EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Het beoordelen van examens vmbo wiskunde

Verbeter het inzicht van leerlingen in vergelijkingen

Wiskundige denkactiviteiten in de examens

Reken-wiskundemethodes voor het basisonderwijs

Toetsen zonder toezicht

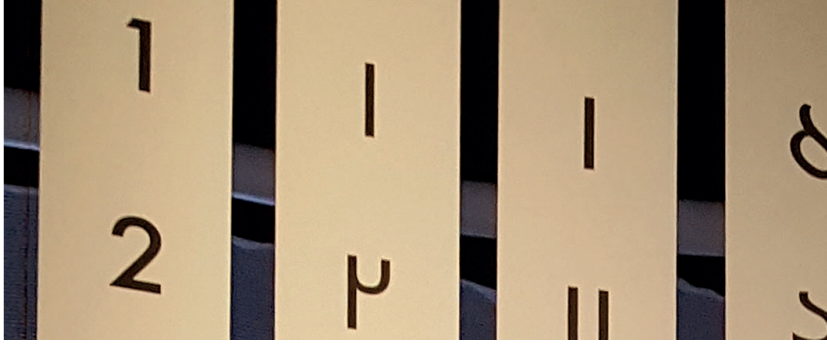
NR.5

JAARGANG 96 - MAART 2021

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR5



IN DIT NUMMER

'HET IS GOED ALS HET GOED IS EN VOLDOENDE IS ONDERBOUWD 4
HET BEOORDELEN VAN EXAMENS VMBO WISKUNDE
Madeleine Vliegenthart
Ingeborg Riedijk

HOE GEEF JE LES OVER...? 10
Samenwerkende Lerarenopleidingen Wiskunde

VERGELIJKINGEN: HERKENBAAR MET TAAL = CRUCIAAL 14
Johan Leurgans

WIS EN WAARACHTIG 17

EEN RECURSIEVE FORMULE EN KONIJNEN MET UITGESTELDE KINDERWENS 18
Simon Biesheuvel

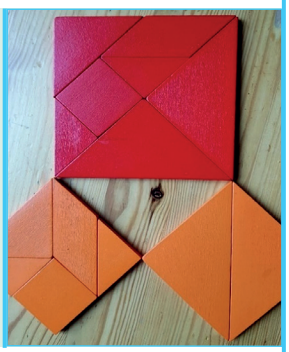
WISKUNDIGE DENKACTIVITEITEN IN DE EXAMENS 20
Irene van Stiphout
Ruud Stolwijk

TOETSEN ZONDER TOEZICHT 24
Jack Schilder

'WE DROMEN EN DOEN ONS BEST ONZE DROMEN TE REALISEREN' 28
Desiree van den Bogaart,
Linda Schouten

HET FIZIER GERICHT OP... 32
REKEN-WISKUNDEMETHODES VOOR HET BASISONDERWIJS
Marc van Zanten

UITDAGENDE PROBLEMEN 34
TANGRAM EN DE COSINUSREGEL
Jacques Jansen



WITJE: BESLISSEN DOOR STEMMEN 37

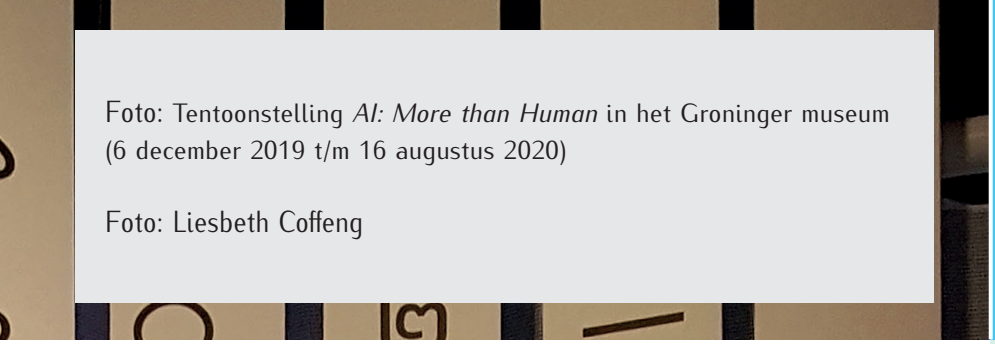


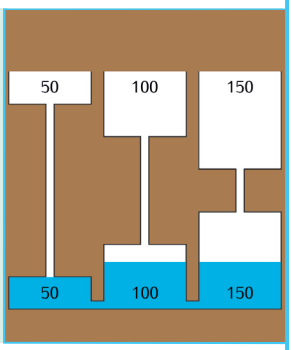
Foto: Tentoonstelling *AI: More than Human* in het Groninger museum (6 december 2019 t/m 16 augustus 2020)

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

MR-VEELHOEKEN
Jens de Groot
Herman Bloem
38

SPELTHEORIE: VAN STRATEGISCH BESLISSEN TOT 'EERLIJKE' OPLOSSINGEN.
VERSLAG VAN DE VAKANTIECURSUS 2020
Erik-Jan van Gelderen
42



PUZZEL
Esther Bod
45

SERVICEPAGINA
46

Kort vooraf

De lente komt eraan en hopelijk wordt dat de periode waarin we onze aandacht kunnen verschuiven van de R-factor naar de N-term. Als de examens doorgaan, dan is het spannend om te zien of de resultaten merk- en meetbaar verschillen met die van voorafgaande jaren. Vooruitlopend op de examens bevat deze *Euclides* een bijdrage van het CvTE (in samenwerking met Cito en NVvW) over het nakijken en beoordelen van de vmbo-examens.
Pas afgestuurde collega's staan in de lente van hun carrière. Velen van ons zullen didactisch zijn 'grootgebracht' met de boeken die bekend staan onder de naam APS-bundels, geschreven door de Samenwerkende Lerarenopleidingen (SLW). Informatie over de SLW en de nieuwe meetkundebundel vind je in het artikel 'Hoe geef je les over ..?'
Johan Leurgans verwerkte een van de vakdidactiekopdrachten uit zijn docentenopleiding tot een artikel over het oplossen van vergelijkingen. Inmiddels is hij afgestudeerd en kunnen we hem verwelkomen 'in het veld'.
Ik hoop dat wij als ervaren docenten iets kunnen leren van de frisse blik van onze aanstormende talenten.
Ook onder vluchtelingen zijn er toekomstige collega's. De werkgroep Welkom van de NVvW is een half jaar geleden opgericht om statushouders te helpen hun beroep als wiskundedocent weer op te pakken. In deze *Euclides* de eerste bijdrage van de werkgroep Welkom over de ervaringen van twee wiskundedocenten uit Syrië en Gaza. Graag wil ik wijzen op de oproep voor buddies voor statushouders aan het eind van dit artikel.

Tom Goris

Madeleine Vliegenthart, Ingeborg Riedijk

Het beoordelen van examens vmbo wiskunde

'Het is goed als het goed is en voldoende onderbouwd'

Hoe is het correctievoorschrift opgebouwd en hoe is het bedoeld? Madeleine Vliegenthart en Ingeborg Riedijk van het *College voor Toetsen en Examens* (CvTE) geven hier meer duidelijkheid over.

Inleiding

Bij een centraal examen vmbo wiskunde maken leerlingen dezelfde vragen. De antwoorden en vooral de uitwerkingen die de leerlingen opschrijven, zijn echter niet allemaal hetzelfde. Wiskunde is immers een vak waarbij veel wegen naar het goede antwoord kunnen leiden. Het is onmogelijk om al deze wegen in het correctievoorschrift (cv) op te nemen. En het is ook niet nodig. Docenten zijn tenslotte professionals en het doel van het centrale examen wiskunde vmbo is dat leerlingen kunnen laten zien dat zij wiskundige vragen op een juiste manier kunnen oplossen. De gedachte dat zij precies elke stap opschrijven die in het cv staat, is niet juist. Vandaar de titel van dit artikel: 'Het is goed als het goed is en voldoende onderbouwd'. Maar wat als het antwoord van de leerling niet goed of niet voldoende onderbouwd is? Hoe beoordeel je als corrector zo'n leerlingantwoord? De oplossing lijkt simpel: dat staat in het cv. Het cv is tenslotte altijd bindend. De praktijk is echter weerbarstiger. Het cv wordt niet altijd door iedereen hetzelfde geïnterpreteerd en leerlingantwoorden worden niet altijd hetzelfde beoordeeld door verschillende correctoren. Dat merken we onder meer aan de discussies op het forum van de NVvW, de besloten en beveiligde fora voor de digitale centrale examens, vragen die via de *Examenlijn* worden gesteld en discussies tussen eerste en tweede correctoren.[1]

Daarom willen we in dit artikel toelichten hoe het cv bij de centrale examens wiskunde vmbo is opgebouwd en bedoeld. Ook willen we meer duidelijkheid geven over het toepassen van de algemene en vakspecifieke regels uit het cv. We hebben hierbij niet de illusie dat er nooit meer onduidelijkheid zal bestaan bij alle antwoorden die leerlingen kunnen geven.

De opbouw van het cv

Een cv bestaat uit algemene regels, vakspecifieke regels en beoordelingsmodellen per vraag. Voor de centraal schriftelijke examens (cse's)[2] en de digitale centrale examens zijn de algemene regels en de vakspecifieke regels grotendeels gelijk.[3]

In feite zou een cv met alleen het juiste eindantwoord en het maximaal te behalen aantal scorepunten per vraag voldoende kunnen zijn om een examen te kunnen corrigeren. Klopt het antwoord van de leerling en kun je als corrector zien welke juiste oplossingsstrategie de leerling heeft gebruikt, dan krijgt de leerling het maximale aantal scorepunten.

Maar wat nu als een leerling een gedeeltelijk juist antwoord geeft, hoeveel scorepunten moet je daar als corrector aan toekennen? Om dat te ondervangen staat in het cv per vraag een beoordelingsmodel dat gebaseerd is op een bepaalde oplossingsstrategie. Dit is de oplossingsstrategie waarvan de vakdocenten uit de constructiegroep van Cito en de vaststellingscommissie wiskunde vmbo van het CvTE denken dat die het meest gebruikt zal worden door leerlingen.[4] Het beoordelingsmodel is onderverdeeld in tussenstappen die tot het juiste eindantwoord leiden en per stap wordt aangegeven wat het maximale aantal scorepunten is dat voor die stap mag worden toegekend.

Een volledig juist beantwoorde vraag?

Als een leerling een vraag volledig juist beantwoordt, dan ben je als corrector snel klaar: deze leerling krijgt voor deze vraag het maximum aantal scorepunten. De onderverdeling van de scorepunten in het cv is dan niet van belang. Dit volgt uit de algemene regels van het cv en geldt dus niet alleen bij wiskunde. [5]

Maar let wel, een volledig juist beantwoorde vraag bestaat bij wiskunde meestal niet alleen uit een juist eindantwoord. In de algemene regels van het cv [6] staat dat het gegeven antwoord moet voldoen aan de criteria die in de vraag gesteld worden, zoals het antwoord onderbouwen met een juiste berekening, verklaring of uitleg. Ontbreekt de gevraagde berekening, verklaring of uitleg of is deze foutief? Dan krijgt de leerling 0 scorepunten. Het feit dat het eindantwoord van de leerling hetzelfde is als in het beoordelingsmodel doet dan niet ter zake.
Ter illustratie de eerste twee vragen uit het centraal examen GL/TL 2019-1, zie figuur 1.

Paddenstoelen

De vliegenzwam is een rode paddenstoel met witte stippen.

Uit tellingen blijkt dat het aantal vliegenzwammen in Nederland snel afneemt. In 1999 werden 110 000 vliegenzwammen geteld. In 2015 was dat aantal nog maar 41 000.

3p **1** Bereken met hoeveel procent het aantal getelde vliegenzwammen in 2015 is afgenomen ten opzichte van 1999. Schrijf je berekening op.

Volgens deskundigen neemt het aantal vliegenzwammen exponentieel af. De formule die hierbij hoort is

$a = 110\,000 \times 0{,}94^t$

Hierin is a het aantal vliegenzwammen en t het aantal jaren na 1999.

1p **2** Met hoeveel procent neemt het aantal vliegenzwammen volgens deze formule per jaar af?

figuur 1

Bij vraag 1 wordt een berekening gevraagd en moet een leerling zijn antwoord dus onderbouwen met een juiste berekening. Bij vraag 2 staat alleen 'Hoeveel...'. Alleen het eindantwoord is hier dus voldoende. Er wordt niet om een verklaring van het antwoord gevraagd.
Of een leerling het antwoord voldoende onderbouwd heeft, is en blijft een grijs gebied. Een vuistregel die hierbij gehanteerd kan worden is of je als corrector kunt zien welke oplossingsstrategie een leerling gebruikt heeft, of deze strategie juist is en of de leerling deze strategie goed heeft toegepast. Het is dus niet nodig dat een leerling alle tussenstappen die in het beoordelingsmodel staan opschrijft, zolang maar duidelijk genoeg is hoe een leerling aan het antwoord komt.
Terug naar vraag 1 die hierboven staat.

Een leerling geeft het volgende antwoord:

69 000 : 110 000 × 100 = 62,7

Deze leerling geeft een correct eindantwoord en aan de berekening is te zien dat de leerling een goede oplossingsstrategie heeft gebruikt en ook juist heeft toegepast, ook al heeft hij niet expliciet opgeschreven hoe hij aan het getal 69 000 komt. Deze leerling krijgt het maximale aantal scorepunten.

1 maximumscore 3
- 110 000 – 41 000 = 69 000 (vliegenzwammen)
- 69 000 : 110 000 × 100(%)
- Het antwoord: 63(%) (of nauwkeuriger)

2 maximumscore 1
6(%)

figuur 2

Niet in alle gevallen hoeven alle tussenstappen uit het beoordelingsmodel, zie figuur 2, opgeschreven te worden. In dit geval gaat het om een eenvoudige rekenstap en kan het niet anders dan dat de leerling aan 69 000 komt door 'oud – nieuw' ofwel '110 000 – 41 000' uit te rekenen.
Als er enige twijfel bestaat over de wijze waarop een leerling aan een (tussen)antwoord komt, dan verdient de leerling het maximale aantal scorepunten niet en kijkt de corrector naar het beoordelingsmodel om te bepalen hoeveel scorepunten een leerling verdient. Of een leerling alle scorepunten verdient bij de gevraagde onderbouwing is dus altijd afhankelijk van de vraag die gesteld is en wat een leerling heeft opgeschreven. Het is aan de professionaliteit van de corrector(en) om te beoordelen of onweerlegbaar vastgesteld kan worden dat de leerling de juiste strategie heeft gebruikt of dat de leerling ook een andere, niet juiste strategie gevolgd kan hebben, het (tussen)antwoord gegokt kan hebben of een verkeerde gedachtegang gehad kan hebben.

Een andere leerling geeft het volgende antwoord:

63%

Het eindantwoord is wel correct, maar de gevraagde berekening ontbreekt. Deze leerling krijgt 0 scorepunten.

Een niet juist beantwoorde vraag?

Zoals eerder opgemerkt is de onderverdeling in het beoordelingsmodel bedoeld voor het corrigeren van antwoorden >

die niet helemaal juist zijn. Pas als een eindantwoord niet klopt, onvoldoende onderbouwd is of een leerling ergens tijdens het beantwoorden van de vraag afhaakt, dan wordt de onderverdeling van de scorepunten van belang. De onderverdeling van de scorepunten geeft aan hoeveel scorepunten de leerling verdient. Dit klinkt in theorie heel simpel. In de praktijk merken we dat er interpretatieverschillen zijn die tot andere toekenningen van scorepunten kunnen leiden. We bespreken hieronder een aantal uitgangspunten. Deze uitgangspunten zijn gebaseerd op de algemene en vakspecifieke regels uit het cv.

1. Een kleine (reken)fout
Als een leerling ergens een kleine (reken)fout maakt, dan wordt er, conform vakspecifieke regel 1, 1 scorepunt in mindering gebracht. Het maakt dan niet uit of een leerling de strategie uit het cv gebruikt of een andere juiste strategie. Ter illustratie vraag 9 uit het centraal examen GL/TL 2019-1, zie figuur 3.

Vanaf 1970 benaderen we het aantal boeken in alle bibliotheken samen in Nederland met de formule

$A = -40t^2 + 2160t + 15\,840$

Hierin is A het aantal boeken ($\times$ 1000) en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1970.

3p **9** Laat met een berekening zien dat er volgens de formule op 1 januari 1988 afgerond 42 miljoen boeken waren.

figuur 3

Hierbij hoort dit beoordelingsmodel, zie figuur 4.

9 maximumscore 3
- t is (1988 – 1970 =) 18 (jaren) 1
- $A = (-40 \times 18^2 + 2160 \times 18 + 15\,840 =) 41\,760$ 1
- Dit zijn 41 760 $\times$ 1000 boeken (en dit is afgerond 42 miljoen boeken) 1

figuur 4

Een leerling geeft het volgende antwoord:

$A = -40 \times 19^2 + 2160 \times 19 + 15\,840 = 42440$
42440 x 1000 = 42.440.000 en dat is afgerond 42 miljoen boeken.

Deze leerling heeft bij het berekenen van t een rekenfout gemaakt en daardoor voor t de waarde 19 ingevuld. Voor deze rekenfout wordt een scorepunt in mindering gebracht. Deze leerling krijgt voor dit antwoord dus 2 scorepunten. Bij sommige vragen staat achter het eindantwoord 'of nauwkeuriger'. Dit is om te voorkomen dat bij elke vraag waar de afronding niet uit de vraagstelling afgeleid kan worden, een afrondinstructie moet worden gegeven waardoor leerlingen onnodige scorepunten kunnen verliezen. Het is echter wel zo dat het eindantwoord *altijd* op de juiste wijze afgerond moet worden.

Stel nu dat in het beoordelingsmodel als eindantwoord 3,34 (of nauwkeuriger) staat en dit een afronding van 3,34379 is. Een leerling geeft als eindantwoord 3,3437. Het getal 3,3437 is dan wel nauwkeuriger dan 3,34 maar is in dit geval niet juist afgerond. Een leerling verliest in dit geval helaas 1 scorepunt vanwege verkeerd afronden.
Een veel gestelde vraag is of een leerling tussentijds mag afronden. In de syllabus staat dat leerlingen moeten weten dat voortijdig afronden (of afkappen) ongewenste gevolgen kan hebben voor een gewenste nauwkeurigheid.
Het is echter niet te zien aan het werk van de leerling of hij een tussenantwoord afgerond of afgekapt heeft opgeschreven maar wel gewoon doorrekent met het niet afgeronde antwoord in de rekenmachine. Daarom is de stelregel dat tussenantwoorden afgerond of afgekapt genoteerd mogen worden. Als corrector kijk je naar het eindantwoord. Als dat juist is, mag de corrector ervan uitgaan dat de leerling niet tussentijds heeft afgerond. Als daarentegen bij een vraag wordt doorgerekend met tussenantwoorden die afgerond of afgekapt zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet afgeronde tussenantwoorden, dan wordt dit gezien als een rekenfout en wordt bij de betreffende vraag 1 scorepunt in mindering gebracht.

In het cv staan achter tussenantwoorden vaak puntjes, bijvoorbeeld 3,28... . Dit doen we om aan te geven dat in het cv niet het hele tussenantwoord staat. We hebben de afgelopen jaren signalen gekregen dat correctoren van leerlingen verwachten dat zij ook puntjes achter een tussenantwoord zetten. Het is echter geenszins noodzakelijk dat leerlingen dit ook doen. Het mag, maar het hoeft niet.

2. Een onvolledige oplossing
Als een leerling ergens afhaakt in een oplossingsproces dat in het cv beschreven wordt, dan wordt de onderverdeling van de scorepunten gebruikt om vast te stellen hoeveel scorepunten een leerling verdient. De onderverdeling is opbouwend en dient dus gelezen te worden als: 'indien je niet verder komt dan hier, krijg je ... scorepunten'. Een leerling geeft het volgende antwoord op vraag 9, zie figuur 3:

t = 18 jaar

Deze leerling komt niet verder dan de eerste stap en verdient 1 scorepunt.
Een ander voorbeeld:

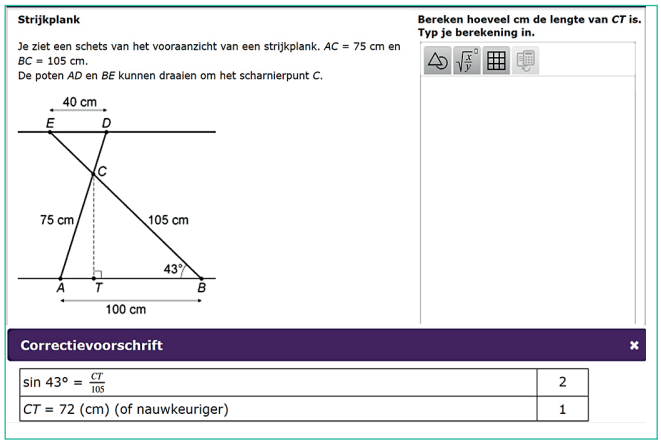
t = 18
$A = -40 \times 18^2 + 2160 \times 18 + 15\,840 = 41760$

Deze leerling voert de eerste twee stappen goed uit, maar mist de laatste stap. Deze leerling verdient 2 scorepunten. Ook als de leerling deze twee stappen combineert zoals in het volgende voorbeeld, krijgt de leerling 2 scorepunten:

$A = -40 \times 18^2 + 2160 \times 18 + 15\,840 = 41760$

Volgt de leerling wel een juiste strategie maar een andere dan in het beoordelingsmodel staat, dan kan de onderverdeling houvast geven om scorepunten toe te kennen analoog aan de onderverdeling in het cv.

