

EUCLIDES



MARTIN KINDT SPECIAL

Breuken op de helling

1001 redenen waarom $2^0 = 1$

Hoe oneigenlijk is 'oneigenlijk'?

Hoe Wallis aan zijn product kwam

Zwembad en Chinese cake

Chinese formules

Uit het boek van Fibonacci

Pythagoras in meer dimensies

Algebra om te bewijzen

Waar een merkwaardig product toe leidt...

Symmetrie in algebra

De stelling van Napoleon

Rekenen als een robot, wie wil dat nou?

Rondom wortel vijf

Natuurlijke getallen, die zijn pas echt!

De twee-vliegen-in-één-klap-kromme

Machtige Meetkunde

Twee krommen genaamd 'folium'

Haakjes, hokjes, hekjes

Dualiteit in meetkunde

Pythagorische rijtjes

Andere tijden meetkunde



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

MARTIN KINDT SPECIAL 2021

INHOUDSOPGAVE

MARTIN KINDT SPECIAL



BREUKEN OP DE HELLING (1)

Maart 2015

3

BREUKEN OP DE HELLING (1)

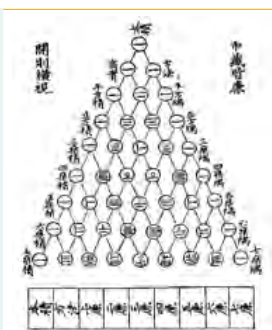
Mei 2015

8

1001 REDENEN
WAAROM $2^0 = 1$

December 2015

12



PYTHAGORAS IN MEER DIMENSIES

Juni 2017

33

ALGEBRA OM TE BEWIJZEN

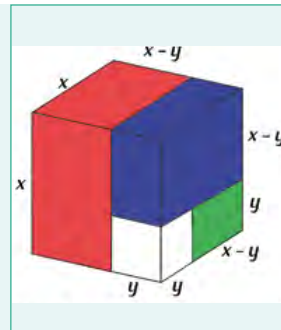
November 2017

37

WAAR EEN MERKWAARDIG
PRODUCT TOE LEIDT...

Februari 2018

41



HOE ONEIGENLIJK IS 'ONEIGENLIJK'?

Februari 2016

16

HOE WALLIS AAN ZIJN PRODUCT KWAM

April 2016

20

ZWEMBAD EN CHINESE CAKE

Juni 2016

25

CHINESE FORMULE

December 2016

28

UIT HET BOEK VAN FIBONACCI

Februari 2017

30

SYMMETRIE IN ALGEBRA

Maart 2018

45

DE STELLING VAN NAPOLEON

Februari 2018

49

REKENEN ALS EEN ROBOT, WIE WIL DAT NOU?

December 2018

53

RONDOM WORTEL VIJF

Februari 2019

57

NATUURLIJKE GETALLEN, DIE ZIJN PAS ECHT!

Maart 2019

61

DE TWEE-VLIEGEN-IN-EEN-KLAP-
KROMME
Juni 2019

66

MACHTIGE MEETKUNDE (1)
December 2019

69

MACHTIGE MEETKUNDE (2)
Januari 2020

74

TWEE KROMMEN GENAAMD 'FOLIUM'
Mei 2020

79

HAAKJES, HOKJES,
HEKJES
Juni 2020

84



DUALITEIT IN MEETKUNDE
Oktober 2020

88

PYTHAGORISCHE RIJTJES
December 2020

93

ANDERE TIJDEN MEETKUNDE
Januari 2021

97



Kort vooraf

Het begon met een mailtje van Henk Hietbrink, die bij Martin op bezoek was geweest. 'Weet je dat het in oktober precies zestig jaar geleden is dat Martin als docent begonnen is? Is dat iets om aandacht aan te schenken in *Euclides*?' Nu denk ik Martin een beetje te kennen, dus het leek me geen goed idee om dat onaangekondigd te doen. En dus mailde ik hem daarover en het antwoord was als verwacht. Maar een paar weken later kwam hij er zelf op terug. 'Ik vermeld het wel terloops in het artikel: 'Andere tijden meetkunde', waarin ik terugblik op de veranderingen in het meetkundeonderwijs in die zestig jaar'. Martin wil liever zijn wiskundeparels laten schitteren dan zichzelf... En hoe kunnen we dat dan beter doen dan de 24 meest recente bijdragen te bundelen tot een 'Wiskunde Parel Special', die we dan toch voor het gemak maar de 'Martin Kindt Special' genoemd hebben. En die 24 bijdragen passen precies op 100 bladzijden, mooier kan het niet worden. Op het Freudenthal Instituut hangt een levensgroot portret van Hans Freudenthal van gekleurde punaises, in 2005 gemaakt ter ere van zijn honderdste geboortedag. Het portret op de voorkant van deze *Euclides* is van exact dezelfde 'digitale' punaises gemaakt. Met die symboliek wil ik persoonlijk Martin feliciteren met deze mijlpaal. Toch een beetje bazuingeschal dus, en ik ga er niet eens mijn excuus voor aanbieden... Ik hoop dat deze *Euclides* op de een of andere manier zijn weg weet te vinden in het wiskundeonderwijs, als inspiratiebron voor docenten én leerlingen! Oh, en Martin, was jij toevallig ook niet jarig deze maand...?

Tom Goris

BREUKEN OP DE HELLING (1)

Martin Kindt

In het basisonderwijs worden concrete modellen gebruikt om breuken grijpbaar te maken. Voor het automatiseren van rekenregels is minder aandacht. In de wiskunde van met name het havo/vwo speelt het opereren met breuken of breukvormen een rol. Misschien is het een idee om het opfrissen en uitbouwen van breukrekenen te combineren met het begrip helling.

Vergeetboek

‘Hoeveel is één derde plus vier zesden plus een half?’ Philip Freriks stelde de vraag afgelopen zomer tijdens de televisiequiz *De slimste mens*. Geen van de drie kandidaten wist het goede antwoord. Natuurlijk, het was hoofdrekenen tegen de klok. Maar kandidaat nummer drie had toch voldoende tijd om bijvoorbeeld te beseffen dat $\frac{4}{6}$ ingevuld kan worden voor $\frac{2}{3}$? Pierre Van Hiele schreef zo’n 40 jaar geleden:^[1]

‘Iedereen weet dat het met het rekenen in de basisschool niet erg goed gaat. Het optellen van ongelijknamige breuken kost veel moeite. Het vermenigvuldigen en delen van breuken wordt als een kunstje aangeleerd en het is verbijsterend hoe snel de kunstjes weer vergeten worden.’

Dat was in de tijd toen er nog uitvoerig geëxerceerd werd met breuken. Of een meer begripsmatige aanpak zoals die nu in veel basisscholenmethoden gehanteerd wordt, het vergeten tegengaat, weet ik niet. Wel weet ik dat als je de vraag van Philip stelt aan leerlingen uit groep 8 met een IQ vergelijkbaar aan dat van de drie slimste-mens-kandidaten, je wel een goed antwoord kunt verwachten. Doe je dat een jaar later, dan is de kans op een goede reactie flink kleiner. Dat was vroeger zo – ik herinner me hoe menig gymnasiast in het brugjaar vergeten was hoe je $\frac{1}{2}$ met $\frac{1}{3}$ moest vermenigvuldigen – en dat zal nog zo zijn.

In het havo/vwo-onderwijs spelen breuken een belangrijke rol: bij algebra, bij kansrekening en soms bij meetkunde. Wijlen Leen Streefland promoveerde in 1988 op het proefschrift *Realistisch Breukenonderwijs* en een van zijn stellingen luidde: ‘het rekenen met breuken volgens formele regels hoort niet thuis op de basisschool, maar in de wiskunde van het vo’. Daar ben ik het hartgrondig mee eens. De consequentie is dan wel dat er in het havo/vwo veel moet gebeuren aan rekenen met breuken en breukvormen. Maar hoe pak je dat aan?

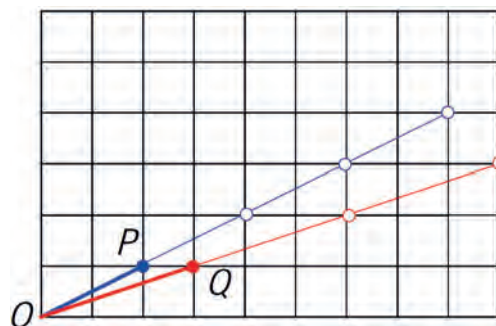
Hellingen in een rooster

Kort geleden werd ik herinnerd aan een jaren-zeventigpakketje van het toenmalige IOWO (de vroege voorloper van het Freudenthal Instituut) bestemd voor het brugjaar van wat toen nog het lager beroepsonderwijs

heette. De titel was *Procenten* en het had een remedial karakter. De auteur, Ger Jansen, was op het idee gekomen om hellingspercentages als instap te kiezen en dat bleek een prima vondst. Daaraan denkend kreeg de inval dat je het ophalen van breuken in het vo ook mooi aan hellingen zou kunnen koppelen.

Het terrein is een rooster van vierkantjes, op papier, computerscherm of op een ouderwets spijkerbord. Het rooster denk ik mij naar links en onder begrensd met als grenspunt de oorsprong O . Vanuit O kunnen de andere roosterpunten worden bereikt via schuin oplopende rechte lijnen. De roosterpunten kun je voorzien van geheeltallige coördinaten, maar dat hoeft niet meteen.

In het plaatje is duidelijk te zien dat lijn OP wat steiler



figuur 1

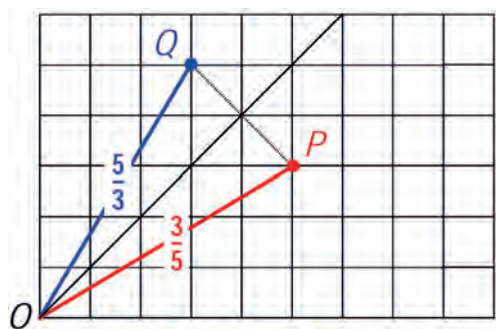
is dan lijn OQ . Die steilheid laat zich uitdrukken met een breuk: verticale stijging gedeeld door horizontale voortgang, of op zijn Amerikaans: *rise over run*. In de schoolboeken heette dit vroeger deftig *richtingscoëfficiënt* (soms minder deftig *rico*) maar tegenwoordig is het *hellingsgetal*. In navolging van het engelse *slope* zal ik hier de korte term *helling* gebruiken.

De hellingen van OP en OQ in het plaatje zijn dan respectievelijk $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$. Als die lijnen worden verlengd, kom je steeds nieuwe roosterpunten tegen. Maar de helling verandert natuurlijk niet. Dit illustreert:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots \text{ en } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$$

In de tijd van de *New Math* werd gezegd: een breuk is een ‘equivalentieklasse van paren gehele getallen’. Via de voorstelling met rechte lijnen uit O hoeven we daar niet moeilijk over te doen, je ziet het voor je!

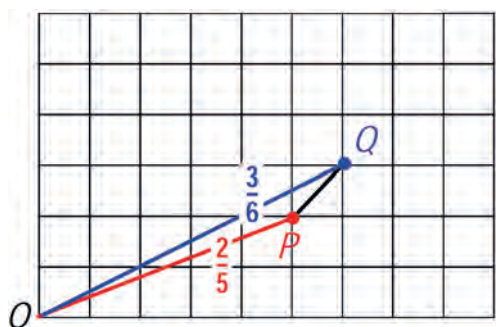
Wat je ook ziet is dat het omkeren van een breuk overeenkomt met het spiegelen van een lijn ten opzichte van de roosterdiagonaal uit O . De diagonaal (helling 1) is zo de scheidslijn tussen de hellingen > 1 en < 1 .



figuur 2

Hellingen (van lijnen uit O en in het eerste kwadrant) hebben wel een ondergrens (0), maar geen eindige bovengrens; dit kan aanleiding zijn voor een spannend klassengesprek.

Dat vermenigvuldiging van teller en noemer van een breuk met eenzelfde natuurlijk getal de helling niet doet veranderen, is al opgemerkt. Maar wat is het effect als je bij teller en noemer eenzelfde getal optelt?



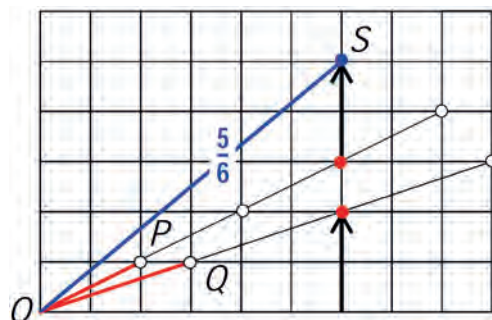
figuur 3

In de figuur is te zien wat er gebeurt als je bij teller en noemer 1 optelt. Is de breuk waar je van uitging kleiner dan 1, dan wordt de helling groter. Is de uitgangsbreuk groter dan 1, dan wordt de helling minder steil. Je kan dit eindeloos herhalen, startend met bijvoorbeeld $\frac{2}{5}$ en er ontstaat een opklimmende rij van breuken onder 1: $\frac{2}{5} < \frac{3}{6} < \frac{4}{7} < \frac{5}{8} < \dots$

Start je met een breuk > 1 , dan komt er vanzelf een afdalende rij. Daarbij kun je ook denken aan 'omdraaien is spiegelen in de roosterdiagonaal'. Als een leerling (bij algebra bijvoorbeeld) in de fout gaat door bij (van) teller en noemer hetzelfde getal op te tellen (af te trekken), dan zetten we daar als leraar een dikke rode streep door. Maar is het dan vanuit didactisch/pedagogisch perspectief niet veel beter om na te gaan wat zo'n foutieve operatie wél doet? Het hellingmodel is hierbij blijkbaar heel illustratief.

Optellen en vermenigvuldigen van breuken

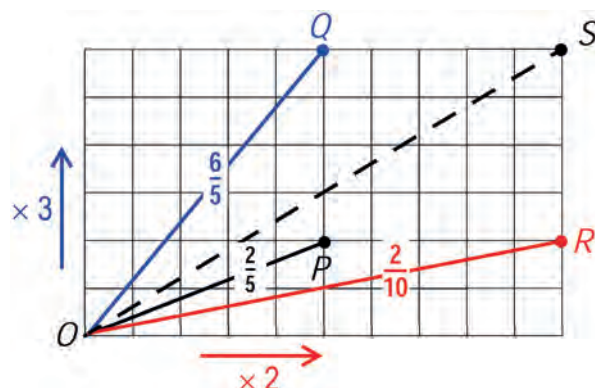
Door op lijnen met verschillende helling roosterpunten te zoeken die op eenzelfde verticaal liggen, kun je de *som van twee hellingen* bepalen, zie de volgende figuur. Helling $OS = \text{helling } OP + \text{helling } OQ$, ofwel $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Dit optellen van hellingen anticipeert op het 'superponeren' van grafieken, en als ik nog veel verder vooruitkijk, op de somregel voor het differentiëren, waarbij in feite *locale hellingen* van krommen worden opgeteld.



figuur 4

Je kunt ook afspreken wat je bedoelt met bijvoorbeeld drie keer zo steil (drie keer zoveel *rise* bij gelijke *run*) of zeg een half keer zo steil (gelijke *rise* bij 2 keer zoveel *run*). Dat geeft dan bijvoorbeeld (zie figuur): $3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ en $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10} (= \frac{1}{5})$.

Meetkundig komt dit respectievelijk neer op een oprekking in verticale en horizontale richting. Ook hier is er weer sprake van een vooruitlopen op operaties met grafieken zoals die later veelvuldig voorkomen.



figuur 5

Vermenigvuldigen van een helling met $\frac{3}{2}$ kan worden gezien als combinatie van een verticaal oprekken met factor 3 en een horizontaal oprekken met factor 2. In ons voorbeeld: $\frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 5} = \frac{6}{10} (= \frac{3}{5})$. De uitkomst is de helling van OS .

Intermezzo: een oude formule

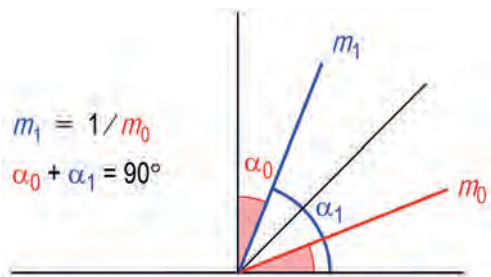
Nota bene: optellen of verveelvoudigen van hellingen rijmt niet met dezelfde operaties op de bijpassende hellingshoeken! Zo is de som van de hellingshoeken bij de hellingen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ juist gelijk aan 45° , maar $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1$. Dit volgt uit een mooie formule-uit-de-oude-doos.

Als m de helling is die hoort bij de som van de hellingshoeken

van lijnen met helling m_0 en m_1 , dan: $m = \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0 m_1}$.

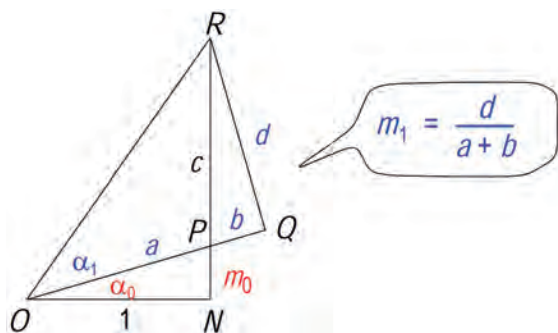
Toegepast op $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ komt er: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$. Een goede

oefening in breukrekenen, zeker. Maar wie kent die formule nog? Zou ik die formule (bijvoorbeeld in 3 of 4 vwo) van stal durven halen? Daar is toch pittige gonio voor nodig, somformules voor sin, cos en tan en dat gaat toch veel te ver...? Of kan het ook anders? Van Pólya heb ik de attitude meegekregen dat je bij een nieuwe formule eerst kunt kijken naar uiterlijke kenmerken en randgevallen. Zo'n uiterlijk kenmerk is hier de symmetrie in m_0 en m_1 en dat stemt uiteraard tevreden. De randgevallen vind je bij het nul worden van teller of noemer. Als m_0 en m_1 tegengesteld zijn (in een derde klas zijn de leerlingen allang vertrouwd met negatieve hellingen) zijn de bijbehorende hellingshoeken samen 180° (of als met gerichte hoeken wordt gewerkt 0°) en dat betekent hoe dan ook $m = 0$. Dit stemt overeen met de formule. Het tweede randgeval krijg ik als $m_0 m_1 = 1$, dus als de hellingen elkaars omgekeerde zijn en de lijnen elkaars spiegelbeeld in de roosterdiagonaal zijn.



figuur 6

De som van de hellingshoeken α_0 en α_1 is in dit geval 90° . En ja, dat correspondeert met het nul worden van de noemer in de formule! Nu een afleiding van de formule zonder gonio.



figuur 7

De gelijkvormigheid van de rechthoekige driehoeken ONP en RQP leidt naar evenredigheidstabel:

c	b	$d = m_1(a + b)$
a	m_0	1

figuur 8

Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$(1) ab = m_0 c$$

$$(2) c = ad = am_1(a + b)$$

Ik wil nu c uitdrukken in alleen m_0 en m_1 om dan de helling ($= c + m_0$) bij $\alpha_0 + \alpha_1$ te vinden. Er geldt: $c = am_1(a + b) = a^2 m_1 + abm_1$. Rekening houdend (Pythagoras) met

$$a^2 = 1 + m_0^2 \text{ en ook met } ab = m_0 c \text{ komt er}$$

$$c = (1 + m_0^2) m_1 + m_0 c m_1. \text{ Hieruit volgt: } c = \frac{m_1(1 + m_0^2)}{1 - m_0 m_1}.$$

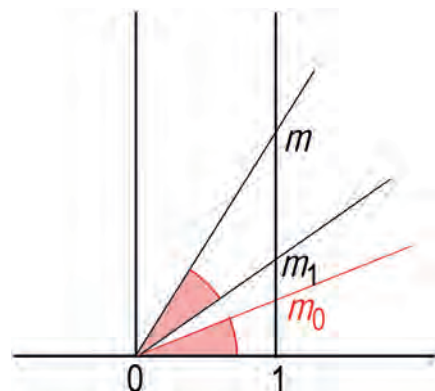
De bij α_0 en α_1 passende helling h is dus gelijk aan

$$m_0 + \frac{m_1(1 + m_0^2)}{1 - m_0 m_1} = \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0 m_1}.$$

Een bewijs steunend op elementaire middelen, maar niet wat je noemt 'een eitje'. Je zou de leerling er via een serie subvraagjes doorheen kunnen loodsen – een niet ongewone aanpak in onze schoolboeken – maar daar zou ik niet voor kiezen. Een klassengesprek met een hardop denkende, vragende en uitdagende leraar lijkt me een stuk beter. Misschien zou ik liever eerst naar het verschil van twee hoeken kijken, de figuur is hetzelfde, maar het idee wat natuurlijker en dan via de substitutie $m_1 \rightarrow -m_1$ bij de somformule uitkomen.

Achtergrond

Mijn sympathie voor de formule heeft vooral te maken met mijn fascinatie voor projectieve meetkunde. De structuur van de formule – gebroken lineair in elk van de twee variabelen m_0 en m_1 – is namelijk op voorhand duidelijk als je aan centrale projectie en het behoud van dubbelverhoudingen denkt. Voor de liefhebber zal ik dat hier nader toelichten. Beschouw m_0 en α_0 als vast en m_1 en α_1 als variabeel. Het vergroten van de hellingshoek van een lijn door O met α_0 komt neer op het draaien van de waaier van lijnen door O over hoek α_0 .



figuur 9

De lijnenwaaier O snijdt de lijn $x = 1$ in een puntenreeks. De rotatie van de waaier correspondeert met een transformatie van die puntenreeks, ofwel met een reële functie $m_1 \rightarrow f(m_1)$. Omdat de rotatie dubbelverhoudingen van 'vierstralen' invariant laat, doet f dit met (geordende)

puntenviertallen en dat betekent: $f(m_1) = \frac{Am_1 + B}{Cm_1 + D}$ voor zekere reële A, B, C en D .

Nu weet ik bij voorbaat dat de teller van de gebroken vorm nul is voor $m_1 = -m_0$ en dat de noemer nul is voor $m_1 = 1/m_0$. Daaruit volgt direct $B = Am_0$ en $C = -Dm_0$.

Kortom: $f(m_1) = \frac{Am_1 + Am_0}{-Dm_0m_1 + D} = \frac{A}{D} \cdot \frac{m_0 + m_1}{1 - m_0m_1}$.

Uit $f(0) = m_0$ volgt dan $A = D$ en de formule is een feit.

Kruislings vermenigvuldigen

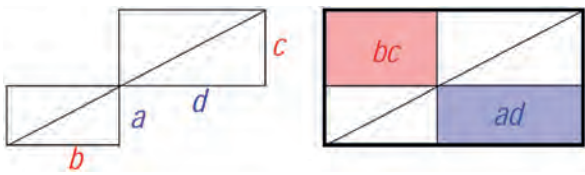
In de afgelopen herfstvakantie kregen mijn vrouw en ik een viertal kleinkinderen te logeren. Magali, inmiddels in 3 gymnasium, had voor de aardigheid haar wiskundeboek^[2] meegenomen. 'Volgende week repetitie, opa, ik heb er nog niks aan gedaan, zullen we samen even kijken?' Het hoofdstuk heet *Gelijkvormigheid*. Alle ingrediënten voor mijn eerste bewijs van de helling-bij-hoekensomformule zijn hier terug te vinden. Evenredigheidstabel,

kruisproducten, gelijkvormige driehoeken, Pythagoras, hellinggetal en -hoek. Maar voor het verband tussen de laatste twee wordt een black box gebruikt, de toetsen $\tan$ en $\tan^{-1}$ op het rekenmachientje. 'Dan moet je die hoek vermenigvuldigen met $\tan...$ ', aldus Magali. Het lijkt wel een kookboek met recepten; zó moet je dat doen, nadenken hoeft niet. Is dit wiskunde? Nee toch! Maar goed (dus eigenlijk niet goed), het hoofdstuk start met kruislings vermenigvuldigen. Via een paar twee-bij-twee-evenredigheidstabelletjes wordt geconstateerd dat de kruisproducten gelijk zijn en pats, dan direct algemeen, een tabel met a, b, c en d . Zonder een spoor van afleiding of bewijs. Die evenredigheidstabel is niet zo gek, maar waarom niet een met veel vakjes waarin dan een heleboel kruisproducten kunnen worden vergeleken? Dat leidt tot een vermoeden en vervolgens kan de evenredigheidsconstante ingezet worden om te snappen waarom dat klopt. Een generalisatie is dan al aardig dichtbij, en er kan worden geformaliseerd:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{l} \nwarrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \quad \end{array} \quad \begin{array}{l} ad = a(kc) = ack \\ bc = (ka)c = ack \end{array}$$

figuur 10

Zo moeilijk kan dat niet zijn. Maar voor Magali had ik een ander bewijs in petto:

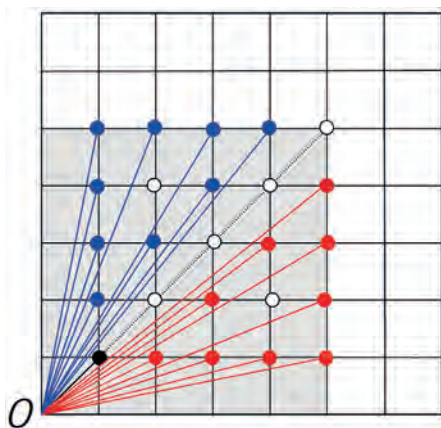


figuur 11

Gelijke breuken, gelijke hellingen. De diagonalen van de rechthoekjes in het linkerplaatje liggen in elkaars verlengde. Even inlijsten en zien dat de diagonaal drie rechthoeken in gelijke delen verdeelt, zodat voor de rode en de blauwe rechthoek dezelfde oppervlakte overblijft. Aanschouwelijker kan het niet: *quotiënten* als hellingen, *producten* als oppervlakten. Heeft u nu ook een visioen over differentiëren en integreren?

Zichtbaar is onvereenvoudigbaar

Terug naar de brugklas. Op alle roosterpunten kunnen identieke paaltjes (als spijkers op een spijkerbord) worden gedacht. Welke paaltjes zijn te zien met één oog vanuit de oorsprong? Als ik langs de lijn met helling $\frac{1}{2}$ kijk is alleen het punt (2,1) te zien. De andere punten (4,2), (6,3), ... worden aan het zicht onttrokken. Al gauw is het helder dat de vanuit O zichtbare punten corresponderen met paren onderling ondeelbare coördinaten ofwel met *onvereenvoudigbare breuken*. In de figuur zijn de zichtbare punten getekend binnen een vierkant met zijde 5 (en niet op de assen).



figuur 12

Een opdracht kan nu zijn om de bijpassende breuken die kleiner zijn dan 1 op te schrijven in opklimmende grootte. Het resultaat is: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Dit is een rijtje dat in de getaltheorie bekend staat als een Farey-reeks. Die reeks heeft twee bijzonderheden.

De eerste is dat het verschil tussen elke twee burens een stambreuk (breuk met teller 1) is).

Bijvoorbeeld: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ en $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

De tweede is dat als je de tellers en de noemers van twee breuken met een gemeenschappelijke buur optelt, je een breuk krijgt die gelijkwaardig is met de tussenbuur. Bijvoorbeeld: $\frac{1+2}{4+5} = \frac{1}{3}$ en $\frac{3+3}{5+4} = \frac{2}{3}$. Dit kan gemakkelijk voor alle voorkomende gevallen worden gecheckt, oefenen met een direct doel! Het geldt trouwens algemeen: als je van twee (positieve) breuken zowel de tellers als de noemers bij elkaar optelt, dan krijg je een zogenaamde 'tussenbreuk'. Kijk naar de hellingen:



figuur 13

Het simultaan optellen van tellers en noemers komt overeen met de bekende vectoroptelling. En dat dit een tussenbreuk oplevert, bevreedt dan niet. Startend met $0 = \frac{0}{1}$ en $1 = \frac{1}{1}$ kunnen via deze operatie stap voor stap alle breuken tussen 0 en 1 worden voortgebracht. Maar dat bewaar ik voor het vervolg op dit artikel.

