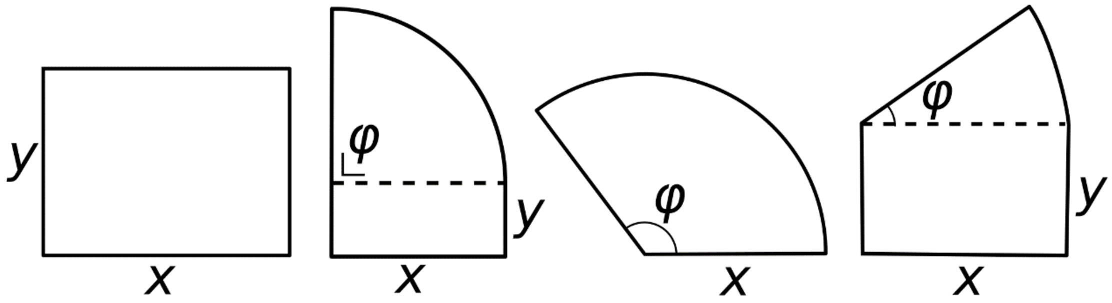
**Uitwerking  Puzzel 96-2: Twee verrassende stellingen** **Wobien Doyer**

**Lieke de Rooij**

We hebben deze keer twee mooie stellingen uitgekozen, een meetkundige en een algebraïsche.

**De meetkundige stelling:**

Deze stelling gaat over figuren met omtrek *O*, die bestaan uit een rechthoek met zijden *x* en *y*, met een aangeplakte cirkelsector met hoek $\varphi$ langs een zijde met lengte *x* (zie figuur 1)




*Figuur 1*

De bedoelde stelling zegt iets over het verband tussen *x*, *y*, $\varphi$ en het maximale oppervlak *S* als de omtrek *O* is gegeven.

En je kunt je leerlingen verrassen door ze bijvoorbeeld een waarde voor de omtrek *O* te laten kiezen en dan vervolgens direct een of meer van de bovengenoemde waarden *x*, *y* , $\varphi$ of het maximale oppervlak *S* te voorspellen.

En differentiëren of integreren is niet nodig.

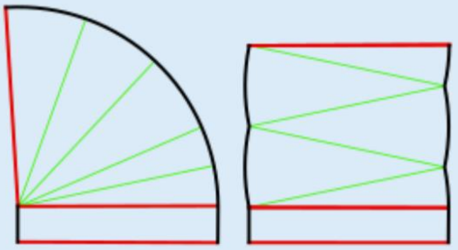
In de eerste twee plaatjes geldt van links naar rechts: $\varphi$ = 0 en 90 graden. In het derde plaatje geldt *y* = 0 en in het 4e plaatje staat alles nog open.

Inzender Harm Bakker merkte over deze puzzel op: Twee opvallende eigenschappen, de eerste meetkundig (die we algebraïsch gaan aanpakken), de tweede meetkundig (waarbij het bewijs min of meer meetkundig is).

**Opgave 1**: Bepaal de maximale oppervlakte *S* voor de eerste 3 plaatjes, als *O* = 8 en de exacte waarden van *x*, *y*, $\varphi$ die daar bij horen.

**Uitwerking opgave 1**:

Plaatje 1: de omtrek $8 = 2x + 2y$, dus $x + y = 4$. Als $x = 2 + d$, dan is $y = 2 - d$.
De oppervlakte is dan $xy = (2 + d)(2 - d) = 4 - d^2$, en dat is maximaal 4 als $d = 0$.
Conclusie: $x = y = 2$ (een vierkant) en $S = x^2 = 4$.



Figuur 2

Gedachte vooraf bij de plaatjes 2 - 4:
Als je de cirkelsector verknipt tot kleinere cirkelsectoren en die op elkaar op de rechthoek stapelt met om-en-om het puntje naar links en naar rechts dan krijg je een geheel dat lijkt op een rechthoek (vooral als je begint en eindigt met een smallere sector).
En voor een rechthoek zagen we in plaatje 1 dat de oppervlakte maximaal is als het een vierkant is.