3. Een verkeerde oplossingsstrategie
Als een leerling een verkeerde oplossingsstrategie gekozen heeft die niet tot een juist eindantwoord leidt, dan kunnen er geen scorepunten toegekend worden. Hierbij zijn veel voorbeelden te bedenken. We hebben voor twee voorbeelden van leerlingantwoorden gekozen die soms tot discussie tussen correctoren leiden vanwege een stap die volgens het beoordelingsmodel 2 scorepunten waard is. Ter illustratie een vraag uit het digitale examen KB van 2019, zie figuur 5.



figuur 5

Een leerling die hier de cosinus of tangens van 43° berekent, verdient geen scorepunt. Berekent de leerling wel de sinus van 43°, maar rekent hij niet in een rechthoekige driehoek of gebruikt de leerling een verkeerde verhouding, dan krijgt deze leerling ook geen scorepunten. Een leerling geeft het volgende antwoord:

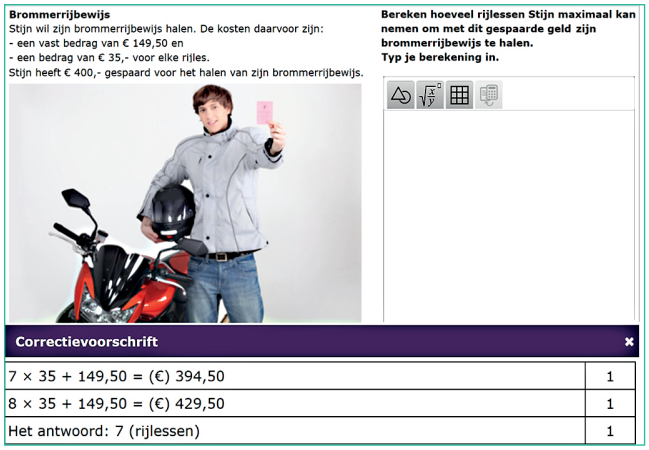
Sin hoek B = overstaande zijde: schuine zijde
Sin 43° = CT : 100
CT = 68 cm

Deze leerling schrijft in de eerste zin dan wel de juiste verhouding voor de sinus op, maar rekent niet in een rechthoekige driehoek. Deze leerling laat niet zien dat hij de juiste strategie op de juiste manier kan toepassen en krijgt 0 scorepunten voor dit antwoord.
Een andere leerling geeft het volgende antwoord:

Sin 43° = 105 : CT
CT = 154 cm

Ook deze leerling laat niet zien dat hij de juiste strategie op de juiste manier kan toepassen en krijgt 0 scorepunten voor dit antwoord.

4. Onderbouwde conclusie
Bij sommige vragen wordt om een conclusie gevraagd. Als een leerling op basis van een verkeerde of onvolledige berekening of redenering een conclusie trekt die niet goed onderbouwd is, dan krijgt de leerling wellicht scorepunten voor een deels juiste berekening maar niet voor de conclusie. Ook niet als de conclusie van de leerling overeenkomt met de conclusie in het beoordelingsmodel. Ter illustratie een vraag uit het digitale centrale examen BB uit 2019, zie figuur 6.



figuur 6

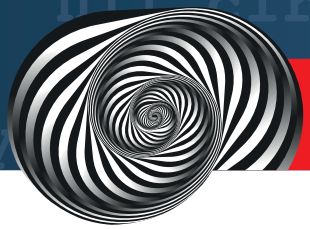
Een leerling kan pas de juiste conclusie trekken als hij aantoont dat 7 lessen minder dan 400 en 8 lessen meer dan 400 euro kost. Stel een leerling heeft het volgende antwoord gegeven:

6 x 35 + 149,50 = 359,50
7 x 35 + 149,50 = 394,50
Stijn kan maximaal 7 rijlessen nemen.

Coderen en kunst maken

Uitdagende prijsvraag voor creatieve leerlingen!

Daag uw leerlingen uit om creatief te zijn met wiskunde! Laat ze meedoen aan de **Texas Instruments prijsvraag Mathe-Magische Kunst**. Algoritmisch denken en coderen kunnen tot magische kunst leiden. Wij zoeken de mooiste optische illusies, creatieve graphics of bijzondere vorm- en kleurcombinaties!



Mathe-Magische Kunst 2021

Wedstrijd in het kort

- Maak kunst via coderen in TI Basic of Python (op handheld of met computersoftware)
- Open voor leerlingen van 14-19 jaar
- Er zijn 4 categorieën en 12 prijzen
- Ook 10 scholen met de meeste deelnemers krijgen een prijs
- Insturen voor **15 april 2021**

python™ TI-Basic

Meld nu aan!

education.ti.com/nl/prijsvraag

»WIN MOOIE PRIJZEN!

ZOALS EEN STEM-PAKKET VOOR SCHOLEN EN EEN PAKKET MET DRONE VOOR LEERLINGEN.

education.ti.com/nederland

TEXAS INSTRUMENTS

©2020 Texas Instruments

Deze leerling verdient voor dit antwoord 1 scorepunt. De eerste berekening is irrelevant voor de conclusie. De tweede berekening is wel relevant voor de conclusie en de leerling verdient daar 1 scorepunt voor. De leerling laat niet met een berekening of in woorden zien dat 8 lessen meer dan 400 euro kosten. Aan dit antwoord kan een corrector niet ziet of de leerling de conclusie op basis van een juiste berekening of beredenering getrokken heeft. De leerling krijgt daarom dan ook géén scorepunten voor de conclusie. Een veel besproken vraag is vraag 11 uit het GL/TL-examen van 2019, zie figuur 7.

Vanaf 1970 benaderen we het aantal boeken in alle bibliotheken samen in Nederland met de formule

$A = -40t^2 + 2160t + 15\,840$

Hierin is A het aantal boeken ($\times$ 1000) en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1970.

4p **11** Op 1 januari van welk jaar was volgens de formule het aantal boeken maximaal? Schrijf je berekening op.

figuur 7

Met het volgende beoordelingsmodel, zie figuur 8.

11	**maximumscore 4**	
•	Invullen van $t = 26$ geeft 44 960 ($\times$ 1000 boeken)	1
•	Invullen van $t = 27$ geeft 45 000 ($\times$ 1000 boeken)	1
•	Invullen van $t = 28$ geeft 44 960 ($\times$ 1000 boeken)	1
•	Het antwoord: (op 1 januari 1970 + 27 is) 1997	1

figuur 8

Bij deze vraag werd expliciet gevraagd naar een jaar waarin het aantal boeken maximaal is. Om dit jaar te kunnen vinden zijn er drie berekeningen nodig. Alleen $t = 26$ en $t = 27$ invullen, toont niet aan dat het maximum op 1 januari 1997 lag. Een leerling die alleen deze berekeningen heeft uitgevoerd en daaruit direct tot het antwoord 1997 kwam, verdient dus 2 scorepunten voor de twee berekeningen en géén scorepunt voor de ten onrechte getrokken conclusie. Als een leerling alleen $t = 26$ en $t = 28$ heeft uitgerekend en aangeeft dat de uitkomsten gelijk zijn, het om een parabool gaat en het maximum dus bij $t = 27$ moet liggen en dan tot de conclusie komt dat het antwoord 1997 moet zijn, verdient wel alle scorepunten. Het eindantwoord is juist en volledig onderbouwd, dus het maximale aantal scorepunten waard. In feite is de onderverdeling van het beoordelingsmodel bij dit antwoord niet relevant.

Tot slot

Met dit artikel hebben we geprobeerd meer duidelijkheid te geven over de opbouw en bedoeling van het cv bij een centraal examen vmbo wiskunde. We zijn ingegaan op het nut en de noodzaak van het beoordelingsmodel, de onderverdeling van de scorepunten en de verantwoordelijkheid van de corrector daarbij. Als een eindantwoord juist is en voldoende onderbouwd dan krijgt de leerling het maximale aantal scorepunten, maar alleen wanneer de corrector uit de onderbouwing van de leerling onweerlegbaar kan vaststellen dat de leerling een juiste strategie heeft gevolgd. Bij twijfel krijgt de leerling niet het maximale aantal scorepunten en kijkt de corrector naar het beoordelingsmodel om te bepalen hoeveel scorepunten een leerling verdient. Ook hebben we aandacht besteed aan kleine (reken)fouten, onvolledige oplossingen, verkeerde oplossingsstrategieën en het onderbouwen van conclusies. We realiseren ons dat dit artikel niet alle mogelijke onduidelijkheden en discussiepunten voor nu en in de toekomst wegneemt. We hopen echter wel dat dit artikel bijdraagt aan de gelijkwaardigheid van de beoordelingen van antwoorden van leerlingen en helpt bij gesprekken tussen eerste en tweede correctoren.

Noten

[1] Bij de digitale centrale examens van 2021 vindt een pilot tweede correctie plaats. Als de pilot goed verloopt, wordt de tweede correctie verplicht.

[2] In het algemene deel van het cv van de CSE's zijn regels opgenomen die niet van toepassing zijn bij de digitale centrale examens zoals het omgaan met meerkeuzevragen en regels die administratief van aard zijn. Inhoudelijk zijn de regels hetzelfde.

[3] Vlak voor de start van de digitale centrale examens worden de algemene regels en de vakspecifieke regels geldend voor dat examenjaar naar de examensecretarissen en de geregistreerde docenten gestuurd.

[4] Als deze docenten van mening zijn dat leerlingen verschillende strategieën zullen gebruiken, wordt er meer dan één oplossingsstrategie opgenomen.

[5] Regel 3.1 en 3.3 bij de CSE's en regel 2.1 en 2.3 bij de digitale centrale examens.

[6] Regel 3.6 bij de CSE's, regel 2.6 bij de digitale centrale examens.

Over de auteurs

Madeleine Vliegenthart is voorzitter vaststellingscommissie wiskunde vmbo en Ingeborg Riedijk is clustermanager exacte vakken vmbo bij het CvTE. E-mailadres: *info@cvte.nl*

Bij het schrijven van dit artikel is ervan uitgegaan dat de centrale examens in 2021 plaatsvinden op de wijze die minister Slob in december in zijn brief aan de Tweede Kamer bekend heeft gemaakt. Dit artikel is tot stand gekomen in samenwerking met de NVvW en Cito.

Hoe geef je les over…?

De wiskundedidactiekbundels van de Samenwerkende Lerarenopleidingen Wiskunde: vrijwel iedereen die de afgelopen kwart eeuw een lerarenopleiding Wiskunde gevolgd heeft kent ze. Onlangs verschenen er twee nieuwe bundels: een revisie van het meetkundeboek en het rekenboek.

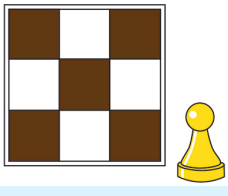
Inleiding

Je gaat een les voorbereiden. Je pakt je methode erbij en direct vraag je je van alles af: Waar gaat deze leerstof over? Waar heeft het mee te maken? Hoe zit dit in de doorlopende leerlijn…, maar ook: hoe maak ik dit stukje leerstof spannend en levendig voor mijn leerlingen?
Als docent is dit dagelijkse kost, voor studenten aan de lerarenopleidingen een nieuwe ervaring. Op de lerarenopleidingen is dan ook regelmatig de centrale vraag: Hoe geef je les over …? In het materiaal dat op de lerarenopleidingen wordt gebruikt, is dat te zien, zoals blijkt uit het volgende fragment.

Hoe geef je les over…. Systematisch tellen?

Tellen is een onderdeel van combinatoriek. Fermat en Pascal definieerden de combinatoriek als de studie van de methoden van tellen van verschillende combinaties uit een verzameling eindige elementen. Combinatoriek speelt een grote rol in de kansrekening als het gaat om het berekenen van het aantal mogelijke en gunstige combinaties van gebeurtenissen. In veel boeken wordt de kansdefinitie van Laplace gebruikt.

Opgave 1
Je gaat een spel spelen.
Je wilt een pionnetje over het bord verschuiven.
De pion moet precies één keer in ieder hokje gestaan hebben.
Je mag je pionnetje alleen horizontaal of verticaal verschuiven.
In welke hokjes kun je beginnen om dit voor elkaar te krijgen?



figuur 1 Een opgave waarin om een redenering wordt gevraagd. Bron: Leergang Wiskunde – Denkactiviteiten bij het subdomein 'Tellen'

Om een goede les te ontwerpen is het belangrijk om vooraf vragen te stellen als: 'Welke wiskundige basis heb je nodig als docent? Welke leerdoelen passen bij het onderwerp systematisch tellen? Wat vinden leerlingen moeilijk aan systematisch tellen? Hoe toets je dit? Welke bronnen en materialen kun je inzetten? Wat is de rol van de docent?'
Deze vragen zijn dan ook de centrale vragen in het nieuw ontwikkelde materiaal voor de lerarenopleidingen. Bovenstaand voorbeeld komt uit het materiaal over de didactiek van het statistiekonderwijs dat door de *Samenwerkende Lerarenopleidingen Wiskunde* (SLW) is ontwikkeld. Het is de eerste volledig digitale bundel uit de serie: te downloaden van de website *Wiskunde & Didactiek* [1] waar ook nog tal van andere bijdragen van de SLW te vinden zijn.

SLW? Ooit van gehoord?

De SLW is een groep van lerarenopleiders van alle tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde in Nederland. Wij schrijven bundels en artikelen over onderdelen van wiskundedidactiek. Misschien ken je onze bundels wel, zie figuur 2, bijvoorbeeld uit je eigen opleiding.
Met deze bundels laten we de studenten nadenken over wat goed wiskundeonderwijs is en betrekken daarbij een grote variëteit aan onderzoek en theorie. Zo hopen we studenten op te leiden tot kritische docenten, die op basis van goede argumenten passende lesmaterialen kiezen, uitdagende en activerende lessen bouwen en zo hun leerlingen helpen om effectief wiskunde te leren.
In de teams van de lerarenopleidingen wordt veel gediscussieerd over de nieuwste onderwijskundige en

figuur 2

vakdidactische inzichten. Binnen de SLW wisselen we ervaringen uit over ons onderwijs in vakdidactiek en werken we aan de herziening van de didactiekbundels en -materialen. Voor alle docenten die nu lesgeven in het vo en mbo, kunnen deze materialen ook een bron van inspiratie zijn. Daarnaast participeren we in de organisatie van de jaarlijkse conferentie ELWIeR [2], voor alle lerarenopleiders wiskunde en rekenen (po, vo en mbo).

Twee nieuwe bundels en een website

Onlangs sloten we een periode van ontwikkeling van twee nieuwe bundels af. Zo verscheen in 2016 de nieuwe bundel *Rekenen* en in 2020 is de meetkundebundel geheel herzien. Ook de hernieuwde aandacht voor statistiek in het voortgezet onderwijs vraagt om goed vakdidactisch doordacht materiaal. De bijdrage daartoe is op *Wiskunde & Didactiek* [1] gepubliceerd. Het nieuwe statistiekmateriaal is te vinden onder het kopje 'Literatuur'.

figuur 3 Meetkunde voor de Lerarenopleiding, Uitgeverij Ten Brink, 2020 [3]

Bij het gebruik van het materiaal op onze lerarenopleidingen komen er ongetwijfeld verbeteringen of nieuwe inzichten aan het licht. Die verwerken we dan weer op de website. Met de website bieden we de mogelijkheid het materiaal voor onze studenten beter toegankelijk te maken en ook nieuwe onderdelen kunnen zo vlot gedeeld worden, zodat het steeds up-to-date blijft. De website is voor iedereen toegankelijk; voor studenten en lerarenopleiders, tweedegraads en eerstegraads docenten en andere belangstellenden.

Om een indruk te geven van de inhoud van het didactische materiaal volgt hieronder een voorbeeld uit de meetkundebundel. In het hoofdstuk 'Hoe geef ik les over ...?' staan voorbeelden en didactische aanwijzingen voor alle meetkundeonderwerpen uit het meetkundecurriculum vmbo, onderbouw h/v en mbo. Daarnaast bevat de bundel overzichten van de leerlijnen, didactische modellen en leertheorieën die passen bij meetkundeonderwijs. Het is een praktijkboek voor wiskundeleraren met een rijke bron aan lesideeën: werken met materiaal, gedifferentieerde opdrachten, wiskundige denkactiviteiten, ...

Hieronder een preview uit hoofdstuk 3.5 over omtrek en oppervlakte.

3.5.5 Welk vakdidactisch handelen past hierbij?

Omdat de begrippen oppervlakte en omtrek op de basisschool zijn aangeleerd, is het belangrijk om de beelden van leerlingen bij deze concepten eerst weer boven water te halen en verder te onderzoeken. Niet alle leerlingen zullen datgene wat op de basisschool aan de orde is geweest begrepen hebben. Werk dus niet (te) snel naar formules toe en benadruk dat de geleerde formules (zoals oppervlakte = lengte × breedte) maar voor één bepaalde vorm geschikt zijn, bijvoorbeeld de rechthoek. Stimuleer bij de berekening van de oppervlakte van driehoeken het gebruik van een rechthoek eromheen, daarmee is het begrip immers opgebouwd. De oppervlakte van de driehoek is de helft van de oppervlakte van een geschikt gekozen rechthoek.

Bij het ontwikkelen van het concept *om*trek is belangrijk om vooral veel *om* de figuur heen te lopen. Hoeveel lengte-eenheden liggen er *om*heen? En bij **op**pervlakte gaat het erom hoeveel (oppervlakte) eenheden liggen er*op*?

>

Omtrek

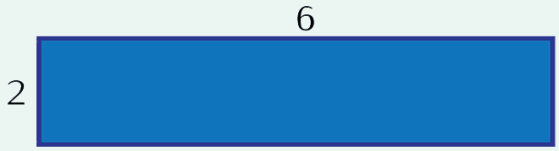
De omtrek van een rechthoek wordt gemeten door de lengtes van alle vier de zijden op te tellen. De vier lijnstukjes moeten dus worden opgemeten. Bij het meten van lengtes (lengte en breedte), wordt geteld hoeveel lengte-eenheidsmaten er op de te meten afstand passen. Leerlingen die dit vaak doen, kunnen zelfstandig tot de conclusie komen, dat je met het opmeten van twee zijden eigenlijk al klaar bent en zij komen dan op *een eigen moment* tot de verkorting: omtrek van een rechthoek =
2 × lengte + 2 × breedte.
Er zullen ook leerlingen zijn die niet verkorten. Het is prima als sommige leerlingen het begrip omtrek blijven hanteren als de optelling van alle lijnstukken waar de figuur uit bestaat. Het op een eigen moment tot een verkorting komen heet voortgezette schematisering (zie ook paragraaf 2.3 over de niveautheorie van Van Hiele).

Het kan een verstandige keuze zijn om na de omtrek van figuren met rechte zijden, over te stappen op de omtrek van een cirkel. Het principe dat omtrek betekent er *om*heen gaan, blijft hetzelfde en sluit dan aan bij het voorgaande (zie ook opdracht 3.5.6).

Oppervlakte

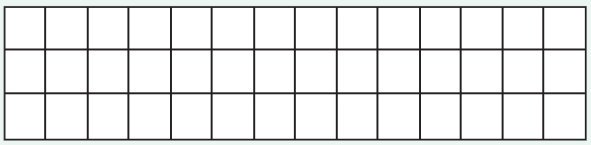
Net zoals bij het meten van lengtes bekeken wordt hoeveel lengte-eenheden er langs de zijden passen, werkt dit bij het bepalen van de oppervlakte ook zo. Er wordt bekeken hoeveel oppervlakte-eenheden erop passen. We meten de oppervlakte door het aantal oppervlakte-eenheden, bijvoorbeeld een kaartje, een A4tje, een strookje of een vierkantje, … die op het vlak passen te tellen. Opmeten van de oppervlakte kan eerst door tellen van oppervlakte-eenheden, later door berekenen. De eerste vraag is dus: welke eenheid van oppervlakte gaan we gebruiken? Kijk eens naar deze video's op Leraar24 [3]. Dit is een mooi voorbeeld van geleide herontdekking (zie ook paragraaf 2.2).

Wanneer de opdracht is om van de rechthoek in figuur 4 de oppervlakte op te meten, gaat het dus om tellen: met hoeveel oppervlakte eenheidsmaten kan de figuur precies bedekt worden?



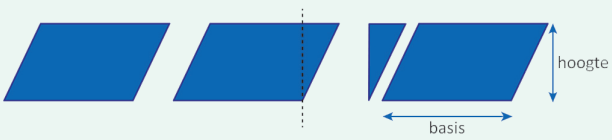
figuur 4

Het wordt duidelijk zichtbaar dat het aantal oppervlakte-eenheden in één rij zich herhaalt in het aantal kolommen (zie figuur 5). Dat maakt aannemelijk dat de formule voor de oppervlakte van een rechthoek is: aantal oppervlakte-eenheden in de lengte × aantal oppervlakte-eenheden in de breedte.



figuur 5

Waar het om gaat is dat de oppervlakte gemeten wordt door de figuur met oppervlakte-eenheden te bedekken en dan (handig) te tellen. Het blijkt dat dit bij rechthoeken het gemakkelijkst is om met vierkantjes te doen. Het is dan handig om vierkantjes van 1cm^2 te gebruiken, net zoals bij lengte met 1cm. Daarom proberen we de oppervlakte van andere figuren telkens tot de oppervlakte van een rechthoek te herleiden, zie figuur 6.



figuur 6

Door van een parallellogram een rechthoek te maken, wordt duidelijk wat de oppervlakte van een parallellogram is. Wanneer er een rechthoek van gemaakt is, is de oppervlakte basis × hoogte. En dus niet zoals bij een rechthoek lengte × breedte!