Noten

- [1] Van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en Inzicht*. Muuses.
- [2] *Getal en Ruimte*, deel 3 vwo, laatste editie.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

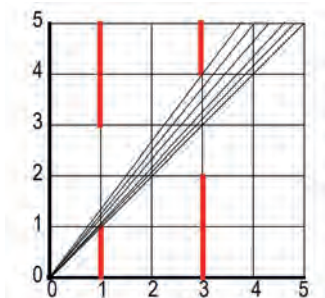
BREUKEN OP DE HELLING (2)

Martin Kindt

De lijn door de oorsprong die een hoek van 60° met de x-as maakt, treft buiten 0 geen enkel roosterpunt, hoever je het vlak ook uitbreidt! Met de verklaring van dat 'wonder' eindigt dit artikel van Martin Kindt, waarin na het refereren aan de koppeling tussen hellingen en breuken een interessante stamboom van breuken centraal staat.

Hellingen in de brugklas?

Met de introductie van het begrip 'hellinggetal' hoeft niet gewacht te worden tot de behandeling van lineaire functies. In mijn vorige artikel^[1] heb ik een summier schets gegeven hoe hellingen van schuine lijnen in een vierkantjesrooster kunnen dienen als context om het opereren met breuken wat op te frissen. Om elk misverstand te voorkomen: bij de eerste kennismaking met breuken zijn andere modellen (pizzamodel, breukenstrook, ...) natuurlijker en geschikter. Maar in de aanloop naar een meer formele behandeling van breuken lijkt het me geen slecht idee om het hellinggetal in een vroeg stadium van het voortgezet onderwijs te introduceren. Het mes snijdt hierbij aan twee kanten: het geeft een context om weer wat aan breukrekening te doen, en het anticipeert op de behandeling van functies en grafieken. Het hellingmodel geeft ook een verrassend inzicht in wat het effect is van foute rekenhandelingen op breuken. En er zijn veel mogelijkheden om speels te oefenen, zoals het vragen naar hellingen van lijnen die door een of meer 'poortjes' gaan.

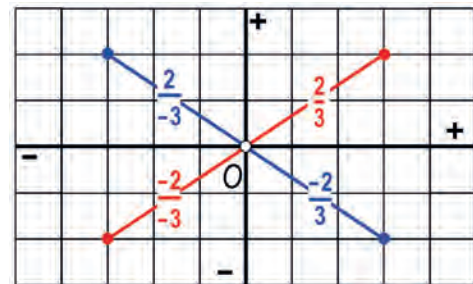


Vanuit het punt (0, 0) gaat een bundel lijnen door het linkerpoortje, de hellingen variëren van 1 tot 3. Een deel van die bundel gaat door beide poortjes, namelijk de lijnen waarvan de helling tussen 1 en $\frac{4}{3}$ ligt. Je kunt dan vragen hoe het zit als je het startpunt omhoog verplaatst naar (0, 1), (0, 2) of (0,3). In het laatste geval komen er *negatieve* hellingen in beeld; daar moet dan wel eerst aandacht voor zijn geweest. Variatie is er te over: combineer bijvoorbeeld verticale met horizontale poortjes. Tip: laat leerlingen ook zelf opgaven in deze geest ontwerpen; van 'eigen producties' steek je veel op!

Negatieve hellingen

Zodra negatieve getallen hun intrede hebben gedaan, kunnen ook negatieve hellingen ter sprake komen. Die

corresponderen met neergaande lijnen in het rooster. Het tegengestelde van een breuk krijg je als je een lijn spiegelt in een verticale of horizontale lijn.

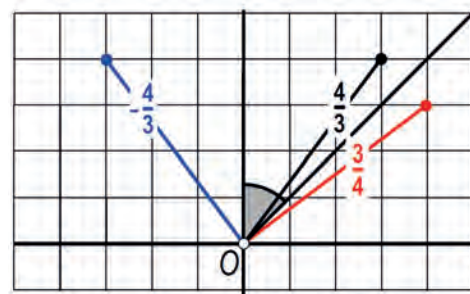


Zo wordt bijvoorbeeld zichtbaar gemaakt dat:

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \text{ en } \frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}$$

Zowel 'tegenspiegelde van' als 'omgekeerde van' zijn operaties die zichzelf weer opheffen, ofwel die hun eigen inverse zijn. De eerste operatie correspondeert met een spiegeling in de y-as (of x-as) en de tweede met een spiegeling in de diagonaal $x = y$.

Als we van een hellinggetal het *tegenspiegelde van het omgekeerde* nemen, komt er een helling van een lijn die loodrecht staat op de oorspronkelijke lijn:

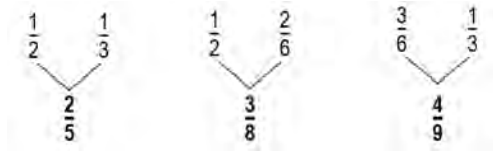


Ook zonder voorkennis van transformatiemeetkunde is dit goed te snappen. Kijk naar het voorbeeld. De lijn met helling $\frac{4}{3}$ maakt hoeken met de diagonaal $x = y$ en de y-as die samen gelijk zijn aan 45° . De hoek tussen de rode en blauwe lijn is duidelijk het dubbele hiervan!

Tussenbreuken

Terug naar breuken met positieve teller en noemer. Het naïef optellen van breuken, door zowel tellers als noemer te sommeren, levert een breuk op die ergens tussen

de twee breuken in ligt. In de getaltheorie wordt zo'n tussenbreuk wel een *mediant* genoemd. Deze operatie is geen eigenlijke bewerking op rationale getallen, want de uitkomst hangt af van de gekozen representant van het getal. Bijvoorbeeld:



Op deze manier kun je bij twee gegeven rationale getallen zoveel tussenbreuken maken, als je maar wilt. Als de representanten gelijke noemers hebben, vind je zo het *rekenkundig gemiddelde*. In het geval van $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ is dit $\frac{3+2}{6+6} = \frac{5}{12}$.

Rekenkundig gemiddelde:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a+c}{2b}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} \right)$$

Bij gelijke tellers komt er een ander gemiddelde op de proppen: het zogeheten *harmonisch gemiddelde*. Een verbale definitie hiervan klinkt wat ingewikkeld: *het omgekeerde van het gemiddelde van de omgekeerden*.

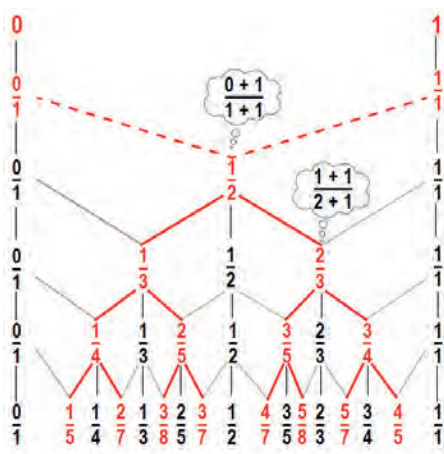
Harmonisch gemiddelde:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{2a}{b+d}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{a} \right)}$$

Denk aan een trainingsritje op de fiets in de bergen. Bergop met een snelheid van 12 km/u en dezelfde weg terug met 60 km/u. De gemiddelde snelheid over heen-en-terug is dan niet 36 km/u maar slechts 20 km/u. Neem de mediant van $\frac{60}{5}$ en $\frac{60}{1}$, *et voilà*.

Een breukenboom

De figuur toont hoe je stap voor stap via de mediant-operatie een groeiend aantal rationale getallen tussen 0 en 1 kunt genereren.



De 'stamhouders' 0 en 1 brengen de breuk $\frac{1}{2}$ voort. Dan worden $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ gemaakt door $\frac{1}{2}$ te paren aan $\frac{0}{1}$ en $\frac{1}{1}$. En zo verder, en zo voort.

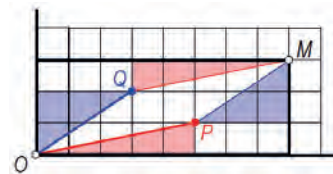
Dat er op elke rij een opklimmende rij van getallen komt te staan, spreekt vanzelf. Minder vanzelfsprekend is het volgende trio eigenschappen:

- het verschil tussen elk tweetal buren (rood-zwart) op dezelfde regel is een stambreuk (teller = 1);
- elke breuk in de boom is onvereenvoudigbaar;
- elk rationaal getal tussen 0 en 1 krijgt een plek in de boom.

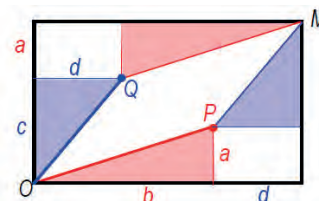
Deze eigenschappen kunnen vanuit het hellingbegrip meetkundig worden verklaard en dat ga ik nu doen.

Parallellogrammen en breuken

Twee lijnstukken OP en OQ en in het eerste kwadrant spannen een parallellogram op.

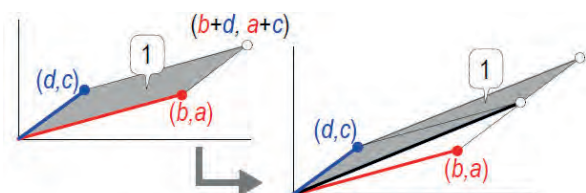


De oppervlakte van het parallellogram $OPMQ$ vind je door van de oppervlakte van de rechthoekige omlijsting de rode driehoeken, de blauwe driehoeken en de twee identieke rechthoekjes linksboven en rechtsonder af te trekken. In dit voorbeeld resulteert dat in 7, precies de teller van de breuk die je krijgt door het verschil van de hellingen van OQ en OP te berekenen. Dat dit niet op toeval berust, volgt na generalisatie:



De oppervlakte van $OPMQ$ is gelijk aan:
 $(a + c)(b + d) - ab - cd - 2ad = bc - ad$ (!)
 En ook:
 $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$

Bij elk paar breuken past zo'n parallellogram. Is het verschil van de breuken een breuk met teller 1, dan is de oppervlakte van dit parallellogram ook 1. Bovendien: het verschil van de mediant van twee zulke breuken met elk van die breuken heeft dan weer 1 als teller.



Het plaatje spreekt boekdelen. Een puur algebraïsche verklaring werkt ook, maar die laat ik aan de lezer over. Omdat bij de start van de stamboom de verschillen tussen buren op een rij een breuk met teller 1 is, weet ik dat dit zo blijft bij verdere afdaling in de boom, inductie!

Merk op dat uit de formule (I) volgt dat de oppervlakte van een (niet-ontaard) parallellogram met roosterpunten als hoekpunten een *positief geheel* getal is. Bijgevolg is de kleinst mogelijke oppervlakte van een 'roosterparallellogram' gelijk aan 1! Ik weet dan meteen ook dat de kleinst mogelijke oppervlakte van een roosterdriehoek $\frac{1}{2}$ is. Daaruit volgt dan dat een minimaal parallellogram (oppervlakte 1) geen inwendige roosterpunten heeft. Verbind een eventueel inwendig roosterpunt met de vier hoekpunten van dat parallellogram. De vier roosterdriehoeken die je krijgt, hebben dan samen een oppervlakte ≥ 2 , tegenspraak dus.

De tweede eigenschap (b.) is een direct gevolg van a. Stel bijvoorbeeld dat y/x en nw/nv buren zijn in de boom, waarbij n een natuurlijk getal ≥ 2 is. Volgens a. is de oppervlakte van het bijpassende parallellogram 1. Het parallellogram opgespannen door de lijnstukken vanuit O naar (x, y) en (v, w) zou nu de oppervlakte $1/n$ hebben, in strijd met het eerder geconstateerde feit dat de oppervlakte van een roosterparallellogram een geheel getal is.

Eigenschap c. is het lastigst te bewijzen. Daarom eerst een voorbeeld: komt de breuk $\frac{17}{30}$ in de boom voor? Om te beginnen is het direct te zien dat deze breuk tussen $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$ ligt, twee buren in de derde rij van de boom. Ik ga nu stap voor stap vergelijken met tussenbreuken uit de boom in lagere rijen, eerst met $\frac{3}{5}$:

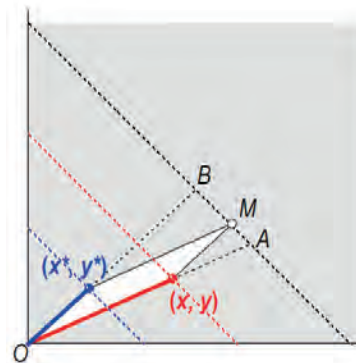
$$\begin{array}{l} \frac{17}{30} < \frac{3}{5} = \frac{18}{30} \longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{17}{30} < \frac{3}{5} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{4}{7} \\ \frac{17}{30} = \frac{119}{210} < \frac{4}{7} = \frac{120}{210} \longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{5}{9} \\ \frac{17}{30} = \frac{51}{90} > \frac{5}{9} = \frac{50}{90} \longrightarrow \frac{5}{9} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{9}{16} \\ \frac{17}{30} = \frac{138}{240} > \frac{9}{16} = \frac{135}{240} \longrightarrow \frac{9}{16} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{13}{23} \\ \frac{17}{30} = \frac{391}{690} > \frac{13}{23} = \frac{390}{690} \longrightarrow \frac{13}{23} < \frac{17}{30} < \frac{4}{7} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{17}{30} \end{array}$$

Er moet tot de achtste rij worden afgedaald in de boom, maar dan komen we $\frac{17}{30}$ ook tegen!

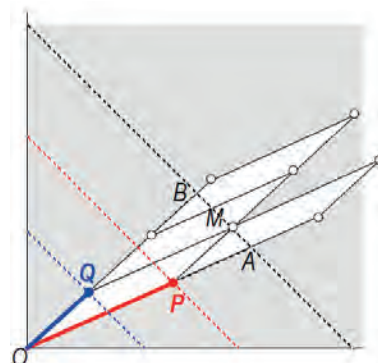
Wat ook vooraf al wel duidelijk was, namelijk dat bij voortschrijdende afdaling de tellers en noemers van de nieuwe breuken in de boom almaar groter worden, is de clou van het bewijs van de volledigheid van de boom. Stel ik heb een (onvereenvoudigbare) breuk t/n die tussen de buren y/x en y^*/x^* in ligt, dan geldt: $t + n \geq (y + x) + (y^* + x^*)$ (II)

Als dit waar is, ben ik klaar. Want het is helder dat de som van de vier getallen in het rechterlid stijgt met tenminste 1 bij elke afdaling in de boom en dus na een aantal stappen gelijk zal zijn aan de bovengrens $t + n$.

Het bewijs van (II) kan worden gegeven met behulp van (lineaire) algebra^[2], maar ik kies weer voor meetkundig inzicht. Het parallellogram passend bij de breuken y/x en y^*/x^* heeft de oppervlakte 1 en bevat van binnen geen roosterpunt. In de volgende figuur is dit parallellogram getekend en ook drie lijnen met helling -1 , die de x -as snijden in punten met respectievelijk de coördinaat $y^* + x^*$, $y + x$ en $y + x + y^* + x^*$.



De lijn uit $(0,0)$ naar het punt (n,t) gaat – eventueel na verlenging – door het 'poortje' AB . Als ik kan bewijzen dat het punt (n,t) , óf samenvalt met M óf boven de lijn AB ligt, dan is (II) bewezen. Het komt er dus op neer dat binnen de driehoek OAB geen roosterpunt mag liggen.



Betegel het vlak met parallellogrammen congruent met $OPMQ$. Omdat de enige roosterpunten binnen of op de rand van $OPMQ$ de vier hoekpunten zijn en omdat de betegeling het gevolg is van een herhaalde translatie over een vector met gehele kentallen, is het zeker dat er geen roosterpunten binnen driehoek OAB liggen en ook dat M het enige roosterpunt is tussen A en B . Het punt (n,t)

moet dus wel boven de lijn OA liggen of samenvallen met M . Kortom: $t + n \geq (y + x) + (y^* + x^*)$.

Tussen alle roosterpunten door

Merk op dat de breuken in onze boom stuk voor stuk kunnen worden omgedraaid om zo alle representanten van rationale getallen > 1 te krijgen. Deze nieuwe boom vormt samen met de boom van breuken tussen 0 en 1 de zogeheten boom van Stern-Brocot.^[3] Ik doe of mijn neus bloedt en probeer of ik het getal $\sqrt{3}$ ergens diep in deze Stern-Brocot-boom kan vinden. $\sqrt{3}$ ligt tussen $\frac{3}{2}$ en $\frac{2}{1}$, want $3^2 < 3 \cdot 2^2$ en $2^2 > 3 \cdot 1^2$. Twee stappen omlaag en er komt: $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$

Ik construeer op deze wijze een reeks onderschattingen y/x en bovenschattingen y^*/x^* van $\sqrt{3}$ en gebruik daarbij steeds de 'determinant' (teller² - 3 · noemer²) om te bepalen of ik met een onder- of bovenschatting van doen heb. In de tabel zijn de breuken als getallenparen genoteerd.

(x, y)	(x^*, y^*)	$y^2 - 3x^2$	$y^2 - 3x^2$
(2, 3)	(1, 2)	-3	+1
(3, 5)	(1, 2)	-2	+1
(3, 5)	(4, 7)	-2	+1
(7, 12)	(4, 7)	-3	+1
(11, 19)	(4, 7)	-2	+1
(11, 19)	(15, 26)	-2	+1
(26, 45)	(15, 26)	-3	+1
(41, 71)	(15, 26)	-2	+1
(41, 71)	(56, 97)	-2	+1
(97, 168)	(56, 97)	-3	+1
(153, 265)	(56, 97)	-2	+1

Opmerkingen:

- de gevonden getallenparen corresponderen met roosterpunten op drie hyperbolen: $y^2 - 3x^2 = c$ met $c = -3, -2, 1$;
- een historische onderschatting van $\sqrt{3}$ is de breuk in de laatste regel, namelijk 265/153. Die is door Archimedes gebruikt bij zijn berekening van het getal π via in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken. Als er vier stappen verder wordt afgedaald in de boom van Stern-Brocot komt ook zijn bovenschatting van $\sqrt{3}$ voor de dag: 1351/780.

Hypothese en bewijs

Hypothese: als in de derde kolom de waarde -3 staat, geldt: $x = y^*$ en $y = 3x^*$ en de rij paren van determinantwaarden is periodiek.

Bewijs: stel $(x, y) = (m, 3n)$ en $(x^*, y^*) = (n, m)$ met $m^2 - 3n^2 = 1$

Dan volgt $y^2 - 3x^2 = (3n)^2 - 3m^2 = -3(m^2 - 3n^2) = -3$

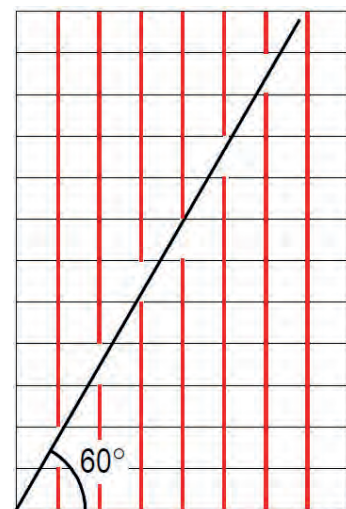
De mediant van de breuken y/x en y^*/x^* correspondeert

met het getallenpaar $(m + n, m + 3n)$. Hiervan is de determinantwaarde $(m + 3n)^2 - 3(m + n)^2$ en een beetje algebra leert dat dit gelijk is aan -2. Op deze manier doorgaand komt er:

(x, y)	(x^*, y^*)	det	det*
$(m, 3n)$	(n, m)	-3	+1
$(m+n, m+3n)$	(n, m)	-2	+1
$(m+n, m+3n)$	$(m+2n, 2m+3n)$	-2	+1
$(2m+3n, 3m+6n)$	$(m+2n, 2m+3n)$	-3	+1

En zie, na drie stappen herhaalt het patroon zich! Omdat bij de start met de paren (2,3) en (1,2) aan de gestelde voorwaarde is voldaan, is nu de periodiciteit bewezen. Dat betekent dat $\sqrt{3}$ niet in de boom van Stern-Brocot voorkomt, en dus geen rationaal getal kan zijn!

In meetkundetaal: de lijn met helling $\sqrt{3}$ en dus met hellingshoek 60° , treft geen enkel roosterpunt. Anders gezegd: de lijn gaat door oneindig veel verticale poortjes met lengte 1 (zie figuur) zonder ooit maar een van de grenspunten te raken!



Noten

- [1] Kindt, M. (2015). Breuken op de helling (1), *Euclides*, 90(5).
- [2] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was*, #18. Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [3] Moritz Stern was een Duits wiskundige en Achille Brocot een Franse horlogemaker. Zij hebben onafhankelijk van elkaar de breukenboom ontdekt.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Dit is het eerste artikel van een serie-van-drie van Martin Kindt over het 'permanentie-principe'. In de wiskunde hebben we de gewoonte om patronen te extrapoleren met behoud van regelmaat en rekenwetten: permanentie op afspraak! Denk aan min maal min is plus of aan nul faculteit is één. Het wonder daarbij is dat al die verschillende conventies met elkaar in harmonie zijn en zo de wiskunde tot een krachtig (en prachtig) bouwwerk maken.

Extrapolatie

Drie jaar geleden werd ik door een van mijn kleindochters gebeld, toen nog een kersverse brugklasser. 'Opa, mijn leraar zegt dat twee tot de nulde één is, dat snap ik niet.' Wiskunde uitleggen door de telefoon, ik heb het vaker gedaan en vind het wel een leuke sport. Ik testte om te beginnen hoe ze machten met hetzelfde grondtal (in dit geval 2) vemenigvuldigde of op elkaar deelde en dat ging vlot via de exponenten en ze snapte ook wat daar achter stak. Mooi, dan nu een rijtje: $2^7 : 2^4 = 2^3$, $2^7 : 2^5 = 2^2$, $2^7 : 2^6 = 2^1$, $2^7 : 2^7 = 2^0$.

De laatste uitkomst is 1, dus 'Nou snap ik het opa'. Ik heb haar natuurlijk uitgelegd dat het eigenlijk niet een kwestie van snappen is, maar meer het aanvaarden van een afspraak die verstandig lijkt. Daarna heb ik er ook nog even de getallenlijn bijgehaald. Stel de afstand tussen twee buurgetallen is 1 cm. Hoeveel cm ligt dan 2^5 van 0? Ja, 32 cm.

En 2^4 , en 2^3 ? Verlaging van de exponent met 1, betekent blijkbaar halveren van de afstand tot 0. Zo kwamen we bij 2^1 op 2 cm en 2^0 op 1 cm van het nulpunt. Je kunt nog verder extrapoleren, naar $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, enzovoort, en ook dat sloeg aan!

Als ik eenmaal bezig ben, kan ik moeilijk ophouden en dus kwamen ook nog even andere grondtallen aan de beurt, zo van drie-tot-de-nulde is ook 1. Maar ja, toen kwam de slimme vraag naar nul-tot-de-nulde en heb ik de hoorn erop gelegd? Nee, grapje. Wat ik toen gezegd heb, weet ik niet precies meer. Wel dat er voor $0^0 = 1$ meer te zeggen valt dan voor $0^0 = 0$, exponenten zijn in zekere zin 'machtinger' dan grondtallen.

Tot zover dit telefoon-leergesprek. Ik vermeld nog even dat de vraag van Magali in verband stond met het aller-eerste hoofdstuk uit haar boek, genaamd *Getallen*, waarin andere talstelsels (en speciaal ook het binaire stelsel) behandeld werden. Zij vond het werken met verschillende talstelsels toen interessant en het ging haar bijzonder

goed af. Des te teleurstellender was het dat, toen ik, twee jaar later bij haar thuis, terugkwam op dat gesprek over twee-tot-de-nulde ze er weinig meer van wist. Dat iets-tot-de-nulde gelijk moest zijn aan 1, herinnerde ze zich vaag, maar de achtergrond daarvan en het werken met het binaire stelsel was helemaal weggezakt. Zo gaat dat met wiskunde: wat je niet - op een goede manier - warm houdt, koelt af en verdwijnt naar de kelder van het geheugen. In nummer 6 van de vorige jaargang van *Euclides* staat een artikel van Martijn van Iwaarden dat ik met warme instemming heb gelezen en waarin een aantal vingers op een aantal zere plekken in het gangbare wiskundeonderwijs wordt gelegd. De auteur klaagt daarin over het algoritmisch, niet op begrip gestoeld, aanleren van vaardigheden die een paar weken na de toets als sneeuw voor de zon zijn verdwenen. Nu wil ik niet beweren dat het opereren in alternatieve talstelsels, zoals het binaire, regelmatig terug

zou moeten komen en zou moeten worden geoefend, maar alleen aanklaarten en er daarna nooit meer over praten, bevalt natuurlijk ook niet. Hoe dan ook, na de teleurstellende ervaring aan tafel, besloot ik voor Magali negen argumenten op te schrijven, waarom twee-tot-de-nulde de waarde 1 verdient. Dat deed ik met de titel van dit stukje als motto en hier komen ze. Voor de aardigheid nummerde ik ze binair.

1 Celdeling

Een bacterie, ééncellig als hij is, vermenigvuldigt zich door celdeling. Een type colibacterie bijvoorbeeld deelt zich onder voor hem gunstige omstandigheden, elke twintig minuten in tweeën. Dat gaat heel hard. Als je met een exemplaar begint, zijn er na 1 uur al 8 exemplaren, na 2 uur 64, na 3 uur 512, na 4 uur 2048 (je weet wel dat getal van 't spelletje op je smartphone). Gelukkig wordt de groei meestal afgeremd en gaat dit niet almaar door. Maar stel je nu even wél een onbeperkte groei voor,

'ZO GAAT DAT MET WISKUNDE:
WAT JE NIET - OP EEN GOEDE MANIER -
WARM HOUDT, KOELT AF.'

uitgaande van een bacterie. Voor het gemak neem ik aan dat dat verdubbeling elk uur plaatsvindt. Na 10 uur zijn er dan meer dan 1000 bacteriën. Kijk maar naar de tabel.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

t = de tijd in uren

N = het aantal bacteriën

Bij die tabel hoort een formule, deze: $N = 2^t$. Wil deze formule kloppen voor $t = 1$ en $t = 0$, dan moeten we wel afspreken: $2^1 = 2$ en $2^0 = 1$.

10 Wimbledon

Elk jaar zijn er vier grote tennistoernooien, de zogeheten Grand Slam toernooien. Na de voorrondes begint het hoofdtoernooi 'damesenkel' met 128 speelsters. Elke ronde valt precies de helft van het aantal speelsters af, sport is hard. Ik tel de rondes af, zoals bij het afvuren van een raket: tien, negen, ..., nul. Vanwege $128 = 2^7$ begin ik hier bij zeven.

Zeven: eerste ronde, 128 ($= 2^7$) speelsters.
Zes: tweede ronde, nog 64 ($= 2^6$) speelsters.
Vijf: derde ronde, nog 32 ($= 2^5$) speelsters.
Vier: achtste finale, 16 ($= 2^4$) speelsters.
Drie: kwart finale, 8 ($= 2^3$) speelsters.
Twee: halve finale, 4 ($= 2^2$) speelsters.
Eén: finale, 2 ($= 2^1$) speelsters.
Nul: 1 ($= 2^0$) winnares!

P.S.

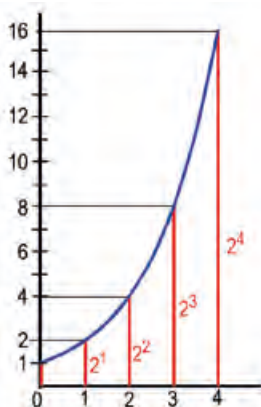
In totaal worden er $127 = 2^7 - 1$ wedstrijden gespeeld. Hoe reken je dat uit?

* Slim: er zijn net zoveel wedstrijden nodig als er verliezers zijn!

* IJverig: $64 + 32 + \dots + 2 + 1$

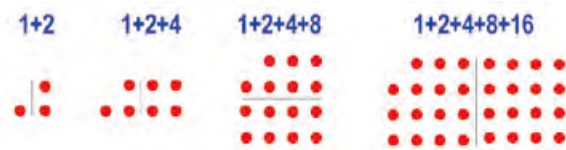
11 Een grafiek

De rode staafjes stellen machten van 2 voor. De toppen van de staafjes liggen op een vloeiende kromme lijn, maar dan moet $2^0 = 1$ zijn!



