Olympiadepuzzel

Euclides 96 nummer 3

Getallenrij

Opgave

De getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ voldoet aan $a_1 = 3^{2021}$, $a_2 = 3^{2021} + 3^{2020}$ en $9a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$ voor alle positieve gehele getallen n. Wat is het kleinste gehele getal dat in deze rij voorkomt?

Uitwerking

We zien dat $a_1 = 3^{2021}$, $a_2 = 4 \cdot 3^{2020}$, $a_3 = 7 \cdot 3^{2019}$ en $a_4 = 10 \cdot 3^{2018}$. We vermoeden daarom dat voor alle positieve gehele n geldt dat $a_n = (3n-2) \cdot 3^{2022-n}$. Dat kunnen we als volgt bewijzen.

Stel dat het vermoeden geldt voor twee opeenvolgende getallen, dus $a_n = (3n-2) \cdot 3^{2022-n}$ en $a_{n+1} = (3n+1) \cdot 3^{2021-n}$. Dan is

$$\begin{aligned}
9a_{n+2} &= 6a_{n+1} - a_n \\
&= 6 \cdot (3n+1) \cdot 3^{2021-n} - (3n-2) \cdot 3^{2022-n} \\
&= (6 \cdot (3n+1) - 3 \cdot (3n-2)) \cdot 3^{2021-n} \\
&= (9n+12) \cdot 3^{2021-n} \\
&= 9 \cdot (3n+4) \cdot 3^{2020-n}
\end{aligned}$$

dus $a_{n+2} = (3n+4) \cdot 3^{2020-n}$. Als het vermoeden klopt voor twee opeenvolgende getallen a_n en a_{n+1}, dan klopt het dus ook voor het volgende getal a_{n+2}. Omdat $a_1 = 3^{2021} = (3 \cdot 1 - 2) \cdot 3^{2022-1}$ en $a_2 = 4 \cdot 3^{2020} = (3 \cdot 2 - 2) \cdot 3^{2022-2}$, klopt het vermoeden voor alle n.

De factor $3n-2$ is voor geen enkele gehele n deelbaar door 3. Daarom is $a_n = (3n-2) \cdot 3^{2022-n}$ alleen geheel als 3^{2022-n} geheel is, ofwel $n \leqslant 2022$. De gehele getallen in de rij zijn daarom $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$.

Daarnaast geldt voor alle $n \geqslant 2$ dat $a_{n+1} < a_n$. Immers, als $n \geqslant 2$, dan is $7 < 6n$ zodat $3n+1 < 9n-6 = 3 \cdot (3n-2)$ en $(3n+1) \cdot 3^{2021-n} < (3n-2) \cdot 3^{2022-n}$.

De rij $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ is dus dalend vanaf $n = 2$. Het kleinste gehele getal is daarom a_1 of a_{2022}. Omdat $a_1 = 3^{2021}$ en $a_{2022} = 6064$, is het kleinste gehele getal in de rij 6064.

Inzenders met de juiste oplossing

Rini van Bruchem, Jan van Doorn, Gé Groenwegen, Hans Linders, Gerhard Meinen, Jos Remijn, Lieke de Rooij, Matthijs Schukking, Monica Woldinga, Sjoerd Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Lieke de Rooij