Uit nevenstaand voorbeeld blijkt dat er in de tekst regelmatig verwezen wordt naar de onderliggende theorieën en ook naar aanvullende websites. Aan het eind van ieder hoofdstuk zijn opdrachten toegevoegd. Deze opdrachten worden ingezet in de vakdidactiek-lessen op de lerarenopleiding, vaak ook om de eigen actuele praktijkervaringen tijdens de stage of het werkplekleren te verbreden en te verdiepen. En natuurlijk om daarover het gesprek met elkaar te voeren en de nieuw verworven inzichten om te zetten in innovatieve lessen. Diverse opdrachten zijn ook geschikt voor gebruik in de lessen in vo en mbo. Elk hoofdstuk wordt afgesloten met de paragraaf 'Waar vind je meer?' waarin bronverwijzingen te vinden zijn.
De eerdergenoemde vragen bij lesvoorbereidingen: Welke wiskundige basis heb je nodig als docent? Welke leerdoelen passen bij dit onderwerp? Wat vinden leerlingen moeilijk aan dit onderwerp? Hoe toets je dit? Welke bronnen en materialen kun je inzetten? Wat is de rol van de docent?... zijn vragen die we ons als wiskundedocent dagelijks stellen. Wij hopen dat onze materialen en bronnen eraan bijdragen dat het wiskundeonderwijs in Nederland nóg mooier, interessanter, uitdagender en daarmee beter wordt.

Geschiedenis van de SLW

Tegelijk met de start van de basisvorming werd in 1993 een geheel nieuw wiskundecurriculum voor 12-16 jarigen ingevoerd. Het wiskundeonderwijs ging op de schop en daar was een vijfjarig onderzoeksproject over de curriculumherziening aan voorafgegaan. Er werd toen door het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS) een groep van lerarenopleiders wiskunde bij elkaar gezocht die de invoering van de basisvorming en daarmee van het nieuwe wiskundeprogramma voor het vmbo ging begeleiden. Dat is de start van de SLW geweest: de lerarenopleiders van alle tweedegraads lerarenopleidingen wiskunde sloegen de handen ineen, verzorgden scholing voor de wiskundeleraren uit het veld en stonden aan de wieg van een nieuwe generatie wiskundeleraren. In die tijd zijn diverse bundels ontwikkeld. Er verschenen titels als *Het leren van wiskunde*, *Het wiskundewerklokaal*, *Het presenteren van wiskunde*, *Probleemoplossen en wiskunde*. De bundels vonden hun weg naar de studenten en dat leidde ertoe dat veel nieuwe wiskundeleraren bekend waren met (op z'n minst het logo van) APS, want dat was de toenmalige uitgever. De bundels zijn intussen in aantal uitgebreid en ze zijn om de vijf tot zeven jaar geactualiseerd. Uitgeverij ten Brink [4] is de bundels gaan uitgeven toen het APS in 2016 ophield te bestaan.

Noten

[1] Zie: *wiskundedidactiek.nl*
[2] Zie: *https://elbd.sites.uu.nl/*
[3] Zie: *https://www.leraar24.nl/70089/met-geleid-heruitvinden-snappen-leerlingen-rekenbegrippen-beter/*
[4] Zie: *https://tenbrinkuitgevers.nl/boeken/hbo/rekenen*

Over de auteurs

De SLW bestaat uit: Els Franken (Hogeschool Windesheim), Tom Goris (Fontys, Tilburg), Lambrecht Spijkerboer (NCOI Opleidingen), Trudy van der Kolk (Driestar Hogeschool), Stephanie Siersma (NHL Stenden Hogeschool), Els Meuldijk (Hogeschool Saxion), Liselot Schuringa (Hogeschool Rotterdam), Iekje Dijkstra en Marcel Voorhoeve (Hogeschool van Amsterdam), Theo van den Bogaart (Hogeschool Utrecht) en Jos Slapak (Hogeschool Arnhem en Nijmegen).
Contactpersoon van de SLW is Els Franken.
E-mailadres: *EJW.Franken-Durieux@windesheim.nl*

Johan Leurgans

Vergelijkingen: herkenbaar met taal = cruciaal

Hoe krijgen leerlingen inzicht in wat lineaire vergelijkingen zijn? In de praktijk blijken ze vaak oplossingsmethoden toe te passen zonder door te hebben waar ze mee bezig zijn. Johan Leurgans beschrijft een aantal concrete voorstellen om het inzicht te verbeteren.

Inleiding

Ik gaf voor het tweede jaar les aan een vmbo-gt 2e klas op het Driestar College in Gouda. We behandelden het hoofdstuk over het oplossen van lineaire vergelijkingen. Achtereenvolgens wordt de leerlingen drie manieren geleerd om deze op te lossen: met behulp van grafieken, door middel van inklemmen en met behulp van de balansmethode.
In de loop van het hoofdstuk (en met name op de toets) bleek dat de leerlingen heel slecht de relatie konden leggen tussen de verschillende oplossingsmethoden. Ze zagen de inhoud van de drie paragrafen – die elk één oplossingsmethode behandelde – als drie op zichzelf staande wiskundige handelingen die bij toeval in hetzelfde hoofdstuk terecht waren gekomen. Het was voor hen lastig 'bij elkaar te brengen' dat het snijpunt van twee grafieken een grafische representatie is van de uitkomst van de balansmethode. Evenzo konden ze lastig doorzien dat de balansmethode op zijn beurt een effectieve methode is om onnodige iteraties door middel van inklemmen te voorkomen.

Ik vroeg me af hoe het komt dat leerlingen deze zaken zo lastig kunnen combineren. Mijn vermoeden daarbij is dat dit te maken heeft met de manier waarop wij hen kennis laten maken met lineaire vergelijkingen.
Ik onderzoek daarom in dit artikel de wijze waarop wij leerlingen kennis laten maken met lineaire vergelijkingen. Aan de hand daarvan doe ik – ondersteund door literatuur
– een aantal concrete voorstellen hoe we daarin verbeteringen kunnen aanbrengen. Mijn doel is om leerlingen
– voorafgaand aan het leren van de oplossingsmethoden
– een beter inzicht te geven in wat lineaire vergelijkingen werkelijk zijn.

Voorbereidend werk

In de eerste klas wordt vooral voorbereidend werk verricht om met lineaire vergelijkingen te kunnen gaan werken. Ik doel dan onder andere op de introductie op woordformules die in hoofdstuk 4 van deel 1 (*Getal & Ruimte*, 2 vmbo-kgt 10e editie bv) wordt gedaan. Ook het rekenen met letters krijgt daarin een plek, samen met de relatie die een formule heeft met de bijbehorende grafiek.
Er worden in de eerste klas geen vergelijkingen gebruikt in de paragrafen over formules: de opgaven richten zich uitsluitend op het werken met een bekende variabele, waarmee vervolgens de uitkomst van de formule moet worden bepaald. Een voorzichtige kennismaking met vergelijkingen wordt alleen gedaan in de paragraaf die handelt over grafieken. Zie bijvoorbeeld opgave 102 in figuur 1. Daar wordt aan leerlingen gevraagd op welk moment de kaarsen even groot zijn.

Kaarsen branden

A 102 Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken. De lengte van kaars I in cm is te berekenen met de formule
lengte in cm = $15 - 3u$.
Hierin is u het aantal branduren.
a Teken de grafiek van de lente van kaars I.

Kaars II is 12 cm lang. Als deze kaars brandt, wordt hij per uur 2 cm korter.

b Vul in. Bij kaars II hoort de formule **lengte in cm = ...**
c Teken in het assenstelsel van vraag a de grafiek van de lengte van kaars II.
d Na hoeveel uur zijn de kaarsen even lang?
e Welke kaars brandt het langst?

figuur 1

Leerlingen blijken in deze hoofdstukken vooral moeite te hebben met begrip van de wiskundetaal. In opgave 93 (zie figuur 2) bleek vooral het zinsdeel 'voor $a = 5$' een lastige hobbel te zijn. Ze begrepen niet dat daarmee bedoeld werd dat zij in de som $7 \cdot a$ het getal 5 op de plaats van de a in moesten vullen.

93 **a** Bereken 7a voor a = 5.
b Bereken -8b voor b = -6.
c Bereken 5c voor c = 0.

figuur 2

Oplossingsmethoden

In klas 2 gaan leerlingen aan de slag met het oplossen van vergelijkingen. Eerst wordt de leerlingen geleerd om vergelijkingen op te lossen met behulp van grafieken. Daarna volgt de paragraaf over het oplossen met inklemmen. Het hoofdstuk sluit af met een paragraaf over de balansmethode. Het hoofdstuk over 'grafieken' laat zich weer verdelen in twee afgebakende onderwerpen: eerst het vergelijken van een formule met een specifieke waarde, daarna het vergelijken van twee formules met elkaar.
Veel energie bij het uitleggen van deze paragraaf gaat (bij alle klassen) verloren aan uitleg over het rekenen met letters en het werken met formules. Kennelijk is de kennis uit de eerste klas behoorlijk weggezakt. Daarnaast liep ik in dit hoofdstuk (wederom bij alle klassen) tegen het probleem aan dat ik ook al in de inleiding benoemde. Leerlingen zien de drie oplossingsmethoden (grafiek, inklemmen, balansmethode) als drie losstaande technieken die weinig raakvlakken met elkaar lijken te hebben.
De logica van de eerste oplossingsmethode zetten ze daardoor ook niet in bij het leren van de tweede oplossingsmethode en vice versa.
Het laatste probleem dat ik wil benoemen is het gebruik van het '=' teken. Leerlingen zien dit heel vaak als een 'aanzet tot actie' en niet als wezenlijk onderdeel van een algebraïsche expressie. Een cruciaal hiaat in hun kennis, omdat het '=' teken een heel belangrijk onderdeel is van de vergelijking.

SLO-doelen

De SLO doelen voor vmbo-tl vormen een belangrijke onderlegger voor de literatuuranalyse en mijn oplossingsrichtingen:

'In vmbo-kb-gt gaat het met betrekking tot algebraïsche vaardigheden om een begripsmatige lijn van rekenvaardigheden naar algebraïsche vaardigheden met als doel de algebra te kunnen hanteren in de context van verbanden' [1]. *Het* Handboek wiskundedidactiek [2] *geeft op pagina 67 een belangrijke aanwijzing over de betekenis van algebraïsche expressies. Een aanwijzing die de kern van mijn probleem raakt:*
'Vragen rond zo'n context kunnen worden aangepakt met algebra, waarbij de betekenis van de expressies sterk gekoppeld is aan de situatie. Maar daar moet het niet bij blijven. De kracht van algebra is juist dat ze een wereld op zichzelf vormt, waarin operaties worden uitgevoerd zonder dat je steeds hoeft terug te vallen op een betekenis van buiten deze wereld'.

Realistisch kader

Is het misschien zo dat we in het vmbo-onderwijs (geleid door de SLO-doelen) te veel in de contextrijke situaties blijven werken, waardoor de onderstroom van algebraïsche kennis te beperkt blijft? Kunnen we dit misschien vergelijken met een haperende auto, waarvan we vooral veel met de buitenkant bezig zijn maar waarbij we ons vergeten af te vragen of de motor (de binnenkant) wel voldoende onderdelen bevat om de auto zonder haperen te laten rijden?
Het *Handboek wiskundedidactiek* [2] geeft nog een aantal expliciete handreikingen over de manier hoe het onderwijs over vergelijkingen ontworpen kan worden. Centraal daarin staat dat het van belang is dat de ontwikkeling van cognitieve schema's op verschillende manieren wordt bevorderd. Niet alleen door het aanbrengen van een repertoire aan algebraïsche basisvaardigheden en het expliciet maken van oplossingsstrategieën, maar ook door variatie in oefening en het ontwikkelen van beelden die passen bij de probleemaanpak.
Bij dat laatste is de brug naar 'realistisch rekenonderwijs' al snel gelegd. Op verschillende plaatsen in de literatuur vinden we terug dat het voor het leren van belang is om een voor de leerlingen realistisch kader te gebruiken.
Het boek *Algebra voor leerlingen van 12-16* [3] geeft drie kenmerken van realistisch onderwijs. Het eerste kenmerk is dat de wiskunde verband moet houden met de realiteit. Als tweede moet de probleemsituatie aansluiten bij de belevingswereld van de leerling.
Ten derde moeten leerlingen zich bewust zijn van wat ze aan het doen zijn. We leren ze geen trucje, maar laten ze afhankelijk van het probleem (of: van de beginsituatie) een oplossingsstrategie bedenken.

>

Te snel overgaan op actie

Mijn belangrijkste constatering is dat leerlingen al in de kennismakingsfase met vergelijkingen het zicht kwijt raken op wat ze aan het doen zijn. Ze maken heel snel de stap naar het kunnen uitvoeren van de oplossingsstrategieën terwijl ze niet doorhebben voor welk probleem deze strategieën de oplossing zijn. Ze gaan te snel tot actie over. Leerlingen zijn daardoor óf bezig met een herkenbare situatie waarbij ze onvoldoende beroep doen op algebraïsche vaardigheden óf bezig met een algebraïsch probleem waarbij ze door een gebrek aan herkenbaarheid niet meer zien welke probleem ze aan het oplossen zijn. Dit gedrag wordt versterkt doordat vaak onvoldoende uitgelegd wordt wat de cruciale betekenis is van het '=' teken in de vergelijking. Het gebrek aan begrip van de 'vergelijkingsfunctie' van het '=' teken, versterkt mijn constatering dat leerlingen te snel in de oplossingsfase terechtkomen.

Mogelijke oplossingen?

Om een oplossing te bieden voor de problemen die ik in het voorgaande heb geformuleerd, beveel ik vier concrete zaken aan voor de fase waarin leerlingen kennismaken met vergelijkingen:

Als eerste: start niet met wiskunde, maar met taal.
Zorg dat leerlingen begrijpen dat ze twee verschillende zaken met elkaar aan het vergelijken zijn. Leerlingen moeten leren dat ze door het manipuleren van woorden (letters, variabelen) een vergelijking kloppend kunnen krijgen.

Ten tweede: besteed in een zeer vroeg stadium ruim voldoende aandacht aan het '=' teken. De leerlingen moeten dit teken gaan verbinden aan het feit dat ze zaken aan het 'vergelijken zijn' in plaats van 'het geven van een antwoord.

De derde aanbeveling is om de drie verschillende oplossingsrichtingen (grafieken, inklemmen, balansmethode) tegelijkertijd, in zeer eenvoudige vorm aan zodat leerlingen deze niet als losse strategieën gaan zien.

Als laatste adviseer ik om de vergelijkingen te introduceren aan de hand van zeer concrete voorbeelden die voor leerlingen direct herkenbaar zijn en relaties hebben met hun 'echte' werkelijkheid.

Voorbeelden

Op de site van *Euclides* geef ik twee opgaven die docenten in hun lessen kunnen gebruiken om de genoemde problemen te lijf te gaan. Deze dienen ter inspiratie om leerlingen op een effectieve manier kennis te laten maken met lineaire vergelijkingen. De eerste opgave laat zien hoe docenten hun leerlingen met taal en getallen vergelijkingen kunnen laten manipuleren om deze kloppend te krijgen. In deze opgaven wordt ook het '=' teken geïntroduceerd als onderdeel van een vergelijking. Daarna laat ik een serie opgaven zien die de drie oplossingsrichtingen (balansmethode, grafieken, inklemmen) vanuit dezelfde context aanbiedt. Deze opgaven kunnen in één keer aangeboden worden, zodat de leerlingen een helder zicht krijgen op de relatie tussen de oplossingsmethoden.

Ik verwacht dat we met de bewustwording van taal, de prominente aandacht voor het '='-teken en het gecombineerd aanbieden van oplossingsstrategieën leerlingen een veel beter zicht kunnen geven op het wezen van lineaire vergelijkingen. Sterker nog: na het schrijven van dit artikel en mijn ervaringen in de klas, ben ik ervan overtuigd dat we niet meer zonder kunnen. En net zoals in het echte leven geldt: voor een goede kennismaking heb je maar één kans.

Op de site vind je opgaven om de problemen die leerlingen hebben met vergelijkingen op te lossen.

vakbladeuclides.nl/965vergelijkingen

Noten

[1] Zie: *www.slo.nl/publish/pages/2827/concretisering-kerndoelen-wiskunde-kerndoelen-voor-de-onderbuw-o.pdf*

[2] Drijvers, P., Streun, A. v., & Zwaneveld, B. (2016). Handboek wiskundedidactiek. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.

[3] Faarts, J., Goris, T., Konings, T., Monquil, A., & Koelemeijer, G. S. (2017). Algebra voor leerlingen van 12-16. Meppel: Ten Brink Uitgevers.

Over de auteur

Johan Leurgans is tweedegraads docent wiskunde in opleiding aan de Driestar Hogeschool. Hij schreef dit artikel in het kader van de module vakdidactiek in het derde jaar van zijn opleiding. Johan hoopt in dit voorjaar af te studeren.
E-mailadres: *j.leurgans@outlook.com*

Wis en Waarachtig

Lespakket Epidemiologie

Eerder publiceerde PWN het boek *Succesformules* waarin o.a. Alexander Rinnooy Kan, Jeroen van der Veer en Louise Gunning over de rol van wiskunde in hun vak en persoonlijk leven vertellen. Het boek is met name geschikt om op een laagdrempelige manier de brede toepasbaarheid van wiskunde te laten zien.
Dit boek kan en wordt veel gebruikt in het voortgezet onderwijs om leerlingen (en docenten) te laten zien waar wiskunde wordt toegepast en hoe mooi en inspirerend dat kan zijn. Bij twee hoofdstukken uit het boek 'Succesformules' zijn lespakketten ontwikkeld:

— Epidemiologie (bij het hoofdstuk Epidemie)
— Verschillende tarieven voor meer winst (bij het hoofdstuk Financiën)

De lespakketten en hoofdstukken zijn te downloaden via onderstaande bron. Er is ook een drietal video's gemaakt dat de wiskunde van beroepen en situaties uit het dagelijks leven in beeld brengt. Een link voor de video's is ook te vinden in onderstaande bron.
Bron*: www.platformwiskunde.nl*

Speltheorie en Covid-vaccinatiestrategie

Madhur Anand (rechts) en Chris Bauch. Foto: Ian Willms, New York Times

Ecologe Madhur Anand (University of Guelph, Canada) en mathematisch bioloog Chris Bauch (University of Waterloo, Canada) hebben samen met Peter Jentsch, een student van Waterloo, gewerkt aan een onderzoek naar Covid-vaccinatie. De methodologie van het onderzoek combineerde twee soorten modellen:

— een epidemiologisch model van virusoverdracht, een model dat al decennialang wordt gebruikt en dat rekening houdt met zaken als seizoensgebondenheid, vatbaarheid voor infectie op basis van leeftijd en variaties in de prestaties van het vaccin;
— een speltheoriemodel, rekening houdend met menselijk gedrag, puttend uit gegevens van Google die onthulden wie waar en wanneer in Ontario reisde van maart tot november. Deze gegevens werden gebruikt als een schatting voor hoe strikt mensen zich hielden aan het afstand houden en andere gezondheidsadviezen in de loop van de tijd.

De resultaten maken onderscheid tussen twee soorten bescherming:
Directe bescherming beschermt mensen die worden gevaccineerd, bijvoorbeeld degenen met een hoog risico. In termen van directe bescherming was het onderzoek gericht op mensen ouder dan zestig jaar.
Indirecte bescherming beschermt de contacten van mensen die gevaccineerd zijn. De hoogrisicopopulatie wordt beschermd door de individuen te vaccineren die het meest waarschijnlijk het virus overdragen, zoals jongere mensen, zelfs als ze zelf minder kwetsbaar zijn voor de ziekte. Het model liet zien dat, als vaccins vroeg genoeg beschikbaar zijn tijdens de pandemie, zeg januari tot maart 2021 (waarbij 2,5 procent van de bevolking per week wordt gevaccineerd), directe bescherming meer doden zou voorkomen. Maar als vaccins pas later beschikbaar zijn, van juli tot september, dan is er tegen die tijd meer natuurlijke immuniteit en zou indirecte bescherming effectiever zijn om de sterfte te verminderen. Ook werd alleen een versie van het conventionele model gebruikt, waarbij geen rekening werd gehouden met menselijk gedrag dat was gemodelleerd op basis van de Google-gegevens. In plaats daarvan werd aangenomen dat het gedrag constant was. In dit scenario bleek de timing van pandemische golven heel anders te zijn. Rekening houden hoe mensen zich gedragen, had een grote invloed op de schattingen van hoeveel mensen in de loop van de tijd besmet raakten en, op hun beurt, de meest effectieve vaccinatiestrategieën.
Bron: www.ams.org

Simon Biesheuvel

Een recursieve formule en konijnen met uitgestelde kinderwens

De rij van Fibonacci, de rij van Padovan: past daar nog een rij tussen? En welke eigenschappen heeft die rij en hoe kun je die rij interpreteren? Simon Biesheuvel pluist het uit.

In het boek *Moderne Wiskunde* 5 vwo wiskunde C staan vragen over de rij van Padovan en wordt het plastische getal ψ genoemd. Er wordt begonnen met de rij van Fibonacci en het guldensnedegetal φ. Bij de rij van Fibonacci is de 4^e term (als voorbeeld) de som van de 2^e en 3^e term. Bij de rij van Padovan is de 4^e term de som van de 1^e en 2^e term. Ik was benieuwd welke rij we krijgen als de 4^e term de som is van de 1^e en 3^e term. En hoort daar ook een speciaal getal bij?
Deze 3^e rij wordt 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60 . . . . . .
Met de recursieve formule: $a_{n+3} = a_n + a_{n+2}$
Op mijn grafische rekenmachine (merk Casio, en dit geldt ook voor TI 84) kan ik deze rij niet invoeren. Mijn GR gaat maar tot twee termen terug. Maar daar vond ik een oplossing voor. Neem de rij twee keer en haal bij de tweede rij de eerste twee termen weg:

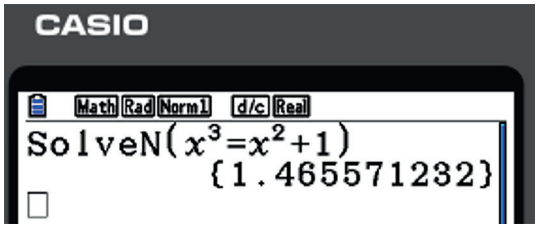
1^e rij	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60...
2^e rij	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60...		