100 Graankorrels

Volgens een oude legende toonde de uitvinder van het schaakspel zijn vinding aan de koning. De slimme uitvinder mocht zelf zijn beloning kiezen. 'Sire', zei de man, 'zo luidt mijn wens. Geef mij alle graankorrels die op de volgende manier worden geteld: 1 korrel op het eerste veld, 2 op het tweede, 4 op het derde, 8 op het vierde, en zo verder verdubbeld tot alle vierenzestig velden aan de beurt zijn geweest.' De koning was verbaasd over zoveel bescheidenheid, maar zijn mening zou spoedig veranderen Het aantal graankorrels op elk veld is een macht van 2. Als je naar het volgende plaatje kijkt, zie je wel dat je na vulling van het vijfde veld 31 korrels hebt, dat is $2^5 - 1$.



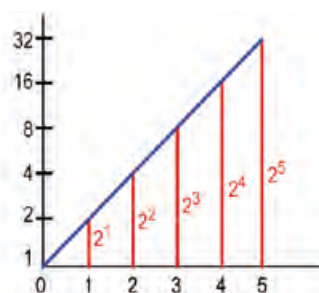
Je kunt aan het patroon zien, dat dit zo doorgaat.

Als 10 velden gevuld zijn heb je in totaal $2^{10} - 1 = 1023$ korrels, en na vulling van het 64ste veld zijn dat er dus $2^{64} - 1$. Dit is wat je noemt een astronomisch getal. Omdat 2^{10} meer dan 1000 is, moet 2^{64} ($= 2^4 \times 2^{60}$) meer dan 16×1000^6 ofwel 16 triljoen zijn. Zoveel korrels, dat is meer dan de huidige wereldproductie graan van zo'n 2300 miljoen ton! Als je het niet gelooft, zoek het uit! Hoe het afgelopen is? De koning zal eerst radeloos zijn geweest, daarna boos en ...?

Maar nu de wiskunde. In het plaatje is wel af te lezen dat bijvoorbeeld $2^3 + 2^3 = 2^4$. In het algemeen geldt: $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Je kunt dit met algebra bewijzen: $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Die formule willen we ook laten kloppen voor $n = 0$, dus $2^0 + 2^0 = 2^1 = 2$, maar 2^0 moet dan wel 1 zijn.

101 Een alternatieve grafiek

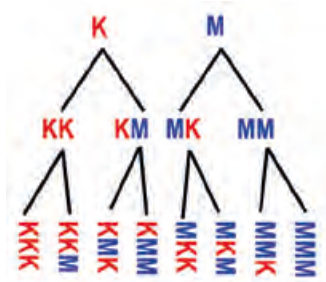
De grafiek hieronder heeft een afwijkende schaal op de verticale as: die begint bij 1 en bij elk stapje wordt de coördinaat verdubbeld. Zoiets wordt een *logaritmische schaal* genoemd. Als je de (rechte!) lijn door de toppen van de rode staafjes door laat lopen naar links, kom je bij het punt 1 op de verticale as: $2^0 = 1$.



110 Tossen

Voor de aanvang van een voetbalwedstrijd gooit de scheidsrechter een keer met een munt. Heb je er wel eens op gelet hoe handig hij dat doet?

Bij een keer tossen zijn er twee uitkomsten mogelijk **K**(op) of **M**(unt). Bij twee keer tossen zijn er vier mogelijke uitkomsten: **KK, KM, MK, MM**. Bij drie keer tossen zijn er acht mogelijke uitkomsten, bekijk het schema



Dit gaat zo door. De regel hierbij is: n keer tossen, geeft 2^n mogelijke uitkomstenrijtjes. Bij 0 keer tossen is er 1 uitkomst mogelijk, namelijk géén kop en ook géén munt. Vandaar $2^0 = 1$.

111 Het binaire talstelsel

Rekenmachientjes en computers rekenen van binnen met 'nullen' en 'enen'. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het *binaire* (of *tweetallige*) stelsel om getallen uit te drukken.



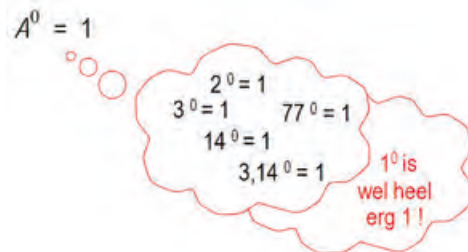
Zie de *binaire klok*. Die wijst **101** uur. Hoe zit dat ook al weer? Wel de cijfers (van rechts naar links) staan voor 1-heden, 2-tallen en 4-tallen. $101 = 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 5$. Zoals het tientallig stelsel gebaseerd is op machten van 10, zo is het tweetallig stelsel dat op machten van 2. In beide gevallen lopen de machten van links naar rechts af. In plaats van $1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$ kun je ook schrijven $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$. Als je een decimaal getal, bijvoorbeeld 1001, binair wilt schrijven, zoek je eerst de hoogste macht van 2 onder 1001. Dat is 512. Als je dat van 1001 aftrekt houdt je 489 over. Dan doe je hetzelfde met 489, de hoogste macht is nu 256 en je houdt 233 over. En zo verder en er komt $1001 = 2^9 + 489 = 2^9 + 2^8 + 233 = \dots$ (reken maar na): $2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$. Dus: $1001 = 1111101001$, maar $1001 = \dots?$

1000 Machtig vermenigvuldigen

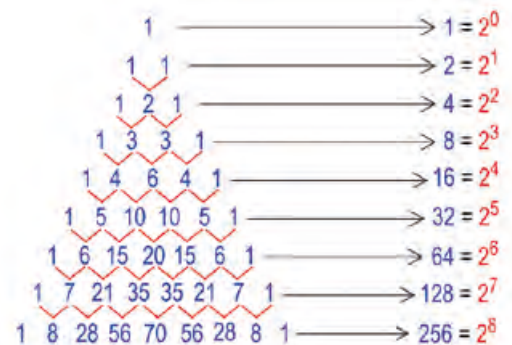
A stelt een of ander positief getal voor.

$$A^3 = A \times A \times A, A^4 = A \times A \times A \times A \rightarrow A^7 = A \times A \times A \times A \times A \times A \times A$$

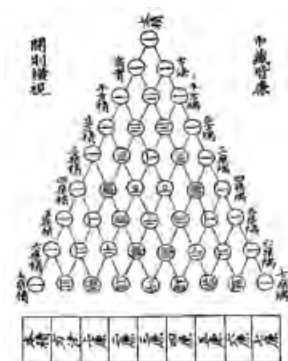
In het algemeen: $A^m \times A^n = A^{m+n}$. We willen dat deze regel ook klopt voor $n = 0$. Dus dat: $A^m \times A^0 = A^{m+0}$ ofwel



1001 De driehoek van Pascal



Wij noemen het de driehoek van Pascal (1623-1662), maar veel eerder, al in 1303 heeft de Chinees Chuh Shih Chieh de getalendriehoek ontdekt (zie het plaatje en je kunt meteen een paar Chinese cijfers leren!).



Hoe zit het ook alweer? Elk getal in de driehoek is de som van zijn twee bovenburen. Daaruit volgt dat als je de getallen in een horizontale rij bij elkaar optelt, er een macht van 2 uitkomt. Ga maar na: elk getal draagt twee keer bij aan de getallen in de rij daaronder en dat betekent dat de som van de getallen in een rij precies het dubbele is van de som in de rij erboven! En in de bovenste rij staat alleen 1, ook een macht van 2!

Meer sporen

Van jongs af aan ben ik fan geweest van meersporige benaderingen van wiskundige wetten en waarheden. Als leerling vond ik het al mooi als ik iets op verschillende manieren kon begrijpen en als leraar schroomde ik nooit om verschillende methoden of bewijzen naast elkaar te behandelen of met elkaar te vergelijken. Nu wil ik zeker niet aanbevelen om negen argumenten te geven waarom 2^0 gelijk zou moeten zijn 1. Ze zijn trouwens ook niet allemaal even sterk. Met name in het voorbeeld van het tossen is de 'lege worp' wel wat ver gezocht. Maar het idee dat het aantal mogelijke resultaten bij het muntwerpen een macht van 2 is, leek me de moeite waard. En ik wilde Magali vooral tonen dat er veel situaties zijn waarbij $2^0 = 1$ (of $a^0 = 1$) goed past. De twee voor de hand liggende aanpakken die mij bij het telefoongesprek het eerst te binnen schoten, zitten min of meer verstopt in het rijtje van negen. De klassieke aanpak in de schoolboeken: de regel 'vermenigvuldigen/delen van machten met hetzelfde grondtal' komt overeen met optellen/aftrekken van de exponenten, en dat willen we voortzetten, is een sterk voorbeeld van het permanentie-principe. In de tijd van de New Math, alweer zo'n 50 jaar geleden, werd wel aanbevolen om de afbeelding $k \rightarrow a^k$ (met k geheel, a positief reëel) als isomorfie van een optelgroep naar een vermenigvuldigingsgroep te zien, waarbij het neutrale element van de eerste (0 dus) afgebeeld op het neutrale element van de tweede (1). Die tijd ligt ver achter ons, maar in essentie is dit de achtergrond van $a^0 = 1$. In diezelfde periode – menig lezer zal het zich herinneren uit zijn schooltijd – was de lege verzameling een *hot issue*. Ook daarmee kon $2^0 = 1$ eenvoudig worden gerechtvaardigd. Dat het aantal deelverzamelingen van een verzameling met n elementen gelijk is aan 2^n stond in de meeste leerboeken, verklaard via combinatoriek. Je moet dan wel de twee triviale deelverzamelingen (dat wil zeggen: de verzameling zelf en de lege verzameling) meerekenen. Een verzameling met slechts één element (*singleton*) heeft alleen die twee triviale deelverzamelingen, dat rijmt met $2^1 = 2$. En ja, die lege verzameling heeft 'natuurlijk' maar één deelverzameling, zichzelf, vandaar $2^0 = 1$. Dit wilde ik mijn kleindochter toch maar niet aandoen.

Nog twee sporen

Dat er veel sporen naar $a^0 = 1$ leiden, betekent niet dat er direct een aantal daarvan moet worden gevolgd. Wel pleit ik er voor dat, op een nieuw moment waarbij een macht met exponent 0 zin heeft binnen een zekere (wiskundige) context, er opnieuw stil wordt gestaan bij het 'geniale' van die afspraak. Twee voorbeelden nog. De figuur hieronder is de projectie van een hyperkubus op het tekenvlak. Die figuur ontstaat door (de projectie van) een huis-tuín-en-keuken-kubus te verschuiven en de originele hoekpunten met de corresponderende beeldpunten te verbinden. Zo is te zien dat de 4-dimensionale kubus $16 (= 2^4)$ hoekpunten heeft.



Met deze hyperkubus kun je hetzelfde doen, dat wil zeggen verschuiven over een nieuwe richting en de corresponderende punten verbinden. Het resultaat is dan (de projectie van) een 5-dimensionale kubus die duidelijk 2^5 hoekpunten telt. Algemeen: een n -dimensionale kubus telt 2^n hoekpunten. Voor $n = 2$ hebben we te maken met een vierkant, voor $n = 1$ met een lijnsegment, voor $n = 0$ met één enkel punt en dit laatste is in overeenstemming met $2^0 = 1$! Als bij differentiaalrekening de regel voor de afgeleide van x^n ter sprake komt, kun je even stilstaan bij het geval $n = 1$. De afgeleide is de constante 1, dat rijmt met

$$x^0 = 1. \quad \frac{d}{dx} x^1 = 1 \cdot x^0. \text{ Wacht even, in } x = 0 \text{ is de}$$

afgeleide ook 1, dus dan ...

Ik probeer 0 tot de macht 0, op mijn grafische rekenmachine en die geeft, niet onverwacht, het antwoord 'error'. Mijn eerder in dit stukje vermelde lichte voorkeur voor de afspraak $0^0 = 1$ wordt door het apparaat niet gehonoreerd. Die voorkeur berust trouwens op het gedrag van de functie $x \rightarrow x^x$. Als je de grafiek laat maken door de grafische rekenmachine, dan zie je dat die heel dicht bij het punt (0,1) vertrekt. Met hulp van de analyse is dat ook te begrijpen:

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0, x \rightarrow 0} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

Ik herinner me dat ik in de bloeitijd van de *New Math* wel eens aan een hoogleraar wiskunde heb gevraagd of hij nul-tot-de-nulde gedefinieerd wilde zien. Antwoord: ja natuurlijk, dat is het aantal afbeeldingen van de lege verzameling op zichzelf, dus 1. Tja ...

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

HOE ONEIGENLIJK IS 'ONEIGENLIJK'?

Martin Kindt

Dit is het tweede artikel in een serie-van-drie van Martin Kindt over het 'permanentie-principe'. Het voortzetten van patronen met behoud van regelmaat en rekenwetten is in de wiskunde schering en inslag. Zoals bijvoorbeeld de invoering van de zogenaamde oneigenlijke machten. De 'extrapolatie-kampioen' aller tijden is misschien wel de Engelse wiskundige John Wallis, die hier al even aan bod komt, maar die in de volgende aflevering in het middelpunt staat.

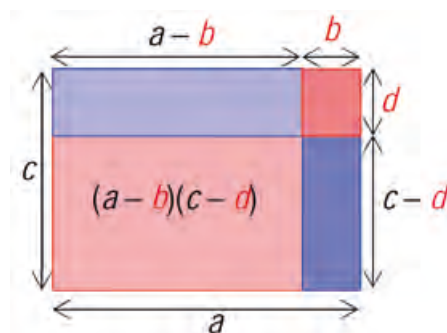
Min maal min is plus

De bekendste toepassing van het permanentieprincipe in het wiskundeonderwijs is het rekenen met 'plus en min'. Men kan allerlei verhaaltjes bedenken, heksen en zo, en dat slaat dan aan bij leerlingen, maar daarmee wordt verdoezeld dat de bewerkingen slechts berusten op extrapolatie van bekende rekenregels die gelden voor positieve getallen. Bij de invoering van negatieve getallen is de naar twee kanten doorlopende getallenlijn het ultieme model. Optellen en aftrekken kunnen met pijlen (vectoren) aanschouwelijk worden gemaakt. Doelsaldi en temperatuurverschillen (thermometer als getallenlijn) helpen om het opereren met positieve en negatieve getallen concreet te maken.

Het vermenigvuldigen met negatief en positief gaat minder natuurlijk en heeft didactici in de loop der tijden veel hoofdbrekens bezorgd. Voordat ik mijn favoriete aanpak verklap, kijk ik hoe wiskundigen uit het verleden hier mee omgingen. Leonhard Euler (1707-1783) vond zichzelf niet te groot om naast al zijn baanbrekende werk een leerboek elementaire algebra te schrijven.^[1] De derde paragraaf draagt de titel *Von der Multiplication einfacher Grössen* en daarin behandelt hij de vermenigvuldiging met negatieve getallen. Hij gebruikt de *Buchstaben* a en b voor willekeurige positieve getallen en zegt dan bijvoorbeeld dat als $-a$ een schuld aangeeft het duidelijk is dat vermenigvuldiging van die schuld met 3 een grotere schuld geeft, en wel $-3a$. Of algemener: $-a$ vermenigvuldigd met b geeft $-ba$ of (wat hetzelfde is) $-ab$. Maar hoe zit het met $-a$ vermenigvuldigd met $-b$? Daar kan natuurlijk niet hetzelfde uitkomen als bij $-a$ vermenigvuldigd met b . Er moet, aldus Euler, het tegengestelde van $-ab$ uitkomen en dat is ab . Dat mag je wel een sterk staaltje van intimidatie noemen.

Felix Klein laat een helder licht schijnen over het *Prinzip der Permanenz der formalen gesetze* dat hij toeschrijft aan Hermann Hankel.^[2] Hij neemt het product $(a-b)(c-d)$ onder de loep waarbij $a > b$ en $c > d$ en gebruikt een rechthoek om te demonstreren dat de uitkomst hiervan gelijk is aan $ac - ad - bc + bd$. Zie figuur 1: trek van de grote rechthoek ($= ac$) de twee kleine rechthoeken (ad en bc) af en tel de overlap bd er vervolgens weer bij. Op zich

een mooi voorbeeld van 'geometrische algebra'. Als men nu de formule toepast op het geval $a = c = 0$, komt er de regel $(-b)(-d) = bd$. Klein hekelt de leerboeken waarin dit als een soort van bewijs wordt gepresenteerd: die gaan volledig voorbij aan het feit dat de formule slechts is afgeleid voor het geval $a > b$ en $c > d$.



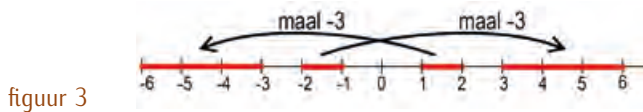
figuur 1

Klein vervolgt: *it is idle to talk of the logical necessity of the theorem, in other words, the rule of signs is not susceptible of proof; one can only be concerned with recognizing the logical permissibility of the rule...* Zijn boodschap is dat men in het onderwijs nooit de suggestie moet wekken dat op permanentie berustende conventies bewijsbaar zouden zijn. Mijn voorkeur om de afspraak 'min maal min is plus' te laten aanvaarden gaat opnieuw uit naar de getallenlijn. Als je een positief getal met 3 vermenigvuldigt, betekent dit een verdrievoudiging van de afstand tot 0 (op het positieve deel van de getallenlijn) van dit getal. Bij 3 keer een negatief getal vergroot je de afstand 'natuurlijk' op het negatieve deel van de getallenlijn. Je kunt deze (meetkundige) vermenigvuldiging ook toepassen op een interval, zie figuur 2.

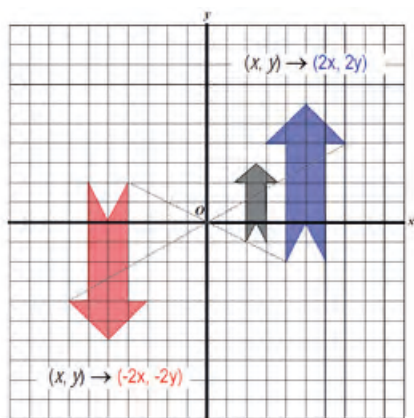


figuur 2

Het idee van vergroting komt zo beter in beeld. Dat vermenigvuldiging met -3 een vermenigvuldiging is van de afstand, gecombineerd met een spiegeling op de getallenlijn, is de nieuwe afspraak, zie figuur 3.



De keus hierbij is dan of je dit eerst via voortzetting van de commutativiteit, bijvoorbeeld $(-3) \times 2 = 2 \times (-3) = (-3) + (-3)$ wilt inleiden of meteen maar het meetkundige beeld presenteren. Een voordeel van de intervalpresentatie is wel dat de afspraak ook in eerste instantie niet beperkt is tot gehele getallen. Dat bekende eigenschappen voor natuurlijke getallen, zoals de distributiviteit, blijven kloppen moet zeker worden nagegaan; het vertrouwen in de afspraak zal moeten groeien! Als later het coördinatenstelsel ten tonele verschijnt, kan de vermenigvuldiging van figuren vanuit de oorsprong met positieve of negatieve factor, dit vertrouwen verder versterken, zie figuur 4.



figuur 4

Oneigenlijke machten

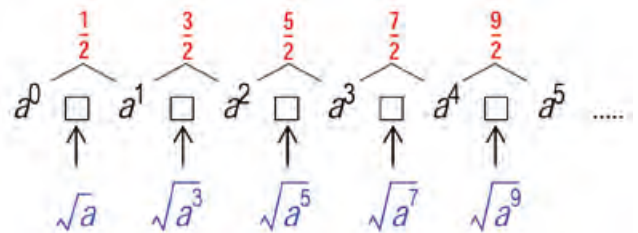
Het definiëren van machten met gebroken of negatieve exponent is een ander standaardvoorbeeld van het permanentie-principe. Vermindering van de natuurlijke exponent n met 1 bij a^n ($a > 0$) komt overeen met deling door a en dit leidt via extrapolatie tot de afspraken:

$$a^0 = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \text{ enzovoorts. Dit kan goed}$$

worden gepresenteerd als het naar links voortzetten van een exponentiële rij met groeifactor a . Dat de rekenwetten die gelden voor natuurlijke exponenten gewoon doorgaan, moet dan nog wel worden onderzocht. Leerzaam is het om te kijken naar: $(a^m)^n = a^{mn}$. Stel $m = -2$ en $n = -3$ en er komt:

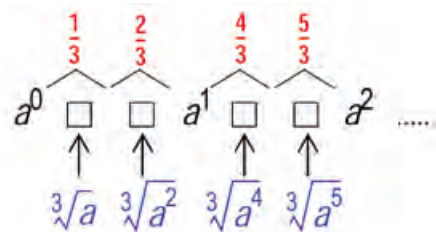
$$(a^{-2})^{-3} = \left(\frac{1}{a^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = a^6.$$

Weer een bevestiging van het 'onvermijdelijke' van de afspraak $(-2) \times (-3) = 6$. Maar nu de gebroken rationale exponenten. Waar de invoering van machten met negatief-gehele exponent een kwestie van *extrapolatie* van een meetkundige rij is, kan aan $a^{1/2}, a^{3/2}, \dots$ betekenis worden gegeven via *interpolatie*. In de rij $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$ is elke term het *meetkundig gemiddelde* van zijn beide burenen, terwijl de exponent het *rekenkundig gemiddelde* is van de buurexponenten. Interpolatie met behoud van het exponentieel karakter van de rij geeft het resultaat van figuur 5:



figuur 5

De blauwe getallen zijn de nieuwe tussentermen en de rode getallen worden verklaard tot nieuwe exponenten: $a^{1/2} = \sqrt{a}, a^{3/2} = \sqrt{a^3}$. Interpolatie met steeds twee tussentermen gaat ook, zie figuur 6:



figuur 6

De klassieke manier die in schoolboeken werd (wordt) gebruikt is om de permanentie af te kondigen via bij de eigenschappen $(a^m)^n = a^{mn}$ en $a^m \times a^n = a^{m+n}$. In dit verband maakte Henk Hietbrink mij attent op een formule

$$\text{uit een Iraans boek: } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{m+n}}.$$

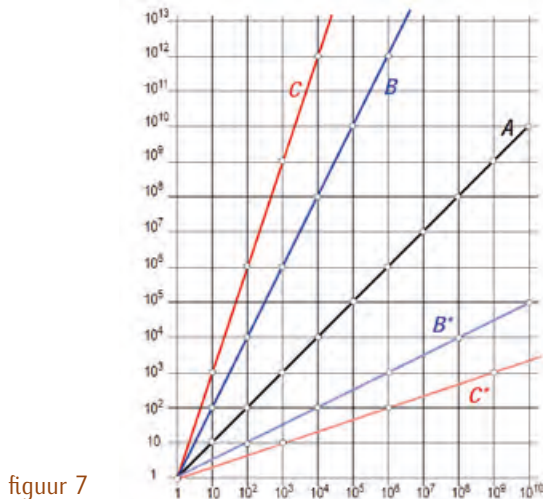
Breukexponenten voorzien van een minteken, dienen natuurlijk ook aan bod te komen, en alles komt op zijn pootjes terecht, mits het grondtal positief is. Dit laatste is heel belangrijk, ook voor bijvoorbeeld een exponent als $1/3$. Op het eerste gezicht lijkt er bijvoorbeeld

$$\text{geen bezwaar tegen } (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{maar je komt}$$

dan wel in conflict met $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$. Kortom: grondtallen bij gebroken exponenten zullen per definitie positief zijn.

10-stapsschaalverdeling

Ten behoeve van het experiment *Profi*, werd op het Freudenthal Instituut het pakketje *Evenredigheden en Machten*^[3] ontwikkeld. Daar werd met 10-machten een dubbellogaritmisch rooster geïntroduceerd, zie figuur 7:



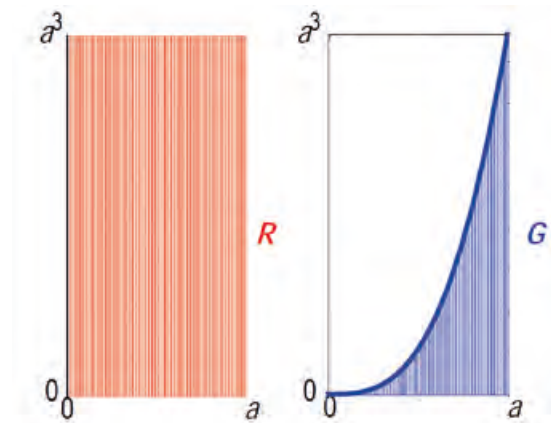
figuur 7

De rechte lijnen A, B en C corresponderen zichtbaar met de vergelijkingen $y = x^1$, $y = x^2$ en $y = x^3$. De exponenten zijn dan juist de hellingsgetallen van de drie lijnen. De spiegelbeelden B^* en C^* van B en C ten opzichte van A corresponderen met $y = \sqrt{x}$ en $y = \sqrt[3]{x}$ en die lijnen hebben de hellingsgetallen $1/2$ en $1/3$. Dit kan aanleiding zijn voor de afspraak over machten met een gebroken rationale exponent, in de woorden van Freudenthal: *meetkundig-algebraïsche permanentie!* Voor machten met negatieve exponent zijn dalende rechten nodig. De lijn die het punt $(0, 10^6)$ met $(10^6, 0)$ verbindt, correspondeert nu met $xy = 10^6$ ofwel $y = 10^6 \cdot x^{-1}$ en zo verschijnen dan ook negatieve exponenten in beeld. De bedoeling van ons katern was om verbanden, met name uit de biologie, via dubbellogaritmisch papier te onderzoeken – en dat hebben we ook gedaan – maar in de ontwerpfasen ontdekten we dat dit ook een mooie manier was om oneigenlijke machten te introduceren. Ik merk nog op dat het rooster gemakkelijk naar links en beneden kan worden uitgebreid als er eenmaal betekenis gegeven is aan machten met negatief-gehele exponent. Verdere verfijning van de schaal kan de vraag oproepen, waar bijvoorbeeld het getal 2 op de assen moet worden gesitueerd. Met andere woorden voor welk getal p geldt $10^p = 2$? Nu kan de rekenmachine worden ingeschakeld om via *trial and error* een benadering van p te vinden. Een hele scherpe is 0,30103. Mijn GR zegt: $10^{0,30103} = 2,00000002$. Uiteraard kan dit alles aanleiding zijn tot de introductie van 10-logaritmen.

Wallis wellicht de eerste

John Wallis (1616-1703) was hoogleraar meetkunde in Oxford. Volgens sommige historici was hij de eerste wiskundige die machten met gebroken rationale exponent

gebruikte. Ook was hij een van de wegbereiders van de differentiaal- en integraalrekening en zijn werk *Arithmetica Infinitorum* had grote invloed op de jonge Newton. Op het gebied van de berekening van oppervlakten van vlakdelen met kromme grenzen waren in het verleden al belangrijke stappen gezet. Eerst door Archimedes en veel later door Cavalieri (1598-1647). In navolging van de laatste beschouwde Wallis de oppervlakte onder een grafiek als oneindige som van verticale lijnstukken (*ordinaten*). Een oneindig fijne verticale arcering als het ware, zie figuur 8:



figuur 8

Neem als voorbeeld het gebied $0 \times x \times a$ en $0 \times y \times x^3$ (zeg G) en vergelijk dit met de omhullende rechthoek R. Laat n een groot natuurlijk getal zijn. Via de punten op de x-as met de x-coördinaat achtereenvolgens:

$$0, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a, \dots, \frac{n-1}{n}a, a$$

ontstaat een verticale arcering van de gebieden G en R. De verhouding van de totale lengte van beide collecties ordinaten geeft een indicatie voor de verhouding van de oppervlakten van G en R. Als n onbeperkt aangroeit, zal de limiet van die verhouding de exacte oppervlakteverhouding als uitkomst hebben. Die verhouding van de arceringen laat zich als volgt uitdrukken in n .