We laten zien dat een cirkelsector met booglengte $2k$ en straal $x$ dezelfde omtrek en oppervlakte heeft als een rechthoek van $x$ bij $k$:
Omtrek: is in beide gevallen $2x + 2k$
Oppervlakte rechthoek: $kx$, cirkelsector: $\frac{2k}{2\pi x} \cdot \pi x^2 = kx$
Daarom kunnen we in de plaatjes 2, 3 en 4 uit figuur 1 de cirkelsectoren vervangen door een rechthoek van $x$ bij $k$ zonder dat de omtrek of de oppervlakte verandert, en dus geldt in alle figuren dat de oppervlakte maximaal is als het resultaat van de vervanging een vierkant is.

In plaatjes 2 tot en met 4 stellen we de booglengte op $2k$. Dan geldt voor alle plaatjes:
$\boldsymbol{x = 2, y + k = 2}$**, en oppervlakte = 4**

Het is handig de hoek $\varphi$ uit te drukken in radialen. De lengte van de boog is dan gelijk aan $\varphi \cdot x$ (waarin $x$ = de straal van de cirkel)

Plaatje 2: De hoek $\varphi$ is hier recht $\Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 2k = \frac{\pi}{2} \cdot x$ en omdat $x = 2$: $k = \frac{1}{2}.\pi$.
Omdat $y + k = 2$, is $y = 2 - \frac{1}{2}.\pi$ en oppervlakte = 4.

Plaatje 3: We hebben nu $y = 0$. Omdat $y + k = 2$ geldt $k = 2$.
De lengte van de cirkelboog is dan $2k = 4$
Booglengte $= \varphi x$ geeft dan $\varphi x = 4$ met $x$=2, en $\varphi = 2$ radialen (= $\frac{360}{\pi}{}^\circ$ )

**Opgave 2**: Bepaal ook voor het 4e plaatje de maximale waarde van oppervlak $S$ als $O$ = 8 en geef het verband tussen $x$, $y$ en de hoek $\varphi$ dat bij die maximale oppervlakte hoort.
**Uitwerking opgave 2**:
Plaatje 4: We weten: voor de maximale oppervlakte = 4 hebben we $x = 2$ en $y + k = 2$
Er is dan een oplossing voor elke waarde van $y < 2$ met oppervlakte = 4.
De lengte van de boog is dan $2k = 2(2 - y)$.
Dus $\varphi = 2 - y$ radialen. (of $\frac{(2-y)}{2\pi} \cdot 360^\circ$ )

**Opgave 3**: Formuleer met de gevonden eigenschappen de bedoelde stelling, in het algemene geval.
**Uitwerking opgave 3:**
Voor figuren met omtrek $O$, die bestaan uit een rechthoek met breedte $x$ en hoogte $y$, met een daarop gestapeld cirkelsector met straal $x$ en hoek $\varphi$ radialen is de oppervlakte van de figuur maximaal als $x = O/4$ en $\frac{\varphi x}{2} + y = x$. De oppervlakte is dan $x^2 = \frac{O^2}{16}$

**De algebraïsche stelling:**
Deze zou in een iets andere vorm bij je bekend kunnen zijn, en dat is eigenlijk tegen onze principes in onze puzzels. Maar we vinden die stelling zo leuk dat we het toch (nog een keer) onder de aandacht willen brengen en we hebben er wel iets aan toegevoegd.
De stelling luidt:

$$\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2m}{n}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{3m}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{(n-1)m}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2n}{m}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{3n}{m}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{(m-1)n}{m}\right\rfloor,$$

of kort genoteerd:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{in}{m}\right\rfloor$$

Daarbij zijn $m$ en $n$ gehele positieve getallen en relatief priem, dus er is geen gemeenschappelijke deler >1.
De haakjes $\lfloor\ \rfloor$ betekenen dat er naar beneden wordt afgerond, ook wel aangeduid met 'floor'.