De optelling van twee onder elkaar staande getallen is het getal ernaast op de onderste rij. Dat getal zet ik ook op de bovenste rij, twee plaatsen verder.

Op mijn GR wordt dat:

$a(n+2) = b(n)$ met $a(1) = 1$ en $a(2) = 1$
$b(n+2) = a(n+1) + b(n+1)$ met $b(1) = 1$ en $b(2) = 2$
$c(n+2) = b(n) : a(n+1)$ met $c(1) = 0$ en $c(2) = 0$

Met deze laatste deling wil ik uitproberen of ook bij deze rij de deling van twee opeenvolgende getallen naar een getal nadert, zoals bij Fibonacci de deling nadert naar het guldensnedegetal φ.
De c rij nadert op mijn GR vrij snel naar 1,465571232.
Dit is al bij $a(41) : a(40) = 2670964 : 1822473$ en daarna blijft de c rij dit getal aangeven, met negen decimalen nauwkeurig.
Welk getal is dit? Ik noem dit getal N. Als er na een tijd een (vrijwel) vaste vermenigvuldiging is, krijgen we op rij de volgende getallen:
G, GN, GN^2, GN^3 met $GN^3 = GN^2 + G$.
Dus $N^3 = N^2 + 1$ en het getal 1,465571232 is dus een benadering van de oplossing van deze vergelijking.
Mijn GR is het daarmee eens, zie figuur 1.



figuur 1

De rij van Fibonacci past bij een verhaal over tweetallen konijnen. De baby's worden eerst volwassen en krijgen dan pas kinderen, de volwassenen krijgen kinderen en blijven allemaal in leven.
Hier past een mooie matrix vermenigvuldiging bij (matrices zijn een leuk onderwerp, dat we op onze school al eens deden als keuzeonderwerp bij wiskunde A):
b is het aantal baby's en v is het aantal volwassenen.

$$\begin{matrix} & b & v \\ b & 0 & 1 \\ v & 0 & 1 \end{matrix} \text{ maal } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ geeft } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De uitkomst steeds weer met de 2 × 2 Leslie matrix vermenigvuldigen geeft de volgende rij:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}8\\13\end{pmatrix}$$

1 1 2 3 5 8 13 21

met eronder de som van de populatie en dat is de rij van Fibonacci. (De bovenste en de onderste rij zijn trouwens ook de rij van Fibonacci...).
Welk konijnenverhaal past er bij deze derde rij?
Na wat puzzelen kwam ik op baby's, pubers en volwassenen en alleen volwassenen krijgen kinderen en iedereen blijft leven.

$$\begin{array}{c} \\ b \\ p \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & p & v \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} \end{array} \text{ maal } \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ geeft } \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

De 3 × 3 Leslie matrix steeds weer met de uitkomst vermenigvuldigen geeft de volgende rij:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6\\4\\9\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}9\\6\\13\end{pmatrix}$$

1 1 1 2 3 4 6 9 13 19 28

met eronder de som van de populatie.
De rij baby's vormen vanaf nummer 4 zelf ook deze rij, evenals de pubers (vanaf nummer 5) en de volwassenen (vanaf nummer 3).

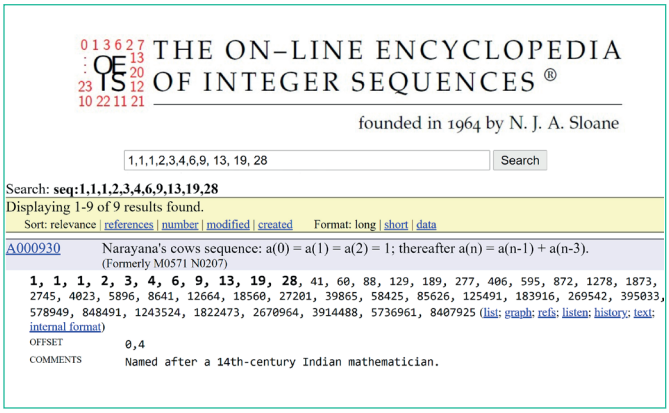
Omdat de pubers blijkbaar eerst naar school gaan en willen sparen voor een hol voordat ze kinderen willen, kun je dit beschrijven als 'een uitgestelde kinderwens'.

De rij van Padovan heeft, tussen twee haakjes, de volgende Leslie matrix:

$$\begin{array}{c} \\ b \\ p \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & p & v \end{array} \\ \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \end{array}.$$

Hierbij krijgen pubers ook al kinderen en volwassenen gaan dood.

Nu wordt het tijd eens te kijken of deze derde rij al eens eerder bedacht is (dat zal vast wel). Op de 'Online Encyclopedia of Integer Sequences' zijn rijen te zoeken. [1]
Als ik daar het begin van de rij intyp komt er te staan: *Deze rij is genoemd naar Narayana, een 14e-eeuwse wiskundige uit India*, zie figuur 2.



figuur 2

Noot

[1] zie *https://oeis.org*

Over de auteur

Simon Biesheuvel is docent aan het Willem de Zwijger College in Bussum. E-mailadres: *s.biesheuvel@wdz.nl*

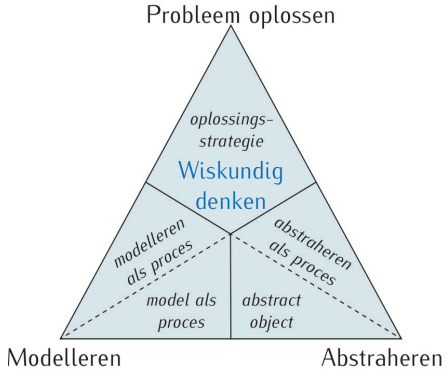
Irene van Stiphout, Ruud Stolwijk

Wiskundige denkactiviteiten in de examens

Cito voert regelmatig onderzoeken uit rondom de centrale eindexamens. In 2019 is onderzoek gedaan naar wiskundige denkactiviteiten (WDA) in de examens wiskunde A en wiskunde B havo en vwo. Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk, beide toetsdeskundigen bij Cito, doen hierover verslag.

Inleiding

Sinds de invoering van de examenprogramma's van 2015 hebben wiskundige denkactiviteiten (WDA) een plek in het curriculum en in de centrale eindexamens. Nu een aantal jaren ervaring is opgedaan met WDA in examens leek het Cito een goed moment om onderzoek te doen naar wiskundige denkactiviteiten in de centrale eindexamens havo en vwo. In hoeverre doen de examens havo en vwo bij wiskunde A en wiskunde B een beroep op WDA en welke trends zijn daarin te zien? Voor de analyse van de examens is het kader gebruikt dat Hanneke Kodde-Buitenhuis heeft ontwikkeld in haar masteronderzoek[1]. Hierin heeft ze de drie kernaspecten van wiskundig denken van Paul Drijvers[2]: probleemoplossen, modelleren en abstraheren, verder uitgewerkt. In figuur 1 zijn de drie kernaspecten weergegeven in hun onderlinge samenhang. Daarbinnen heeft Hanneke Kodde-Buitenhuis een verfijning aangebracht door bij modelleren en abstraheren onderscheid te maken tussen proces en object[3], zie figuur 1.



figuur 1 Analysekader van wiskundig denken

Examenopgaven van wiskunde A en wiskunde B, van havo en vwo, zijn volgens dit model geclassificeerd. Bij opgaven in de categorie *probleemoplossen* gaat het onder meer om problemen die niet standaard zijn, waarin leerlingen zelf een strategie moeten bepalen, meerdere denkstappen nodig zijn of meerdere strategieën en oplossingen mogelijk zijn. Bij *modelleren als proces* gaat het om het vertalen van een probleem naar wiskundige termen of om het terugvertalen van de wiskundige resultaten naar de probleemsituatie. Bij *modelleren als object* gaat het bijvoorbeeld om het aanpassen van het model, het analyseren van eigenschappen van het model of het vergelijken van verschillende modellen.
Onder *abstraheren als proces* valt bijvoorbeeld het afleiden van overeenkomsten en verschillen uit een concrete situatie of het generaliseren over een bepaalde categorie van voorbeelden. *Abstraheren als object* gaat over het denken over wiskundige objecten, eigenschappen daarvan en relaties daartussen. Als in modelleeropgaven minder nadruk komt te liggen op numerieke uitkomsten of parameterwaarden, kunnen modelleren en abstraheren op een natuurlijke manier in elkaars verlengde liggen[4].
Omdat Hanneke Kodde-Buitenhuis in haar masteronderzoek pilot-examens heeft geclassificeerd, is zij aangetrokken voor dit onderzoek. Haar masteronderzoek richtte zich op wiskunde B. Voor dit onderzoek heeft ze behalve naar de ontbrekende jaren van wiskunde B ook naar wiskunde A gekeken. Voor vwo wiskunde A is vanwege de beperkte tijdsinvestering teruggegaan tot 2015. Daardoor ontbreken de gegevens vanaf 2012 tot en met 2014.

Resultaten

We maken onderscheid tussen de examens op basis van het 2007-examenprogramma en die van het 2015-examenprogramma. Op basis van het 2015-examenprogramma zijn in de periode 2011 - 2016 (havo) en 2011 - 2017 (vwo) pilotexamens gemaakt. In 2017 (havo) en 2018 (vwo) werden de pilotprogramma's regulier.

Afnamejaar	Havo 2007 programma		Havo 2015 programma		Vwo 2007 programma		Vwo 2015 programma	
2011	2/23	9%	4/21	19%	–	–	–	–
2012	3/22	14%	4/23	17%	–	–	–	–
2013	0/21	0%	3/20	15%	–	–	–	–
2014	2/22	9%	4/22	18%	–	–	–	–
2015	2/22	9%	5/21	24%	3/21	14%	7/21	33%
2016	2/22	9%	5/22	23%	3/21	14%	6/21	29%
2017	–	–	5/22	23%	6/20	30%	11/21	52%
2018	–	–	4/21	19%	–	–	7/21	33%
2019	–	–	3/23	13%	–	–	6/20	30%
Totaal	**11/32**	**8%**	**37/195**	**19%**	**12/62**	**19%**	**37/104**	**36%**

tabel 1 Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in examens voor wiskunde A havo (2011-2019) en vwo (2015-2019) en bijbehorende percentages.

Wiskunde A

In tabel 1 staat een overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden. Het eerste dat opvalt is dat het aantal WDA-vragen in de 2015-programma's hoger is dan in de 2007-programma's. Bij havo wiskunde A ging het gemiddelde aantal WDA-vragen van gemiddeld 8% naar 19% en bij vwo wiskunde A ging het gemiddelde van 19% naar 36%. Daarnaast valt op dat het relatieve aantal WDA-vragen bij havo een stuk lager ligt dan bij vwo: gemiddeld 19% bij havo en 36% bij vwo. Behalve naar het aantal WDA-vragen is ook gekeken naar het bijbehorende aantal scorepunten. Deze aantallen zijn opgenomen in tabel 2. Het aantal scorepunten van WDA-vragen is in de 2015-programma's hoger dan in de 2007-programma's. Voor havo is dat in de 2015-programma's 24% en in de 2007-programma's 10%. Bij vwo gaat dat om respectievelijk 38% en 19%. Het relatieve aantal scorepunten ligt bij havo een stuk lager dan

Afnamejaar	Havo 2007 programma		Havo 2015 programma		Vwo 2007 programma		Vwo 2015 programma	
2011	7/82	9%	20/80	25%	–	–	–	–
2012	13/84	15%	16/82	20%	–	–	–	–
2013	0/79	0%	14/80	18%	–	–	–	–
2014	9/80	11%	20/84	24%	–	–	–	–
2015	9/83	11%	20/85	24%	12/85	14%	26/79	33%
2016	10/79	13%	27/84	32%	10/83	12%	22/81	27%
2017	–	–	22/80	28%	25/78	32%	46/84	55%
2018	–	–	21/76	28%	–	–	29/78	37%
2019	–	–	13/78	17%	–	–	30/79	38%
Totaal	**48/487**	**10%**	**173/729**	**24%**	**47/246**	**19%**	**153/401**	**38%**

tabel 2 Overzicht van het aantal scorepunten voor WDA in examens voor wiskunde A havo (2011-2019) en vwo (2015-2019) en bijbehorende percentages.

>

Afnamejaar	Havo 2007 programma		Havo 2015 programma		Vwo 2007 programma		Vwo 2015 programma	
2011	3/19	16%	8/19	42%	-	-	-	-
2012	1/19	5%	5/19	26%	7/17	41%	9/15	60%
2013	1/19	5%	4/17	24%	6/18	33%	9/17	53%
2014	2/19	11%	6/19	32%	4/18	22%	9/18	50%
2015	4/19	21%	6/16	38%	6/17	35%	6/16	38%
2016	2/20	10%	4/18	22%	6/17	35%	6/16	38%
2017	-	-	4/18	22%	4/14	29%	4/15	27%
2018	-	-	6/18	33%	-	-	4/17	24%
2019	-	-	3/18	17%	-	-	4/15	27%
Totaal	**13/115**	**11%**	**46/162**	**28%**	**33/101**	**33%**	**51/129**	**40%**

tabel 3 Overzicht van het aantal examenvragen waarin WDA getoetst worden in examens wiskunde B voor havo (2011-2019) en vwo (2012-2019) en bijbehorende percentages.

bij vwo: bij havo 24%, bij vwo 38%. In zowel het aantal WDA-vragen als het aantal scorepunten van WDA-vragen is een behoorlijke schommeling te zien. Bij het nieuwe programma liggen de percentages van het relatieve aantal scorepunten van WDA-vragen bij de havo tussen 17% en 32% en bij het vwo tussen 27% en 55%.

Wiskunde B

Voor wiskunde B zijn vergelijkbare analyses gedaan. In tabel 3 staat het overzicht van het aantal WDA-vragen in de examens. Net als bij wiskunde A is te zien dat het aantal WDA-vragen in de 2015-programma's hoger ligt dan in de 2007-programma's. Bij havo wiskunde B gaat dat om 28% waar dat 11% is in de 2007-programma's. Bij vwo wiskunde B is het verschil kleiner: 40% in de 2015-programma's en 33% in de 2007-programma's. Verder valt op dat, net als bij wiskunde A, het aantal WDA-vragen bij havo een stuk lager ligt dan bij vwo: 28% bij havo versus 40% bij vwo.

In tabel 4 staat een overzicht van het aantal scorepunten voor WDA. Ook hier is te zien dat de aantallen scorepunten van WDA-vragen in de 2015-programma's hoger zijn dan in de 2007-programma's. Bij havo wiskunde B gaat het om 34% tegen 12% in de 2007-programma's. Bij vwo wiskunde B is dat 44% tegen 34% in de 2007-programma's.

Net als bij het aantal WDA-vragen zien we dat het aantal scorepunten van WDA-vragen bij havo wiskunde B schommelt. In 2019 was het aantal scorepunten van WDA-vragen bij havo het laagst tot nu toe. Het relatieve aantal scorepunten van WDA-vragen ligt bij havo lager dan bij vwo: 34% om 44%.

Trends

Bij havo wiskunde A zien we schommelingen maar lijkt de trend de laatste jaren redelijk stabiel rond vier à vijf vragen per examen. Het aantal WDA-vragen in 2019 is het laagste uit de reeks. Bij vwo zien we een trend naar zes à zeven WDA-vragen per examen. Het gemiddelde wordt omhooggetrokken door het jaar 2017 waarvan bijna de helft van het aantal vragen als WDA wordt gezien. Bij havo wiskunde B valt op dat het aantal vragen schommelt: tussen drie in 2019 tot acht in het eerste pilotjaar 2011. Het aantal WDA-vragen in het examen havo wiskunde B in 2019 is met drie vragen opvallend laag. Bij vwo is een trend waarneembaar naar steeds minder WDA-vragen: van negen in de eerste drie jaren tot vier in de laatste drie jaren. De laatste drie jaren ligt het relatieve aantal WDA-vragen in de examens vwo wiskunde B onder het gemiddelde van de examens van de 2007-programma's.

Afnamejaar	Havo 2007 programma		Havo 2015 programma		Vwo 2007 programma		Vwo 2015 programma	
2011	10/80	13%	34/81	42%	-	-	-	-
2012	3/80	4%	26/82	32%	32/78	41%	55/83	66%
2013	5/80	6%	24/80	30%	26/79	33%	45/78	58%
2014	10/78	13%	31/80	39%	19/76	25%	41/77	53%
2015	21/80	26%	31/76	41%	29/77	38%	34/80	43%
2016	10/77	13%	23/77	30%	29/77	38%	34/79	43%
2017	-	-	22/79	28%	22/69	32%	21/71	30%
2018	-	-	29/77	38%	-	-	19/73	26%
2019	-	-	19/78	24%	-	-	25/80	31%
Totaal	**59/475**	**12%**	**239/710**	**34%**	**157/456**	**34%**	**274/621**	**44%**

tabel 4 Overzicht van het aantal scorepunten voor WDA in examens wiskunde B voor havo (2011-2019) en vwo (2012-2019) en bijbehorende percentages.

Conclusie

In ons onderzoek ging het om de vragen in hoeverre de examens havo en vwo bij wiskunde A en wiskunde B een beroep doen op WDA en welke trends daarin te zien zijn. Kort samengevat zien we dat de examens in de 2015-programma's meer WDA bevatten dan die van de 2007-examenprogramma's. Dit geldt voor wiskunde A en wiskunde B en voor havo en vwo. Verder zien we dat bij wiskunde A en wiskunde B de examens van havo relatief minder WDA bevatten dan die van vwo.
Bij havo wiskunde A ligt het aantal WDA-vragen in de examens rond 20%, bij vwo rond 35%. Bij wiskunde B is dat een kleine 30% en bij vwo 40%.

De trend bij wiskunde A lijkt, op een enkele uitschieter na, stabiel rond vier à vijf WDA-vragen bij havo tot zes à zeven WDA-vragen bij vwo. Bij havo wiskunde B schommelt het aantal WDA-vragen nogal en lijkt een licht dalende trend zichtbaar. Bij vwo is een sterke trend te zien naar minder WDA. Met name de laatste drie jaren is het aantal WDA-vragen in die examens aan de lage kant.

Noten

[1] Kodde-Buitenhuis, H. (2015). *Wiskundig denken in de pilotexamens van de nieuwe wiskundecurricula havo/vwo.* Arnhem: Cito.

[2] Drijvers, P. (2015). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT.* Inaugurele rede. Universiteit Utrecht.

[3] Van Stiphout, I.M. (2020). Wat bedoelen ze toch met ... proces-object? *Euclides*, *96*(6), 4-9.

[4] Zie ook Drijvers, P. & Kodde-Buitenhuis, H. (2019). Wiskundig denken in de centrale examens wiskunde B van havo en vwo. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5*(20), 252-258.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk zijn toetsdeskundigen bij Cito. E-mailadressen: *irene.vanstiphout@cito.nl* en *ruud.stolwijk@cito.nl*

Jack Schilder

Toetsen zonder toezicht

Hoe kun je wiskunde toetsen terwijl leerlingen en studenten onbespied volop gebruik kunnen maken van een grafische rekenmachine en van 'intelligente' websites die een heel arsenaal aan standaardopgaven kunnen oplossen?
Jack Schilder geeft een aantal suggesties.

Inleiding

Sinds mijn pensionering ben ik al een aantal jaren betrokken bij het wiskundeprogramma aan de RUG voor de zogenaamde PreMSc-studenten. Dat zijn studenten van over de hele wereld met een hbo-diploma die een master willen halen bij de Faculteit Economie en Bedrijfskunde. Het programma is vergelijkbaar met havo wiskunde B of vwo wiskunde B zonder statistiek (dat krijgen ze apart), kansrekening, meetkunde en goniometrie. Wat er wel bij zit, zijn functies van meer (twee) variabelen en dus ook partieel differentiëren. De meeste Nederlandse studenten uit deze groep hebben vier of vijf jaar geleden een havo-diploma gehaald met wiskunde A en tijdens hun hbo-opleiding nauwelijks of helemaal geen wiskunde meer gehad. Na zeven weken is er een tentamen.
Voor het coronatijdperk was dat een tentamen op papier, zonder boek of aantekeningen en zonder grafische rekenmachine, ofwel 'ouderwets' letterrekenen met contextloze opgaven. Aan de uitdaging voor studenten en docenten om dat in zeven weken tijd tot een succes te maken zou ook wel een artikel gewijd kunnen worden. Maar nu ligt er voor de docenten een heel andere uitdaging.

Toetsen zonder proctoring

De RUG heeft al in het begin van de coronacrisis besloten dat onlinetentamens plaats moeten vinden zonder proctoring, software waarmee al het gedrag van studenten op hun computer gemonitord wordt en de studenten ook hun mobiele telefoon niet kunnen gebruiken. Ondanks het feit dat verschillende tentamens voor de gehele groep deelnemers ongeldig werden verklaard wegens 'uitgebreid overleg via whatsapp' is men tot op heden niet op dit besluit teruggekomen.

Overleg heeft geen zin als elke student een geïndividualiseerd tentamen zou krijgen. Voor wiskunde en ook voor sommige andere vakken is er software die zulke tentamens kan genereren maar die bestaan dan uit standaardopgaven die met een grafische rekenmachine of een handige website opgelost kunnen worden.
Het random aan elke student aanbieden van de vragen uit één set vragen maakt overleg niet onaantrekkelijk maar faciliteert het juist. Neem een meerkeuzetoets van tien vragen en een whatsapp-groep van twintig studenten. Als ze allemaal tegelijk beginnen met hun 'eigen' eerste vraag, dan is er een kans van ongeveer 20% dat alle tien vragen op dat moment bekend zijn en een kans van ongeveer 45% dat er negen van de tien bekend zijn.
Hoe nuttig een website kan zijn, bleek toen ik alle opgaven uit een oud papieren tentamen invoerde op de website symbolab[1]. Er was maar één deelvraag die deze website niet op kon lossen. De website zou glorieus slagen voor dit tentamen met 96 van de 100 punten. Zelfs met alleen een grafische rekenmachine zou een student al een voldoende gehaald kunnen hebben.