Via

$$\frac{0^3 + \left(\frac{1}{n}a\right)^3 + \left(\frac{2}{n}a\right)^3 + \left(\frac{3}{n}a\right)^3 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}a\right)^3 + a^3}{a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \dots + a^3 + a^3}$$

komt er na deling door a^3 :

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + \dots + n^3 + n^3}$$

Wallis rekende dit uit voor een aantal waarden van n :

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3}{3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

en generaliseerde vervolgens tot:

$$\frac{0^3 + (1)^3 + (2)^3 + (3)^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 + n^3 + \dots + n^3 + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

Speculatief? Ja, maar het klopt wel! De lezer kan het controleren, bijvoorbeeld via de prikkelende formule: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$. Wallis concludeerde nu dat de oppervlakte van G een vierde deel van die van R is. In moderne notatie:

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{1}{4} a^4. \text{ Op analoge wijze had hij ook gevonden:}$$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} a^3. \text{ Cavalieri had dit alles ook al wel ontdekt,}$$

maar via een heel andere techniek, waar ik hier niet verder op inga. De aanpak van Wallis is 'cavalieriaans' in die zin dat hij de oppervlakte als een weefsel van oneindig dunne draden beschouwde, maar zijn berekening met de 'somlimiet' is meer in de geest van Archimedes. Net als Cavalieri extrapoleerde Wallis nu brutaalweg dat in het algemeen zou moeten gelden:

$$\int_0^a x^k dx = \frac{1}{k+1} a^{k+1} \text{ of met } a=1: \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

waarbij $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Spiegeling van de kromme $y = x^k$ in de lijn $y = x$ leert dat de oppervlakte onder de grafiek van op het interval

$$[0, 1] \text{ gelijk zal zijn aan } 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 1}.$$

Dit bracht Wallis dan op het idee om te poneren:

$x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$. Een verrassende stap. Dat dit wonderwel strookte met de regels voor het rekenen met machten met natuurlijke exponent, zal hem niet zijn ontgaan. Met in

het achterhoofd $(x^p)^q = x^{pq}$ leidt dit tot $x^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{x^m}$. En voor wat betreft de 'brutale' formule van Wallis voor de oppervlakte onder de kromme $y = x^k$, later, maar wel vóór de uitvinding van de integraalrekening, werd door andere wiskundigen (zoals Fermat) een overtuigende verklaring gevonden voor die formule.

Permanentie bij differentiëren

De bruikbaarheid van machten met een 'onnatuurlijke' exponent openbaart zich in volle glorie bij het differentiëren van machtsfuncties. De afgeleiden van $x \rightarrow 1/x$ en

$x \rightarrow \sqrt{x}$ kunnen bijvoorbeeld worden gevonden via de identiteiten:

$$\frac{1}{x^*} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^*x} \text{ en } \frac{\sqrt{x^*} - x}{x^* - x} = \frac{1}{\sqrt{x^*} + \sqrt{x}} \text{ onder de}$$

voorwaarde $x \neq x^*$. Limietovergang ($x^* \rightarrow x$) geeft dan:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \text{ en } \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ofwel}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} \text{ en } \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}. \text{ Kortom}$$

de regel $\frac{d}{dx} (x^n) = n \cdot x^{n-1}$ blijft gelden voor

$n = -1$ en $n = \frac{1}{2}$. Op verschillende manieren kan worden aangetoond dat de regel van kracht blijft voor *iedere* rationale exponent n . Een afleiding die, mits de kettingregel (of even goed de uitgebreide productregel) bekend is, kan als volgt worden uitgevoerd. Neem eerst het geval n is negatief-geheel, zeg $-m$. Uit $y = x^m$, volgt $y^{-1} = x^{-m}$. Differentiatie van beide leden geeft:

$$-1 \cdot y^{-2} \cdot \frac{dy}{dx} = m \cdot x^{m-1}. \text{ Hieruit volgt (bedenk ook}$$

$$y^2 = x^{-2m}) : \frac{dy}{dx} = -m \cdot x^{m-1} \cdot y^2 = -m \cdot x^{-m-1}. \text{ Nu voor}$$

een willekeurige rationale exponent. Als $y = x^{p/q}$, dan $y^q = x^p$. Hierbij veronderstel ik p en q beide geheel en $q > 0$. Differentiatie van beide leden geeft:

$$q \cdot y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot x^{p-1}. \text{ Zodat}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Oneigenlijke machten zijn eigenlijk permanent heel handig!

Noten

- [1] Euler, L. (1770), *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Kays. Acad. der Wissenschaften.
- [2] Klein, F. (2004), *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint (Arithmetic, Algebra, Analysis)*, Dover Publications.
- [3] Goddijn, A., Reuter, W., Kindt, M. (1998). *Evenredigheden en Machten*. Freudenthal Instituut.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

HOE WALLIS AAN ZIJN PRODUCT KWAM

Martin Kindt

Martin Kindt schrijft deze keer over een van de merkwaardigste formules uit de wiskunde: het product van Wallis. Het betreft hier een oneindig voortlopend patroon van breuken waarvan het product de uitkomst $4/\pi$ heeft. Je kunt dit vinden in universitaire leerboeken en collegedictaten als gevolg van een geraffineerd spel met integralen. Maar Wallis vond zijn product vóór de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening!

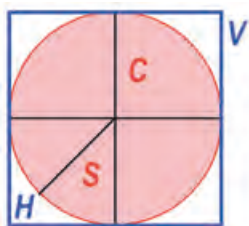
Kwadratuur van de cirkel

Tegenwoordig wordt hiervoor de uitdrukking 'mission impossible' gebruikt. De filosoof Thomas Hobbes dacht zijn missie voltooid te hebben, maar dat kwam hem op niet mis te verstane kritiek te staan. Een van de critici was John Wallis die in tegenstelling tot Hobbes geen synthetische maar een analytische weg zocht en dat leidde tot de naar hem genoemde bijzondere formule:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \dots \text{ad inf.}$$

Voordat ik de stappen die Wallis maakte beschrijf, wil ik de formule een beetje plausibel maken. Het linkerlid van de formule is duidelijk gelijk aan de verhouding van de oppervlakten V en C van respectievelijk een vierkant en zijn ingeschreven cirkel. Met een goed timmermansoog is wel te zien dat sector S een grotere oppervlakte heeft dan

het 'hoekje' H met gevolg: $\frac{V}{C} < \frac{3}{2}$.



$$\frac{V}{C} = \frac{4H + 8S}{8S} < \frac{12S}{8S} = \frac{3}{2}$$

figuur 1

'Kleiner dan' betekent hetzelfde als 'een fractie van'.

Probeer $\frac{3}{4}$. Deze schatting is wat te groot:

$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$

Met een beetje goede wil is dit ook te 'zien', het komt neer op $4H > S$. Dan vermenigvuldigen met een breuk

groter dan 1, maar natuurlijk kleiner dan $\frac{4}{3}$. De eerste

kandidaat is $\frac{5}{4}$. Met de benadering van Archimedes

in het achterhoofd – π ligt tussen $\frac{223}{71}$ en $\frac{22}{7}$ – kan worden geverifieerd dat:

$$\frac{V}{C} < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}.$$

Er tekent zich een alternerend patroon af, dat ik blijmoedig extrapoleer:

$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6}$$

$$\frac{V}{C} < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6}$$

$$\frac{V}{C} > \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8}$$

enzovoort.

Het is allemaal nog pure speculatie. Dat de kandidaat-ondergrenzen een stijgende rij vormen, volgt uit:

$$5 \times 5 > 4 \times 6, 7 \times 7 > 6 \times 8, 9 \times 9 > 8 \times 10, \dots$$

$$\text{Algemeen: } n^2 > (n-1)(n+1).$$

Net zo is te begrijpen dat de kandidaat-bovengrenzen stap voor stap kleiner worden. Als het patroon ons niet

bedriegt, wordt het quotiënt $\frac{V}{C}$ bij dit proces in een

steeds kleiner interval geperst. Die intervallen krimpen niet alleen, zij verschrompelen tot één punt. Om dit in te zien beschouw ik de ondergrenzen $o_1, o_2, o_3, \dots$ en de bovengrenzen $b_1, b_2, b_3, \dots$ met:

$$o_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \qquad b_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$$

$$o_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \qquad b_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6}$$

$$o_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \qquad b_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8}$$

Er volgt dan:

$$b_1 - o_1 = \frac{1}{5} b_1 < \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

$$b_2 - o_2 = \frac{1}{7} b_2 < \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2}$$

$$b_3 - o_3 = \frac{1}{9} b_3 < \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}$$

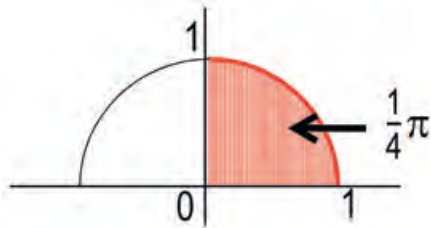
Kort en goed: $b_n - o_n < \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{3}{2}$.

Het rechterlid heeft de limiet 0 voor $n \rightarrow \infty$. Hiermee is wel duidelijk geworden dat het product van Wallis conver-

geert, maar dat de limiet gelijk is aan $\frac{4}{\pi}$ is natuurlijk bij lange na nog niet zeker.

De driehoek van Pascal

Wallis wilde toewerken naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$ op het interval $[0,1]$.

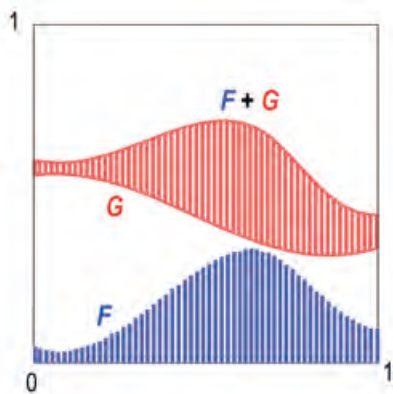


figuur 2

Hij gebruikte een nogal raadselachtige omweg om daar uit te komen. Hij bestudeerde namelijk eerst de op $[0,1]$ gedefinieerde familie van functies gegeven door: $F_{p,n}(x) = (1 - x^{1/p})^n$ met p en n als natuurlijke getallen. Met $p = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ en met $n = 0$, $p = 1, 2, 3, \dots$ liet hij de constante functie $x \rightarrow 1$ corresponderen. Vervolgens berekende hij de oppervlakte onder de grafieken van $F_{p,n}$. Hij gebruikte de door hemzelf ontdekte regel^[1]: oppervlakte onder $y = x^{m/n}$ op $[0,1]$ is $\frac{1}{m/n+1}$. En ook dat de

oppervlakte onder de som (of verschil) van twee functies gelijk is aan de som (of verschil) van de oppervlakten van die functies. Dat volgt uit wat nu wel het principe van Cavalieri wordt genoemd: een oneindige som van lijnstukken verandert niet als die lijnstukken stuk voor stuk over een continu veranderende afstand worden verschoven.

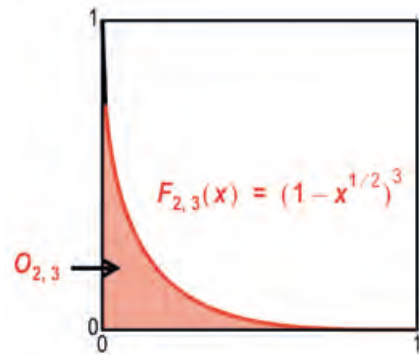
oppervlakte onder de som (of verschil) van twee functies gelijk is aan de som (of verschil) van de oppervlakten van die functies. Dat volgt uit wat nu wel het principe van Cavalieri wordt genoemd: een oneindige som van lijnstukken verandert niet als die lijnstukken stuk voor stuk over een continu veranderende afstand worden verschoven.



figuur 3

In 'moderne' taal: de integraal van de som (of verschil) van twee functies (op eenzelfde interval) is de integraal

van de som (of verschil) van die functies. Bijvoorbeeld $p = 2$ en $n = 3$.



figuur 4

Er geldt: $(1 - x^{1/2})^3 = 1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2}$

Oppervlakteberekening volgens Wallis geeft:

$$O_{2,3} = 1 - 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} + 3 \times \frac{1}{1+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{10}.$$

De oppervlakte van het omhullende vierkant is dus tien keer zo groot als de oppervlakte onder de grafiek van $F_{2,3}$. Wallis rekende nog veel meer van dergelijke oppervlakteverhoudingen uit en schreef zijn uitkomsten overzichtelijk in een 11×11 -tabel waarvan hierna een gedeelte is afgebeeld. De eerste rij en de eerste kolom wekken geen verbazing. Verdere bestudering van de tabel levert een verrassing op: de driehoek van Pascal!

$p \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	4	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210
5	1	6	21	56	126	252	462
6	1	7	28	84	210	462	924

figuur 5

Kan ik snappen dat in de cel (p, n) het getal $\binom{p+n}{n}$

moet komen? In de kolom $n = 1$ staan de getallen $p + 1$, want de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,1}(x) = 1 - x$

$$^{1/p} \text{ is } 1 - \frac{1}{\frac{1}{p}+1} = 1 - \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}$$

Nu $n = 2$: $F_{p,2}(x) = (1 - x^{1/p})^2 = 1 - 2x^{1/p} + x^{2/p}$ en $O_{p,2}$ is gelijk aan:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{\frac{1}{p}+1} + \frac{1}{\frac{2}{p}+1} &= p \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2} \right) \\ &= p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} \right) \\ &= p \left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} \right] \\ &= p \cdot \frac{2}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{\binom{p+2}{2}} \end{aligned}$$

Het ziet er misschien omslachtig uit en ik had natuurlijk sneller tot dit resultaat kunnen komen, maar de gevolgde rekenwijze geeft mij inzicht. Het verschil van twee opvolgende stambreken (derde stap) is altijd weer een stambreuk en het is bij de volgende stap duidelijk dat de teller onafhankelijk van p moet zijn. Bovendien kan ik inductief verder. Zo komt er voor $O_{p,3}$:

$$\begin{aligned} &p \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{3}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right) \\ &= p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right) \\ &= p \left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} \right] \end{aligned}$$

De middelste breuk kan nu weer worden gesplitst in twee breuken met teller 1 en dit leidt tot

$$\begin{aligned} &= p \left[\frac{2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)} \right] \\ &= p \cdot \frac{6}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{\binom{p+3}{3}} \end{aligned}$$

Zo kunnen de kolommen in de tabel stapsgewijs worden berekend en ontstaat de driehoek van Pascal. Naast de additieve recursie in Pascal's patroon is er ook een multiplicatieve recursie:

$$\begin{aligned} \binom{p+n}{n} \times \frac{p+n+1}{n+1} &= \frac{(p+n)!}{n!p!} \times \frac{p+n+1}{n+1} \\ &= \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!p!} = \binom{p+n+1}{n+1} \end{aligned}$$

Voor de oppervlakten $O_{p,n}$ zou dan moeten gelden:

$$O_{p,n} \times \frac{n+1}{p+n+1} = O_{p,n+1}.$$

Liefhebbers van integraalrekening kunnen deze recursie proberen te bewijzen via slimme partiële integratie en

substitutie toegepast op: $O_{p,n} = \int_0^1 F_{p,n}(x) dx$

Naar de cirkel

Wallis wilde nu naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$, met andere woorden naar de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,n}$ met $p = n = 1/2$. Hij interpoleerde in zijn tabel eerst door een rij $p = 1/2$ tussen te voegen. Dit komt neer op het berekenen van de oppervlakte op $[0,1]$ onder de grafiek van $x \rightarrow (1 - x^2)^n$. En zowaar, bovenstaande recursieregel leek nu ook op te gaan. De stap van n naar $n + 1$ zou dan moeten neerkomen op een vermenigvuldiging met

$\frac{n+1}{\frac{1}{2}+n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}$. Dus achtereenvolgens met $\frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \dots$

Voor $n = 1$ geldt: $O_{\frac{1}{2},1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Voor $n = 2$ moet de

oppervlakte worden berekend onder de grafiek van $x \rightarrow 1$

$- 2x^2 + x^4$ en dat geeft: $O_{\frac{1}{2},2} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ en dat

is inderdaad gelijk aan $\frac{4}{5} \times O_{\frac{1}{2},1}$.

De lezer kan zelf nog een paar gevallen doorrekenen en constateren dat het ook hier weer goed lijkt te gaan. Voor de scherpslijpers: partiële integratie geeft zekerheid! Hier is een fragment van Wallis' nieuwe tabel:

$p \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1/2	1	3/2	15/8	35/16	315/128	693/256
1	1	2	3	4	5	6

figuur 6

Zijn laatste stap was om nu verder te interpoleren in de tabel door cellen met $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ toe te voegen.

Voor $p = 0$ vulde hij overal 1 in. Voor $p = 1$ gebruikte hij de (meetkundig!) te begrijpen regel dat de oppervlakte

onder $y = (1 - x)^{m/2}$ gelijk is aan: $\frac{1}{\frac{m}{2}+1} = \frac{2}{m+2}$. Maar hoe te handelen bij $p = 1/2$?

$p \backslash n$	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	?	3/2	?	15/8	?	35/16
1	1	3/2	2	5/2	5	7/2	4

figuur 7

Wallis stelde het getal in de cel $p = n = 1/2$ voor door een vierkantje en paste, geleid door een voorgevoel van permanentie, de multiplicatieve Pascal-recursie toe om de andere vakken in te vullen. De stap van $p = 1/2, n = k + 1/2$ naar $p = 1/2, n = k + 1 1/2$ gaat volgens die recursieregel gepaard met een vermenigvuldiging met de factor:

$$\frac{\frac{1}{2} + (k + 1\frac{1}{2})}{k + 1\frac{1}{2}} = \frac{k + 2}{k + 1\frac{1}{2}} = \frac{2k + 4}{2k + 3}$$

Als ik nu in plaats van Wallis' vierkantje in $p = n = 1/2$ de letter w schrijf, komt er:

$p \backslash n$	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	w	$\frac{3}{2}$	$w \times \frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$	$w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}$
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{7}{2}$	4

De rij van quotiënten (groeifactoren) in de regel $p = 1$ is dalend en die eigenschap extrapoleerde Wallis naar de rij van quotiënten in de regel $p = 1/2$.

Zo kwam hij tot:

$$\frac{w}{1} > \frac{\frac{3}{2}}{w} > \frac{w \times \frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} > \frac{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}}{w \times \frac{4}{3}} > \frac{w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}} > \dots$$

Met als gevolg:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} < w < \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{5}{4}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \sqrt{\frac{7}{6}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \sqrt{\frac{7}{8}}$$

En hieruit kon hij concluderen dat:

$$w = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \text{ad inf.}$$

Meer over Wallis' queeste is te vinden in [1] en [2].

Wis(h)ful thinking

Wallis maakte zich, in zijn zoektocht naar de benadering van π , voortdurend schuldig aan wishful thinking. Vooral het interpoleren in de driehoek van Pascal was gedurfd. Een actie die Newton zou inspireren tot een uitbreiding van de definitie van binomiaalcoëfficiënt. In moderne

$$\text{notatie: } \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}.$$

Deze getallen zijn de coëfficiënten in de door Newton gevonden reeksontwikkeling van de functie $x \rightarrow (1 + x)^{1/2}$. Het permanentie-principe in optima forma!

Maar kun je bij Wallis' speculaties wel van 'schuldig' spreken? Het herkennen en uitbreiden van patronen, het gebruik maken van analogieën, het generaliseren, het zijn stuk voor stuk wiskundige kernactiviteiten! Toen ik voor het eerst in een boek over de geschiedenis van de wiskunde een verslag van Wallis' werk las, was ik diep onder de indruk. Tijdens mijn studie was ik het fantastische product van Wallis tegengekomen, maar de weg er naar toe bleef verborgen. Alleen het resultaat met bewijs telde. Wallis' oorspronkelijke aanpak was voor mij een ultiem voorbeeld van een avontuurlijke wiskundespeurtocht. Dat niet iedereen er zo over denkt, blijkt uit [4] waarin Jean-Paul Delahaye de zoektocht van Wallis kwalificeert als een *afzichtelijk prutswerk waarvan de details moeilijk te rechtvaardigen zijn met onze huidige criteria*.^[5] Wel spreekt hij van een schitterend resultaat, dat men later nooit meer vergeten is. Wallis zal zich misschien pas na numerieke inspectie wat sterker hebben gevoeld. Maar numerieke verificatie moet toen heel wat voeten in de aarde hebben gehad, want de convergentie van Wallis' product is tergend traag. Bij 5000 breuken is het product bij benadering 3,1414355935 en deze breuk bevat nog maar drie correcte decimalen na de komma. Als slot van dit drieluik over het permanentie-principe wil ik nog een staaltje *wishful thinking* van Euler memoreren. (zie ook [6], *chapter II*). Op school leren we dat factorontbinding van een veelterm hand in hand gaat met bepalen van de nulpunten. Bedenk daarbij dat je bijvoorbeeld in plaats van $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ook kunt schrijven:

$$1 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^2 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

Euler bedacht dat dit bij een oneindig polynoom misschien ook zou kunnen. Hij was op de hoogte van de reeksontwikkeling van $\sin(x)$, die Newton ontdekt had en gebruikte die zó:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Omdat deze functie de nulpunten $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ heeft, waagde hij het om te veronderstellen:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \dots$$

$$\text{Ofwel } \frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Een oneindig product! De coëfficiënt van x^2 in dit product is dan gelijk aan de oneindige som:

$$-\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right).$$

In de reeksontwikkeling is die coëfficiënt $-\frac{1}{3!}$ en

zo kwam Euler tot de nu beroemde oneindige som:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Vóór Euler hadden veel grote wiskundigen (ook Wallis) hun tanden stuk gebeten op het vinden van som van de oneindige rij omgekeerde kwadraten. Euler ontleende het vertrouwen in de uitkomst na uitgebreide numerieke testen. Later slaagde hij er in een echt bewijs te vinden. Net als bij Wallis was zijn eerste aanpak een vernuftig staaltje extrapolatie. Het aardige is nog dat als in de oneindige ontbinding

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - x^2\right) \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \dots \text{ de}$$

substitutie $x = \frac{1}{2}$ wordt uitgevoerd, het product van Wallis te voorschijn komt!

Wishful thinking heeft de wiskunde vaak mijlen verder gebracht. In de lerarenopleiding zouden historische voorbeelden zoals dat van Wallis, wat mij betreft veel meer aandacht mogen (of *moeten*) krijgen. En in dit verband durf ik '*wishful thinking*' dan ook wel te vertalen als 'wis(h)kundige denkactiviteit'.

Noten

- [1] Kindt, M. (2015), Hoe oneigenlijk is oneigenlijk?, *Euclides*, 91(4)
- [2] Edwards jr., C.H. (1979), *The Historical Development of Calculus*, New York
- [3] Struik, D.J. (1986), *A Source Book in Mathematics 1200 - 1800*, Princeton University Press
- [4] Delahaye, Jean-Paul (1997), *Het fascinerende getal π* , de Wetenschappelijke Bibliotheek
- [5] Misschien moet het wel heel negatieve 'prutswerk' op het conto van de vertaler worden geschreven, het woord 'knutselwerk' heeft hetzelfde Franse equivalent.
- [6] Polya, G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

ZWEMBAD EN CHINESE CAKE

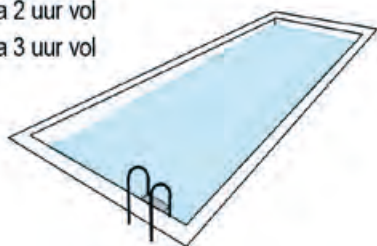
Martin Kindt

Een ontmoeting tussen Martin Kindt en een Chinese promovenda was voor hem de aanleiding tot het schrijven van dit artikel. Twee woordproblemen die leiden tot een type algebra dat, algemeen gesproken, (te) weinig aandacht krijgt in ons onderwijs.

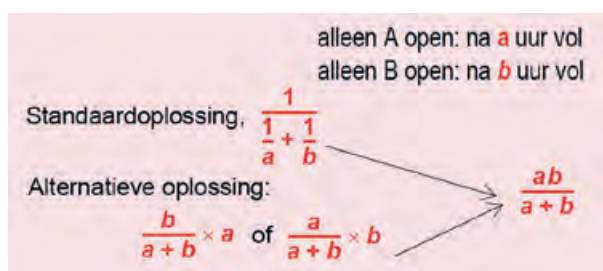
Een klassiek probleem

Het is alweer een poosje geleden dat Zhao Xiaoyan (roepnaam Yan)^[1] een kamer op het Freudenthal Instituut binnenliep om iets aan mijn kamergenoot te vragen. Terwijl ze mij groette keek ze terloops wat er op mijn scherm te zien was. Het was een plaatje bij een praatje over breuken dat ik binnenkort zou houden en het had duidelijk haar belangstelling. Het betrof een klassiek probleem: het vullen van een bassin met twee kranen (zeg A en B) met verschillende capaciteit.

alleen A open: na 2 uur vol
alleen B open: na 3 uur vol



De vraag hierbij is natuurlijk hoe lang het duurt voor het zwembad vol is als beide kranen openstaan. De standaardoplossing gaat als volgt: A vult in 1 uur de helft van het bad, B vult in dezelfde tijd één derde. Opgeteld is dit vijf zesde. Het duurt dus in elk geval langer dan 1 uur. Hoeveel langer? 12 minuten, want uit $t \times \frac{5}{6} = 1$ volgt: $t = 1\frac{1}{5}$ uur. Er is nog een andere mooie oplossing, vermeld door Freudenthal in zijn laatste boek^[2], die luidt: als het zwembad vol is, verhouden de bijdragen van de kranen A en B zich als 3 staat tot 2. Om $\frac{3}{5}$ van het bad vol te krijgen moet A dan $\frac{3}{5} \times 2$ uur open staan (en B natuurlijk $\frac{2}{5} \times 3$ uur). Voilà. In navolging van Freudenthal had ik ook een *slide* gemaakt waarop te zien is dat generalisatie van deze opgave tot leerzame algebra leidt:

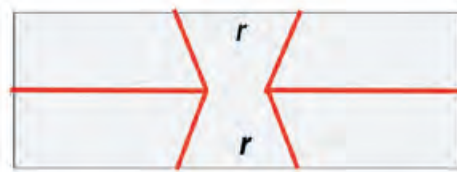


Mijn *slides* waren in het Engels, zodat Yan ze zonder veel uitleg kon begrijpen en ze was blijkbaar geïntrigeerd want even later kwam ze terug met een probleem uit een Chinees wiskundeboek.

Het probleem van Yan

Stel je hebt een cake in de vorm van een rechthoekig blok, die aan de buitenkant geheel geglaceerd is. Hoe kun je de cake onder een aantal personen verdelen zo dat ieder evenveel cake en evenveel glazuur krijgt?

In de versie van Yan was het aantal personen 5 en was de bodem van de cake een rechthoek met lengte a en breedte b . De symmetrische verdeling waar ze op aanstuurde zag er zo uit:



Hoe kom je hier op en wat zijn de afmetingen van de vijf parten? Als je geen rekening houdt met de hoogte, komt het probleem neer op het verdelen van zowel *oppervlakte* als *omtrek* van een rechthoek in vijf gelijke delen. Ik begin bij de omtrek. Elk van de vijf stukken moet een totale

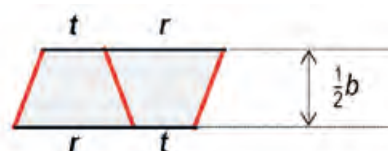
buitenrand hebben met lengte $\frac{1}{5}(2a + 2b)$. Voor de

figuur in het midden betekent dit dat de twee randstukken

– zeg r – elk $\frac{1}{5}(a + b)$ zijn. Als nu de oppervlakte van die

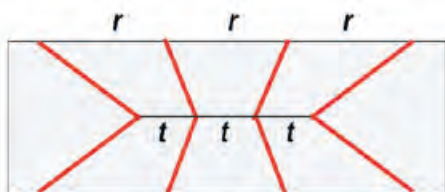
figuur $\frac{1}{5}ab$ is, zijn de overige vier stukken automatisch

ook elk het vijfde deel van het totaal. Ik hoef nog slechts de juiste *taille* (= t) van de figuur in het midden te vinden. Plaats bovenstuk en onderstuk naast elkaar:



Wil de oppervlakte gelijk zijn aan $\frac{1}{5}ab$, dan moet de basis van het parallellogram gelijk zijn aan $\frac{2}{5}a$.
Dus: $r + t = \frac{2}{5}a$ en omdat $r = \frac{1}{5}(a + b)$ volgt:
 $t = \frac{1}{5}(a - b)$. Veel mooier had het toch niet kunnen zijn.