Om er in te komen:
**Opgave 4a**: Toon aan dat dit klopt voor $m$ = 7 en $n$ = 4 en geef de uitkomsten van de sommaties.
**Uitwerking opgave 4a:**
Met $m$ = 7 en $n$ = 4 wordt de eerste som:
$\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{3}\left\lfloor\frac{7i}{4}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{7}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{14}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{21}{4}\right\rfloor = 1 + 3 + 5 = 9$
En de tweede som:
$\sum_{i=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{in}{m}\right\rfloor = \sum_{i=1}^{6}\left\lfloor\frac{4i}{7}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{4}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{8}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{12}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{16}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{20}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{24}{7}\right\rfloor = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$
De beide sommen zijn inderdaad gelijk.

Zowel voor opgave 4b als 5 werden zowel algebraïsche als meetkundige oplossingen gegeven. Hoewel de meetkundige oplossing eenvoudiger is geven we hier van beiden een voorbeeld. We bekijken eerst de algebraïsche oplossingen.

**Opgave 4b**: Bewijs deze stelling met $m$ en $n$ relatief priem, en geef de uitkomsten van de sommaties als een eenvoudige formule in $n$ en $m$.
**Algebraïsche uitwerking opgave 4b:**
We gebruiken een eigenschap van de floor functie: als $a$, $b$ en $c$ geheel en $c$ is geen deler van $b$ dan geldt: $\left\lfloor a - \frac{b}{c}\right\rfloor = a - \left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor - 1$. Bewijs: zie blz. 6

We moeten berekenen: $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$

We bekijken de term $j = n - i$: $\left\lfloor\frac{jm}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{(n-i)m}{n}\right\rfloor = \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor$. De reeks $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor$ is dus dezelfde reeks, in omgekeerde volgorde. Tellen we beide reeksen op, dan hebben we 2× de gezochte som (net als bij het bepalen van de som van een rekenkundige reeks).

De $i$-de term van die gecombineerde reeks is $\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor$

Volgens de hierboven geformuleerde eigenschap geldt nu, als $n$ geen deler is van $im$:

(I): $\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + m - \left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor - 1 = m - 1,$

terwijl als $n$ wel een deler van $im$ is (de breuken in de formule zijn dan gehele getallen):
(II): $\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor = \frac{im}{n} + m - \frac{im}{n} = m$

Als $m$ en $n$ relatief priem zijn en $i < n$ kan $n$ geen deler zijn van $im$, en geldt formule (I) voor alle waarden van $i$:

$\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\{m - 1\} = \frac{(n-1)(m-1)}{2}$

In de formule kunnen we $n$ en $m$ verwisselen zonder dat de waarde verandert. De sommen $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$ en $\sum_{i=1}^{m-1}\left\lfloor\frac{in}{m}\right\rfloor$ zijn dan gelijk. Daarmee hebben we tegelijkertijd, voor het geval dat $m$ en $n$ relatief priem zijn, zowel de stelling bewezen als de waarde van de sommen bepaald.

En dan beweren wij dat de stelling ook geldt als $m$ en $n$ wel een gemeenschappelijke deler hebben groter dan 1. Wel moet dan de formule voor de uitkomst van de sommaties in $n$ en $m$ worden aangepast.

**Opgave 5**: Toon dit aan door eerst zelf een voorbeeld te kiezen en vervolgens voor het algemene geval. Geef ook een formule voor de uitkomst van de sommaties

**Algebraïsche uitwerking opgave 5:**

Als $\text{ggd}(m, n) = g > 1$, dan zal voor een aantal waarden van $i$ gelden dat $\frac{im}{n}$ een geheel getal is, namelijk als $i$ een veelvoud is van $\frac{n}{g}$ en dat komt voor $i = 1$ tot en met $n - 1$ precies $g - 1$ keer voor. Voor die waarden geldt formule (II).