> "De website symbolab zou glorieus slagen voor dit tentamen met 96 van de 100 punten."

De uitdaging

De uitdaging lijkt me duidelijk. Als het om twintig studenten zou gaan, zou het laten maken van open of essay-achtige vragen op papier, die gescand of

gefotografeerd gemaild moeten worden, qua correctiewerk nog wel haalbaar. Het gaat hier echter om meer dan 500 studenten. Multiple choice is de enige oplossing met vragen waarbij een grafische rekenmachine of een handige website weinig of helemaal geen hulp bieden. Verder moet natuurlijk voorkomen worden dat het tentamen (veel) moeilijker wordt dan voorheen. Ik heb gezocht op internet maar ik heb nog geen voorbeelden gevonden en al helemaal geen examenbank met geschikte vragen.
De studenten kregen overigens meerdere malen te horen dat de vragen aan de genoemde conditie zouden voldoen. Tijdens de lessen hebben ze ook dertig vragen in deze stijl gezien. Dat is uiteraard geen garantie dat ze het niet toch gaan proberen.

Vragen met een parameter

Een bestaande en voor de hand liggende oplossing is het samenstellen van vragen met een parameter erin.
Als er dan vier keuzemogelijkheden zijn met telkens één waarde voor zo'n parameter, kan de student natuurlijk alle gegeven waarden van die parameter proberen op zijn grafische rekenmachine of op zo'n website en dan is het antwoord zo gevonden.
Zie het volgende voorbeeld. (Deze vraag zat overigens wel in het tentamen 'nieuwe stijl' van november en uit niets bleek dat de studenten de bovenstaande werkwijze toegepast hadden.)

Vraag: In de onderstaande integraal is p een reële parameter, met $p > e$.
Voor welke waarde van p is

$$\int_e^p \left(\frac{1}{2x}\right) dx = 1$$

Met als antwoordmogelijkheden:
- ☐ $p = e^2$
- ☐ $p = e^3$
- ☐ $p = e^4$
- ☐ $p = e^5$
- ☐ het juiste antwoord staat hier niet bij

De genoemde website kan zelfs met deze parameter overweg, zoals in de schermafbeelding van figuur 1 te zien is.

Solution

$$\int_e^p \left(\frac{1}{2x}\right) dx = 1 \quad : \quad p = -e^3 \quad \text{or} \quad p = e^3$$

figuur 1

Het moet dus al een vraag zijn waarbij de waarde van de parameter gegeven wordt door een ongelijkheid. En zelfs dat helpt niet altijd.

Vraag: voor welke reële waarden van p heeft $x^2 + 2x - p = 0$ geen oplossingen?
Met als antwoordmogelijkheden:
- ☐ $p < -1$
- ☐ $p > -1$
- ☐ $p < 1$
- ☐ $p > 1$
- ☐ het juiste antwoord staat hier niet bij

Door –2 te proberen blijkt dat er maar twee potentiële antwoorden overblijven. Door ook nog 0 te proberen, blijkt $p < -1$ de oplossing te zijn.
Ook nu blijkt de genoemde website met de parameter overweg te kunnen. Gevonden worden de oplossingen $-1 + \sqrt{p+1}$ en $-1 - \sqrt{p+1}$. De studenten hebben vaak genoeg gehoord dat een getal onder het wortelteken groter of gelijk aan nul moet zijn en wie deze wetenschap in deze situatie toe weet te passen, vindt de oplossing.

Het is dus toch nog flink zoeken naar vragen met een parameter die wel geschikt zijn. De volgende vraag zat ook in het tentamen van november.

Vraag: In de volgende reële functie $f(x)$ is a een reële parameter.
Vind het domein van $f(x) = \sqrt{a - \ln(x)}$.

Met als antwoordmogelijkheden:
- ☐ $1 \leq x < e^a$
- ☐ $1 < x \leq e^a$
- ☐ $0 \leq x \leq e^a$
- ☐ $0 < x \leq e^a$
- ☐ het juiste antwoord staat hier niet bij

Proberen is hier een tijdrovende kwestie en de eerdergenoemde website kan deze vraag niet aan. De website WolframAlpha[2] (ook een hele bekende) komt tot:
$\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ and } a > \ln(x)\}$.
In dat geval is er dus nog een extra stap nodig om de juiste antwoordoptie te vinden.

Reverse engineering

Een andere manier van vragen is wat in de programmeerwereld 'reverse engineering' genoemd wordt.

Vraag: Geef een formule voor de reële functie die hier geïntegreerd is.

$$\int_1^4 (\quad)\,dx = \Big[\quad\Big]_1^4 = (4 + 2 \cdot \sqrt{4}) - (1 + 2 \cdot \sqrt{1}) = 8 - 3 = 5$$

Met hierbij natuurlijk ook geschikte antwoordmogelijkheden, die weliswaar geprobeerd kunnen worden, maar terugredeneren gaat waarschijnlijk sneller.
In de volgende vraag staan weliswaar parameters maar ook hier moet teruggeredeneerd worden. Ook hier kost het proberen van de antwoordopties zeker meer tijd dan achterwaarts redeneren.

Vraag: Hieronder zie je twee reële vergelijkingen met twee onbekenden met daarin de reële parameters a en b. Je ziet het eerste deel van het oplossingsproces waarin beide vergelijkingen met respectievelijk -2 en 1 vermenigvuldigd worden, waarna de vergelijkingen opgeteld worden.
Vind a en b.

$$\begin{cases} ax + by = 2 \mid \times \ -2 \\ 4x - y = 18 \mid \times \ 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \{\ \ = -4 \\ 4x - y = 18 \ + \\ \hline -4x - 7y = 14 \end{array}$$

Het vinden van een vergelijking of een formule

Vragen wat er gebeuren moet, kan ook een optie zijn. De volgende vraag stel ik vaak als ik wel eens een bijles geef aan een leerling in bijvoorbeeld havo-5. Dan is het wel een open vraag die de bijlesleerling veel moeite blijkt te kosten.

Vraag: Gegeven zijn de volgende reële functies
$P(t) = 40 \cdot 1{,}1^t$ en $Q(t) = 80 \cdot 1{,}08^t$ met t de tijd in jaren.
Iemand wil weten in welk jaar de waarde van P tweemaal zo groot is als de waarde van Q.
Welke vergelijking moet dan opgelost worden?

De antwoordmogelijkheden zijn:
- ☐ $40 \cdot 1{,}1^t = 160 \cdot 1{,}08^t$
- ☐ $80 \cdot 1{,}1^t = 160 \cdot 1{,}08^t$
- ☐ $40 \cdot 1{,}1^{2t} = 80 \cdot 1{,}08^t$
- ☐ $40 \cdot 1{,}1^{t+2} = 80 \cdot 1{,}08^t$
- ☐ het juiste antwoord staat hier niet bij

Opvallend genoeg bleek dit, ondanks de keuzemogelijkheden, een van de slechtst gescoorde vragen in dat novembertentamen. Een kleine variatie op het vorige is de volgende vraag met een iets uitgebreidere context.

Vraag: Banken geven tegenwoordig bijna geen rente meer op spaargeld. Een bepaalde bank heeft de volgende aanbieding. Je krijgt geen rente over de eerste 1500 euro op je rekening. Over alles boven de 1500 euro, krijg je 1% rente. Iemand brengt B euro naar de bank, waarbij $B > 1500$. Geef de formule die het kapitaal K geeft als functie van B en de tijd t in jaren.

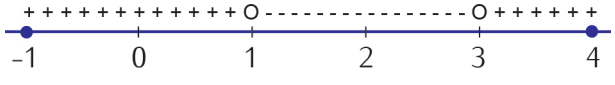
De antwoordmogelijkheden zijn:
- ☐ $K = B \cdot t^{1{,}01} - 1500$
- ☐ $K = (B + 1500) \cdot t^{1{,}01}$
- ☐ $K = (B - 1500) \cdot 1{,}01^t$
- ☐ $K = 1500 + (B - 1500) \cdot 1{,}01^t$
- ☐ het juiste antwoord staat hier niet bij

In het tentamen nieuwe stijl zat ook nog een actuele contextvraag over de exponentiële afname van het aantal mensen dat geen immuniteit heeft opgebouwd bij de verspreiding van een ziekte.

Interpretatie van een resultaat

Bij vragen waarin een plaatje staat, biedt een grafische rekenmachine of een handige website meestal ook geen hulp.

Vraag: Hier zie je het tekenschema van de eerste afgeleide van de reële functie $f(x)$ met domein $[-1; 4]$.



figuur 2

Hier staan vijf beweringen die (bij gebrek aan meer informatie) waar of onwaar zouden kunnen zijn. Hoeveel van deze beweringen zijn zeker onwaar?

- ☐ $f(x)$ heeft een lokaal minimum voor $x = -1$
- ☐ $f(x)$ heeft een globaal minimum voor $x = -1$
- ☐ $f(x)$ heeft een lokaal maximum voor $x = -1$
- ☐ $f(x)$ heeft een lokaal minimum voor $x = 3$
- ☐ $f(x)$ heeft een globaal minimum voor $x = 3$

Hierop zijn veel variaties te bedenken. Ook het tekenschema van de tweede afgeleide biedt mogelijkheden, bijvoorbeeld voor vragen over buigpunten. In het novembertentamen zat een vraag met het tekenschema van de tweede afgeleide waarbij gevraagd werd om uit een aantal gegeven functies die functies te kiezen die de eerste afgeleide konden zijn.

Substitutie

Ook de volgende vraag krijg ik niet opgelost met behulp van een website.

Vraag: Gegeven is de reële functie $f(x) = (x - 3)^2$.
Welke bewering is juist?

- ☐ $f(x) = f(-x)$
- ☐ $f(x) = f(-x) - 3x$
- ☐ $f(x) = f(-x) - 6x$
- ☐ $f(x) = f(-x) + 6x$
- ☐ $f(x) = f(-x) + 12x$
- ☐ $f(x) = f(-x) - 12x$

Ook dit biedt veel mogelijkheden tot variatie.

Conclusie

Tijdens een van de online werkcolleges kreeg ik de vraag: 'We krijgen toch niet allemaal vragen met een parameter?' Twintig vragen met een of meer parameters leek mij ook niets. Het duurde echter wel een paar weken voordat ik me een totaal andere manier van denken aangeleerd had om ook andere soorten vragen te kunnen bedenken.

Noten

[1] zie *https://www.symbolab.com/solver*
[2] zie *https://www.wolframalpha.com/*

Over de auteur

Jack Schilder is sinds 1975 docent. Na vele jaren op de Hanzehogeschool Groningen, waar hij meer informatica gaf dan wiskunde, is hij sinds 2014 parttime actief op de RUG. Ook is hij nog parttime actief op de opleiding Toegepaste Wiskunde aan NHL Stenden in Leeuwarden.
E-mailadres: *jackschilder@home.nl*

Verschenen

Titel: De dikke Pythagoras
Meer dan 600 wiskundige puzzels, spellen en doordenkers voor jong en oud
Auteurs: Jan Guichelaar, Paul Levrie, Roosmarij Vanhommerig
ISBN: 9789401471831
Prijs: € 19,99

Het tijdschrift *Pythagoras* bestaat zestig jaar en om dat te vieren is dit puzzelboek verschenen. In *De dikke Pythagoras* zijn de allerbeste doordenkers gebundeld die door de jaren heen in *Pythagoras* zijn verschenen. Deze breinbrekers worden gecombineerd met verrassende wiskundige wist-je-datjes. Bovendien zit er in elk paginanummer een wiskundig raadsel verstopt.

Desiree van den Bogaart, Linda Schouten

‘We dromen en doen ons best onze dromen te realiseren’

Stel, je bent een gevluchte wiskundedocent uit een land als Syrië. Na het verkrijgen van een verblijfstatus, ga je een nieuw leven opbouwen. Dit is het inspirerende verhaal van Maha en Suha en hoe zij na een aantal jaren in Nederland weer terugkeerden in hun oude vak.

Werkgroep Welkom

Sinds een half jaar heeft de NVvW een nieuwe werkgroep, genaamd ‘Welkom’. De werkgroep stelt zich ten doel om statushouders met een lesbevoegdheid wiskunde en/of leservaring als wiskundedocent te helpen bij hun terugkeer naar hun oude beroep. Dat is van groot belang voor zowel de statushouders zelf als voor het Nederlandse wiskundeonderwijs. Jezelf nuttig kunnen maken, financieel onafhankelijk zijn, plezier hebben in je werk; allemaal zaken die bijdragen aan een goede integratie en aan het zich thuis voelen in het nieuwe land. Dat er daarmee ook iets wordt gedaan aan het lerarentekort is natuurlijk relevant en dat het Nederlandse onderwijs hiermee een stuk rijker wordt, is een mooie bijvangst. De werkgroep Welkom telt inmiddels acht leden en onderneemt verschillende activiteiten om haar doel te bereiken. Meer hierover is te vinden op onze website [1].

Het UAF [2] is een stichting die zich inzet voor de ontwikkeling van gevluchte studenten en professionals. In samenwerking met verschillende hogescholen in onder meer Utrecht, Amsterdam en Zwolle, zijn er trajecten opgezet genaamd Statushouders voor de Klas (SvdK [3]). Dit zijn eenjarige trajecten, waarin statushouders met leservaring in hun land van herkomst worden begeleid bij een mogelijke terugkeer voor de klas. Deze trajecten zijn niet specifiek voor wiskunde, maar wel met name voor de tekortvakken. Er nemen over het algemeen veel wiskundedocenten aan deel. Van sommige deelnemers wordt na verloop van tijd hun diploma formeel erkend als lesbevoegdheid in Nederland, voor anderen geldt dat ze na afloop van het traject nog een (gedeelte van de) lerarenopleiding moeten doen om zo een volwaardige lesbevoegdheid te krijgen. De meeste genoemde trajecten zijn dit schooljaar aan hun derde cohort begonnen. In steden als Almere, Rotterdam en Den Haag zijn er nu initiatieven gaande om te starten met eigen groepen.

Maha Awad

Maha

Maha Awad is in 2019 gestart met het traject SvdK aan de Hogeschool van Amsterdam. Ze is in 2015 naar Nederland gekomen. Via haar kinderen die naar de basisschool gingen in Heerhugowaard, kwam ze in aanraking met het Nederlandse onderwijssysteem. Ze heeft zich er meteen serieus in verdiept, niet alleen omwille van haar kinderen, maar ook zoals ze aangeeft ‘voor haar eigen toekomst’. We spraken Maha eind november 2020 en konden haar vragen stellen over lesgeven in Syrië, deelnemen aan SvdK en hoe het is om nu werkzaam te zijn in Nederland als wiskundedocent. Sinds augustus 2020 is Maha namelijk werkzaam als docent wiskunde in Alkmaar. Het was een bijzonder gesprek, waarin we Maha

leerden kennen als een positieve persoonlijkheid die vooral kansen ziet, zeer goed geïnformeerd is over het Nederlandse onderwijssysteem en genuanceerd kan vertellen over verschillen en overeenkomsten met het Syrische onderwijs. Haar taalniveau is hoog. Ze heeft een hoorbaar accent maar haar woordenschat is heel groot en ze kan zich nauwkeurig uitdrukken.

Suha Kassab

Suha

Suha Kassab is in 2014 naar Nederland gekomen. Suha heeft in Saoedi-Arabië op de middelbare school gezeten, in Palestina de opleiding tot docent wiskunde gevolgd en in totaal meer dan tien jaar gewerkt als docent wiskunde op verschillende scholen in Gaza. De eerste jaren in Nederland waren niet makkelijk; naast de volledige zorg voor drie jonge kinderen leerde zij Nederlands aan de Rijksuniversiteit Groningen. In eerste instantie wilde Suha geen docent worden in Nederland. Ze werkte als vrijwilliger en vond het moeilijk het gedrag van de Nederlandse leerlingen te accepteren. Toen zij in contact kwam met het traject Statushouders voor de Klas werd zij toch enthousiast; inmiddels werkt Suha als docent wiskunde op Scholengemeenschap de Rietlanden in Lelystad. Tijdens het gesprek benadrukt Suha meerdere keren dat er veel hoogopgeleide vluchtelingen zijn en dat deze niet alleen op hun beheersing van de Nederlandse taal beoordeeld zouden moeten worden. Met name een proefles is voor docenten een mooie manier om hun kwaliteiten te kunnen tonen. Suha is blij dat zij deze kans heeft gekregen en met beide handen heeft gegrepen.

Onderwijs in Syrië

Wanneer Maha ons vertelt over het Syrische onderwijs, valt op dat de overeenkomsten groter zijn dan we aanvankelijk zouden denken. Er zijn zeker verschillen, de basisschool begint bijvoorbeeld bij de leeftijd van 6 jaar (dus geen kleutergroepen 1 en 2).
De basisschool duurt ook tot 12 jaar, maar in de laatste twee jaren zijn er al vakleerkrachten voor alle gebruikelijke schoolvakken zoals talen, exacte vakken en maatschappijvakken. Maha geeft aan dat de overstap voor leerlingen naar het voortgezet onderwijs daardoor minder groot lijkt te zijn dan in Nederland. Klassen zijn in grootte ongeveer dertig leerlingen. Basisscholen en ook middelbare scholen in de kleinere dorpen zijn over het algemeen gemengd, maar jongens en meisjes gaan wel naar aparte klassen. Maha heeft ook op een school gewerkt met alleen maar meisjes. Er worden lesmethodes gebruikt die door de overheid zijn voorgeschreven. De onderwerpen die aan bod komen zijn vergelijkbaar met ons wiskundecurriculum, maar de lesboeken lijken meer de nadruk te leggen op begrijpen en problemen oplossen dan op 'lezen en doen'.
Om haar lesbevoegdheid te krijgen heeft Maha wiskunde gestudeerd aan de universiteit en daarna een postdoctorale lerarenopleiding gedaan (die overigens niet verplicht was). Ze heeft acht jaar voor de klas gestaan in Syrië. Het beroep van docent is in Syrië een aantrekkelijk beroep, bijvoorbeeld vanwege lange vakanties en korte lesdagen, maar ook doordat het status heeft. Maha schat dat ongeveer 80% van de docenten vrouw is.

Onderwijs in Gaza

Suha is opgegroeid in een onderwijsfamilie, haar moeder was ook docent. Na haar opleiding is Suha als wiskundedocent begonnen in Gaza, zij gaf hier ongeveer dertig lessen per week op een school voor meisjes van 12 t/m 18 jaar. Het onderwijs is daar vanaf de leeftijd van 6 jaar gescheiden. De regels worden strakker gehandhaafd en het wiskundeniveau is over het algemeen hoger dan in Nederland. Er is maar één keuze voor de leerlingen: een wetenschappelijke of een beroepsgerichte opleiding. Verschillende niveaus bestaan niet, alle leerlingen volgen dezelfde lessen. Ondanks deze verschillen met het Nederlandse onderwijs benoemt Suha ook veel overeenkomsten, zo wijkt >

het curriculum niet veel af van het onze. Suha gaf daar onder andere les in algebra en meetkunde. Een rekenmachine werd daarbij overigens niet gebruikt. Vanwege het lerarentekort heeft zij ook computerlessen verzorgd; de lesstof heeft ze zichzelf eigen gemaakt. 'Ik houd van cijfers en computers, ik durf te proberen en ik ben niet bang.' Suha heeft ook lesgegeven in Saoedi-Arabië. Voordat zij naar Nederland kwam, heeft Suha drie jaar in Thailand gewoond.

Maha voor de klas

In haar eerste jaren in Nederland heeft Maha vrijwilligerswerk gedaan met kleuters, jongeren en bejaarden. Ze gaf ook al even wiskundeles in een taalklas in Alkmaar; dit deed ze nog gedeeltelijk in het Arabisch. Haar begeleider van stichting UAF adviseerde haar om deel te nemen aan Statushouders voor de Klas. Op de dag dat ze begon aan het traject werd haar diploma erkend. Toch besloot ze te blijven deelnemen en zo stap voor stap toe te werken aan haar terugkeer in het onderwijs. Maha kreeg een stageplaats op het Stedelijk Dalton College in Alkmaar. Het was aanvankelijk wel lastig, want ze kwam met name in bovenbouwklassen terecht en in een groep stagiaires van de reguliere lerarenopleidingen van de hogeschool en de universiteit. Maha besloot de wiskundeboeken zelfstandig door te nemen en zo de leerlijnen te leren kennen en de Nederlandse wiskundetaal eigen te maken. Haar begeleider op het SDC was zelf afkomstig uit Iran en heeft haar heel erg geholpen om haar weg te vinden. De eerste keer dat Maha zelf een gedeelte van een les verzorgde, ging het over lineaire functies in 4 vwo. Ze hield een uitleg van zo'n 15 minuten. Na afloop was ze blij en trots. De leerlingen hadden haar begrepen, ze had het goed kunnen uitleggen. Maha vertelt eerlijk aan haar klassen dat ze zelf nog lerend is en dat wordt prima geaccepteerd. Maha laat ook graag leerlingen naar het bord komen om hun strategieën te vertellen. Ze vindt het belangrijk dat de wiskunde niet alleen van de docent komt, maar dat leerlingen het zelf stap voor stap opbouwen. Ze heeft intussen ook geleerd gebruik te maken van PowerPoint bij het voorbereiden van de lessen. Dat biedt een goed houvast.
In het voorjaar van 2020 besloot Maha om enkele open sollicitaties te sturen naar scholen. Ze had daar wel twijfels over, maar docenten van het traject SvdK stimuleerden haar om het toch zeker te doen. Maha zegt hier zelf met haar kenmerkende positiviteit over: 'We zijn aan het dromen en we doen ons best om onze dromen te realiseren.' Kort daarna kwam er een vacature op het SDC. Ze schreef een mooie brief en ging op sollicitatiegesprek. Daarbij moest ze een beetje een verkooppraatje houden over zichzelf, wat ze best lastig vond. Ze had zich goed voorbereid op het gesprek en het resultaat was dat de directeur een week later belde om haar de baan aan te bieden.