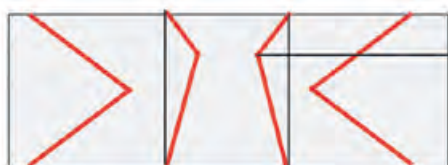
Een andere symmetrische verdeling krijg je door aan het middenstuk twee 'bi-trapezia' met hoogte b en met dezelfde t - en r -waarde te plakken en zo ontstaat er een nieuwe oplossing van het cakeprobleem:



Deze tweede oplossing vraagt wat meer snijwerk, dat wel. Bovendien werkt ze alleen als $3r \leq a$, en dat leidt dan tot $b \leq \frac{2}{3}a$.

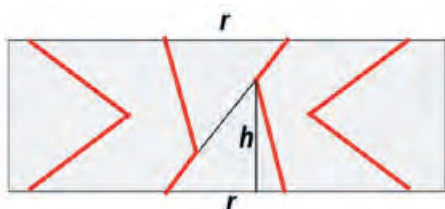
Oneindig veel oplossingen

Als je bedenkt dat het middenstuk in de beide voorgaande oplossingen gezien kan worden als een rechthoek (met zijden r en b) waaruit aan de b -kanten driehoekjes zijn weggesneden, begrijp je wel dat het een kwestie is van andere driehoekjes wegsnijden met dezelfde oppervlakte, om andere verdelingen te creëren. Bijvoorbeeld:



Merk op dat de afstanden van de knikpunten tot de zijkanen van de rechthoek gelijk zijn aan de helft van het verschil $a - t$ dus aan $\frac{1}{2}(a - \frac{1}{5}(a - b)) = \frac{2}{5}a + \frac{1}{10}b$.

Die knikpunten hoeven niet op dezelfde afstand van de lange zijde te liggen. Een bijzonder geval krijg je als het middenstuk bestaat uit twee aan elkaar gelijmde driehoeken.



Stel de hoogte van elk van de deeldriehoeken (met basis r) is h . Omdat de oppervlakte van beide samen

gelijk moet zijn aan $\frac{1}{5}ab$ volgt: $h \cdot \frac{1}{5}(a + b) = \frac{1}{5}ab$

ofwel: $h = \frac{ab}{a+b}$. Toevallig dezelfde formule als die werd

gevonden bij het twee-kranen-probleem. Wiskunde zit vol met verrassingen!

Variatie en generalisatie.

Een vruchtbaar didactisch idee is om leerlingen uit te dagen om zelf opgaven te ontwerpen over het hoofdstuk dat aan de orde is. Dat roept reflectie op en vraagt wat creativiteit. In de theorie van het realistisch wiskunde onderwijs spreekt men wel van 'eigen produkties'.^[3] Neem het aanvankelijke kranenprobleem met concrete gegevens (2 en 3 uur vultijd). Als je leerlingen vraagt om zelf zo'n soort opgave te ontwerpen zijn er ten minste vijf mogelijkheden tot variëren:

1. de getallen (hier 2 en 3) veranderen;
2. de vultijd van één kraan en van beide kranen samen geven en die van de andere kraan vragen;
3. meer dan twee kranen opvoeren;
4. een andere context bedenken;
5. een combinatie van deze mogelijkheden.

Voor wat betreft de context: in mijn basisschooltijd kregen we een serie sommen op in de trant van: als A een werk kan doen in a dagen en B hetzelfde werk in b dagen, hoeveel dagen hebben zij dan nodig als zij het werk samen doen (met voor a en b concrete getallen). Onzinnig eigenlijk. Het zou kunnen dat samenwerken het tempo versnelt of vertraagt, je kunt je daar van alles bij voorstellen. Leerlingen zullen vast wel creatiever zijn, als ze een ander verhaaltje bedenken bij het zwembad-probleem. In de zestiende eeuw bedacht Christianus van Varenbrake deze ludieke variant:^[4]

Eenen dronckaert drinct een tonnebiers alleene uut binnen 14 daghen. Ende als sijn wijf met hem drinct, so drincken zij die tonne uut binnen 10 daghen. Nu es de vraghe binnen hoeveel tijdt dat sijn wijf die tonne alleen uitdrincken soude.

In verschillende opzichten de omkering van het kranen-probleem. De context mag gewaagd zijn, als opgave is dit natuurlijk prima. Stel de capaciteit van de vrouw op

w dagen en er komt: $\frac{1}{14} + \frac{1}{w} = \frac{1}{10}$ met als oplossing $w = 35$.

Bij een vulprobleem met drie (of meer) kranen vergelijk ik de standaardoplossing met die gebaseerd op de verhoudingsgewijze bijdrage van elk. Noem de vultijden a , b , c .

De eerste leidt naar: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bij de alternatieve aanpak moet je de verhouding van de bijdragen van A , B en C eerst slim omwerken tot: $bc : ca : ab$. Net als bij de standaardmethode is het

resultaat: $\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

Hier is ook een inductieve aanpak mogelijk. Beschouw A en B samen als één kraan (zeg D) en de bijdragen van D en C aan een vol zwembad

verhouden zich dan als c staat tot $\frac{ab}{a+b}$. De vultijd in

het geval de drie kranen simultaan open staan is dus

$$\frac{c}{c+\frac{ab}{a+b}} \times \frac{ab}{a+b} = \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

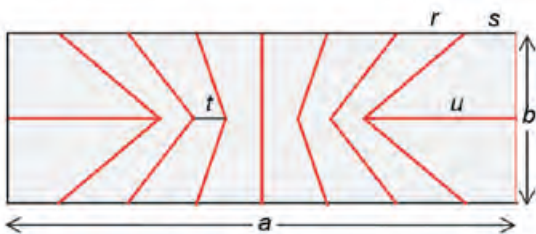
Zouden de leerlingen van nu zo'n herleiding kunnen uitvoeren? In lang vervlogen tijden werden zulke opgaven – in kale vorm, dat wel – op de mulo beoefend, dus het zou eigenlijk moeten kunnen. Hoe het verder gaat met grotere aantallen kranen hoef ik hier niet verder uit te leggen.

Het probleem van de cake kan heel goed worden aangesneden op school. Hoever je wilt gaan hangt natuurlijk af van in welke jaarklas je dat doet. Zelf zou ik niet starten met een verdeling-in-vijven, maar eerst een driedeling bekijken. Een tweedeling kan ook, maar zoals direct te zien is, geeft elke snede via een rechte lijn door het middelpunt van de rechthoek een goede oplossing. Bij een partitie in drieën hoef je alleen maar te zorgen voor een goed middenstuk (boven en onderrand gelijk aan

$\frac{1}{3}(a+b)$ en taille $\frac{1}{3}(a-b)$). De reststukken zijn dan

vanzelf goed. Een eerlijke verdeling in vier stukken is triviaal. Bij een even aantal stukken (> 4) kan worden gestart met een rechte snede door het middelpunt (loodrecht op de lange zijde van de cake).

Hieronder zie je zo'n verdeling in tien stukken.



Dit lukt niet bij elke rechthoek. Er moet hier gelden:

$$6 \cdot \frac{a+b}{10} \leq a \text{ hetgeen uitmondt in } b \leq \frac{2}{3}a.$$

Of algemener: dit type verdeling in n stukken met gelijke rand en gelijke oppervlakte lukt alleen als

$$(n-4) \cdot \frac{a+b}{n} \leq a. \text{ Hieruit volgt dan: } n \leq 4\left(\frac{a}{b} + 1\right).$$

Je kunt hier nog wat meer oefeningen in algebra aan koppelen. Bijvoorbeeld de vraag om s en u (zie figuur 8) uit te drukken in a , b en n . Met als resultaten:

$$s = \frac{2}{n}(a+b) - \frac{1}{2}b$$

$$u = \frac{2}{n}(a-b) + \frac{1}{2}b$$

Hieruit volgt: $s+u = \frac{4}{n}a$ en het trapezium met

evenwijdige zijden s en u en met

hoogte $\frac{1}{2}b$ heeft verifieerbaar de oppervlakte $\frac{1}{n}(ab)$ en

de buitenrand $\frac{2}{n}(a+b)$.

Terugblik

De toevallige binnenkomst van Yan heeft twee heel verschillende problemen in één artikel gebracht. Toch hebben die twee wel wat gemeen. Ze kunnen allebei worden gezien als voorbeelden van rijke contexten om algebra aan te koppelen en te oefenen. En ik durf te zeggen: mooie algebra. Dat 'mooi' heeft dan te maken met de symmetrie van de hier optredende vormen. Misschien iets om in ons onderwijs meer aandacht aan te besteden: algebra kan ook gewoon mooi zijn! Behalve symmetrie is ook de potentie tot variatie en generalisatie een gemeenschappelijk aspect. Het cake-probleem heeft dan nog een sterke meetkundige component, in mijn ogen een pluspunt. Ten slotte wil ik hier kwijt dat de algebra op school te ééndimensionaal is, te veel propedeuse op de analyse van één variabele. Maar als je bedenkt dat formules die optreden in natuurkunde of economie meestal meer variabelen bevatten, dan zie je het manco! Voorbeelden als in dit stukje kunnen dit misschien wat verhelpen.

Noten

- [1] Yan hoopt dit jaar te promoveren bij professor Marja van de Heuvel-Panhuizen op *Classroom Assessment*.
- [2] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education (China lectures)*, Kluwer Academic Publishers, pagina 37.
- [3] Adri Treffers heeft deze term geïntroduceerd.
- [4] Het voorbeeld is ontleend aan een rekenboek uit 1532. Zie Kool, M. en E. de Moor (2009), *Rekenen is leuker dan/als je denkt*, Bert Bakker, pagina 263.

Over de auteur

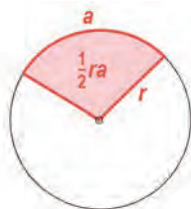
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplaanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

De meetkunde begon ooit met het berekenen van oppervlakten. Niet alleen van gebieden begrensd door rechte lijnen, maar ook van cirkelschijven. Martin Kindt toetst een oude Chinese benaderingsformule voor de oppervlakte van een cirkelsegment.

Cirkelsector en -segment

De *Chiu Chang Suan Shu* ofwel de *Negen hoofdstukken over de kunst der mathesis* is samengesteld in wat in de Chinese geschiedenis de Han-periode heet, dat is van 206 vóór tot 221 ná Chr. Liu Hui (ca. 220–280) schreef een uitgebreid commentaar op dit werk, met oplossingen van de problemen. Zo bereikte hij dat dit werk een plaats in de geschiedenis van de wiskunde verwierf. Het eerste van de negen hoofdstukken behandelt het opereren met breuken en de berekening van oppervlakten. Zo zijn er correcte rekenregels te vinden voor de oppervlakten van rechthoeken, driehoeken, trapezia en cirkelsectoren. Van der Waerden schrijft in *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations* ^[1] dat voor laatstgenoemde categorie de formule luidde:

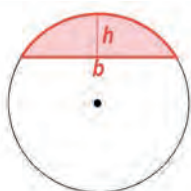
Oppervlakte sector =
 $\frac{1}{2} \times \text{straal} \times \text{boog}$



Voor een volle cirkel worden verschillende oppervlakteformules genoemd, waaronder:

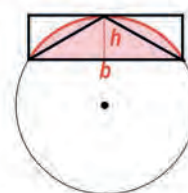
oppervlakte = $\frac{1}{12}$ *omtrek in het kwadraat*, waaruit blijkt dat π hier, evenals in het Oude Testament, gelijk aan 3 is verklaard. Deze formule, die de oppervlakte van de cirkel uitdrukt in de omtrek, is ook op een Babylonisch kleitablet te vinden.^[2] Eigenlijk is dit wel een mooie vuistregel voor als je de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van een boom wilt weten: meet de omtrek, kwadrateer de uitkomst en deel dan door 12. Het herleiden van $O = \frac{1}{4\pi} \cdot p^2$ uit $O = \pi r^2$ en $p = 2\pi r$ is trouwens een prima algebraoefening voor school. Opzienbarend in de Chinese tekst is de formule voor de oppervlakte van een cirkelsegment:

Oppervlakte segment =
 $\frac{1}{2} \times (hb + h^2)$



Heron van Alexandrië (1ste eeuw na Chr.) vermeldt dat de 'Ouden' de formule $\frac{1}{2} h (b+h)$ gebruikten en zegt erbij dat deze gebaseerd lijkt op het idee dat de omtrek 3 maal de diameter is.

$$\frac{1}{2}hb < \frac{1}{2}h(h+b) < hb = \frac{1}{2}h(b+b)$$



Onderzoek van de Chinese formule

Ik beperk me tot segmenten die hoogstens gelijk zijn aan een halve cirkelschijf. In dat geval is het duidelijk dat de oppervlakte van het segment in ligt tussen de oppervlakte van de ingeschreven gelijkbenige driehoek en de omgeschreven rechthoek. Dat rijmt dan met:

Maar dit zegt natuurlijk helemaal niets over de juistheid of nauwkeurigheid van de formule. Een verstandige manier om formules te testen, is om eerst een paar speciale gevallen te bekijken. Ik begin met de halve cirkel, dus $h = r = \frac{1}{2} b$. Dat zou dan opleveren:

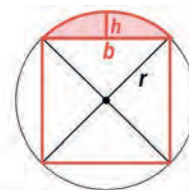
$$\text{oppervlakte halve cirkel} = \frac{1}{2} r (r + 2r) = \frac{1}{2} \cdot 3 r^2$$

Door een Chiu-Chang-Suan-Shu-bril bekeken ($\pi = 3$) klopt dat als een bus. Maar evenals Heron weten we nu dat de formule hooguit een aardige benadering geeft. Er is nog een geval waarbij de formule schijnbaar goed is, namelijk voor een segment in een kwartcirkel.

De oppervlakte van zo'n segment uitgedrukt in de straal r is, in de veronderstelling $\pi = 3$, eenvoudig gelijk aan $\frac{1}{4} (3r^2 - 2r^2) = \frac{1}{4} r^2$.

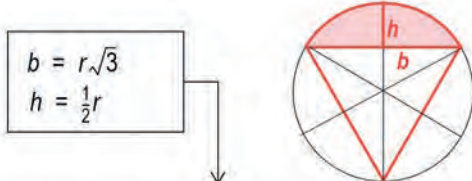
Dit resultaat wordt ook geleverd door de h - b -formule:

$$\begin{aligned} b &= r\sqrt{2} \\ h &= r - \frac{1}{2}r\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2}h(b+h) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}r\sqrt{2})(r + \frac{1}{2}r\sqrt{2}) = \frac{1}{4}r^2$$

Als derde proef op de Chinese formule bekijk ik het segment dat past bij een sectorhoek van 120° . Daartoe wordt het ingeschreven vierkant ingewisseld voor een regelmatige driehoek:



$$\frac{1}{2}h(b+h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}r \cdot (r\sqrt{3} + \frac{1}{2}r) = (\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{8})r^2$$

$$\text{Oppervlakte segment} = \frac{1}{3}(3r^2 - \frac{3}{4}r^2\sqrt{3})$$

Nog te vergelijken: $1 - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ en $\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{8}$.

Met de wetenschap dat $\sqrt{3}$ irrationaal is, hoeven we aan de ongelijkheid van die twee waarden niet te twifelen, maar om een idee van de (on)nauwkeurigheid te krijgen is het toch aardig om na te gaan dat 'ongeveer gelijkstellen' leidt tot $\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}$, een benadering die men ook tegenkomt in de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{3}$.

Vergelijken van formules met de GR

Met de grafische rekenmachine (of andere programmatuur) kan de Chinese formule goed worden vergeleken met een correcte formule. Als ik $r = 1$ stel en als x de halve hoek (in graden) is, van de sector waar het cirkelsegment strak in past, dan is de oppervlakte van het segment:

$$\frac{2x}{360} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \sin(2x).$$

Er geldt voor zo'n segment ook:

$$b = 2\sin x \text{ en } h = 1 - \cos x.$$

Volgens de Chinese formule is de oppervlakte dan:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos x)(1 - \cos x + 2\sin x).$$

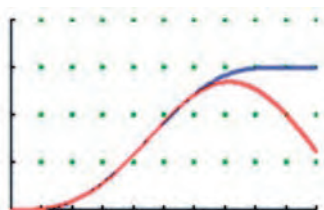
Om de Chinese formule een 'eerlijke' kans te geven, vervang ik π door 3 en vergelijk op mijn GR

$$Y_1 = X/60 - 0.5\sin(2X) \text{ met}$$

$$Y_2 = 0.5(1 - \cos(X))(1 - \cos(X) + 2\sin(X)).$$

Als ik de Y-tabellen vergelijk, dan zijn de verschillen klein (en inderdaad 0 bij 45 en 90). Ook als ik de halve cirkel voorbijga, gaat het nog een poosje aardig goed.

Als je de twee grafieken op het scherm vergelijkt, dan zijn die tot - zeg maar $x = 130$ - nauwelijks van elkaar te onderscheiden.



Als je de Y_1 corrigeert via de π -benadering van de GR zie je twee grafieken die iets minder close zijn, en ook wat eerder (bij $x = 110$) afscheid van elkaar nemen. Kortom: die Chinese formule was zo gek nog niet, al blijft de

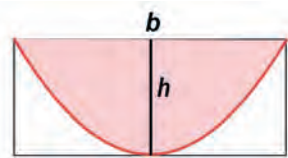
achtergrond ervan in nevelen gehuld. Heron, die in cirkelberekeningen de bovenschatting van Archimedes ($\pi \approx 3\frac{1}{7}$) gebruikte, gaf een aanpassing van de formule, zodat die weer klopt bij de halve schijf:

$$\frac{1}{2}h(b+h) + \frac{1}{14}(\frac{1}{2}b)^2.$$

Een grafisch onderzoek, waarbij ik aan de formule van Y_2 de Heron-term toevoeg en de formule van Y_1 aanpas door $X/60$ te vervangen door $11X/360$ leert dat de grafieken nog meer samenvallen, maar wel iets eerder uit elkaar gaan.

Nog een paar formules met basis en hoogte

Lijkt het geen aardig idee om zo'n onderzoekje eens met een klas uit te voeren? Het feit dat in de Oudheid in verschillende culturen eenzelfde benaderingsformule heeft rondgezongen, is op zich al heel belangwekkend. Dat Chinese wiskunde doorgesijpeld zou zijn in Egypte of Babylon of vice versa is nauwelijks te geloven en historici hebben hiervoor, zover ik weet, ook geen antwoord op. In het algemeen gesproken, denk ik dat het heel goed zou zijn om met een klas af en toe in de rijke geschiedenis van de wiskunde te duiken en de leerlingen te laten ervaren dat wiskunde mensenwerk is. Bij de integraalrekening in de bovenbouw kun je dit onderzoekje nog een vervolg geven. Kun je basis-hoogteformules bedenken voor segmenten bij andere krommen dan de cirkel. Voor een symmetrisch



$$\text{oppervlakte paraboolsegment} = \frac{2}{3} \cdot hb$$

segment van de parabool geldt exact:

Voor 'superparabolen', $y = x^4$, $y = x^6$, ... kun je soortgelijke (en exacte) formules vinden. In het algemeen bij $y = x^{2n}$ geldt:

$$\text{oppervlakte segment} = \frac{2n}{2n+1}hb.$$

Dat deze oppervlakte voor $n \rightarrow \infty$ nadert tot hb is niet zo verrassend, als je bedenkt hoe de segmenten bij de krommen $y = x^4$, $y = x^6$, ... steeds dichter naar de basis-hoekpunten van de omhullende rechthoek kruipen. Voor andere even functies heb ik geen elegante exacte expressies in h en b kunnen vinden.

Noten

- [1] Waerden, B.L. van der (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlijn: Springer Verlag.
- [2] Robson, E. (2008). *Mathematics in Ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press, p. 66.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplaanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

UIT HET BOEK VAN FIBONACCI

Martin Kindt

Bij Fibonacci hoort een beroemde getallenrij. Maar Fibonacci heeft slechts een beginstuk van 'zijn' rij beschouwd, namelijk als uitkomst van één van de talloze sommen uit zijn werk *Liber Abaci*, het zogeheten konijnenprobleem. In dit artikel bespreekt Martin Kindt twee andere opgaven uit zijn boek: sommen die prima zouden kunnen passen in de huidige lespraktijk.

figuur 1 Fibonacci
(1180 – 1250)



Liber Abaci

In 1202 verscheen in Italië een opzienbarend boek. De 22-jarige auteur was Leonardo da Pisa alias Fibonacci (afkorting van filio Bonacci). Vader Bonacci had een politieke rol in de republiek van Pisa, kreeg de leiding over een handelscompagnie en vestigde zich uit dien hoofde geruime tijd in de Algerijnse havenstad Béjaïa aan de Middellandse Zee. Hij nam zijn zoon Leonardo mee met het idee dat dit voor hem wel een leerzame ervaring zou zijn. En dat was het! Want zoonlief maakte kennis met de Hindoe-Arabische cijfers en de rekenwijze met het tientallig stelsel. Terug in Pisa schreef hij een dik boek, waarin hij niet alleen het 'moderne rekenen' uitlegt, maar ook talloze vraagstukken bespreekt die wij nu herkennen als algebra en/of meetkunde. Dit boek, getiteld *Liber Abaci*, wordt door historici bestempeld als het eerste boek in Europa waarin het rekenen op schrift, dus zonder telraam of *abacus*, wordt behandeld met de cijfers zoals die nu al enige eeuwen overal in de wereld worden gehanteerd.

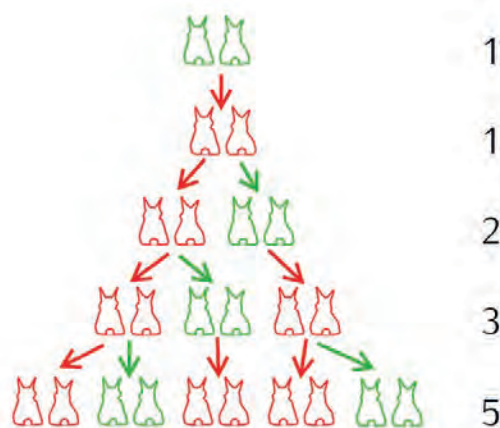
De eerste regel van het eerste hoofdstuk van *Liber Abaci* bevat het rijtje van de negen *figure indorum*: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Met deze negen 'Indische figuren' en het teken 0, door de Arabieren *zephir* genoemd (de herkomst van ons woord 'cijfer') kan elk getal worden genoteerd, aldus Fibonacci. Hij legt dan uit hoe het positiestelsel werkt en geeft aan het eind van de eerste paragraaf een aantal voorbeelden van transcripties van Romeins genoteerde getallen naar het nieuwe systeem.

Veelzeggende voorbeelden zijn: MCCXXXIII = 1234 en MMMCCCXXI = 4321. En dan zijn er voorbeelden

waarin de rol van de nul tot uiting komt, de lezer kan ze zelf verzinnen. Via optel- en vermenigvuldigingstafels wordt het 'cijferend rekenen' omstandig uitgelegd. Tot en met het zevende hoofdstuk kun je spreken van een leergang cijferen. Het vervolg van het boek is een ware schatkamer van allerlei problemen met uitgebreide oplossingen, waaruit blijkt dat de toch jonge Fibonacci uitstekend op de hoogte was van het wiskundige werk van beroemdheden als Euclides, Diophantos en Al Khwarizmi.

Bij de konijnen af

Het bekendste probleem uit *Liber Abaci* is zeker het probleem, waarbij gevraagd wordt het aantal konijnenparen te berekenen in een ommuurde tuin als gegeven is dat elk vruchtbaar paar iedere maand één nieuw (gemengd) paar voortbrengt, en elk pasgeboren paar (in de figuur groen) na één maand geslachtsrijp is. Beginnend met één rijp paar (rood), zijn er na één jaar 377 paren in de tuin, mits er geen konijnen voortijdig dood gaan, en dat is dan de uitkomst van de som uit het boek.



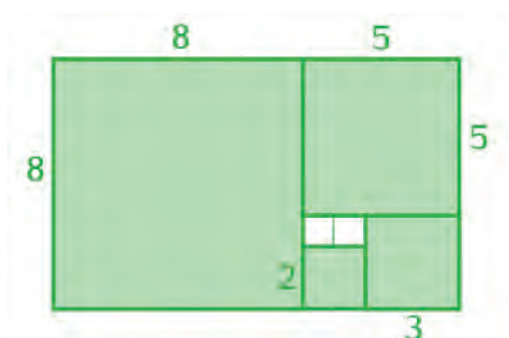
figuur 2 Konijnenparen

Dit vraagstuk heeft later aanleiding gegeven tot het bestuderen van wat nu de rij van Fibonacci heet en waarbij elke term de som is van zijn twee voorgangers. Merk op dat de twee kleuren pijltjes in het plaatje ook elk de Fibonacci-rij opleveren. Fibonacci stopte bij 377, maar juist de oneindig voortgezette rij bleek een rijke bron van wiskunde. De Franse Nederlander Albert Girard

(1595 – 1632) schijnt de eerste te zijn geweest die de oneindige rij van Fibonacci heeft gedefinieerd via recursie. Verrassenderwijs duiken de Fibonacci-getallen op een aantal plaatsen in de natuur op. Bekende voorbeelden zijn de ‘spiralen op de schil van een ananas’ en de ‘stamboom van een mannetjesbij’. En er is zelfs een salontafel die de naam Fibonacci draagt (figuur 3), waarvan het ontwerp is geïnspireerd op figuur 4.^[1] Door nieuwe vierkanten (zijde 13, 21, ...) aan de figuur te plakken krijg je rechthoeken waarvan de verhouding tussen lengte en breedte steeds beter het guldensnedegetal ofwel $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ benadert.



figuur 3 Fibonacci-tafel



figuur 4

Dertig vogels

Terug naar *Liber Abaci*. De hoofdstukken 8 tot en met 11 bevatten ‘koopmansproblemen’. Onder de vele sommen is er een met de titel ‘Over een man die dertig vogels in drie soorten voor 30 dinari koopt’. Het vraagstuk luidt dan als volgt:

Een man koopt 30 vogels: patrijzen, duiven en mussen. Een patrijs kost 3 dinari, een duif 2 dinari en een mus $\frac{1}{2}$ dinari. Hij kocht voor 30 dinari. Hoeveel vogels kocht hij van elke soort?

Van der Waerden zegt dat dit probleem, met andere getallen, al is te vinden in oude Chinese, Indische en Arabische teksten.^[2] Ook hier blijkt dat Fibonacci wiskundig belezen was. Een voor ons natuurlijke aanpak is: ‘maak er eerst algebra van’. Met p , d en m voor achtereenvolgens de aantallen patrijzen, duiven en mussen, komt er:

$$\begin{aligned} p + d + m &= 30 \\ 3p + 2d + \frac{1}{2}m &= 30 \end{aligned}$$

De tweede vergelijking is equivalent met

$$6p + 4d + m = 60$$

Het verschil met de eerste vergelijking maakt nu:

$$5p + 3d = 30$$

Oneindig veel oplossingen?

