed na te denken en te vertrouwen op veel eerder opgedane kennis, verwachtte ik het eenvoudige antwoord: $p + 2 = 2p$ en $2p - 2 = q + 1$ want als lijnen samenvallen hebben ze dezelfde snijpunten met de x-as en y-as.
Helaas!
Alle leerlingen schreven $k: \frac{x}{p+2}+\frac{y}{2p-2}=1$ en $l: \frac{x}{2p}+\frac{y}{q+1}=1$ op. Deze vergelijkingen werden herleid tot

k: $(2p - 2)x + (p + 2)y = 2p^2 + 2p - 4$ en
l: $(q + 1)x + 2py = 2pq + 2p$ waaruit de volgende evenredigheid verscheen:

$$\frac{2p-2}{q+1}=\frac{p+2}{2p}=\frac{2p^2+2p-4}{2pq+2p}.$$

En de oplossing van deze evenredigheid was na veel dwalen voor bijna niemand te doen. Die lastige p en q zaten elkaar in de weg.

'Het is zo simpel'

De makkelijkste conclusie zou zijn dat die leerlingen zo dom zijn, maar dat is te kort door de bocht. Daarom mijn verzuchting dat ik het nooit leer. Maar er kwam toch nog een staartje aan dit verhaal. Bij de bespreking van de toets knalde het opeens door de klas: 'Het is zo simpel, wat ben ik stom.' Ik was het niet die dat riep....

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Puzzel 96-6

Damstenen op een rijtje

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel is een variatie op een oude IMO-opgave. Er worden rijtjes gemaakt van enen en nullen (binaire rijtjes) waarbij het verboden is dat er twee enen op onderlinge afstand 2 staan, dus geen deelrijtjes 101 of 111.
Het aantal mogelijke binaire rijtjes is een functie $f(n)$, waarbij n de lengte is van de rijtjes. Met bovenstaand verbod (geen deelrijtjes 111 of 101) blijkt dat $f(n)$ kan worden uitgedrukt in een recursieve formule, maar ook in Fibonacci-getallen. En omdat er voor Fibonacci-getallen ook een directe formule bestaat (formule van Binet), kan $f(n)$ dan ook direct worden berekend als functie van n.

Wij maakten een puzzel met andere verboden deelrijtjes en kozen voorbeelden waar soms ook een directe formule mogelijk is. Om het wat recreatiever te maken gebruiken we rijtjes van damstenen. We noemen die rijtjes damrijtjes. Die kun je noteren als bijvoorbeeld zzwzwwz...., maar je bent natuurlijk vrij om het op binaire rijtjes te houden.
Merk op dat we twee rijtjes die elkaars spiegelbeeld zijn als twee verschillende rijtjes tellen. Bijvoorbeeld zzzzw en wzzzz zijn twee verschillende rijtjes. Het is wellicht verrassend dat sommige functies $f(n)$ harder groeien dan andere, ook al lijken de verboden deelrijtjes op elkaar. Dus behalve de opdrachten nog iets om over na te denken?

Er zijn steeds drie niveaus om de vragen op te lossen. Alle opgaven zijn daarom in onderstaande vorm:

Gegeven een verbod op bepaalde deelrijtjes. Onderzoek hoeveel verschillende damrijtjes van gegeven lengte waar die verboden deelrijtjes niet in voorkomen er bestaan.

a. Bepaal $f(n)$ voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.
b. Geef een vermoeden van een recursieve formule, of een gemengde formule, dus bijvoorbeeld $f(n) = f(n - 3) + n + 2$ en als dat kan ook een directe formule in n.
c. Bewijs een van de formules die je hebt gevonden bij onderdeel b.

Merk op dat er vaak meerdere verschillende recursieve formules mogelijk zijn, zoals bijvoorbeeld de Fibonacci rij:
$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$ (met $F(0) = 0$ en $F(1) = 1$)
of
$F(n) = 2F(n - 1) - F(n - 3)$ (met $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ en $F(2) = 1$)

Als het aantal toegestane damrijtjes met lengte n een functie is van Fibonacci-getallen, dan hoef je de bijbehorende directe formule niet te geven. Een voorbeeld: Damrijtjes waarin geen deelrijtjes zz mogen voorkomen zijn wellicht bekend: daar komt de rij $F(n)$ van Fibonacci uitrollen: $F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$ (met $F(1) = F(2)=1$).
Het kan soms handig zijn om voor een gegeven n de toegestane damrijtjes te verdelen in groepen, afhankelijk van de kleur van de laatste stenen of steen.
In opgaven 1 en 2 zijn er twee verboden rijtjes die dus geen van beide mogen voorkomen. Bij opgave 1 mag je kiezen uit (I) of (II). Je krijgt dus het volle aantal punten als je één van de twee uitwerkt.