In de som $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor\right\}$ zijn daarom $g - 1$ waarden van $i$ waarvoor geldt:

$\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor = m$ en $(n-1) - (g-1)$ waarden waarvoor $\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor = m - 1$.

De som wordt dan $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor + \left\lfloor m - \frac{im}{n}\right\rfloor\right\} = \frac{1}{2}\left[\big((n-1) - (g-1)\big)\cdot(m-1) + (g-1)\cdot m\right] =$

$\frac{1}{2}[(n-1)(m-1) - (g-1)(m-1) + (g-1)\cdot m] = \frac{1}{2}\big((n-1)(m-1) + (g-1)\big)$ ,

Dus als GGD($m$,$n$)=$g$ dan is $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor = \frac{(n-1)(m-1)+(g-1)}{2}$

(merk op dat dit ook klopt voor $g = 1$, dan gaat de formule over in de formule die we vonden voor het geval dat $n$ en $m$ onderling priem zijn)

Ook deze formule is symmetrisch in $n$ en $m$ en daarom zijn beide sommen gelijk aan deze uitdrukking  en zijn de sommen gelijk. Daarmee hebben we tegelijkertijd, voor het algemene geval, zowel de stelling bewezen als de waarde van de sommem bepaald.

## 2: meetkundige uitwerking:

**Opgave 4b**: Bewijs deze stelling met $m$ en $n$ relatief priem, en geef de uitkomsten van de sommaties als een eenvoudige formule in $n$ en $m$.

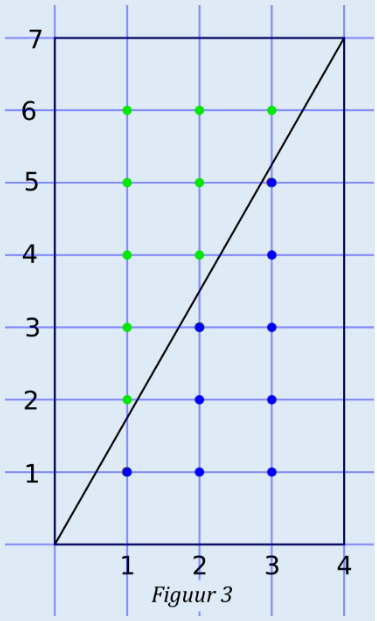
In het volgende bewijs is het niet nodig te veronderstellen dat $m$ en $n$ relatief priem zijn. We maken een grafische voorstelling van de eerste som $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$

We tekenen op ruitjespapier een rechthoek met breedte $n$ en hoogte $m$ en de stijgende diagonaal van de rechthoek (zie figuur 3 waarin $n$ = 4 en $m$ = 7).

We markeren alle roosterpunten binnen de rechthoek op of onder de diagonaal met blauwe bolletjes.

Dan is de naar beneden afgeronde waarde $\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$ gelijk aan het aantal blauwe bolletjes op de bijbehorende verticale roosterlijn .

Conclusie: de som $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$ gelijk aan het totale aantal blauwe bolletjes en hebben we: $\sum_{i=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{im}{n}\right\rfloor$ = het aantal roosterpunten binnen de rechthoek van $n$ bij $m$.



*Figuur 3*

Maar natuurlijk is het aantal roosterpunten op of onder de diagonaal binnen een rechthoek van $m$ bij $n$ gelijk aan die binnen een rechthoek van $n$ bij $m$.

Daarom geldt: $\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{im}{n} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{in}{m} \right\rfloor$

**Daarmee hebben we bewezen dat de stelling klopt voor alle gehele *n* en *m*** (ook als $n$ en $m$ niet relatief priem).