Nee, want p en d staan voor natuurlijke getallen. Omdat 30 en $3d$ deelbaar zijn door 3, moet $5p$ en dus p , dat ook zijn. Net zo begrijp ik dat d een 5-voud moet zijn. Zo kan ik stellen: $p = 3k$ en $d = 5n$ (met k en n natuurlijke getallen). Uit:

$$5 \cdot 3k + 3 \cdot 5n = 30$$

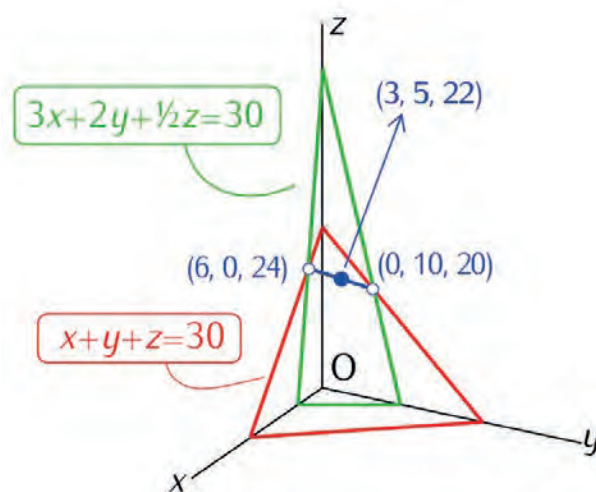
volgt:

$$k + n = 2$$

Aangenomen dat van elk van de vogelsoorten er ten minste één exemplaar wordt gekocht, levert dit op $k = n = 1$. Resultaat: de aankoop bedraagt 3 patrijzen, 5 duiven en $30 - 8 = 22$ mussen.

Dit is typisch een voorbeeld van het opstellen van een algebraïsch model naar het oude ideaal van Descartes.^[3] Heb je eenmaal een stelsel van vergelijkingen, dan moet je wel even de context laten voor wat die is. Want om 30 vogels af te trekken van 60 dinari, zoals bij de tweede stap is gebeurd, dat lijkt toch idioot. Als leraar hoop je dan dat er leerlingen zijn die niet achteloos over deze drempel heenstappen, zodat er in de klas een ‘discours over de methode’ kan plaatsvinden!

Er is ook een semi-meetekundige aanpak. Vervang het drietal p, d, m door x, y, z . De vergelijkingen van het stelsel kunnen nu worden voorgesteld door vlakken in een $Oxyz$ -stelsel, zie figuur 5.



figuur 5

De mogelijke oplossingen zijn te vinden als punten op het stuk van de snijlijn in het eerste octant. Via $x = 0$ en $y = 0$, worden de punten $(6, 0, 24)$ en $(0, 10, 20)$ op de snijlijn gevonden. Precies in het midden daartussen ligt een punt met drie gehele coördinaten en dat geeft mij de oplossing.^[4]

Hoe lost Fibonacci zijn som op? Hij merkt eerst op dat de gemiddelde prijs per vogel 1 dinaro is. Dan beschouwt hij twee mengsels M_i en M_{ii} .

1 patrijs, 4 mussen (M_i)

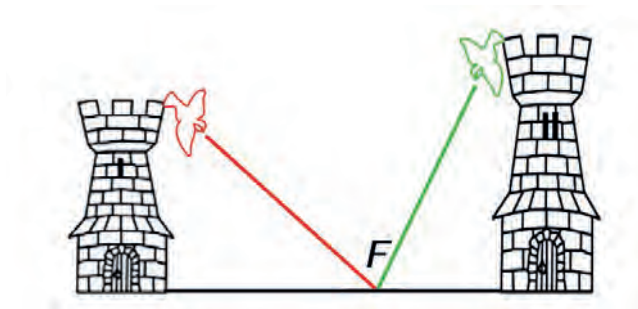
1 duif, 2 mussen (M_{ii})

M_i bevat nu 5 vogels voor 5 dinari terwijl M_{ii} 3 vogels voor 3 dinari bevat. Fibonacci neemt nu 3 keer M_i en 5 keer M_{ii} met als resultaat 30 vogels voor 30 dinari. Zo komt hij dan aan 22 mussen, 3 patrijzen en 5 duiven. Zijn tekst is voor mij enigszins cryptisch en ik heb hier alleen de kern van zijn aanpak verwoord.

Twee vogels

Verderop in het boek is een ander, eveneens klassiek probleem te vinden.

Twee torens staan 50 m uit elkaar en zijn respectievelijk 30 en 40 m hoog. Tussen de beide torens staat een fontein. Twee vogels vertrekken op hetzelfde moment van de top van beide torens en vliegen naar de fontein. Ze vliegen even snel en komen tegelijkertijd aan bij de fontein. Op welke afstand ligt de fontein van die twee torens?



figuur 6

Dit probleem kan worden opgelost met hulp van de stelling van Pythagoras en een snufje algebra. Stel x = de afstand van de fontein tot de 30 m-toren en y = de afstand van fontein tot de andere toren. Dan volgt uit de stelling van Pythagoras:

$$30^2 + x^2 = 40^2 + y^2$$

Dus: $x^2 - y^2 = 700$, ofwel

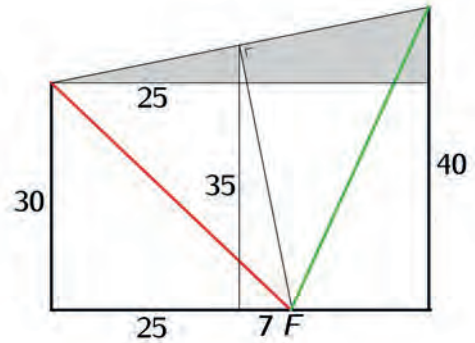
$$(x + y)(x - y) = 700$$

Via $x + y = 50$ komt er nu $x - y = 14$, wat eenvoudig voert naar $x = 32$ en $y = 18$. De fontein ligt dus op 32 meter van de lage toren.

Fibonacci pakte het anders aan. Hij construeerde de plaats van de fontein via de middelloodlijn van de verbinding van de beide toppen, zie figuur 7. Vervolgens gebruikte hij evenredigheden. Vertaald in de nu gangbare wiskundetaal komt dit neer op: noem de afstand van de fontein tot het punt op de grond, precies midden tussen de torens u . Uit de gelijkvormigheid van de grijze driehoeken, zie figuur 7, volgt:

$$50 : 10 = 35 : u$$

Dus $u = 7$ en de afstand van de fontein tot de lage toren is $25 + 7 = 32$.



figuur 7

Generalisatie baart oefening

Dit historische vraagstuk zou je als zodanig in de klas kunnen presenteren. Een nuttige exercitie in algebra krijg je dan als de getallen 30, 40 en 50 achtereenvolgens worden vervangen door a , b en c . De eerste oplossing leidt tot:

$$x - y = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

Gecombineerd met $x + y = c$ komt er nu:

$$x = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} \text{ en } y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

De meetkundige oplossing moet natuurlijk voeren naar dezelfde expressie. Even checken. De gelijkvormigheid van de driehoeken leidt tot:

$$\frac{c}{b-a} = \frac{a+b}{2u}$$

en dus tot:

$$u = \frac{b^2 - a^2}{2c}$$

En er komt dan weer:

$$x = \frac{1}{2}c + \frac{b^2 - a^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}$$

Twee gelijkwaardige wegen die naar Pisa leiden, is dat niet goede algebra voor school?

Noten

- [1] Ontwerp Nautabene Design, Bergeijk.
- [2] Waerden, B.K. van der (1985). *A History of Algebra (from al-Khwarizmi to Emmy Noether)*. Berlijn: Springer.
- [3] Als beschreven in zijn *Discours de la Méthode* (1637).
- [4] Ik realiseer me dat het gebruik van een Oxyz-stelsel nu wel een blinde vlek zal zijn voor de meeste leerlingen. Dat was vóór 1998, op het vwo althans, wel anders. Denk aan lineair programmeren (wiskunde A) en ruimtemeetkunde (wiskunde B). Een mens zou er nostalgisch van worden.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

PYTHAGORAS IN MEER DIMENSIES

Martin Kindt

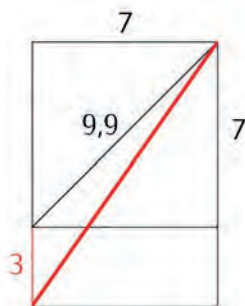
Analogie in de wiskunde is een thema dat wel wat meer aandacht zou mogen krijgen in het onderwijs. In dit artikel bespreekt Martin Kindt analoge versies van de stelling van Pythagoras in de drie- en vierdimensionale ruimte.

Langste stok in het lokaal

In 1980 schreef ik in de krant van het IOWO^[1] een stukje over een ervaring in een tweede klas van het leao^[2]. Met de lerares Nanda Querelle was afgesproken dat ze een idee van Polya^[3] aan de klas zou voorleggen. Vraag: *hoeveel meter is de langste stok die in het wiskunde-lokaal past?*

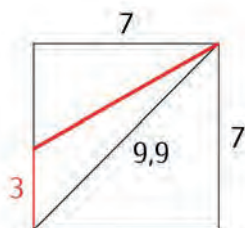
Het duurde niet lang of vingers zwaaiden door de ruimte, wezen van een punt in de hoek van de vloer naar het diametraal gelegen punt van het plafond. En daar kwamen de vragen: 'juf, hoe breed is het hier?', 'de hoogte moet je toch weten?', 'mag je schuin meten?' Na de nodige meetactiviteiten werd besloten dat de vloer 7 bij 7 m was en de hoogte 3 m. De diagonaal op de vloer meten was lastig met al die tafels en stoelen, dan maar Pythagoras. De wortel uit $7^2 + 7^2$ is ongeveer 9,9. Hoe nu verder? Er worden voorstellen gedaan, toegelicht met een figuur. Bijvoorbeeld zo, zie figuur 1.

figuur 1



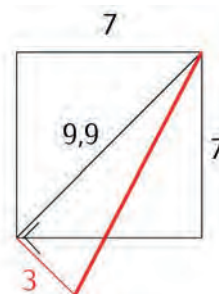
Protest: 'die 3 moet recht naar boven'. Zo dan?, zie figuur 2.

figuur 2



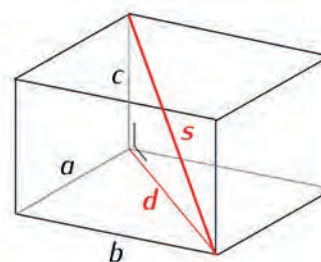
Dit is duidelijk nog foutter! Met vereende krachten komt er ten slotte figuur 3 op het bord.

figuur 3



Eén groepje had meteen de wortel uit $7^2 + 7^2 + 3^2$ berekend: 10 meter en 34 centimeter. 'Hoe hebben jullie dat bedacht?', vroeg Nanda. Gewoon, Pythagoras, maar dan met drie zijden. Een onverwacht en speculatief staaltje analogiedenken. Analogie in de wiskunde is een mooi en vaak productief principe. Maar je moet natuurlijk wel oppassen. In de ruimtefiguur 4 is te zien waarom Pythagoras-met-drie-zijden hier een goed idee is:

figuur 4



$$\left. \begin{array}{l} d^2 = a^2 + b^2 \\ s^2 = d^2 + c^2 \end{array} \right\} \rightarrow s^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

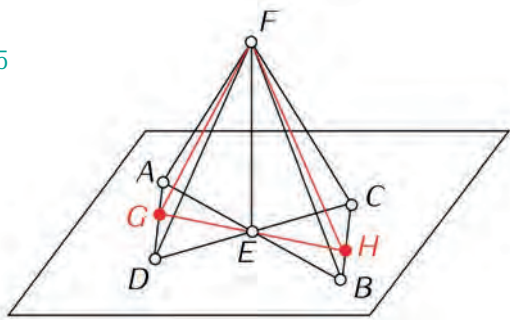
Mooi toch? Hoewel je je kunt afvragen waarom de driehoek met zijden c , d en s rechthoekig is. Serieuze wiskundigen doen dat.

Stelling van Euclides

Zo'n serieuze wiskundige was Euclides die onder de naam *Elementen* dertien wiskundeboeken schreef. In boek 11 begint de ruimtemeetkunde, vroeger op school stereometrie genoemd. Een tak die na een opleving tussen 1985 en 1998 nu weer grotendeels verdwenen is uit het onderwijs aan havo en vwo. Helaas!

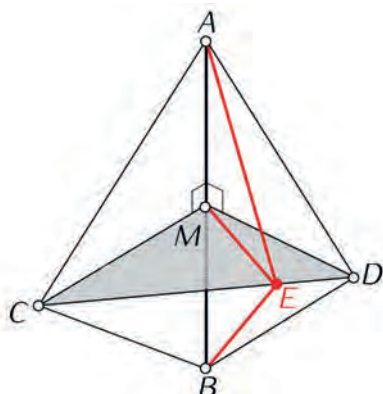
Euclides begint zijn elfde boek met 28 (!) definities. De derde daarvan luidt in vertaling: *Een rechte lijn staat loodrecht op een vlak als hij rechte hoeken maakt met elke lijn die hij snijdt en die in dat vlak ligt*. Dan komen de talloze stellingen ('proposities'), stuk voor stuk voorzien van strikte bewijzen. Ik richt me nu op propositie 4. Die zegt dat het voldoende is voor een lijn om loodrecht op een vlak te staan, als die lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen uit dat vlak. Bij het bewijs gebruikt Euclides figuur 5:

figuur 5



Gegeven is dat FE loodrecht staat op AB en CD . De punten A, B, C en D zijn zo gekozen dat de vier lijnstukken EA, EB, EC en ED even lang zijn. Euclides bewijst dan dat FE ook loodrecht staat op de lijn GH door E , waarbij G en H respectievelijk punten zijn van de lijnen AD en BC . In zijn bewijsvoering maakt hij gebruik van paren congruente driehoeken. Eerst $\triangle AED$ en $\triangle BEC$ (twee zijden gelijk en de ingesloten hoek, zeg **ZHZ**). Vervolgens $\triangle AEG$ en $\triangle BEH$ (**HZH**), zodat $EG = EH$. Via de congruentie van eerst $\triangle ADF$ en $\triangle CBF$ en daarna $\triangle AGF$ en $\triangle BHF$ volgt dat $FG = FH$. In de inmiddels als gelijkbenig verklaarde driehoek $\triangle FGH$ is E het midden van de basis, dus FE staat loodrecht op GH . Hetgeen te bewijzen was. Dit is in het kort Euclides' betoog. Een concreet beeld dat bij dit bewijs kan worden opgeroepen, is dat men, om een mast loodrecht op een vlakke ondergrond te plaatsen, vier even lange tuitouwen kan gebruiken, twee is duidelijk onvoldoende. In de meeste schoolboeken voor stereometrie stond vroeger een wat ander bewijs, vermoedelijk afkomstig van Cauchy, maar dat in essentie op hetzelfde neerkomt, zie figuur 6.

figuur 6



CM en DM zijn middelloodlijnen van AB , zodat de driehoeken $\triangle ACD$ en $\triangle BCD$ congruent zijn (**ZZZ**). Daaruit volgt (**ZHZ**) dat de driehoeken $\triangle AED$ en $\triangle BED$ congruent zijn, zodat $AE = BE$ en ME ook een middelloodlijn van AB is. Q.E.D.

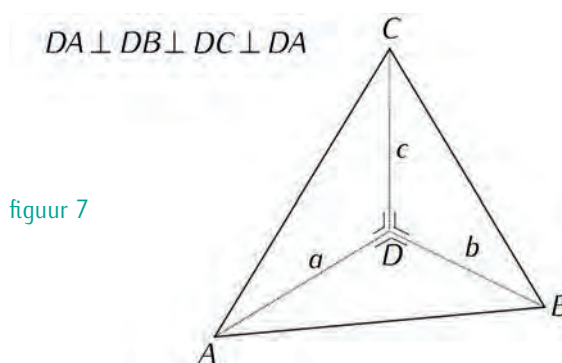
De 3D-stelling van Pythagoras is hiermee afdoende bewezen en zij leidt tot een formule voor de afstand van twee punten A en B in de euclidische ruimte R^3 :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Dit laat zich generaliseren tot een formule voor de afstand van twee punten in de n -dimensionale ruimte R^n , maar dan als definitie.

Ander analogon van 'Pythagoras'

Polya behandelt een alternatieve stelling van Pythagoras in de ruimte.^[4] Het driedimensionale analogon van een rechthoekige driehoek is een viervlak, waarbij drie in één punt samenkomende ribben twee aan twee loodrecht op elkaar staan, zie figuur 7.



figuur 7

De drie rechthoekige driehoeken $\triangle BDC$, $\triangle ADC$ en $\triangle BDA$ noem ik de rechthoekszijvlakken, en driehoek $\triangle ABC$ noem ik het schuine zijvlak. De oppervlakten van de vier driehoeken noem ik in volgorde α, β, γ en δ . Zou er nu een mooie relatie bestaan tussen deze vier oppervlakten? Polya vertelt dat een *highschool*-leerling het voorstel

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \delta^3$$

deed. Een spannende suggestie, die het waard is om onderzocht te worden. Polya beschrijft dan een stapsgewijze aanpak die echter leidt tot:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2.$$

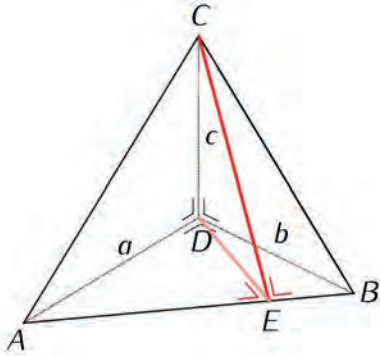
Een toch verrassend analogon van de stelling van Pythagoras. Hoe kan dit resultaat worden bereikt?

Om te beginnen laten de oppervlakten α, β en γ zich vanwege die rechte hoeken gemakkelijk uitdrukken in a, b en c :

$$\alpha = \frac{1}{2} bc, \beta = \frac{1}{2} ab \text{ en } \gamma = \frac{1}{2} ac.$$

Het doel is nu om ook δ uit te drukken in a, b en c . Daarbij helpt de hoogtelijn CE van driehoek $\triangle ABC$, zie figuur 8.

figuur 8



Maar om Pythagoras toe te passen in driehoek $\triangle CDE$ moet ik de lengte van DE weten. En nu kan de goede oude stereometrie in stelling worden gebracht!

(1) Omdat CD loodrecht staat op twee snijdende lijnen van het vlak door A , B en D , snijdt of kruist hij alle lijnen van dit vlak loodrecht, in het bijzonder de lijn AB .

(2) De lijn AB op haar beurt staat loodrecht op CE en kruist CD loodrecht, en staat daarom loodrecht op vlak CDE en dus op de lijn DE .

Dit betekent dat DE een hoogtelijn in driehoek $\triangle ABD$ is en via de oppervlakte is de lengte ervan nu eenvoudig te berekenen:

$$\text{Oppervlakte } \triangle ABD = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} DE \cdot AB =$$

$$\frac{1}{2} DE \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \text{ zodat } DE = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De hoogte CE van driehoek ABC wordt nu gevonden uit:

$$CE^2 = c^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2}$$

En er volgt:

$$\delta^2 = \frac{1}{4} \cdot AB^2 \cdot CE^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4} \cdot (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) = \gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2$$

Ziedaar!

Met coördinaten

De oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ kan ook via coördinaten worden berekend. Laat D de oorsprong zijn van een orthonormaal assenstelsel. De lijn AB wordt gerepresenteerd door het stelsel:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ én } z = 0 \quad (\text{i})$$

en heeft de richtingsvector $(a, -b, 0)$. Het punt $E(x_E, y_E, 0)$ ligt op AB zodat $CE \perp AB$. Het inproduct

van de vectoren $\overrightarrow{CE} = (x_E, y_E, -c)$ en $\overrightarrow{BA} = (a, -b, 0)$ moet nul zijn, dus:

$$ax_E = by_E \quad (\text{ii})$$

Combinatie van (i) en (ii) geeft:

$$x_E = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad y_E = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, \quad z_E = 0$$

Nu kan de lengte van CE worden berekend met hetzelfde resultaat als in de vorige afleiding.

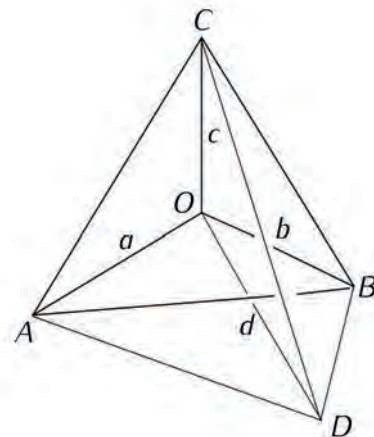
Voor de lezer die kennis heeft van het vectorieel product ('uitproduct') van twee vectoren, kan het aanzienlijk sneller, maar dit terzijde.

In de vierde dimensie

Zelf was ik benieuwd of ook in $\mathbb{R}^4$ zo'n Pythagoras-versie geldig zou zijn. Het vierdimensionale analogon van het viervlak heet *simplex*.

Een simplex heeft vijf hoekpunten, zeg $ABCD O$, die niet in één 3D-ruimte liggen. Zo'n simplex telt tien ribben, tien driehoeken en vijf viervlakken. Veronderstel dat de vier ribben die in O samenkomen twee aan twee loodrecht op elkaar staan, zes rechte hoeken dus. Je zou dan wensen dat het kwadraat van het volume van het 'tegenover' O liggende viervlak (dat is $ABCD$) gelijk is aan de som van de kwadraten van de volumes van de overige vier viervlakken.

figuur 9



De volumes van de vier viervlakken (zie figuur 9) om O zijn gelijk aan $\frac{1}{6}$ van respectievelijk abc , abd , acd en bcd . Maar hoe vind ik de inhoud van viervlak $ABCD$? Een kwestie van analogiseren van de analytische aanpak in $\mathbb{R}^3$. Ik noem de 4-dimensionale coördinaten nu x, y, z, t . Het vlak ABC wordt gerepresenteerd door:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ én } t = 0 \quad (\text{iii})$$

Dit vlak heeft als richtingsvectoren $(a, -b, 0, 0)$ en $(a, 0, -c, 0)$. Ik zoek het punt E in vlak ABC zodat $DE \perp ABC$. Stel $E = (x_E, y_E, z_E, 0)$. Het inproduct van $(x_E, y_E, z_E, -d)$ met $(a, -b, 0, 0)$ en met $(a, 0, -c, 0)$ moet nul zijn.

Dit leidt na combinatie met (iii) tot:

$$x_E = \frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad y_E = \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$z_E = \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \quad t_E = 0$$

Het kwadraat van de lengte van DE is gelijk aan $x_E^2 + y_E^2 + z_E^2 + d^2$ en dit laat zich zowaar herleiden tot:

$$\frac{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Het kwadraat van de oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ is al bij de berekening in R^3 gevonden:

$$\frac{1}{4} \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Via $\frac{1}{3}$ grondvlak maal hoogte, komt er voor het kwadraat

van de inhoud van $ABCD$:

$$\frac{1}{36} \cdot (a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2)$$

dus juist gelijk aan de som van de kwadraten van de inhouden van ABC , ABD , ACD en BCD .

Noten

- [1] De voorloper van het Freudenthal Instituut
- [2] leao = Lager Economisch en Administratief Onderwijs
- [3] Polya, G. (1957). *How to solve it* (tweede druk). Princeton: Princeton University Press.
- [4] Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*, vol. I., Hoboken: Wiley & Sons.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

ALGEBRA OM TE BEWIJZEN

Martin Kindt

Waar is algebra eigenlijk goed voor? In een ver verleden was steevast het antwoord; daar kun je van die lastige redeneersommen uit het lager onderwijs handig mee oplossen. Met dit argument kun je vandaag de dag niet zoveel meer. Een ander antwoord zou kunnen zijn: 'daar kun je mooi rekenkundige eigenschappen mee bewijzen'. Dat zouden we dan wel van tijd tot tijd moeten doen. Geïnspireerd door een oud schoolboek, schetst Martin Kindt wat mogelijkheden.

Een opgave van rekenkundige aard

Als men twee getallen van twee cijfers, die samen 100 zijn, kwadrateert, stemmen de uitkomsten in de cijfers der eenheden en der tientallen overeen. Bewijs dit.
Deze som vond ik in een algebraboek^[1] uit 1933.



figuur 1 *Leerboek der Algebra* van W.F. de Groot en C. de Jong uit 1933

Ik vond dit een verrassende opgave, waard om een beetje bewerkt te worden en voor te leggen aan diverse doelgroepen.

Kies twee hele getallen die samen 100 zijn en bereken van beide getallen het kwadraat. Herhaal dit voor nog andere paren getallen. Let steeds op de laatste twee cijfers van de uitkomsten bij zo'n paar. Wat valt op? Hoe is dit te bewijzen met algebra?

In de versie van het schoolboek werd niet expliciet aangestuurd op een empirisch voorproefje, zoals:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \begin{array}{l} \nearrow 26 \\ \searrow 74 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{kwadraat}} 676 \\ \xrightarrow{\text{kwadraat}} 5476 \end{array} \end{array}$$

of

$$\begin{array}{rcl} 100 & \begin{array}{l} \nearrow 43 \\ \searrow 57 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{kwadraat}} 1849 \\ \xrightarrow{\text{kwadraat}} 3249 \end{array} \end{array}$$

Een goede leraar zou dit bij een behandeling wel doen, was wellicht de verwachting van de auteurs. Dit was in het algemeen de didactische stijl van leerboeken in die tijd: zakelijke formuleringen, de leraar doet de rest. Dat de opgave ook in mijn eigentijdse versie als behoorlijk lastig werd ervaren, of het nu bovenbouwleerlingen, studenten of leraren betrof, verraste mij overigens wel. Voordat ik op het bewijs inga, vertel ik dat het boek van W.F. de Groot en C. de Jong destijds één van de twintig gangbare algebramethoden was. Het was toen zeker niet de meest gebruikte methode, maar in mijn ogen wel één van de beste. Uitgekiende series oefenopgaven worden afgewisseld met concrete toepassingen in de vorm van ingeklede vergelijkingen en optimaliseringsproblemen. Opmerkelijk in het eerste deel, waar ik in dit artikel uit put, is het hoofdstuk over grafische voorstellingen. Daar is plaats ingeruimd voor realistische contexten, grotendeels ontleend aan meteorologie en aardrijkskunde.

Verschillende aanpakken

De empirische start bij het 'samen-100-probleem' kan worden uitgebreid tot een compleet bewijs, omdat het slechts 41 paren getallen betreft – waarvan er bovendien negen triviaal zijn, namelijk die met eindcijfers 0 of 5 – waarop de uitspraak betrekking heeft.

Daarom voegde ik in mijn versie 'met algebra' toe.

Aanpak 1

Stel het ene getal n , het andere is dan $100 - n$. De kwadraten zijn dan n^2 en $10000 - 200n + n^2$. Nu is $10000 - 200n$ een getal dat zeker op twee nullen eindigt, zodat in beide gevallen de laatste twee cijfers worden bepaald door de uitkomst van n^2 . Klaar.

Aanpak 2

Het ene getal stel ik voor door $50 + m$, het andere is dan $50 - m$. De kwadraten zijn nu $2500 \pm 100m + m^2$ en de laatste twee cijfers worden bij beide uitkomsten geproduceerd door het getal m^2 .

Aanpak 3

Ik noem de twee kwadraten m^2 en n^2 . Willen de laatste twee cijfers hiervan, ook in volgorde, hetzelfde zijn, dan moet het verschil deelbaar zijn door 100. Er geldt nu:

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = 100(m - n)$$

Van de drie bewijzen vind ik de derde het mooist. Want anders dan in de beide andere wordt eerst gelet op waar je heen wilt. De tweede aanpak vind ik, vanwege de symmetrie, weer mooier dan de eerste. De eerste aanpak heeft echter het voordeel dat die je makkelijker op het idee brengt dat de eigenschap ook geldt voor twee getallen die samen 50 zijn. Kijk maar:

$$(50 - n)^2 = 2500 - 100n + n^2$$

Spelen met kwadraten

Als leerling heb ik destijds de kwadraten van de natuurlijke getallen tot en met 30 uit het hoofd moeten leren, daar ben ik mijn leraar altijd dankbaar voor geweest. Het viel me toen wel op dat $24^2 (= 576)$ en $26^2 (= 676)$ erg op elkaar leken. Dat maakte het memoriseren niet moeilijker, integendeel. Bij andere kwadraten van paren op gelijke afstand van 25, zoals $23^2 (= 529)$ en $27^2 (= 729)$, is me de overeenkomst in de twee laatste cijfers toen nooit zo opgevallen, ... moet ik me schamen? Aan de cijfers van de kwadraten - zeg tot 1000 - valt nog wel wat meer te ontdekken. Neem $12^2 = 144$ en $21^2 = 441$.

Precies omgekeerd en als je aan een merkwaardig product denkt, kijk je daar niet van op.