Suha voor de klas

Via een jobcoach van de gemeente Fryske Marren hoorde Suha over het traject SvdK van Hogeschool Windsheim in Zwolle. In 2019 startte zij met het traject en dat was meteen een goede match. Het beviel uitstekend om haar hersenen weer te activeren. De docenten waren betrokken en het contact met haar medestudenten was hecht. In het traject leerde ze Nederlands, didactiek en pedagogiek maar ook kleine dingen zoals 'hoe schrijf je een x en hoe schrijf je een 8'. Suha deed haar stage op Scholengemeenschap Lelystad en dat was leerzaam, vooral wat betreft interacties met leerlingen en het leren van vaktaal. De Nederlandse taal bleef echter lastig. Ook het werken met de methode *Moderne Wiskunde*, inclusief de antwoordenboekjes, was wennen voor Suha. Het was niet te vergelijken met het lesmateriaal dat zij zelf had gebruikt. De eerste echte les was aan 3 tl, een bijzonder moment. Suha besefte steeds meer dat ze weer wilde lesgeven en dankzij de goede begeleiding en haar doorzettingsvermogen zette Suha belangrijke stappen richting het docentschap in Nederland.

Een mooie toekomst

Sinds augustus 2020 staat Maha dus echt als docent wiskunde voor de klas. Ze geeft op maandag, dinsdag en donderdag les aan klassen 1 en 2 havo/vwo. 'Het is een droom', zegt ze, 'maar het is niet makkelijk.' Ze heeft ook nu weer goede begeleiding van collega's. Maha is na een paar maanden wel tevreden over hoe haar lessen gaan. Ze werkt vanuit haar hart en de relatie met de leerlingen. Voor de leerlingen is de overstap naar de

middelbare school erg groot, zeker dit jaar. Leerlingen ervaren wiskunde soms als 'veel werk' en als 'niet te doen'. Ze wil meer gaan selecteren welke opgaven wel en niet gedaan moeten worden, meer differentiëren, minder alleen maar huiswerk maken. Maha beschrijft dat ze wel motivatieverschillen ziet tussen leerlingen in Nederland en in Syrië. Nederlandse leerlingen worden volgens Maha meer verwend. Thuis en op school krijgen ze van alles aangeboden. Ze vindt het mooi om te zien dat in het Nederlandse onderwijs aandacht is voor pedagogiek en voor vaardigheden als plannen en samenwerken. In Syrië wordt dat meer thuis geleerd, in de grote gezinnen. Kinderen leren daar zelfstandigheid en verantwoordelijkheid. 'In Syrië moet je zelf je best doen, niemand gaat het voor jou doen. Als iets moeilijk te bereiken is, dan doe je harder je best', aldus Maha. Zoals wij haar hebben leren kennen, is zij wat dat betreft op-en-top Syrisch. Ze heeft hard haar best gedaan om iets moeilijks te bereiken: een terugkeer in haar oude beroep in haar nieuwe thuisland. Maha en haar gezin wacht weer een mooie toekomst.

Een echte docent

Sinds november 2020 is Suha werkzaam als docent wiskunde op Scholengemeenschap de Rietlanden in Lelystad. Na het traject Statushouders voor de Klas twijfelde ze even tussen solliciteren en de kopopleiding. Haar diploma was inmiddels gewaardeerd als hbo-bachelor wiskunde. Afgelopen herfstvakantie richtte zij zich volledig op solliciteren en daarbij kwam zij de vervangingsvacature aan de Rietlanden tegen, 20 lesuren in totaal. Zij vroeg advies aan de docenten van het SvdK-traject en stuurde een sollicitatiebrief. Vervolgens werd Suha gebeld om een proefles te komen geven aan 2 tl/havo, een les over assenstelsels en grafieken. Op deze manier kreeg Suha de mogelijkheid om haar kwaliteiten te laten zien. De les verliep prima, met name de structuur en de uitleg waren sterk. Suha kreeg de baan diezelfde middag aangeboden. De eerste dagen was het weer flink wennen; leerlingen accepteerden haar niet direct, hadden lang geen wiskundelessen gevolgd en maakten soms opmerkingen over haar accent. Na enkele weken ging het langzaam de goede kant op. Suha volgt in haar lessen de lijn van de methode en maakt ter ondersteuning veel gebruik van PowerPoints. 'Je bent een echte docent', kreeg Suha regelmatig te horen van medestudenten en begeleiders tijdens het traject SvdK. En ja, daar is Suha het mee eens. Een krachtige, doortastende docent die de kans heeft gekregen om in haar nieuwe thuisland aan de slag te gaan en haar kwaliteiten te tonen.

Werkgroep Welkom zoekt Buddies

Onder de statushouders in Nederland zijn er wiskundedocenten die graag hun werk als docent weer willen oppakken. Zij leren eerst de Nederlandse taal en volgen bijscholing over het Nederlandse wiskundeonderwijs. De NVvW wil hun graag helpen om aan de slag te gaan als wiskundedocent. De werkgroep Welkom is op zoek naar wiskundedocenten die in contact willen komen met een gevluchte wiskundedocent en hem of haar willen helpen, een kijkje op school gunnen, bereikbaar zijn voor vragen en de weg willen wijzen in wiskundeland. De werkgroep Welkom gaat je daarbij ondersteunen. Doe je mee? Geef je dan op als buddy en help zo onze nieuwe collega's op weg. Mail naar *hoofdbureau@nvvw.nl* met onderwerp 'Buddy nieuwe Nederlanders'.

Noten

[1] *https://nvvw.nl/werkgroepen/welkom/*

[2] Stichting voor Vluchteling-Studenten UAF (University Assistance Fund). Zie *https://www.uaf.nl/*

[3] zie het artikel Statushouders voor de klas: *https://nvvw.nl/wp-content/uploads/2020/11/VO-magazine_5-mei_2019.pdf*

Over de auteurs

Desiree van den Bogaart is docent wiskunde aan de lerarenopleiding van de Hogeschool van Amsterdam. Zij is bestuurslid van de NVvW en voorzitter van de werkgroep Welkom. E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*
Linda Schouten is docent wiskunde aan zowel de lerarenopleiding als de opleiding toegepaste wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. Zij is tevens als docent verbonden aan het traject Statushouders voor de Klas van de HvA en lid van de werkgroep Welkom. E-mailadres: *e.p.m.schouten@hva.nl*

Marc van Zanten

Het FIzier gericht op...

Reken-wiskundemethodes voor het basisonderwijs

Marc van Zanten bespreekt zijn bevindingen uit zijn onlangs afgeronde promotieonderzoek.[1] Het onderzoek geeft een beeld van wat leerlingen al wel of nog niet hebben kunnen leren op het gebied van rekenen en wiskunde voordat ze instromen in het voortgezet onderwijs.

In het basisonderwijs zijn methodes bepalend voor de dagelijkse reken-wiskundelessen. Daardoor zijn ze van grote invloed op het aanbod van rekenen-wiskunde en de ondersteuning die basisschoolleerlingen krijgen bij het leren ervan. Het doel van dit onderzoek was inzicht te krijgen in de bijdrage die methodes leveren aan de geboden *opportunity-to-learn* (OTL). Dit begrip kun je vertalen als 'gelegenheid om te leren', in dit geval van rekenen-wiskunde. In totaal zijn achttien huidige en vroegere methodes geanalyseerd op verschillende leerinhouden in alle jaargroepen. Daarbij vonden we aanzienlijke verschillen tussen methodes in de OTL die zij bieden. We zoomen in op de bevindingen ten aanzien van één onderwerp: rekenwiskundig probleemoplossen.

> "Een tekening maken is een elementaire vorm van wiskundig modelleren die al op de basisschool kan worden toegepast."

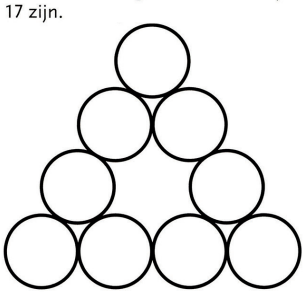
Probleemoplossen in het basisonderwijs

Probleemoplossen is een wettelijk voorgeschreven leerinhoud voor het basisonderwijs. Leerlingen moeten leren rekenwiskundige problemen op te lossen (kerndoel nr. 24) en hun aanpakken bij het oplossen ervan te onderbouwen (kerndoel nr. 25)[2].

In het onderzoek hebben we een rekenwiskundig probleem opgevat als *een niet-routinematig oplosbare opgave, waar de leerling die gesteld wordt voor deze opgave, niet direct een aanpak voor ter beschikking heeft.* Leerlingen krijgen ook geen oplossingswijze aangereikt, maar moeten die zelf achterhalen.

De opgaven in figuur 1 en 2 zijn voorbeelden van probleemopgaven voor het basisonderwijs (jaargroep 6). Bij beide opgaven zijn geen aanwijzingen gegeven in het leerlingenboek en leerlingen in groep 6 hebben er waarschijnlijk nog geen aanpak voor paraat. In de opgave van figuur 1 moeten de gegeven getallen (1 tot en met 9) zó worden ingevuld dat de som van de getallen van elke zijde van de driehoek steeds hetzelfde (17) is. Dit vraagt creatief wiskundig denken (het zoeken naar combinaties van getallen die samen 17 zijn) en analytisch denken (er rekening mee houden dat de getallen die op de hoekpunten komen tweemaal worden gebruikt in een

Een driehoek van 17.
Zet de getallen 1 tot en met 9 in de rondjes van deze driehoek.
De som van de getallen in elke rij moet 17 zijn.



figuur 1 Bron: Alles Telt, *groep 6*

combinatie van 17, en de andere getallen maar éénmaal). Ook bij de opgave in figuur 2 komt creatief denken van pas. In dit geval helpt bijvoorbeeld het maken van een (schematische) tekening van de situatie om bij te houden hoever de slak komt in de loop van de tijd en wanneer deze de rand van de put bereikt. Zo'n tekening maken is een elementaire vorm van wiskundig modelleren die al op de basisschool kan worden toegepast. Algemeen gesteld is bij probleemoplossen sprake van wiskundig denken in de vorm van analytisch denken, creatief denken en/of modelleren. Opgaven die dat uitlokken zijn vaak puzzelachtig van aard.

Een slak kruipt naar boven uit een put. De slak is 10 m verwijderd van de rand van de put. Hij doet er 1 minuut over om een afstand van 3 m naar boven toe te kruipen. Hij valt na elke afgelegde 3 m voor 1 minuut in slaap, waarbij hij steeds 1 m terugzakt. Hoe lang doet de slak erover om naar de rand van de put te kruipen?

figuur 2 Bron: Rekenwonders, *groep 6*

Probleemoplossen in vier methodes

We onderzochten de drie meest gebruikte Nederlandse methodes (*De Wereld in Getallen*, *Pluspunt* en *Alles Telt*) en een vertaalde versie van een methode uit Singapore (*Rekenwonders*). Die laatste is in Nederland op de markt gebracht onder meer vanwege de nadruk op probleemoplossen.
De methodes zijn geanalyseerd op de aanwezigheid van probleemopgaven en aanwijzingen om het leren van probleemoplossen te faciliteren. Denk bij dat laatste bijvoorbeeld aan het aanbieden van heuristieken voor probleemoplossen, zoals een meer of minder beredeneerde gok doen en kijken hoe dat uitpakt (*guess and check*), of achteraan beginnen en terugredeneren. We onderzochten voor groep 6 en 8 de leerlingboeken en de handleidingen (elke basisschoolmethode biedt uitgebreide leerkrachthandleidingen).

De resultaten van de analyses vielen tegen. De overgrote meerderheid van de opdrachten in de vier methodes (91% tot 97%) zijn rechttoe-rechtaan oplosbare opgaven. In de drie Nederlandse methodes zaten de schaarse probleemachtige opgaven díe worden aangeboden voornamelijk in de materialen die alleen bedoeld zijn voor de betere rekenaars. In deze methodes zit bovendien nauwelijks tot geen ondersteuning om te leren probleemoplossen, niet voor de leerlingen en ook niet voor de leerkracht. De van oorsprong Singaporese methode bood nog de meeste probleemopgaven aan. Deze zaten bovendien in de materialen die voor álle leerlingen bedoeld zijn. Deze methode biedt ook als enige systematische ondersteuning aan om te leren probleemlossen. Helaas gebeurt dat vaak op een manier van stap-voor-stap voordoen, wat op gespannen voet staat met het creatieve karakter van echt wiskundig probleemoplossen.

Kansen voor leerlingen

Ondanks dat leren probleemoplossen is opgenomen in de kerndoelen voor het basisonderwijs, blijkt de OTL ervoor in de methodes gering. Zoals bij alle rekenwiskundige vaardigheden, wordt ook leren probleemoplossen mede bevorderd door het te oefenen. Daarom is het nodig dat leerlingen regelmatig de gelegenheid krijgen om aan probleemachtige opgaven te werken. Dat geldt niet alleen voor sterkere rekenaars; álle leerlingen kunnen profiteren van het geregeld werken aan opgaven die stimuleren tot creatief en analytisch wiskundig denken en alle leerlingen verdienen die kans. Het moet worden opgemerkt dat uitgevers en auteurs zich hiervan bewust zijn en dat er hard is gewerkt om dit in de nieuwe edities te verbeteren. Maar op dit moment zullen de meeste leerlingen aan het begin van het voortgezet onderwijs weinig of zelfs geen ervaring hebben met probleemoplossen.

Noten

[1] Het proefschrift is te downloaden van *https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/399577*

[2] Zie *https://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html* voor een overzicht van alle kerndoelen.

Over de auteur

Marc van Zanten deed als buitenpromovendus onderzoek bij het Freudenthal Instituut, onder begeleiding van Marja van den Heuvel-Panhuizen. Hij werkt als expert rekenen-wiskunde bij het Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling SLO. E-mail: *m.a.vanzanten@uu.nl*

Jacques Jansen

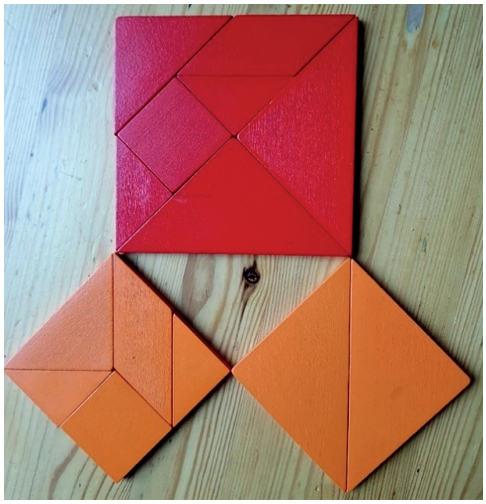
Uitdagende problemen

Tangram en de cosinusregel

Uitbreiden of specialiseren? Ervan afhalen of erbij doen? Jacques Jansen laat een proces zien van het zichtbaar maken van bekende regels, als de cosinusregel en de stelling van Pythagoras.

Inleiding

Met twee gelijke setjes Tangram – een set bestaat uit zeven puzzelstukjes - kun je iets bijzonders aantonen voor een geodriehoek of een driehoek die ermee gelijkvormig is. Zie in figuur 1 het rode en het oranje setje.

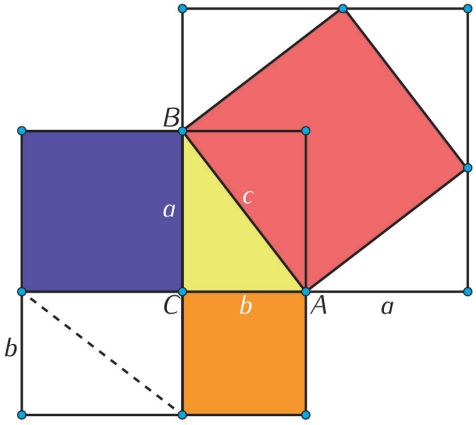


figuur 1 De stelling van Pythagoras

En ja, je herkent hierin de Stelling van Pythagoras. De oppervlakte van het rode vierkant op de langste zijde van de gelijkbenige rechthoekige driehoek is de som van de twee even grote oranje vierkanten die op de rechthoekzijden staan. Hier zie je een visueel bewijs. Wel even met de leerlingen bespreken waarom die twee oranje vierkanten even groot zijn. Napoleon besteedde in gevangenschap, volgens een publicatie van John Wallis [1], een deel van zijn tijd aan Tangram. Maar wist je dat de grote Nederlandse schrijver Multatuli zich in zijn *Ideeën* met Pythagoras bezig hield?

Multatuli en de Stelling van Pythagoras

2020 was niet alleen het jaar van componist Ludwig van Beethoven, geboren in 1770 in Bonn, maar ook het jaar van schrijver Multatuli, geboren in 1820 en overleden in 1887. Multatuli, een pseudoniem voor Eduard Douwes Dekker, was ook geïnteresseerd in wiskunde en bedacht het volgende bewijs van de Stelling van Pythagoras.
Aan een rechthoekige driehoek ABC, zie figuur 2, worden vierkanten op de zijden toegevoegd. Lengte van zijde BC wordt a en de lengte van zijde AC wordt b genoemd. Eerst wordt het vierkant op de schuine zijde omkaderd door een vierkant met zijden van $a + b$ waarbij de zijden evenwijdig zijn aan de rechthoekzijden van de gegeven driehoek ABC.



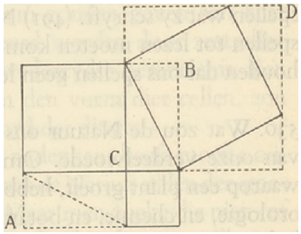
figuur 2

Eveneens worden de vierkanten op de rechthoekzijden omkaderd door een even groot vierkant met zijden $a + b$. Ook hiervan zijn de zijden evenwijdig aan de rechthoekzijden. De (kader)vierkanten overlappen elkaar gedeeltelijk.

In de ontstane figuur zijn buiten de gegeven driehoek *ABC*, zes congruente driehoeken te zien. Bij elk van de grote vierkanten worden vier congruente driehoeken weggelaten. De oppervlakte van het overgebleven rode vierkant is dus de som van de oppervlakte van het blauwe vierkant en de oppervlakte van het oranje vierkant. In figuur 3 zien we de oorspronkelijke tekst van Multatuli [2].

529.

Ik vond onlangs een nieuw bewys voor de stelling van Pythagoras. Hier is het. Door, als op nevenstaand voorbeeld, zes driehoeken te construeren -



ieder gelyk aan den gegeven rechthoekigen driehoek - verkrygt men twee gelyke kwadraten, A B en C D. Als men van elk dezer figuren vier driehoeken aftrekt, bewyst de gelykheid van 't overschot aan weerszy, wat er te bewyzen was. Eenvoudiger kan het niet, dunkt me. Na dit bewys gevonden te hebben, vernam ik dat er een werkje bestond, waarin dit onderwerp werd behandeld.

figuur 3 Multatuli (1951). Volledige werken. Deel 3. Ideeën, tweede bundel. (ed. Garmt Stuiveling). Amsterdam: G.A. van Oorschot.

Het bewijs van de stelling van Pythagoras is één van de *Ideeën* van Multatuli (in diens eigen spelling *Ideen*). Die *Ideeën* bevatten 1282 overwegingen en stellingnames. Ze werden tussen 1862 en 1877 in zeven bundels gepubliceerd.
Door het bewijs van Multatuli met het 'aftrekken van driehoeken' (weghalen van figuren) moest ik denken aan de cosinusregel.

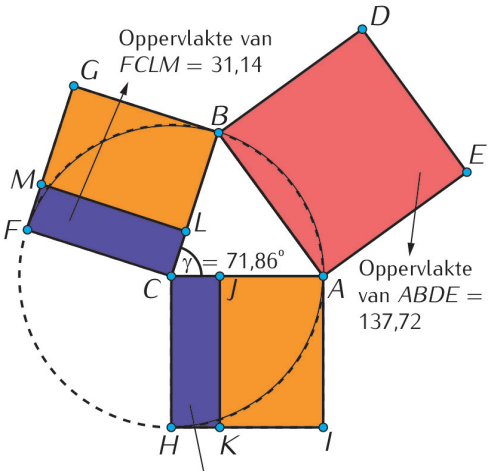
Cosinusregel

Het tangrambewijs van de stelling van Pythagoras hoort dus bij een gelijkbenige rechthoekige driehoek, een *bijzonder* geval dus. De stelling van Pythagoras is op zich een *bijzonder* geval van de cosinusregel.
Nemen we een willekeurige driehoek *ABC* - maak er zelf even een plaatje bij - dan geldt:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$.
Als $\angle ACB = 90^\circ$ dan geldt natuurlijk $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Blijkbaar is de term $2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$ een *correctie*. Kunnen we die correctie in een plaatje zichtbaar maken? In ieder geval zul je waarschijnlijk denken aan het plaatsen van vierkanten op de zijden van driehoek *ABC*.
Als je zoiets onderzoekt - en zeker met leerlingen - is het vaak handig om terug te vallen op bijzondere gevallen. We keren daarom weer terug naar de gelijkbenige driehoeken, maar $\angle ACB$ krijgt nu een variabele grootte.

Voorlopig kiezen we voor een scherpe hoek. $\cos(\angle ACB)$ is nu positief en dus gaat er bij de correctie iets af. Leerlingen kunnen met behulp van een cirkel, met middelpunt *C*, in GeoGebra snel een gelijkbenige driehoek tekenen waarbij de tophoek makkelijk kan variëren.