**Als *n* en *m* relatief priem zijn** is het eenvoudig om ook de waarde van de som te bepalen. Binnen de rechthoek liggen dan geen roosterpunten op de diagonaal. Dan is het aantal blauwe bolletjes de helft van het totale aantal roosterpunten binnen de rechthoek, dus $(m-1)(n-1)/2$

Conclusie: als $\text{GGD}(n, m) = 1$: $\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{im}{n} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{in}{m} \right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$

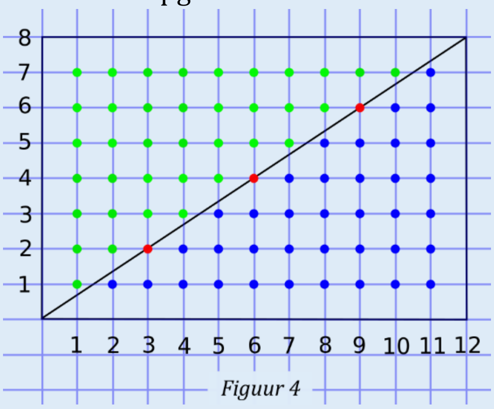
**Opgave 5**: Toon aan dat de vergelijking ook geldt als $\text{ggd}(m, n) > 1$, door eerst zelf een voorbeeld te kiezen en vervolgens voor het algemene geval. Geef ook een formule voor de uitkomst van de sommaties

**meetkundige oplossing van opgave 5.**

We hoeven alleen nog op zoek naar een formule voor de gelijke sommen als $m$ en $n$ een gemeenschappelijke factor hebben, want het meetkundige bewijs dat de twee sommen gelijk zijn in opgave 4 geldt ook als $m$ en $n$ relatief priem zijn.

In dat geval liggen er roosterpunten op de diagonaal binnen de rechthoek, zoals te zien is in figuur 4 (met $n = 8$, $m = 12$)

We weten uit opgave 4 dat beide sommen gelijk zijn aan het aantal roosterpunten binnen de rechthoek op of onder de diagonaal. In figuur 4 hebben alle roosterpunten binnen de rechthoek een kleurtje: blauw onder de diagonaal, rood op de diagonaal en groen erboven. De beide sommen zijn daarom gelijk aan het aantal blauwe punten + het aantal rode punten.



*Figuur 4*

Als $g$ = GGD($m$,$n$) , dan is het aantal rode punten $g-1$, en dus is het aantal blauwe en groene punten $(m-1)(n-1)-(g-1)$, en het aantal blauwe punten is daarvan de helft.

Het aantal blauwe punten + het aantal rode punten is daarom: $\frac{(m-1)(n-1)-(g-1)}{2} + (g-1) = \frac{(n-1)(m-1)+(g-1)}{2}$

Dit geldt natuurlijk ook voor het geval dat $m$ en $n$ niet relatief priem zijn, dan is $g = 1$, dus

$g - 1 = 0$, en gaat deze formule over in de eerder gevonden formule.

Bewijs van de eigenschap van de floor-functie: als $a$, $b$ en $c$ geheel en $c$ is geen deler van $b$ dan geldt: $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor = a-\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor - 1$.

Bewijs: uit de eigenschappen van $a$, $b$ en $c$ weten we dat: $a-\frac{b}{c}$ geen geheel getal is.
Gevolg: $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor < a-\frac{b}{c}$ (want door naar beneden af te ronden wordt het kleiner) en het verschil tussen de twee waarden is <1. Dan is: $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor = a-\frac{b}{c}-x$ met $0<x<1$

Ook geldt $\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor < \frac{b}{c}$ met een verschil <1. En $\frac{b}{c} = \left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor + y$ met $0<y<1$

Dus $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor = a-\frac{b}{c}-x = a-\left(\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor + y\right)-x = a-\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor-(y+x)$

Omdat zowel $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor$ als $a-\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor$ gehele getallen zijn moet $(y+x)$ ook geheel zijn.

$0<(y+x)<2$, dus $(y+x)=1$

Dan is $\left\lfloor a-\frac{b}{c}\right\rfloor = a-\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor-(y+x) = a-\left\lfloor\frac{b}{c}\right\rfloor-1$ QED.