Net zo: $13^2 = 169$ en $31^2 = 961$. Maar bij het kwadraat van 14 houdt dit om begrijpelijke reden op. Dat de uitkomst daarvan een ander permutatie van 1, 6 en 9 is, berust op toeval. Spelen met kwadraten zou je dit kunnen noemen, misschien doen we dit soort dingen te weinig bij wiskunde. In 'De Groot & de Jong' gebeurde dat wel. Zo werd in het hoofdstuk met de titel 'Opgaven van rekenkundige aard' een regel voor kwadraten van getallen eindigend op 5 ontdekt.

Voorbeeld: $65^2 = 60 \times 70 + 25$, een handigheid die ik in het verleden van een natuurkunde collega heb geleerd. En voor getallen eindigend op 9 is er ook een kunstje: 49×49 , eerst $5 \times 48 = 240$ en daarachter een 1 geeft 2401. Geef meer voorbeelden en bewijs het maar!

Ziel van de wiskunde

Een aantal bewijsopgaven uit 'De Groot & De Jong' gaat over deelbaarheid.

De tweede macht van een oneven getal vermindert met 1 is altijd door 8 deelbaar. Toon dit aan.

Weer een kwestie van een merkwaardig product:

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4 \cdot n \cdot (n + 1)$$

en $n(n + 1)$ is, als product van twee opeenvolgende getallen, even. Zo volgt de deelbaarheid door $4 \times 2 = 8$.

Een mooie combinatie van redeneren en algebra. Je moet wel op het idee komen dat een willekeurig oneven

getal kan worden voorgesteld door de vorm $2n + 1$, maar daar was op geanticipeerd in een eerdere som.

Een bekende opgave die goed in 'De Groot & De Jong' zou hebben gepast, luidt:

Als je de derde macht van een getal vermindert met het getal zelf, is de uitkomst een 6-voud.

Als leraar in deze tijd zou ik de leerlingen eerst met de GR (nu het nog kan!) een tabel laten maken van zulke getallen in de, misschien ijdele, hoop dat ze zelf eerst de eigenschap zouden opmerken.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$n^3 - n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720	...

Na het uitspreken van een vermoeden en nog een paar testjes met grote getallen is het tijd voor een poging tot bewijs. Deelbaarheid heeft te maken met ontbinding in factoren en dat doen we dan nu met $n^3 - n$.

$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n + 1) \cdot (n - 1)$ en het mooie is dat dit het product van drie opeenvolgende getallen is.

Even checken in de tabel: $6 = 1 \times 2 \times 3$, $24 = 2 \times 3 \times 4$, $60 = 3 \times 4 \times 5$, enzovoort.

Omdat van elk drietal opeenvolgende getallen er precies één deelbaar is door 3 en omdat zo'n drietal ten minste één even getal bevat, moet het product deelbaar zijn door 6. Simpel? Zeker niet, maar het toont veel meer de ziel van de wiskunde dan de rijtjes ontbindingen in onze schoolboeken.

In de voorgaande tabel is nog wel wat meer te zien. Sommige getallen uit de onderste rij zijn niet alleen deelbaar door 6, maar zelfs door 12.

Ze zijn het duidelijk niet allemaal, in mijn tabel zijn 6 en 210 uitzonderingen. Als je de GR een uitkomstentabel bij $y = (x^3 - x)/12$ laat produceren zie je na elk viertal stappen een geheel getal + 0,5. Kun je bewijzen dat dit zo doorgaat en dat alle tussenliggende getallen geheel zijn? Ook nu is het meer een kwestie van redeneren dan rekenen.

Er zijn drie mogelijkheden:

- 1) Van drie opeenvolgende hele getallen zijn het eerste en het derde getal allebei even. Het product is nu deelbaar door 4 en 3, dus ook deelbaar door 12.
- 2) Het middelste getal is even en zelfs een 4-voud. Ook nu is het tripelproduct deelbaar door 12.
- 3) Het middelste getal is even, maar geen 4-voud, dus een 4-voud + 2. Het product is in dit geval niet deelbaar door 12. Conclusie: voor $n = 2, 6, 10, 14, \dots$ is $n^3 - n$ niet deelbaar door 12.

Hoe overtuigend is een formeel bewijs?

In zijn artikel 'Intuition and Proof' ^[2] beschreef Efraim Fischbein een interessant experiment waarbij zo'n 200 leerlingen in Tel Aviv (middenbouw voortgezet onderwijs) geconfronteerd werden met het voorgaande 'deelbaar-door-6-probleem'. Na een numeriek onderzoekje werd een bewijs gegeven, identiek aan dat wat hiervoor is beschreven. Op de vragen of

- (a) de genoemde eigenschap algemeen geldt,
 - (b) het gegeven bewijs volledig correct is en
 - (c) dit bewijs garant staat voor de algemene geldigheid,
- kwamen verschillend percentages bevestigingen binnen (respectievelijk 68,5%, 81,5% en 60,0%). Dat (b) hoger scoorde dan (a) en (c) lijkt wel voer voor psychologen. Dat een formeel bewijs niet ieder overtuigt, blijkt nog meer uit het feit dat er in een vierde vraag (d) een nep-tegenvoorbeeld met grote getallen werd opgevoerd waarop slechts 32% reageerde dat hier een rekenfout in moest zitten. 4,5% noteerde hier nog bij dat uitzonderingen altijd mogelijk zijn. Hoe zo, algebra?

We leren leerlingen wel manipuleren met algebraïsche vormen, maar daarbij blijft de generaliserende kracht van de algebra meestal onder het oppervlak. Ik denk ook dat het klassieke idee om variabelen voor te stellen door lijnsegmenten kan helpen om het aspect van de generalisatie wél boven water te krijgen. Al sinds een paar jaar is mijn favoriete voorbeeld een eigenschap van de rij van Fibonacci (of een andere rij, waarbij na keuze van de twee begintermen iedere term de som is van zijn twee voorgangers). Kies in zo'n rij een arbitrair deelrijtje van vijf opvolgende termen en stel vast dat de som van de beide uiterste termen juist drie keer de middelste term is.

Natuurlijk moeten er eerst meer proeven-op-de-som worden uitgevoerd.

In plaats van de rij van Fibonacci, neem ik hier die van Lucas:

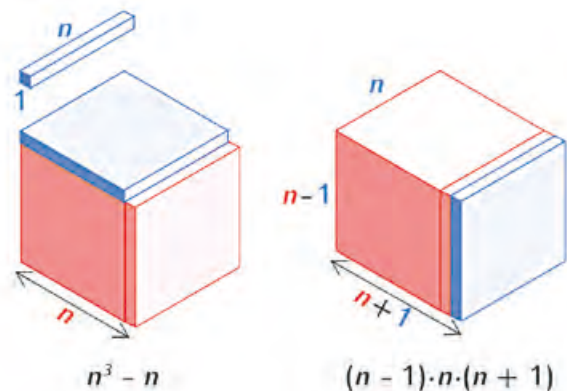
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

In het beginrijtje-van-vijf komt er $1 + 11 = 3 \times 4$. Een eindje verder: $7 + 47 = 3 \times 18$ of $29 + 199 = 3 \times 76$. Zo kan ik nog uren doorgaan. Je gaat er steeds meer in geloven dat de eigenschap algemeen geldt. Maar hoe kun je zeker weten dat er nooit of te nimmer uitzonderingen komen? In een vroeger artikel ^[3] heb ik laten zien, hoe je, refererend aan de Griekse 'pre-algebra', met een plaatje een overtuigend bewijs kunt leveren.



Dat de getallen in de rij van Lucas bij iedere stap groter worden, is duidelijk. Stel ik het kleinste getal van een deelrijtje-van-vijf voor door een blauw en het daaropvolgende door een wat langer rood lijnsegment, dan vind ik de drie volgende 'getallen' door aan elkaar plakken. En zie, de som van het kleinste en het grootste getal van de vijf bestaat uit drie blauwe en drie rode segmenten, en dat is dus even lang als drie keer het middelste lijnstuk. Eigenlijk is dit een klein wonder: *met één plaatje worden oneindig veel rijtjes-van-vijf gevangen!* Dat je (de lengte van) het blauwe lijntje x kunt noemen en die van het rode lijntje y en vervolgens alles nog eens in onze algebrataal kunt weergeven is niet eens zo'n grote stap. Al moeten we wel bedenken dat daar in de geschiedenis van de wiskunde wel een flink aantal eeuwen over is gedaan.

Vanuit een meetkundige voorstelling zou het bewijs van de deelbaarheid door 6 van $n^3 - n$ misschien meer leerlingen echt overtuigen. De sleutel was het schrijven van $n^3 - n$ als het product van drie opvolgende getallen.



Zie de figuur en begrijp. Uit de kubus met ribbe n is een balkje van 1 bij 1 bij n verwijderd. De blauwe plak met dikte 1 wordt aan de voorkant aangelijmd en er ontstaat een blok van $n-1$ bij n bij $n+1$. Bij n kun je aan elk willekeurig heel getal denken. De factorisatie met drie opeenvolgende getallen is zichtbaar geworden!

Hogere machten

Aanschouwelijke meetkunde als hulpmiddel bij algebra heeft natuurlijk zijn dimensiebeperkingen. De leerling zal zeker vertrouwd moeten raken met de alomvattende potentie van de formele algebra. Neem het volgende voorbeeld uit 'De Groot & De Jong'.

Bewijs dat $a^5 - a$ steeds deelbaar is door 30, als a een geheel getal voorstelt (ontbind in factoren). Bewijs hiermee dat de vijfde macht van een geheel getal op hetzelfde cijfer eindigt als het getal zelf.

De aanwijzing ‘ontbind in factoren’ vonden de auteurs blijkbaar nodig. Die ontbinding levert op:

$$a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 1)$$

Grappig, ik realiseer me nu ineens dat $a^5 - a$ gelijk is aan het product van $a^3 - a$ en $a^2 + 1$, maar dit terzijde.

Dat $a^5 - a$ in elk geval een 6-voud is, is na het voorgaande duidelijk. Blijft over om aan te tonen dat er ook sprake is van deelbaarheid door 5.

Als a gelijk is aan $5n$, $5n + 1$ of $5n + 4$ (met n geheel) is $a(a - 1)(a + 1)$ en daarmee ook $a^5 - a$ deelbaar door 5.

Voor $a = 5n + 2$ of $a = 5n + 3$ moet de deelbaarheid door 5 op het conto van $a^2 + 1$ komen. Een kwestie van algebra:

$$(5n + 2)^2 + 1 = 25n^2 + 20n + 5$$

$$(5n + 3)^2 + 1 = 25n^2 + 30n + 10$$

en de deelbaarheid door 5 is evident.

Omdat deelbaar door 30 (dus door 10) hier betekent dat $a^5 - a$ voor elke waarde van a op 0 eindigt, hebben a^5 en a in alle gevallen hetzelfde laatste cijfer.

Auteur De Jong

Een paar jaar geleden ontmoette ik N. van Kampen, emeritus hoogleraar natuurkunde toen 92 jaar oud, inmiddels overleden. Hij vertelde mij dat hij in de jaren '30 van de vorige eeuw een briljante wiskundeleraar had gehad.

Op mijn vraag waar hij op school had gezeten antwoordde hij Stedelijk Gymnasium Leiden. Ik raadde: ‘was die leraar misschien C. de Jong – een van de twee auteurs van het boek uit dit artikel – die in de oorlog is gefusileerd?’^[4]

Van Kampen knikte, hij was niet eens verrast, en vertelde hoe De Jong bijna elke les buiten zijn boekje ging met mooie verhalen over sterrenkunde.

Noten

- [1] De Groot, W.F. en C. de Jong (1933). *Leerboek der Algebra*, eerste deel (2e druk). Groningen: J.B. Wolters.
- [2] Fischbein, E. (1982). *Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics*.
- [3] Kindt, M. (2015). Wat te bewijzen was (35). Utrecht: Freudenthal Instituut.
- [4] Zie het indrukwekkende ‘In memoriam’. *Euclides* jaargang 1943/44, p. 75.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl.

WAAR EEN MERKWAARDIG PRODUCT TOE LEIDT...

Martin Kindt

Drie merkwaardige producten zijn terug van weggeweest in de schoolboeken. Gelukkig maar, vindt Martin Kindt. De regel waarin het verschil van twee kwadraten een rol speelt, krijgt in zijn artikel een uitbreiding naar een verrassende identiteit voor speciale functies.

Kwadraat min kwadraat

Uit een (rood) vierkant is een vierkantje weggesneden, zoals in onderstaande figuur:



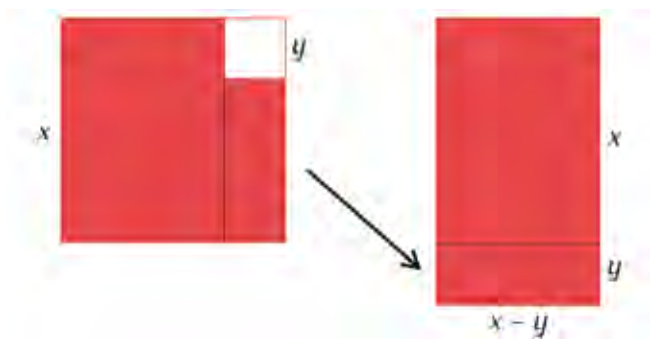
Vraag: construeer (passer en liniaal) een rechthoek (geen vierkant), waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van het resterende vlakdeel.

Voor wie de algebraregels gesneden koek zijn, is dit misschien een eitje. Noem de zijde van het grote vierkant x en die van het kleine vierkant y . De oppervlakte van het rode gebied is dan $x^2 - y^2$. Een 'merkwaardig product' zegt dat dit gelijk is aan $(x + y)(x - y)$ en een rechthoek met zijden $x + y$ en $x - y$ is bij gegeven lengten x en y met passer en liniaal te construeren. Dat er oneindig veel andere rechthoeken zijn die ook aan de vraag voldoen, laat ik hier verder rusten.

Maar een meetkundig probleem vraagt ook om een meetkundige oplossing. Een goede aanpak kan dan zijn om het witte vierkantje te draaien zo dat de zijden parallel zijn aan die van het grote vierkant en het vervolgens te verplaatsen naar een van de vier hoeken.



De rode figuur ('gnomon') kan via knippen en plakken worden omgevormd tot een rechthoek.



Er zijn nog andere knip-en-plak-oplossingen, maar deze lijkt de meest voor de hand liggende. De figuur geeft een visueel bewijs voor mijn (favoriete) merkwaardig product. Met de restrictie dat dit 'bewijs' slechts valide is voor het geval x en y positieve getallen zijn en $x > y$. Voor het algemene geval zul je toch een beroep willen doen op de 'uitgebreide distributieve wet' die zegt dat je bij het product van twee veeltermen alle termen van de ene veelterm vermenigvuldigt met alle termen van de andere en vervolgens alle zo verkregen producten optelt. In het prachtige boek *Vision in Elementary Mathematics*^[1] gebruikt W.W. Sawyer bij de uitvoering van die wet de tabelvorm – als een abstract vervolg op het 'rechthoek-model' – en dat geeft hier:

.	x	y
x	x^2	xy
$-y$	$-xy$	$-y^2$

Twee producten heffen in dit geval elkaar op, vandaar de tweeterm als uitkomst.

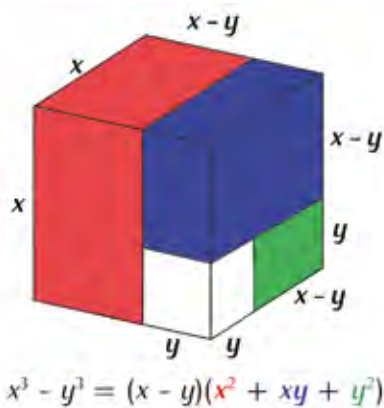
Tegenwoordig (eigenlijk sinds 1958) beperken we ons in de schoolalgebra tot de drie bekende kwadratische merkwaardige producten. Maar dat is wel eens anders geweest. Als leerling werd ik nog getraakteerd op:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

De distributieve wet in werking!

Ik merk op dat de deelbaarheid van $x^3 - y^3$ (of $x^3 + y^3$) door $x - y$ (of $x + y$) niet verwonderlijk is als je bedenkt dat beide vormen nul zijn als $x = y$ (of $x = -y$). Dit type redenering, gebaseerd op de zogeheten factorstelling, dat is wat je noemt 'volbloed' algebra. De eerste identiteit - 'kubus min kubus = ...' - kan ook worden begrepen via deze ruimtefiguur:



Een merkwaardig gonio-product

Door professor Van der Blij werd ik ooit attent gemaakt op een verrassende identiteit:

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$

Goede oefening voor leerlingen die bij gonio zojuist de bekende 'somformules' hebben geleerd! Kijk maar:

$$\begin{aligned} &(\sin x \cos y + \sin y \cos x)(\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\ &\quad \text{merkwaardig product} \downarrow \\ &(\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2 = \\ &\sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y (1 - \sin^2 x) = \\ &\sin^2 x - \sin^2 y \end{aligned}$$

Mooi toch?!
Begin je met het rechterlid, dan kun je de formules van Simpson en de verdubbelingsformule toepassen:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 y &= (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = \\ 2\sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) &2\sin \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x+y) = \\ &\underbrace{\sin(x-y)}_{\sin(x+y)} \end{aligned}$$

De vraag die ik mij onlangs stelde was: zijn er meer functies, zoals de sinus, die net zo'n identiteit toelaten? Met andere woorden: kan ik meer functies f vinden, met de eigenschap dat voor alle (reële) x en y geldt:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f^2(x) - f^2(y) \quad (\text{FV})$$

of gelijkwaardig hieraan:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = [f(x) + f(y)] \cdot [f(x) - f(y)]$$

(FV) gebruik ik nu voor deze 'functionaalvergelijking'. Bij Wiskunde-olympiade finales kom je dit type opgaven wel tegen en een eerste aanpak kan dan zijn om eigenschappen van f op te sporen via slimme substitutie. Neem eerst $x = y = 0$. Er komt: $f(0) \cdot f(0) = 0$ dus $f(0) = 0$. Nu vul ik alleen $x = 0$ in. Dit leidt tot: $f(y) \cdot f(-y) = -f^2(y)$. Ik wil hieruit concluderen dat $f(-y) = -f(y)$ voor alle y , dus f is een *oneven functie*. Dit is geoorloofd, tenzij ... er een y bestaat met $f(y) = 0$ en $f(-y) \neq 0$. Gelukkig, dit donderwolkje kan ik laten verdwijnen.

Want uit de substitutie $x = -y$ in (FV) volgt: $0 = f^2(-y) - f^2(y)$, dus $f(-y) = f(y)$ of $f(-y) = -f(y)$. Ik ga op zoek naar oneven functies die voldoen aan (FV). Neem bijvoorbeeld $f(x) = x^3$.

Er zou voor alle x, y -waarden moeten gelden:
 $(x+y)^3 \cdot (x-y)^3 = (x^3 + y^3) \cdot (x^3 - y^3)$
Ofwel

$$(x^2 - y^2)^3 = x^6 - y^6$$

Helaas. Voor andere machten met oneven exponent, wordt het duidelijk niet beter. Lineaire combinaties van oneven machten misschien? Aan het product van de hoogste machten kun je meteen zien dat met dergelijke polynoomfuncties niet kan worden voldaan aan (FV). Ook quotiënten van zulke polynomen kunnen geen oplossing leveren. Buiten de zuivere lineaire functies, dat wil zeggen functies van het type $f(x) = ax$, zijn er geen rationale functies die aan (FV) voldoen.

Drie families

Voor mogelijk andere oplossingen zal ik moeten vissen in de vijver van de oneven transcendente functies. Na de sinus dan de tangens proberen? Een exercitie met gonioformules leert dat dit ook vergeefse moeite is. Misschien iets met e -machten? Een voorbeeld van een oneven functie is: $f(x) = e^x - e^{-x}$. En ja, ik heb beet!

$$\begin{aligned} &(e^{x+y} - e^{-x-y})(e^{x-y} - e^{-x+y}) = \\ &e^{2x} - e^{2y} - e^{-2y} + e^{-2x} = \\ &(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{2y} + e^{-2y}) = \\ &(e^{2x} + e^{-2x} - 2) - (e^{2y} + e^{-2y} - 2) = \\ &(e^x - e^{-x})^2 - (e^y - e^{-y})^2 \end{aligned}$$

Nu doet het verschil van die twee e -machten de lezer misschien denken aan de sinushyperbolicus. Er geldt, om precies te zijn, $e^x - e^{-x} = 2\sinh(x)$. Omdat de somformules voor de hyperbolische functies $\sinh$ en $\cosh$ analoog zijn aan die voor $\sin$ en $\cos$, is dit resultaat niet zo verrassend als men misschien op het eerste gezicht zou denken.^[2] Eigenlijk heb ik nu al drie families van oplossingen te pakken. Want als $x \rightarrow f(x)$ een oplossing is van (FV), is iedere functie

$x \rightarrow c \cdot f(ax)$ - met a en c willekeurige constanten - dat ook. Dit volgt direct uit de distributieve wet. Zo krijg ik dan de drie oplossingsfamilies:

$x \rightarrow ax$
 $x \rightarrow c \cdot \sin(ax)$
 $x \rightarrow c \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

Machtreeksen

Ik wil nu weten of er buiten deze drie families nog meer 'nette' oplossingen zijn. Met een nette oneven functie bedoel ik dan een functie die correspondeert met een oneven (formele) machtreeks.^[3] Zoals:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Laat f zo'n functie zijn, waarbij ik - voor het gemak - de beginterm de coëfficiënt 1 geef. Zeg:

$f(x) = x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \dots$

Ik merk eerst op dat de machtreeksen $f(x+y) \cdot f(x-y)$ en $f^2(x) - f^2(y)$ beide deelbaar zijn door $x^2 - y^2$. Voor de eerste vorm is dat direct te zien, want $f(x+y)$ is deelbaar door $x+y$ en $f(x-y)$ is deelbaar door $x-y$. Voor de tweede vorm is het handig om naar het product $[f(x)+f(y)] \cdot [f(x)-f(y)]$ te kijken.

Er geldt:

$f(x) + f(y) = x + y + A_1(x^3 + y^3) + A_2(x^5 + y^5) + \dots$

Omdat $x^3 + y^3, x^5 + y^5, x^7 + y^7$, enzovoort, deelbaar zijn door $x+y$ is $f(x) + f(y)$ dat ook.

Evenzo is $f(x) - f(y)$ deelbaar door $x-y$.

Ik kijk nu eerst naar de machtreeks bij

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \cdot \frac{f(x-y)}{x-y}$$

en gebruik daarbij deze tabel. In de vakjes is de graad van de deelproducten ingevuld:

$\times$	1	$A_1(x+y)^2$	$A_2(x+y)^4$	$A_3(x+y)^6$
1	0	2	4	6
$A_1(x-y)^2$	2	4	6	
$A_2(x-y)^4$	4	6		
$A_3(x-y)^6$	6			

De begintermen van de productreeks in x en y , gerangschikt naar graad, zijn hieronder uitgerekend. Omdat de reeks symmetrisch is in x en y , heb ik de termen die je krijgt door 'spiegelen' (= verwisselen van x en y) van eerdere termen, vervangen door drie puntjes.

Gr	term
0	1
2	$A_1[(x+y)^2 + (x-y)^2] = 2A_1x^2 + \dots$
4	$A_2[(x+y)^4 + (x-y)^4] + A_1^2(x^2 - y^2)^2 = (A_2 + A_1^2)x^4 + (12A_2 - 2A_1^2)x^2y^2 + \dots$
6	$A_3[(x+y)^6 + (x-y)^6] + A_1A_2(x^2 - y^2)^2(2x^2 + 2y^2) = (2A_3 + 2A_1A_2)x^6 + (30A_3 - 2A_1A_2)x^4y^2 + \dots + \dots$

Ik ga deze termen vergelijken met die van de machtreeks die correspondeert met

$$\frac{f(x)+f(y)}{x+y} \cdot \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Bij de uitwerking daarvan laat ik weer spiegelbeeldige termen weg. Verder gebruik ik de identiteit:

$$(x^m - y^m)(x^k + y^k) + (x^m + y^m)(x^k - y^k) = 2(x^{m+k} - y^{m+k})$$

naast de 'merkwaardige producten'^[4]

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$
$$x^5 \pm y^5 = (x \pm y)(x^4 \mp x^3y + x^2y^2 \mp xy^3 + y^4)$$

enzovoort

Zo komt er:

$\times$	1	$A_1 \frac{x^3 + y^3}{x+y}$	$A_2 \frac{x^5 + y^5}{x+y}$	$A_3 \frac{x^7 + y^7}{x+y}$
1	0	2	4	6
$A_1 \frac{x^3 - y^3}{x-y}$	2	4	6	
$A_2 \frac{x^5 - y^5}{x-y}$	4	6		
$A_3 \frac{x^7 - y^7}{x-y}$	6			

Gr	term
0	1
2	$A_1(x^2 + xy + y^2 + x^2 - xy + y^2) = 2A_1x^2 + \dots$
4	$A_2(2x^4 + 2x^2y^2 + \dots) + A_1^2[(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2] = (A_2 + A_1^2)x^4 + (2A_2 + A_1^2)x^2y^2 + \dots$
6	$A_3(2x^6 + 2x^4y^2 + \dots) + 2A_1A_2[(x^3 - y^3)/(x^2 - y^2)] = (2A_3 + 2A_1A_2)x^6 + (2A_3 + 2A_1A_2)x^4y^2 + \dots$

De eerste twee termen van de ‘rode’ en ‘blauwe’ machtreeks zijn alvast identiek. Ik kijk nu naar de termen van de graad 4 en 6. Die zijn dan en alleen dan identiek als

$$\begin{aligned} 12A_2 - 2A_1^2 &= 2A_2 + A_1^2 \\ 30A_3 - 2A_1A_2 &= 2A_3 + 2A_1A_2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A_2 = \frac{3}{10} \cdot A_1^2$$

$$A_3 = \frac{3}{70} \cdot A_1^3$$

Ik check dit even voor de machtreeks bij $\sin x$. Daar geldt

$A_1 = -\frac{1}{3!}$. De twee zojuist gevonden verbanden leveren op:

$$A_2 = -\frac{1}{5!} \text{ en } A_3 = -\frac{1}{7!}.$$

Dat geeft de burger moed!

Als je het vermenigvuldigen en identiek stellen van de ‘rode’ en de ‘blauwe’ machtreksen nader beschouwt, kun je inzien dat er een recursief mechanisme optreedt, waarbij elke term volgend op A_1 eenduidig vastligt en kan worden uitgedrukt in de daaraan voorafgaande termen en bijgevolg ook in A_1 .

Kortom: de keuze van A_1 in

$$f(x) = x + A_1x^3 + A_2x^5 + A_3x^7 + \dots$$

bepaalt volledig een machtreeks die voldoet aan (FV).

Ik stel nu $A_1 = \frac{1}{3!}\lambda$, zodat $A_2 = \frac{1}{5!}\lambda^2$ en $A_3 = \frac{1}{7!}\lambda^3$.

Zo ontstaat het vermoeden dat de reeks

$$x + \frac{\lambda x^3}{3!} + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} + \frac{\lambda^3 x^7}{7!} + \dots$$

voor elke reële (of als je wilt complexe) waarde van λ een oplossing van (FV) is.

Merk op dat de reeks voor $\lambda = 0, -1, 1$ respectievelijk de functies $x \rightarrow x$, $x \rightarrow \sin x$ en $x \rightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ voorstelt.

Er kan nu worden aangetoond dat de reeks voor *iedere* λ een oplossingsfunctie representeert.

Ik maak dan onderscheid tussen $\lambda > 0$ en $\lambda < 0$.

In het eerste geval bekijk ik:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(e^{x\sqrt{\lambda}} - e^{-x\sqrt{\lambda}})$$

De machtreeks hierbij is die van mijn hypothese, dus:

$$x + \frac{\lambda x^3}{3!} + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} + \frac{\lambda^3 x^7}{7!} + \dots$$

Voor $\lambda < 0$ neem ik $\mu = -\lambda$ en bekijk

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(x\sqrt{\mu})$$

De machtreeks hierbij is:

$$x - \frac{\mu x^3}{3!} + \frac{\mu^2 x^5}{5!} - \frac{\mu^3 x^7}{7!} + \dots$$

en bij vervanging van μ door $-\lambda$ vind ik opnieuw de door mij gewenste λ -reeks.