Opgave 1: Geef voor (I) of (II) antwoord op bovengenoemde onderdelen a, b en c:
(I): verboden deelrijtjes zzw én wwz.
(II): verboden deelrijtjes zzw én wzw.

Als je toch opgave (I) én opgave (II) hebt gemaakt (hoeft niet) dan zie je dat ze beide dezelfde functie $f(n)$ opleveren. Er valt daar dus nog over na te denken waarom dat zo is.

Opgave 2: Idem met verboden deelrijtjes zzw én wzz.

Opgave 3: Idem met verboden deelrijtje met k keer een z achter elkaar. Voor onderdeel a geldt $k = 3$, dus met verbod op deelrijtje zzz, maar bij onderdelen b en c zoeken we een algemeen antwoord voor elke k.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder.
Inzendingen moeten uiterlijk op 23 juni 2021 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 96-4:
vakbladeuclides.nl/966puzzel
Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Ben Groot van harte met de ladderprijs.
De top 10 van de ladderstand t/m puzzel 96-2
staat op pagina 46. >

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2021

Vr 24/09

LANDELIJK
Onderwijs meets Onderzoek
organisatie: NVvW

Za 02/10

ONLINE
Symposium Visies op wiskundeonderwijs
organisatie: werkgroep Geschiedenis (NVvW)

Za 06/11

JAARVERGADERING EN STUDIEDAG
De jaardag van de NVvW zal dit jaar hopelijk live plaats kunnen vinden, maar zal in elk geval doorgaan op 6 november organisatie: NVvW

Top 10 ladderstand t/m puzzel 96-2

1	B. Groot	147
2	J. Remijn	145
3	H. Huisman	117
4	M. Woldinga	115
5	F. Göbel	114
6	G. Bouwhuis	99
7	S. Zondervan	93
8	J. Meerhof	84
9	H. Bakker	72
10	D. Dopheide	62

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 96

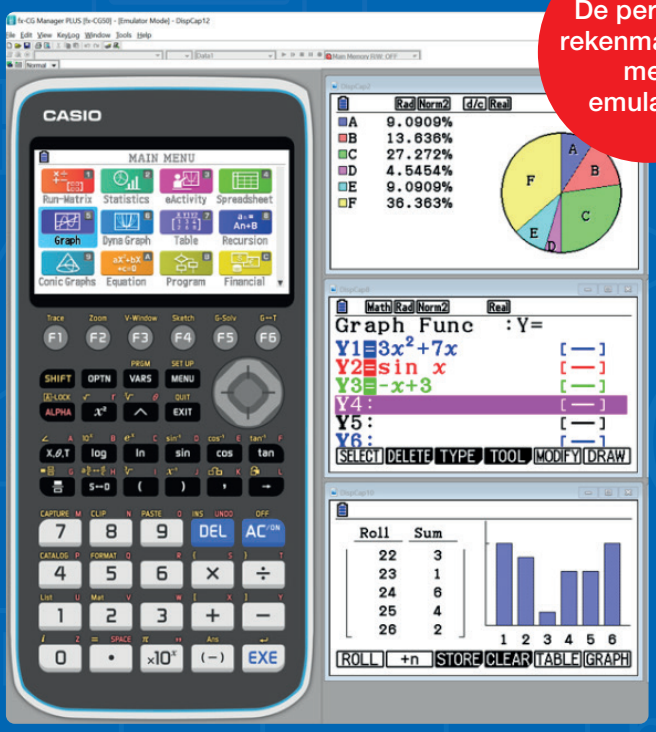
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	23 juni 2021	26 april 2021

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

Wat past bij jou?

	MODERNE WISKUNDE	GETAL & RUIMTE
Didactiek	- Ontdek wiskunde vanuit de praktijk - Oriënterende opdrachten - Kernachtige theorie	- Uitvoerige theorie en instructie - Veel en gericht oefenen
Leerlinggericht	Accent op ontwikkeling van wiskundig inzicht en begrip.	Accent op ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden.
Structuur paragraaf	1 les = 1 paragraaf	Paragraaf in lessen indelen naar eigen inzicht.
Prijs (FLEX)	€ 32,50 per deel	€ 38 per deel

Digitale omgeving

Opdrachten met feedback	V	V
Oefentoetsen met studieadvies	V	V
E-books en uitwerkingen	V	V
Online statistiekprogramma	V	
Excelaanpak van statistiek		V

+

FLEX

Eigen boek waarin je mag schrijven	V	V
Digitale licentie	V	V
Hulpboek geïntegreerd	V	
Werkbladen geïntegreerd		V

Zelf beoordelen? Scan de code!

Meer informatie vind je op **noordhoff.nl/voortgezet-onderwijs/methoden/wiskunde**

Noordhoff

Brengt je verder