Correctie zichtbaar maken

Wijst het getal 2 in de correctieterm $2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$ ergens op? Is de uitdrukking $AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$ niet te schrijven als het product van twee afmetingen van een rechthoek? We kunnen het herschrijven tot $BC \cdot AC \cdot \cos(\angle ACB)$. $AC \cdot \cos(\angle ACB)$ is een ingekorte zijde *AC* en is in figuur 4 terug te vinden als we de loodlijn uit punt *A* neerlaten op zijde *BC*. Het voetpunt noemen we *L* en bij verlenging tot zijde *FG* verkrijgen we voetpunt *M*. Merk op dat $CL = AC \cdot \cos(\angle ACB)$.



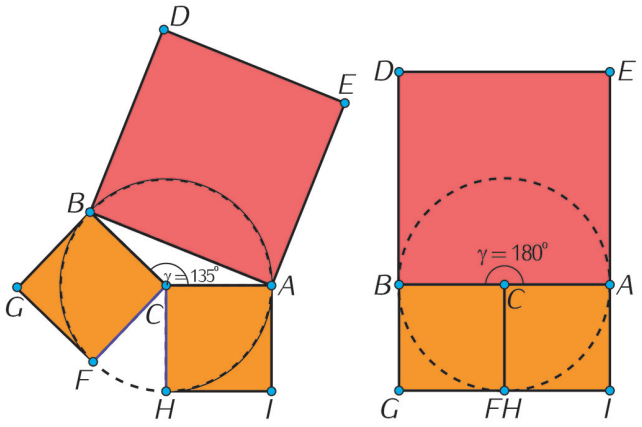
figuur 4 Situatietekening voor $\angle ACB = 71{,}86^\circ$

De oppervlakte van de blauwe rechthoek *FCLM* maakt het getal $BC \cdot AC \cdot \cos(\angle ACB)$ nu betekenisvol. Door vanuit punt *B* een loodlijn neer te laten op *AC* en *HI* (dit levert de voetpunten *J* en *K* op) krijgen we een analoog verhaal. We hebben de blauwe rechthoek *CJKH* geconstrueerd. Met behulp van een animatie in GeoGebra kun je dat mooi aan de leerlingen laten zien. In figuur 4 zie je dat de animatie even stopgezet is bij $\angle ACB = 71{,}86^\circ$. Voor *AC* hebben we lengte 10 genomen. De volgende getallen horen alleen bij deze situatie!
Er kan dus nagegaan worden dat 137,72 nagenoeg - die afrondingen toch - gelijk is aan $100 + 100 - 2 \cdot 31{,}14$.
De oppervlakte van het grote rode vierkant *ABDE* is dus gelijk aan de som van de oppervlaktes van de geamputeerde oranje vierkanten die hun blauwe delen verliezen.
Maar hoe zit het nu met gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek stomp is?, zul je je afvragen. >

Je kunt nu opmerken dat cos(∠*ACB*) negatief is. Bij de correctie $-2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$ komt er iets bij. Maar hoe maken we dat zichtbaar?

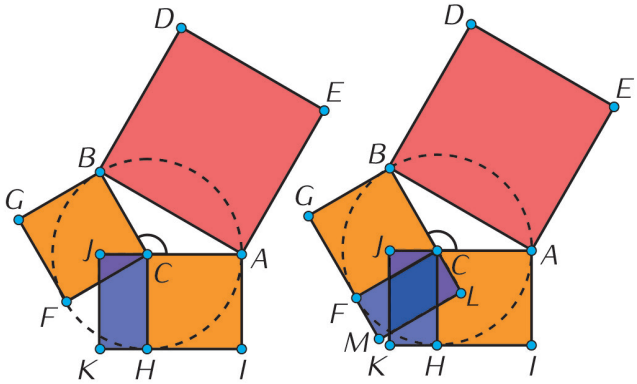
Stompe tophoek

Eerst weer even, ik denk aan de leerlingen, twee bijzondere gevallen onderzoeken. We nemen weer $AC = 10$. Er moet bij $\angle ACB = 135°$, zie figuur 5 (links), nog $100 \cdot \sqrt{2}$ in beeld worden gebracht. En bij het grensgeval 'de gestrekte hoek', zie figuur 5(rechts), nog 200. Ga maar na! Maar hoe gaan we dat in beeld brengen?



figuur 5

In de volgende afbeeldingen is ∠*ACB* een willekeurige stompe hoek. Het voetpunt *J* behorend bij hoekpunt *B* valt nu buiten Δ*ABC*, zie figuur 6. Rechthoek *JCHK* moet nu worden toegevoegd. Dan laten we weer een loodlijn neer uit punt *A* op zijde *BC* en op *GF*. Dat levert de voetpunten *L* en *M* op. Rechthoek *CLMF* moet nu worden toegevoegd. De oppervlakte van het rode vierkant *ABDE* is gelijk aan de som van de oppervlaktes van de rechthoeken *JAIK* en *BLMG*.

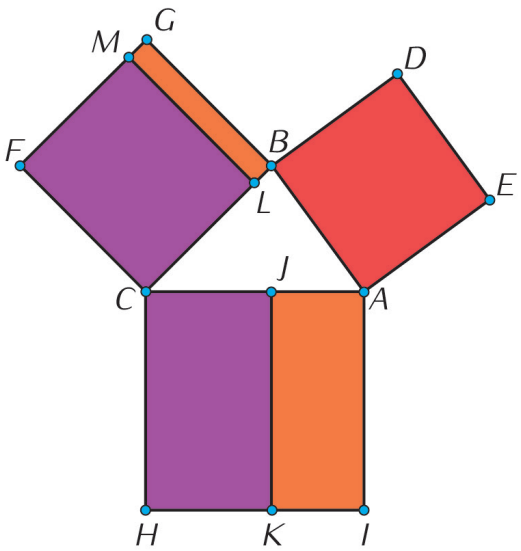


figuur 6

Natuurlijk kunnen we dit ook doen voor een willekeurige driehoek *ABC*.

Cosinusregel toegepast op een willekeurige driehoek

L, *M*, *J* en *K* zijn weer de bekende voetpunten. Merk op dat opp(rechthoek *CLMF*) = $BC \cdot \cos(\angle ACB) \cdot AC$ en dat opp(rechthoek *CJKH*) = $AC \cdot \cos(\angle ACB) \cdot BC$. Samen zijn ze de correctieterm in de cosinusregeluitdrukking $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$.

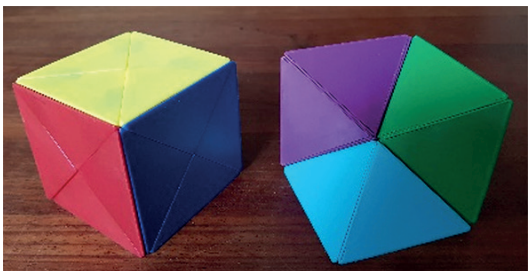


figuur 7

Oppervlakte rode vierkant *ABDE* is gelijk aan de totale oppervlakte van de oranje vlakdelen. Het plaatje van een stomphoekige driehoek laat ik aan jou over.

Tot slot

Kun je nog verder uitbreiden of een andere richting in slaan? Kijken we naar de Tangram, dan valt het bestaan te melden van een 3D-Tangram ook wel *Tangram Cube* [3] genoemd. Het spel bestaat uit 24 even grote stukjes waarvan de vorm een vierzijdige piramide is, zie figuur 8.



figuur 8

De hoogte van zo'n piramide is gelijk aan de helft van de basislengte. Er zijn zes verschillende kleuren gelijkelijk verdeeld. En ja, een kubus heeft zes grensvlakken!
Kijken we naar de stelling van Pythagoras, dan is er ook een 3D-versie. Van de rechthoekige driehoek stap je over naar een rechthoekig viervlak. Nog een andere richting? De vierkanten op de zijden van een rechthoekige driehoek zijn natuurlijk gelijkvormig met elkaar. Waarom zouden we dan geen andere gelijkvormige figuren op de zijden kunnen plaatsen? En zou de oppervlakte van de grootste vorm niet de som zijn van de oppervlaktes van de andere vormen?

Noten

[1] John Wallis was een van de eerste die een boek schreef over Tangram. In zijn boek *The Fashionable Chinese Puzzle* uit 1815 refereert hij aan zijn relatie met Napoleon. Of Napoleon echt met Tangram bezig was kunnen we niet met zekerheid stellen.

[2] Bruno Ernst publiceerde het bewijs van Multatuli in *Pythagoras* (april 2002) maar ook in zijn boek *De Interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras* uitgegeven door Epsilon-Uitgaven, ook in 2002.

[3] *Magnetic Tangram Cube* – uitgever Trendform Switzerland

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

Wiskunde in teams

WiTje: Beslissen door stemmen

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Als je via een stemming een beslissing wilt nemen, is de wijze van stemmen vaak beslissend voor het resultaat van de stemming. We bekijken de volgende situatie: Een klas gaat op schoolreis. De mogelijke bestemmingen zijn Venetië, Florence en Siena. De deelnemende leerlingen mogen hierover stemmen, bijvoorbeeld: eerste keuze Florence, tweede keuze Venetië en derde keuze Siena. De voorkeuren van de leerlingen zijn als volgt:

voorkeur			aantal leerlingen
Florence	Venetië	Siena	5
Florence	Siena	Venetië	7
Venetië	Florence	Siena	3
Venetië	Siena	Florence	7
Siena	Florence	Venetië	3
Siena	Venetië	Florence	6

Na de stemming blijkt dat Venetië te duur is en alsnog afvalt als mogelijkheid. De mentor van de klas zegt dat de klas toch niet naar Venetië wilde, zodat een nieuwe stemming niet nodig is. Sommige leerlingen zijn het hier niet mee eens.
Geef zowel argumenten die ondersteunen dat er níet een nieuwe stemming gehouden hoeft te worden als argumenten die ondersteunen dat er wél een nieuwe stemming moet komen.

Bron: Alympiade voorronde 1993-1994
www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00621/

Jens de Groot, Herman Bloem

MR-veelhoeken

Jens de Groot is RuG-student Biologie. Regelmatig heeft hij, zoals hij dat zegt, wiskundige ingevingen die leiden tot een probleem waar hij zich vervolgens in vastbijt. Vaak loopt het op niets uit, maar soms ontstaat een inzicht in aardige eigenschappen. Zo ook toen hij veelhoeken onderzocht die aan enkele bijzondere eisen voldoen ...

Inleiding

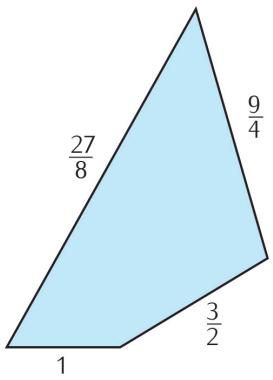
Bij een meetkundige rij (MR) met n termen ($n \geq 3$): a, ax, ax^2, ax^3, ..., ax^{n-1} zoeken we naar n-hoeken waarvan de lengtes van de opeenvolgende zijden deze meetkundige rij vormen (laten we ze *MR-veelhoeken* noemen). Door schaling kunnen we de zoektocht beperken tot 'primitieve' MR-veelhoeken met opeenvolgende lengtes $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{n-1}$.

Voor het vervolg is het handig de som-formule van een MR weer even paraat te hebben:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

In figuur 1 zie je een voorbeeld van een primitieve

MR-4-hoek met zijden $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}$.



figuur 1

Er bestaan oneindig veel primitieve MR-4-hoeken bij deze meetkundige rij, denk in de hoekpunten maar scharnieren geplaatst waar de zijden om kunnen draaien.

We kunnen ons beperken tot $x > 1$ (Waarom?). Niet voor elke $x > 1$ bestaan MR-veelhoeken. Voor $x \geq 2$ bijvoorbeeld is de langste zijde x^{n-1} helaas te groot, namelijk groter dan de som van alle andere zijden $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2}$ (ga na) en kunnen we de veelhoek niet 'sluiten'. Naast $1 < x < 2$ is de eis dat de langste zijde kleiner moet zijn dan de som van alle andere zijden de enige restrictie voor de 'reden' x. Als de langste zijde maar kleiner is dan de som van de andere zijden, dan kunnen we via de scharniergedachte het bestaan van een MR-veelhoek verantwoorden.

Omdat $1 < x < 2$ kunnen we de restrictie

$$x^{n-1} < 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-2} \qquad (1)$$

via de som-formule van een MR herleiden tot

$$x^{n-1} > \frac{1}{2 - x} \qquad (2)$$

en dat leidt voor elke waarde van n tot een bovengrens voor x. In tabel 1 zie je bij enkele waarde van n de geoorloofde x-waarden (berekend met het computer-algebra-programma Maple):

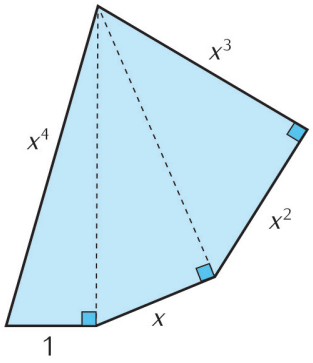
$n = 3$	$1 < x < 1{,}61803\ldots$	$n = 7$	$1 < x < 1{,}98358\ldots$
$n = 4$	$1 < x < 1{,}83928\ldots$	$n = 8$	$1 < x < 1{,}99196\ldots$
$n = 5$	$1 < x < 1{,}92756\ldots$	$n = 9$	$1 < x < 1{,}99603\ldots$
$n = 6$	$1 < x < 1{,}96594\ldots$	$n = 10$	$1 < x < 1{,}99802\ldots$

tabel 1

Vanaf $n = 4$ bestaan voor elke x uit het interval oneindig veel MR-n-hoeken.

Jensianen

We gaan een extra eis opleggen aan MR-veelhoeken. We vragen ons af of er MR-veelhoeken bestaan die opgebouwd zijn uit aan elkaar geplakte rechthoekige driehoeken. Dergelijke veelhoeken noemen we voor het gemak maar even MR-Jensianen, 'ere wie ere toekomt'. Een Jensiaan $MR - 5$ zou er dan als volgt uit moeten zien, zie figuur 2.



figuur 2

De vraag is natuurlijk of zo'n Jensiaan $MR - 5$ wel bestaat. Wel, we kunnen de gezochte waarde van x uit de figuur berekenen door herhaald Pythagoras toe te passen. Er volgt (met de som-formule van een MR):

$x^8 = 1 + x^2 + x^4 + x^6$ (3)

Maple geeft snel een afgeronde waarde van de enige (positieve) oplossing: $x = 1{,}388366657...$

Voor andere waarden van n kunnen we op dezelfde wijze te werk gaan. Bij de Jensiaan $MR - n$ stuiten we voor het berekenen van de reden x op de vergelijking:

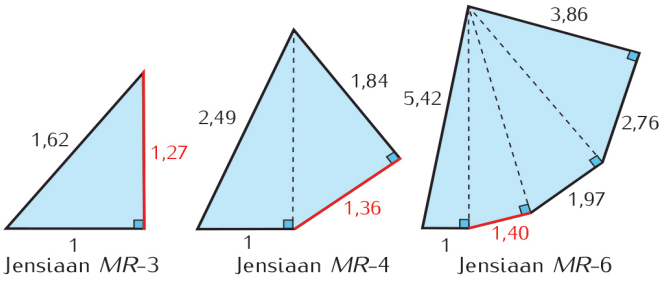
$x^{2(n-1)} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{2(n-2)}$ (4)

Voor enkele waarden van n zie je in tabel 2 de afgekapte waarde van de (positieve) oplossing x:

$n = 3$	$x = 1{,}27201...$	$n = 7$	$x = 1{,}40839...$
$n = 4$	$x = 1{,}35620...$	$n = 8$	$x = 1{,}41136...$
$n = 5$	$x = 1{,}38836...$	$n = 9$	$x = 1{,}41280...$
$n = 6$	$x = 1{,}40212...$	$n = 10$	$x = 1{,}41351...$

tabel 2

In figuur 3 zie je de Jensianen $MR - 3$, $MR - 4$ en $MR - 6$ getekend. De waarden van de lengtes van de zijden en van de reden x (in het rood) zijn afgerond op twee decimalen.



figuur 3

Het geval $n = 3$ leidt tot de zogenaamde driehoek van Kepler, dat is de rechthoekige driehoek met zijden 1, φ, φ^2 met $\varphi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180...$, de gulden snede.

Convergentie van de reden

Als we naar tabel 2 kijken, dan lijkt het wel alsof ... . Laten we eens $n = 100$ nemen, x gaat dan naar $1{,}414213562...$ Voor $n \to \infty$ lijkt x naar $\sqrt{2}$ te gaan. Dat kunnen we bevestigen door nog eens naar vergelijking (4) te kijken. Schrijven we voor het gemak $x^2 = y$ dan geldt voor y:

$y^{n-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + ... + y^{n-2}$ (5)

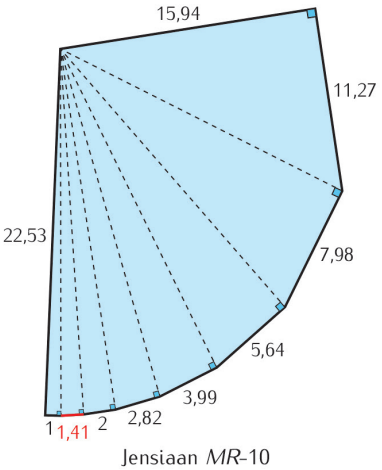
Dit kunnen we (via de som-formule van de MR in het rechterlid) herleiden tot:

$y = 2 - (\frac{1}{y})^{n-1}$ (6)

Omdat $y > 1$ zal voor $n \to \infty$ inderdaad $y \to 2$ en dus $x \to \sqrt{2}$.

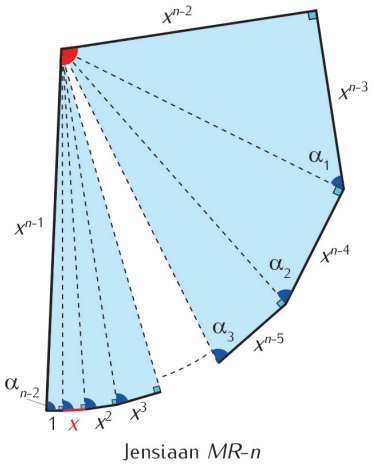
Hoeken van een Jensiaan

Zou er nog iets bijzonders aan de hand zijn met de hoeken van deze Jensianen? Wel, laten we Jensiaan $MR - 10$ eens tekenen, zie figuur 4. Het lijkt erop dat de hoeken van $MR - 10$ in het 'begin' bijna 180° zijn en langzaam kleiner worden.



figuur 4

We gaan dit nu algemeen aanpakken en schetsen Jensiaan *MR – n*, zie figuur 5.



Jensiaan *MR-n*

figuur 5

In Jensiaan *MR – n* kunnen we voor de blauwe hoeken α_k ($k = 1, 2, \ldots, n-2$) via herhaald Pythagoras voor de diagonalen, het volgende afleiden, weer met $x^2 = y$:

$$\cos^2(\alpha_k)=\frac{y^{n-k-2}}{y^{n-k-2}+y^{n-k-1}+y^{n-k}+\cdots+y^{n-2}}=\cdots$$

$$=\frac{y-1}{y^{k+1}-1} \qquad (7)$$

Wat kunnen we hieruit aflezen? Wel, voor grote waarden van n weten we dat $y \to 2$ en bij de grote waarden van k zal dan:

$$\cos^2(\alpha_k)\approx\frac{1}{2^{k+1}-1}\approx 0 \;\Rightarrow\; \alpha_k \approx 90^\circ$$

Maar we lezen uit (7) ook af dat voor $n \to \infty$ met $y \to 2$ de 'beginhoeken' α_k convergeren, zie tabel 3:

k	$\lim_{n\to\infty} \cos^2(\alpha_k)$	$\lim_{n\to\infty} \alpha_k$
$k = 1$	$\frac{1}{3}$	54,735...
$k = 2$	$\frac{1}{7}$	67,792...
$k = 3$	$\frac{1}{15}$	75,036...

tabel 3

De laatste hoek ...

Ten slotte ... zou de 'laatste' rode hoek (λ) wellicht tenderen naar een constante waarde?
Wel, we weten dat:

$$\lambda=\sum_{k=1}^{n-2}(90^\circ-\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n-2}\arcsin\sqrt{\frac{y-1}{y^{k+1}-1}}=$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\arcsin\sqrt{\frac{y-1}{y^{k}-1}} \qquad (8)$$

WolframAlpha geeft voor $n \to \infty$ met $y \to 2$:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda=\sum_{k=2}^{\infty}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2^k-1}}=107{,}351... \qquad (9)$$

Tot slot ... Een nieuwe uitdaging?

Op een vergelijkbare manier kunnen we onderzoeken of er Jensianen zijn waarvan de lengtes van de opeenvolgende zijden een rekenkundige rij (RR) vormen. Verrassend(?) genoeg blijken er slechts drie primitieve RRJensianen te zijn. We laten het aan de lezer over deze op te sporen! En ... mocht je geïnspireerd raken, dan zijn talloze andere varianten te bedenken. Tabel 1 geeft weliswaar bij elke n de waarden van x waarmee een n-hoek kan worden gemaakt met zijden 1, x, x^2, x^3, ..., x^{n-1} maar daarmee ligt de volgorde van die zijden natuurlijk niet vast (dat hebben wij als extra eis gesteld). Welke varianten zijn te bedenken als je die eis laat varen? Bestaat wellicht voor elke n een *MR*-koorden-n-hoek? Of neem eens als rij een ander type dan een MR. Er is genoeg om je te vermaken!

Mede dank aan: Igor Hoveijn, lerarenopleider wiskunde NHLStenden Hogeschool.

Over de auteurs

Jens de Groot is student master Biomedical Sciences - Neuroscience aan de RuG, dat valt onder Biologie en Levenswetenschappen & Technologie (Biologie en LS&T).
E-mailadres: *jensdegroot1998@gmail.com*
Herman Bloem is lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool.
E-mailadres: *herman.bloem@nhlstenden.com*

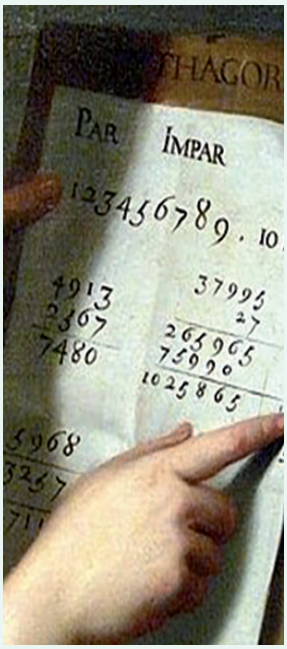
Raadsel met schilderij

Henk Rozenhart

Het schilderij van figuur 1 heet Aritmetica. Een nogal vreemde benaming voor een schilderij met een tuinontwerp.

figuur 1
Aritmetica van Laurant de la Hyre. Museum De Fundatie, Zwolle

figuur 2
Studio De la Hyre. Walters Art Museum in Baltimore



Bij mijn zoektocht naar het geheim achter dit probleem kwam het schilderij van figuur 2 tevoorschijn. En lijkt bij goed kijken meer overeen te komen met de titel. Wat blijkt?
Het eerste schilderij is een origineel waarin een eigenaar het rekenblad heeft laten overschilderen met een tuinontwerp. Onderzoek heeft dit uitgewezen. Het Amerikaanse schilderij is een kopie van het origineel, waarschijnlijk gelijktijdig gemaakt in de studio van de la Hyre.

Lerarenopleidingen | Hogeschool van Amsterdam

Kennis in het kwadraat

Soms is het tijd voor iets nieuws. Een masteropleiding Leraar Wiskunde volgen aan de Hogeschool van Amsterdam biedt je de uitgelezen kans om meer uit jezelf en je carrière te halen. Je ontwikkelt je tot eerstegraadsleraar wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd door hooggekwalificeerde docenten die de praktijk kennen. Je vakkennis komt op academisch niveau en wordt breder, dieper en up-to-date. We bieden een flexibel deeltijdprogramma en wat je leert kun je direct in je werk toepassen.

hva.nl/opendag

Wil je meer weten?
Meld je online aan voor de online open dag op 30 maart a.s.

Creating Tomorrow

Erik-Jan van Gelderen

Verslag van de Vakantiecursus 2020

Speltheorie: van strategisch beslissen tot 'eerlijke' oplossingen

Volgens de jaarlijkse traditie vond in augustus 2020 de vakantiecursus plaats. Student wiskunde Erik-Jan van Gelderen doet verslag van zijn eerste deelname aan de cursus in Amsterdam.

Cursusopzet

Met inachtneming van de coronamaatregelen konden de bijeenkomsten fysiek plaatsvinden, zowel in Amsterdam als in Eindhoven. Ondertussen is iedereen bekend met looproutes, desinfectiezeep en afstand houden. De mensen om me heen missen een aantal jaarlijks terugkerende deelnemers. Er was namelijk een inschrijvingsstop, want er waren maar 45 zitplaatsen in de zaal, die voldoende afstand waarborgden tussen de deelnemers.
De voorzitter van de programmacommissie Wil Schilders staat bij zijn welkomstwoorden stil bij het Covid-19 virus. Vooral de nieuwe mogelijkheden en kansen worden door hem benadrukt. Er is immers veel geïnvesteerd om werken, vergaderen en lesgeven op afstand mogelijk te maken. Bovendien is er extra belangstelling voor de wiskundige aspecten van het modelleren van epidemieën.
Net als de voorgaande twee jaren kende de cursus een hoofdspreker. Dit jaar was het Frank Thuijsman (Universiteit Maastricht) die ons in deze cursus een goed overzicht schetste van de speltheorie. Bij een spel moet men niet alleen denken aan gezelschapsspellen, maar aan elke situatie waarbij een aantal actoren beslissingen moeten nemen of tot een 'eerlijke' oplossing moeten komen. De cursus was als volgt opgebouwd. Op vrijdag sprak Thuijsman over *niet-coöperatieve spelen* en *coöperatieve spelen,* op zaterdag over *dynamische spelen*. Na de voordrachten was er tijd voor practica waarbij de stof werd verlevendigd met opgaven uit het bijgeleverde Zebra-boekje *Spelen en delen* [1]. Beide dagen was er een slotvoordracht. Ook was er op beide dagen een verzorgd eetmoment ingeroosterd waarbij op gepaste afstand de maag kon worden verwend.

Het 'bankroetprobleem' uit de Talmud

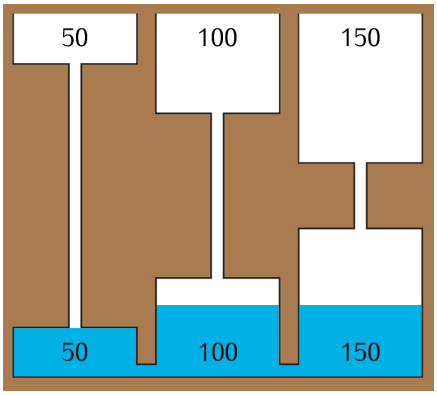
Uiteraard kan ik niet alles behandelen dat tijdens de cursus aan bod is gekomen. Ik zal me dan ook beperken tot een aantal leuke probleemstellingen die aan bod kwamen. Thuijsman besteedde aandacht aan het 'bankroetprobleem' uit de Talmud. Stel je je de volgende situatie voor: een man komt te overlijden en het bedrag dat hij bezit wordt verdeeld over zijn drie vrouwen. Maar de man heeft ook een schuld aan deze vrouwen. Aan zijn eerste vrouw was hij 100 schuldig, de tweede 200 en de laatste 300. Als de man slechts 100 bezit, hoe wordt het dan verdeeld? En wat is de verdeling als het een bedrag van 200 betreft? En 300? Volgens de Talmud wordt het geld bij deze bedragen verdeeld zoals in tabel 1.

		te verdelen bedrag		
		100	200	300
schuld	100	33 ⅓	50	50
	200	33 ⅓	75	100
	300	33 ⅓	75	150

tabel 1 Uitbetalingen van het bankroetprobleem uit de Talmud

Tot slot vermeldt de Talmud dat bij andere bedragen en schulden de winst of het verlies op dezelfde manier verdeeld moet worden. Hoezo heeft men het hier over 'dezelfde' manier? In de eerste kolom wordt het bedrag namelijk gelijkmatig verdeeld en in de laatste kolom naar rato van de hoogte van de schulden. En hoe moet de verdeling in de middelste kolom geduid worden?
Men kan dit probleem speltheoretisch beschouwen, immers de verschillende schuldeisers zijn in conflict over de verdeling van de gelden. De verdelingen in de verschillende kolommen in tabel 1 blijken overeen te komen met de zogenaamde *nucleolus* van de bijbehorende spelen. Vinden we zo'n nucleolus, dan begrijpen we dus beter

waarom de Talmud suggereert om het geld zo te verdelen. Misschien zien we dan ook hoe andere bedragen 'op dezelfde manier' verdeeld zouden moeten worden. Marek Kaminski[2] heeft laten zien dat de verdeling eenvoudig te berekenen is wanneer we een uitstap maken naar de natuurkunde. We beschouwen een speciaal geval van communicerende vaten. De vaten hebben een eigenaardige vorm die is geïllustreerd in figuur 1. We gaan ervan uit dat de verbindingsstukken waarmee de vaten communiceren een verwaarloosbare inhoud hebben. In het linkervat past tweemaal 50 liter. In het middelste vat tweemaal 100 en in het rechtervat tweemaal 150 liter. Dit komt overeen met de hoogten van de schuldeisers. Schenk 100, 200 of 300 liter vloeistof in deze vaten. Dan zal de vloeistof zich precies in de hoeveelheden verdelen zoals genoemd in de Talmud (ga dit na!). Vraag aan de lezer: hoeveel eindigt er in elk vat wanneer er 400 liter in de vaten wordt geschonken? [3]



figuur 1 Communicerende vaten met verschillende inhoud

Deze verdeling heeft een aantal wenselijke eigenschappen. Wanneer een schuldeiser met zijn aandeel wordt verwijderd dan krijgen de resterende schuldeisers via dezelfde methode nog steeds dezelfde hoeveelheden toebedeeld. Daarnaast worden de bedragen zo verdeeld tussen de schuldeisers dat zowel de bedragen die de eisers ontvangen als de bedragen die de eisers verliezen, monotoon oplopen, wanneer de eisers van lage naar hoge schulden gerangschikt worden.

Niet-coöperatieve spelen

Omdat het in coöperatieve spelen gaat om het 'eerlijk' verdelen van winsten en verliezen op basis van wat elke deelcoalitie 'waard' is, valt het 'bankroetprobleem' uit de Talmud in deze categorie. Wat eerlijk is, wordt bepaald door de wetgever en niet door individuele keuzes van de spelers. En verschillende invullingen van het begrip 'eerlijk', kunnen dan ook tot verschillende uitkomsten leiden. In niet-coöperatieve spelen gaat het juist om de strategische mogelijkheden van de spelers. In tabel 2 staat een voorbeeld van zo'n niet-coöperatief spel, in de vorm van een matrixspel. Anna en Bob zijn de spelers. De afspraak is dat Bob bij sommige uitkomsten een prijs betaald aan Anna. Anna krijgt niet zomaar geld; ze moet van tevoren betalen om mee te mogen doen. Men moet de tabel als volgt lezen. Anna en Bob maken elk onafhankelijk van elkaar een keuze voor optie 1 of voor optie 2. Als beiden dezelfde keuze maken moet Bob € 1 betalen aan Anna. Als ze verschillende keuzes maken dan betaalt Bob niets aan Anna.

		Bob	
		Optie 1	Optie 2
Anna	Optie 1	€1	€0
	Optie 2	€0	€1

tabel 2 Een matrixspel

Een vraag bij dit soort spelen is wat voor Anna een eerlijk bedrag zou zijn om te betalen aan Bob om dit spel te spelen. Er is een procedure hoe men dit bedrag, de waarde, kan berekenen voor dergelijke matrixspelen. Het zal je niet verwonderen dat dit bedrag in dit geval € 0,50 is. Dat is als volgt in te zien. Anna zou bijvoorbeeld haar keuze kunnen laten afhangen van een muntworp. Met kans ½ kiest ze dan voor optie 1 en met kans ½ voor optie 2. Het verwachte bedrag dat Bob dan moet betalen is € 0,50 ongeacht zijn strategie. Anna kan er dus voor zorgen dat het verwachte bedrag tenminste € 0,50 is. Beter kan ze het ook niet doen, want Bob kan er eveneens door een muntworp voor zorgen dat het nooit méér zal zijn.
Voor grotere matrices kunnen de waarde en de optimale strategieën m.b.v. de techniek van het lineair programmeren berekend worden.

		Bob	
		Optie 1	Optie 2
Anna	Optie 1	€1	€0
	Optie 2	€0*	€1*

tabel 3 The Big Match

Dynamische spelen

Interessanter is het dynamische spel met de naam *The Big Match*, dynamisch omdat de regels afhangen van het verloop van het spel. De uitbetalingen van Bob staan vermeld in tabel 3. De bedragen lijken in eerste instantie hetzelfde, maar er staat een asterisk bij de uitbetalingen >

wanneer Anna kiest voor optie 2. Dit maakt het een heel ander spel. Het idee is dat dit spel oneindig maal gespeeld wordt. Iedere keer kunnen Anna en Bob onafhankelijk van elkaar kiezen voor optie 1 of 2. Maar zodra Anna voor optie 2 kiest gebeurt er iets bijzonders. Als Bob dan voor optie 1 heeft gekozen dan zijn alle uitbetalingen daarna € 0. Als Bob voor optie 2 heeft gekozen zijn alle betalingen daarna € 1. Merk op dat de gemiddelde uitbetaling volledig wordt bepaald door wanneer Anna optie 2 kiest. Wat is een goede strategie voor Anna om de gemiddelde uitbetaling te maximaliseren? Als ze met een kans $p > 0$ kiest voor optie 2 dan kan Bob ervoor zorgen dat de gemiddelde uitbetaling voor Anna 0 is door altijd optie 1 te kiezen. Weliswaar moet Bob steeds € 1 betalen aan Anna zolang ze kiest voor optie 1, maar omdat p positief is kiest ze op een gegeven moment voor optie 2. Wanneer dat gebeurt hoeft Bob een oneindig maal niets te betalen aan Anna. Dit resulteert in een gemiddelde uitbetaling van € 0. Stel dat Anna echter kiest met een kans 0 voor optie 2, dan kan Bob de strategie hanteren om altijd optie 2 te kiezen, ook dan is de gemiddelde uitbetaling slechts € 0. Verrassend is dan ook dat David Blackwell en Tom Ferguson in 1968 hebben aangetoond dat er voor Anna tóch voor iedere $\varepsilon > 0$ een strategie is zodat de verwachte gemiddelde uitbetaling toch minstens € 0,50 - ε is. Maar die strategie is wel van een iets complexere aard, waarbij Anna de p van beurt tot beurt iets bijstelt in antwoord op de keuzes die Bob tot dan toe gemaakt heeft. Een ander dynamisch spel dat is behandeld betreft het huwelijksprobleem. Aan dit probleem is in de vakantiecursus 'Netwerken' in 2016 ook aandacht besteed. Sietske Tacoma[4] heeft daar destijds verslag van gedaan. Voor een uitgebreide behandeling van dit probleem verwijs ik graag naar dat verslag. Het feit dat dit probleem eerder is behandeld illustreert dat de onderwerpen van de vakantiecursus zich niet beperken tot één deelgebied in de wiskunde.

Slotvoordrachten

De afsluitende voordracht was op vrijdag van Ton Storken en op zaterdag van Loe Schlicher. Verrukt van de mogelijkheid om zes krijtborden te gebruiken gaf Storken een traditioneel hoorcollege. Daarin werd het idee van een bewijs van Arrows onmogelijkheidsstelling behandeld. Een volledige versie is terug te lezen in de syllabus[5]. De stelling gaat over een verkiezing waarbij stemmers een aantal stemopties rangschikken naar hun voorkeuren. De onmogelijkheid bestaat eruit dat een functie die van de stembiljetten een groepsrangschikking maakt niet aan een combinatie van bepaalde wenselijke eigenschappen kan voldoen. Aan het slot van de cursus gaf Schlicher nog toepassingen van de speltheorie. Daarbij behandelde hij speltheoretische benaderingen van het onderhoud van het spoor, het verdelen van grondstoffen over verschillende fabrieken om je verlies bij aanslagen te minimaliseren en kort hoe het handelen in vaccins beïnvloed wordt door de hoeveelheid vaccins en hoe ze verdeeld zijn over de wereld.

Reflectie

De introductiecursus in de speltheorie was solide opgebouwd. Ondanks dat ik weinig voorkennis bezat in dit deelgebied van de wiskunde, was het daardoor goed te volgen. In het bijzonder was het prettig dat er voorbeeldsommen werden aangeleverd op het niveau van leerlingen van het middelbaar onderwijs. Daar konden we meteen mee aan de slag. Deze component is in 2013 geïntroduceerd in het programma en naar mijn mening is het een goede toevoeging. Al met al waren het twee leerzame dagen waarop een globaal overzicht van de speltheorie is overgedragen. De cursus is een aanrader voor iedere wiskundeliefhebber. Aangezien zowel jongeren, als vrouwen dit jaar ondervertegenwoordigd waren wil ik hen in het bijzonder aanmoedigen om volgend jaar deel te nemen aan de 75ste editie van de vakantiecursus.

Noten

[1] Thuijsman, F. (2005, tweede druk 2017). *Spelen en Delen*. Zebra-Reeks 22. Amsterdam: Epsilon-Uitgaven.

[2] Kaminski, M.M. (2000). 'Hydraulic' rationing. *Mathematical Social Sciences*, 40, 131-155.

[3] 50 in het linkervat, 125 in het middelste vat en 225 in het rechtervat.

[4] Tacoma, S. (2016). Netwerken tijdens de vakantiecursus wiskunde. *Euclides,* 92(7), 31-33.

[5] *https://www.platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2020/09/Syllabus-VC2020_v1.0.pdf*

Met dank aan Frank Thuijsman en Gerard Alberts voor de op- en aanmerkingen op het concept van dit artikel.

Over de auteur

Erik-Jan van Gelderen volgt de bachelor Wiskunde met minor Educatie aan de UvA. Tijdens zijn studie heeft hij zich verdiept in de historie van de vakantiecursus en Arrows onmogelijkheidsstelling.
E-mailadres: *ejvangelderen@gmail.com*

Olympiadepuzzel 96-5
Ridders en schurken

Esther Bod

PZZL

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen.
De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op *www.wiskundeolympiade.nl*.

Volgens een oude schatkaart ligt op een eiland een schat begraven. Het eiland heeft zeven bewoners.
Samen bewaken ze de schat.
Je gaat op het eiland op zoek naar de schat. Op de plaats die op de schatkaart staat aangegeven, sta je oog in oog met de bewoners. Ze staan op een rij en de schat ligt tussen twee van hen in. Er zijn dus zes mogelijke posities waar de schat kan liggen. Van links naar rechts (vanuit jouw positie gezien) noemen we de bewoners A t/m G. Iedere bewoner is een ridder of een schurk. Ridders spreken altijd de waarheid. Schurken liegen altijd als ze, vanuit jouw positie gezien, links van de schat staan (d.w.z. als de schat aan hun linkerhand ligt). Anders spreken ze altijd de waarheid.

De zeven bewoners doen elk een uitspraak over zichzelf en de positie van de schat:

A: 'D spreekt de waarheid.'
B: 'Ik sta links van de schat (vanuit jouw positie gezien).'
C: 'Er zijn minimaal drie schurken.'
D: 'De schat ligt tussen mij en E in.'
E: 'G en ik zijn niet allebei ridders, en we zijn ook niet allebei schurken.'
F: 'Ik ben een schurk.'
G: 'De meeste schurken liegen.'

Als je erin slaagt om aan te geven tussen welke twee (aangrenzende) bewoners de schat ligt en daarnaast van elke bewoner correct aangeeft of hij ridder of schurk is, dan is de schat voor jou! Ga jij er met de schat vandoor?

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 16 april naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel nr. 3

Voor de puzzel *Getallenrij* hebben we 15 inzendingen ontvangen.
In deze opgave was een recursieve formule voor een rij getallen gegeven. Om het kleinste gehele getal uit de rij te bepalen kun je de directe formule van de rij afleiden en aan de hand daarvan aantonen dat de rij vanaf een bepaald punt dalend is. Het bepalen van de directe formule ging bij alle inzendingen goed. Daarna moet de formule ook nog bewezen worden. De makkelijkste manier is een bewijs door middel van volledige inductie. Daarbij bewijs je dat als de formule klopt voor n en $n + 1$, hij vervolgens vanwege de recursieve formule ook klopt voor $n + 2$.

Meerdere inzenders hebben deze methode gebruikt. Een andere mogelijkheid is om de karakteristieke vergelijking te gebruiken. (Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.)

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 10 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Lieke de Rooij.

vakbladeuclides.nl/965olympiadepuzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2021

Do 18/03

LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 96

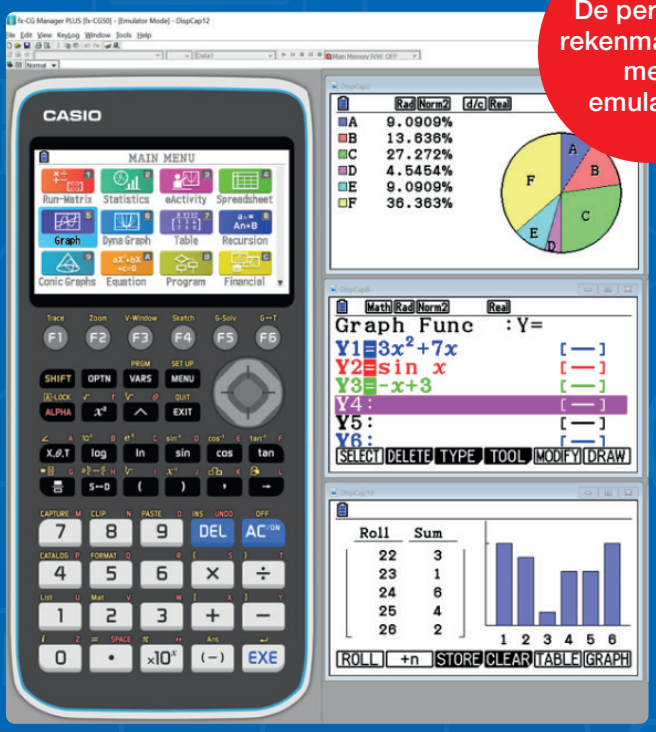
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	05 mei 2021	01 maart 2021
7	23 juni 2021	26 april 2021

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

Wat past bij jou?

	MODERNE WISKUNDE	GETAL & RUIMTE
Didactiek	- Ontdek wiskunde vanuit de praktijk - Oriënterende opdrachten - Kernachtige theorie	- Uitvoerige theorie en instructie - Veel en gericht oefenen
Leerlinggericht	Accent op ontwikkeling van wiskundig inzicht en begrip.	Accent op ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden.
Structuur paragraaf	1 les = 1 paragraaf	Paragraaf in lessen indelen naar eigen inzicht.
Prijs (FLEX)	€ 32,50 per deel	€ 38 per deel

Digitale omgeving

Opdrachten met feedback	V	V
Oefentoetsen met studieadvies	V	V
E-books en uitwerkingen	V	V
Online statistiekprogramma	V	
Excelaanpak van statistiek		V

+

FLEX

Eigen boek waarin je mag schrijven	V	V
Digitale licentie	V	V
Hulpboek geïntegreerd	V	
Werkbladen geïntegreerd		V

Zelf beoordelen? Scan de code!

Meer informatie vind je op **noordhoff.nl/voortgezet-onderwijs/methoden/wiskunde**

Noordhoff

Brengt je verder