Op grond van het feit dat de coëfficiënten recursief bepaald zijn door de keuze van de coëfficiënt van x^3 , weet ik zeker dat de drie eerdergenoemde families, de enige oneven functies zijn die aan (FV) voldoen!

Noten

- [1] Het boek *Vision in Elementary Mathematics*, waarin tal van inspirerende voorbeelden staan, is online te vinden. Uit het jaar 1969 dateert een Nederlandse vertaling, uitgegeven bij het Spectrum onder de titel *Aanschouwelijk Algebra*.
- [2] Als we als domein voor de vergelijking (FV) de complexe functies nemen, is indachtig een befaamde formule van Euler, namelijk $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, de oplossingsfunctie met e -machten natuurlijk ook niet echt verbazingwekkend.
- [3] Zie [2]: Als we... , dan is ‘net’ synoniem met ‘analytisch’.
- [4] Waarom zouden we in ons algebraonderwijs niet wat meer aandacht besteden aan dergelijke series voortschrijdende formules met een te herkennen patroon? Voorspellen en verifiëren, is dat niet een prima denkactiviteit?

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl



SYMMETRIE IN ALGEBRA

Martin Kindt

Symmetrie kom je overal in de wiskunde tegen. Ook in algebra, al blijft dit in ons onderwijs vaak onderbelicht. In dit artikel wil Martin Kindt een lans breken om in de schoolalgebra ook meer aandacht te besteden aan symmetrische expressies.

Nostalgebra

In mijn schooltijd werd het volgende stukje theorie als parate kennis bij vierkantsvergelijkingen beschouwd:

Als x_1 en x_2 de oplossingen zijn van de vergelijking

$ax^2 + bx + c = 0$ (met $a \neq 0$), geldt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ en } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Beide formules kunnen rechtstreeks uit de *abc*-formule worden afgeleid, op zich een prima oefening in algebra, maar eleganter is het om op te merken dat

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \\ \text{en} \\ (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Met die som- en productformules moest natuurlijk ook worden geoefend. Het was toen standaard om bij een gegeven vierkantsvergelijking ‘speciale’ uitdrukkingen in x_1 en x_2 te berekenen zonder die vergelijking eerst op te lossen.

Voorbeeld: $x^2 - 8x + 14 = 0$ met wortels x_1 en x_2 .

Te berekenen: $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ en $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Oplossing: $x_1 + x_2 = 8$ en $x_1 \cdot x_2 = 14$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 8^2 - 2 \cdot 14 = 36$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8^3 - 3 \cdot 8 \cdot 14 = 176$$

De laatste vorm kon ook zó worden behandeld:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2(x_1 + x_2) =$$

$$8 \cdot 36 - 14 \cdot 8 = 176$$

De som van de omgekeerde wortels vraagt minder algebravuurwerk. Er volgt immers direct:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

Bij deze opgave staat er ook een andere weg open: maak eerst een vierkantsvergelijking waaraan de omgekeerden van x_1 en x_2 voldoen.

Dit wordt dan:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 14 = 0$$

ofwel:

$$14x^2 - 8x + 1 = 0$$

hetgeen opnieuw de uitkomst $\frac{4}{7}$ oplevert.

Als leerling vond ik dit leuke algebra, zonder dat ik me afvroeg wat het nut ervan was. Sprak de *symmetrie* (in x_1 en x_2) van die speciale vormen mij aan?

En ja, er was toen natuurlijk ook een prominente rol voor de discriminant D weggelegd. Dat D ook kon worden geschreven als:

$$a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} \right) = a^2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right]$$

met als gevolg:

$$D = a^2(x_1 - x_2)^2$$

kan ik me niet herinneren uit mijn schooltijd. Mooi is dit wel. Dat bij $D = 0$ de wortels samenvallen wordt nog eens bevestigd en dat bij $D < 0$ de wortels irreëel (en toegevoegd complex) zijn, is ook direct duidelijk.

De achtergrond van de voorgaande opgaven is dat *symmetrische* polynomen in x_1 en x_2 (of quotiënten daarvan) zich laten uitdrukken in twee basispolynomen, te weten $x_1 + x_2$ en $x_1 \cdot x_2$. Dat werd er door mijn leraar destijds niet bij verteld. Ik meen me te herinneren dat ik

dit later als leraar wél eens heb gedaan. Op een bewijs daarvan heb ik mijn leerlingen nooit getrakteerd. Dat is ook niet heel simpel, maar als je een keer ‘mooie’ algebra wilt demonstreren, is het wel een uitdaging.

Symmetrische polynomen in twee variabelen

In plaats van x_1 en x_2 zal ik hier de variabelen x en y gebruiken. Laat $F(x, y)$ een polynoom in x en y zijn. We noemen F symmetrisch als $F(x, y) = F(y, x)$ voor alle mogelijke waarden van x en y . Een voorbeeld van een symmetrisch polynoom is:

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4.$$

Insiders weten dat dit polynoom gelijk is aan $(x - y)^4$ en dat in die tweede vorm ongestraft x en y kunnen worden verwisseld vanwege de *even* exponent.

Anders is dit bij $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ofwel $(x - y)^3$. Hier is sprake van een polynoom waarbij verwisseling van x en y tot een *tegengesteld* polynoom leidt. Je zou dit een *antisymmetrisch* polynoom kunnen noemen.

De meest basale symmetrische polynomen in x en y zijn $x + y$ en $x \cdot y$ die ik hier in het vervolg zal aanduiden met respectievelijk S en P . Een belangrijke stelling uit de algebra zegt nu:

Elk symmetrisch polynoom in x en y is te schrijven als een polynoom in S en P .^[1]

Zo geldt bijvoorbeeld:

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 = S^4 - 8S^2P + 16P^2.$$

Immers: $(x - y)^4$ is het kwadraat van $(x - y)^2$ of $S^2 - 4P$. Nu volgt het bewijs van de stelling dat zo’n expressie in S en P bij elk symmetrisch polynoom bestaat. Laat $F(x, y)$ een symmetrisch polynoom zijn. Stel dat $c \cdot x^k y^m$ een term van F is. Dan zal ook $c \cdot x^m y^k$ een term van F moeten zijn. Stel verder $k \geq m$.

De tweeterm $c \cdot x^k y^m + c \cdot x^m y^k$ laat zich dan schrijven als

$$c \cdot (xy)^m (x^{k-m} + y^{k-m}) = c \cdot P^m (x^{k-m} + y^{k-m}).$$

Een symmetrisch polynoom is dus de som van zulke tweetermen en/of termen van de vorm $c \cdot x^n y^n$. Het komt er dus slechts op aan om te bewijzen dat een tweeterm van de vorm $x^n + y^n$ uit te drukken is in S en P . Voor de exponenten 2 en 3 is dat eerder in dit artikel aangetoond. Bij de tweede aanpak van $x_1^3 + x_2^3$ heb ik laten zien dat je een inductiestap kunt maken. Meer algemeen geldt:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$$

ofwel

$$x^n + y^n = S(x^{n-1} + y^{n-1}) - P(x^{n-2} + y^{n-2}) \dots (*)$$

En zo kunnen we een willekeurig lange lijst maken van sommen van de vorm $x^n + y^n$ uitgedrukt in S en P .

$$x^0 + y^0 = 2$$

$$x^1 + y^1 = S$$

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P$$

$$x^3 + y^3 = S(S^2 - 2P) - PS = S^3 - 3SP$$

$$x^4 + y^4 = S(S^3 - 3SP) - P(S^2 - 2P) = S^4 - 4S^2P + 2P^2$$

$$x^5 + y^5 = S(S^4 - 4S^2P + 2P^2) - P(S^3 - 3SP) = S^5 - 5S^3P + 5SP^2$$

Enzovoort

Een schoolvoorbeeld van inductie waarbij regel (*) ervoor zorgt dat die inductie volledig is. Het bewijs van de symmetriestelling voor polynomen in twee variabelen is hiermee geleverd.

Werk van Girard

De uit Frankrijk naar Nederland gevluchte Albert Girard (1595-1632) schreef in *L’invention nouvelle en l’algèbre* over het verband tussen het aantal wortels en de graad van een polynoomvergelijking. Hij was daarmee een van de eerste wiskundigen die dit expliciteerde. Ook beschouwde hij symmetrische expressies in de wortels. In zijn bronnenboek^[2] beschrijft Struik hoe Girard de som van gelijke machten van wortels van polynoomvergelijkingen uitdrukte in de coëfficiënten van die polynomen. Girard beschouwde vergelijkingen van het type

$$x^n = Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} - Dx^{n-4} + \dots$$

met een constante als laatste term van het rechterlid. Laat nu S_k de som van de k -de machten van de wortels zijn, dan geldt:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A^2 - 2B$$

$$S_3 = A^3 - 3AB + 3C$$

$$S_4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D$$

of in de notatie van Girard:

$$A$$

$$Aq - B2$$

$$Acub - AB3 + C3$$

$$Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4$$

Dit kan allemaal worden bewezen via factorisatie:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \dots =$$

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Voor de vergelijking $x^2 = Ax - B$ (dus $C = D = \dots = 0$) correspondeert Girards resultaat met de derde van de lijst S, P -formules uit de vorige kolom.

Nu het geval $n = 3$, dus $x^3 = Ax^2 - Bx + C$, met de wortels (al of niet complex) x_1, x_2 en x_3 .
 Uit de factorisatie volgt:

$$\begin{aligned} A &= x_1 + x_2 + x_3 \\ B &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \\ C &= x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Er geldt nu:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

zodat inderdaad

$$S^2 = A^2 - 2B$$

Ook geldt:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \\ &\quad (x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1) \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking noem ik tijdelijk X , zodat nu:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = A(A^2 - 2B) - X$$

Er volgt dan nog:

$$\begin{aligned} x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 &= \\ (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3(x_1x_2x_3) \end{aligned}$$

ofwel:

$$X = AB - 3C$$

zo dat:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = A(A^2 - 2B) - (AB - 3C) = A^3 - 3AB + 3C$$

De vierde regel van Girard laat ik aan de lezer.

Alle zojuist gepasseerde polynomen in x_1, x_2 en x_3 zijn symmetrisch. Dat betekent dat ze bestand zijn tegen elke permutatie van de drie variabelen. Het stoeien met dergelijke polynomen was Girard wel toevertrouwd! Zonder bewijs vermeld ik hier dat elk symmetrisch polynoom in de variabelen x_1, x_2 en x_3 uitgedrukt kan worden in de basispolynomen A, B en C , dus in de coëfficiënten van de ‘algemene’ derdegraadsvergelijking. Analoge uitspraken kunnen worden gedaan voor vergelijkingen van de hogere graad^[1]. De basispolynomen van de graad n worden gevonden door het product

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

uit te werken tot een veelterm. Symmetrische polynomen spelen een belangrijke rol in de ‘hogere algebra’ die in de negentiende eeuw is uitgemond in de beroemde theorie van Galois. Men zou kunnen stellen dat Girard een van de vroege wegbereiders van die theorie is geweest!

Meer attentie op school voor symmetrie?!

De dichter K. Schippers was misschien getroffen door algebraïsche symmetrie toen hij dit gedicht schreef:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

je schoonheid min je ogen noem ik a
 de geest die in je dartelt b
 je ogen c
 opgeteld en minstens een kwadraat gegeven:
 $(a + b + c)^2$

Ongetwijfeld heeft hij, net als ik, de formule voor het kwadraat van $a + b + c$ in het eerste of tweede jaar van het vo door zijn wiskundeleraar voorgeschoteld gekregen. Hoe mijn leraar de regel bewees, weet ik me niet te herinneren. Misschien ging het via:

$$((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c.$$

Zelf zou ik eerder een plaatje tekenen:

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

figuur 1

De tegenwerping kan natuurlijk zijn, dat dit alleen valide is voor positieve a, b en c . Als je het plaatje opvat als een vermenigvuldigingstabel, verdwijnt dit bezwaar.

En wat te denken van deze redenering? $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ klopt in *elk* van de drie gevallen $c = 0$, $b = 0$ en $a = 0$ (standaard merkwaardig product). Het rechterlid moet symmetrisch zijn in a, b, c en uitsluitend tweedegraadstermen bevatten, klaar.

Subtiel? Zeker, maar wel een mooi staaltje van wiskundig redeneren. Na zo’n uitleg kan aan leerlingen gevraagd worden zelf een formule voor $(a + b + c + d)^2$ te vinden en die op een paar manieren te verklaren. Om het ludiek te houden zou je kunnen vragen om daarbij een gedicht in de stijl van K. Schippers te bedenken. Een uitdaging kan ook zijn om naar het *aantal* termen te kijken. Bij de uitwerking van $(a + b + c + d)^2$ is dat tien, maar kun je zonder uitwerken ook vinden hoe dit aantal wordt bij het kwadraat van vijf termen of als je het hele alfabet in het kwadraat neemt: $(a + b + c + \dots + z)^2$?

Combinatoriek dus. Bij n termen is de uitkomst

$$n + \frac{1}{2}n(n - 1)$$

en dat dit juist gelijk is aan

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

kan hetzij algebraïsch, hetzij combinatorisch worden aangetoond. Een ander vervolg op de formule van K. Schippers, is om $(a + b + c)^3$ uit te werken. Dat kan natuurlijk via $a(a + b + c)^2 + b(a + b + c)^2 + c(a + b + c)^2$ of, als je het aanschouwelijk wilt maken, via een kubus met 27 kamers. Beschouw figuur 1 als de plattegrond van die kubus en zet daar in gedachten drie verdiepingen op met hoogte respectievelijk a , b en c . Dit leidt tot een homogene veelterm van de derde graad, waarbij de symmetrie zich laat verifiëren. Ook bij ‘transcendente expressies’, zoals $\sin(x + y)$ of $\ln(xy)$, is het goed om op symmetrie te letten. De hiermee equivalente vormen, als $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$ en $\ln x + \ln y$ moeten ook de toets op symmetrie kunnen doorstaan! Expliciet leerlingen op dit soort symmetrieën – of antisymmetrieën, zoals bij $\sin(x - y)$ – te wijzen, lijkt mij heel nuttig.

(Denk)sport?

Het uitdrukken van symmetrische vormen met twee variabelen in de som en het product van de wortels van een vierkantsvergelijking werd door mij destijds als een sport beschouwd. Misschien zien de leerlingen van nu de sommen in het algebraboek ook wel zo. Is dat erg? Nee, maar de ene sport is wel leuker en vooral, staalt meer ‘denkspieren’, dan de andere. Zo zou ik het geen dom idee vinden om tijd te besteden aan het uitdrukken in $S (= x + y)$ en $P (= xy)$ van symmetrische expressies in x en y . Dit kan best zonder vierkantsvergelijking op de achtergrond. Vraag bijvoorbeeld om een vorm als $x^2y + y^2x$ of als $(x - y)^2$ uit te drukken in S en P ^[3]. En natuurlijk kunnen leerlingen worden uitgedaagd om zelf symmetrische expressies te verzinnen en die uit te drukken in S en P . Of beter nog: om hun medeleerlingen zelfbedachte opgaven van die soort op te geven.

Noten

- [1] Zie Stewart, I. (1989). *Galois Theory*. Londen: Chapman and Hall. Of: Waerden, B.L. van der (1955). *Algebra I*. Berlijn: Springer Verlag.
- [2] Struik, D.J. (1986). *A source book in Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
- [3] Kindt, M. (2016). *Geen week zonder Algebra*, een bundel productieve oefeningen. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

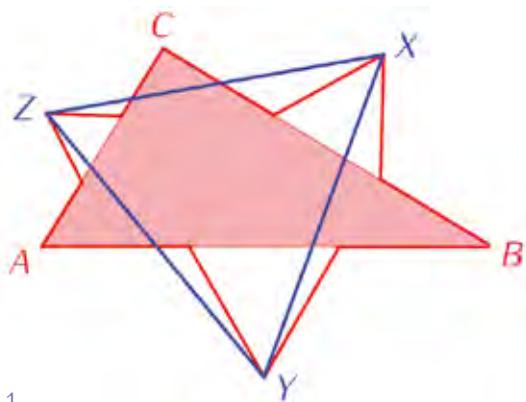
DE STELLING VAN NAPOLEON

Martin Kindt

In de afgelopen zes decennia is ons meetkundeonderwijs voortdurend veranderd. Na de oude planimetrie en stereometrie kwamen onder meer transformatie-, vector-, ruimte- en afstandsmeetkunde, elk met haar eigen methodiek. Nu beleven we in de bovenbouw een revival van de analytische meetkunde. Maar wat heeft Napoleon hiermee te maken?

Wiskundig wapenfeit

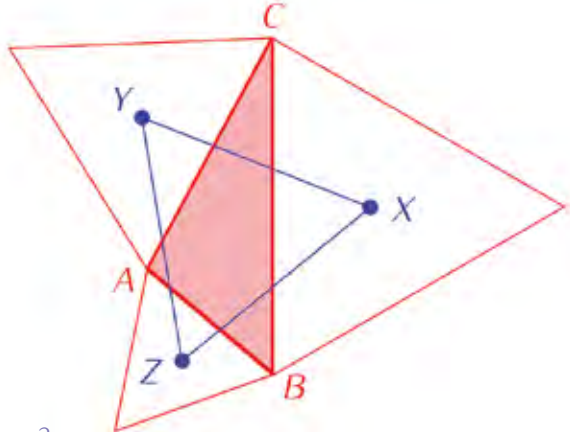
Zou Napoleon een verdienstelijk amateur-wiskundige zijn geweest? In elk geval is er een mooie meetkundestelling die zijn naam draagt en die ik dan maar als wiskundig wapenfeit van de keizer-generaal beschouw. Ik vermeld hier drie varianten van Napoleons stelling. Eerste variant:



figuur 1

De zijden van driehoek ABC zijn elk in drie gelijke stukken verdeeld. Op de middelste segmenten zijn buitenwaarts gelijkzijdige driehoeken geplaatst met toppen X, Y, Z. Die toppen zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

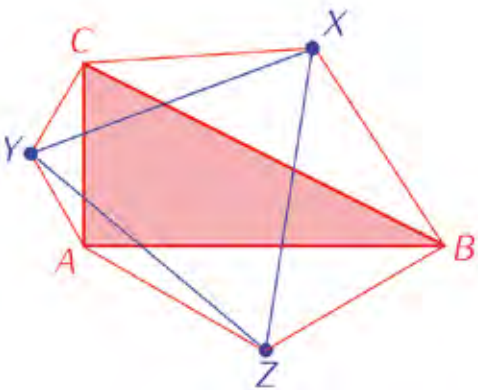
Tweede variant:



figuur 2

Op de zijden van driehoek ABC zijn buitenwaarts gelijkzijdige driehoeken geplaatst. De zwaartepunten X, Y en Z van die driehoeken zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Derde variant:



figuur 3

Op de zijden van driehoek ABC zijn buitenwaarts gelijkbenige driehoeken geplaatst met een tophoek van 120° . De toppen X, Y en Z van die driehoeken zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.

Ik heb hier tekeningen gemaakt voor een scherp-, stomp-, en rechthoekige driehoek. Dat in elk van de drie tekeningen de twee andere varianten dezelfde punten X, Y en Z opleveren, moet natuurlijk wel worden nagegaan. Ik merk nog op dat in elk van de drie varianten 'buitenwaarts' vervangen mag worden door 'binnenwaarts', ook dan ontstaat een gelijkzijdige driehoek XYZ.

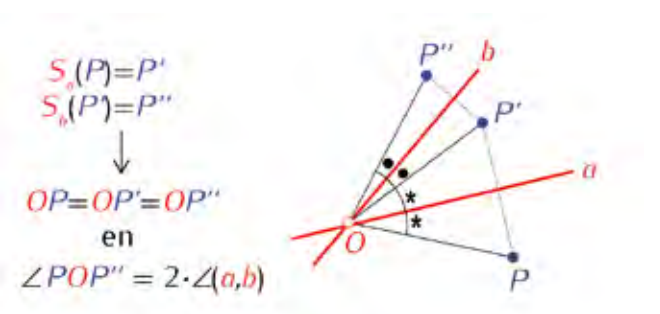
Transformatimeetkunde

Het bewijs van de stelling met klassieke middelen is niet zo simpel en het is niet bekend of en hoe Napoleon een bewijs heeft geleverd. Op internet kun je diverse bewijzen vinden, vaak met goniometrisch geweld. Ik kwam de stelling voor het eerst tegen als reclame voor de transformatimeetkunde. Dat was zo'n 50 jaar geleden,

toen de New Math in het centrum van de belangstelling van leerplanontwikkelaars stond.^[1] Met als leus ‘weg met Euclides’ – sloeg natuurlijk niet op dit vakblad – propageerden een aantal wiskundigen in binnen- en buitenland een opbouw van de vlakke meetkunde door middel van lijnspiegelingen. Het nagestreefde ideaal was om te onderwijzen dat de groep van isometrieën van het platte vlak wordt voortgebracht door de (lijn)spiegelingen in dat vlak.

Ofwel dat *rotaties*, *translaties* en *glijspiegelingen* producten van achtereenvolgens twee, twee en drie spiegelingen zijn. In België en Frankrijk ging men hierin vrij ver. In ons land werd al gauw ervaren dat de stijl van bewijzen in de transformatiemeetkunde voor veel leerlingen te hoog was gegrepen. Inmiddels was de klassieke stijl van bewijzen, steunend op congruentie van driehoeken, geschrapt uit de schoolboeken. Met als gevolg dat de eeuwenlang gekoesterde bewijscultuur nagenoeg verdween uit het Nederlandse (meetkunde)onderwijs.

Echter, interessante meetkundige stellingen zoals die van Napoleon, vragen om een bewijs! Het adequate instrument in dit geval is het verband dat er bestaat tussen rotaties en spiegelingen. Het na elkaar uitvoeren van twee spiegelingen (in figuur 4 zijn dat eerst S_a daarna S_b) waarvan de assen a en b elkaar snijden in O , heeft hetzelfde effect als een rotatie om O over een hoek gelijk aan het dubbele van de hoek tussen a en b .



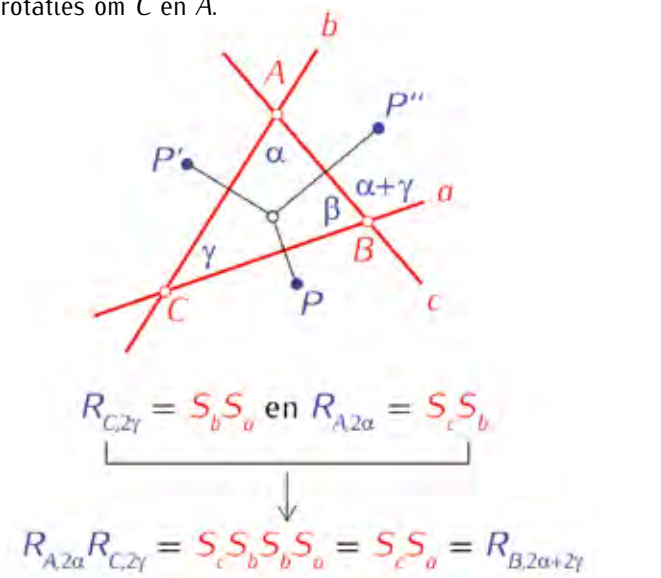
figuur 4

Als intermezzo een toepassing in het Oxy -vlak. Neem voor a en b respectievelijk de x -as en de lijn door $(0, 0)$ en $(1, 1)$. S_a verandert de y -coördinaat in zijn tegengestelde en S_b verwisselt de x - en de y -coördinaat, zodat:

$$(x, y) \xrightarrow{S_a} (x, -y) \xrightarrow{S_b} (-y, x)$$

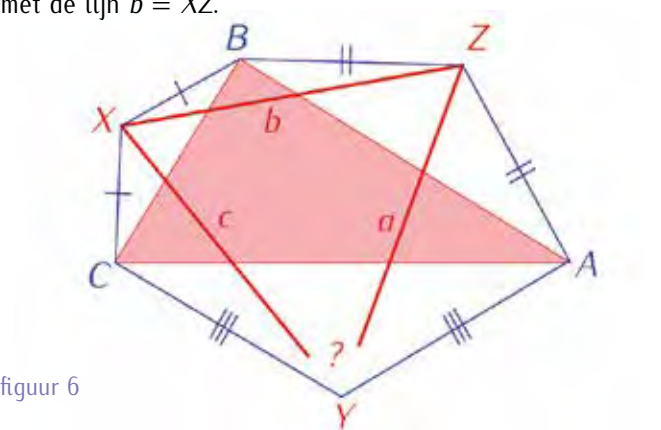
Gevolg: de vectoren met kentallen (x, y) en $(-y, x)$ staan loodrecht op elkaar. Een karakteristiek element van de transformatiemeetkunde is het idee dat je elke rotatie – en wel op oneindig veel manieren! – kunt ‘ontbinden’ in twee spiegelingen, waarbij dan de hoek tussen de assen gelijk is aan de helft van de draaihoek van die rotatie. Daaruit volgt dat het product van twee rotaties met verschillende

centra – zeg C en A – en waarvan de draaihoeken – zeg 2γ en 2α – niet samen 0° of 360° zijn,^[2] een rotatie is met een derde punt (B) als centrum en als draaihoek $2\alpha + 2\gamma$. Je bewijst dit door de beide rotaties te ontbinden in twee spiegelingen waarbij één spiegeling in beide producten optreedt, één keer als tweede component en één keer als eerste component. In figuur 5 fungeert b twee keer als spiegelas. Het product van de vier spiegelingen heeft het snijpunt B van a en c als invariant punt, dat is het centrum van de resulterende rotatie. De rotatiehoek is het dubbele van de buitenhoek in B van driehoek ABC , en is daarom gelijk aan $2\alpha + 2\gamma$, de som van de hoeken van de rotaties om C en A .



figuur 5

Dit kan nu worden toegepast om de (derde variant van) de stelling van Napoleon te bewijzen. Bekijk figuur 6. De driehoeken CBX , BAZ en ACY zijn gelijkbenig en hebben een tophoek van 120° . De rotaties $R_{X, 120^\circ}$ en $R_{Z, 120^\circ}$ beelden in volgorde C af op B en B op A . Het product van die twee is een rotatie die C afbeeldt op A en waarvan de draaihoek 240° is. Het centrum van die rotatie is het snijpunt $?$ van de lijnen c en a die hoeken van 60° maken met de lijn $b = XZ$.

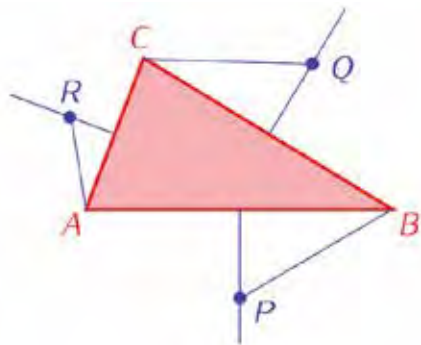


figuur 6

De inverse van die rotatie heeft een draaihoek van 120° en beeldt A af op C . Maar dat is juist de rotatie over 120° met centrum Y . Met andere woorden: $?$ = Y en driehoek XYZ is gelijkzijdig!

Analytische meetkunde

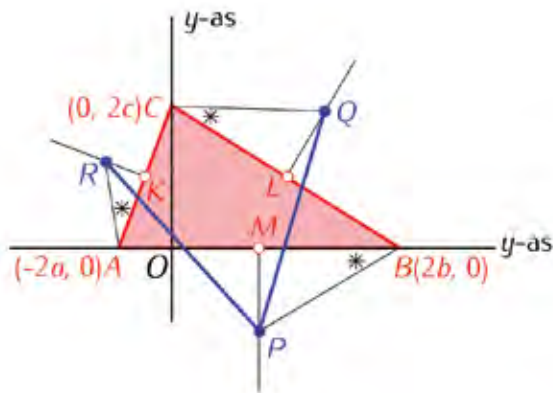
Dat het bewijzen met transformatiemeetkunde moeilijk is voor het gros van onze leerlingen zal duidelijk zijn. Je kunt het hier getoonde bewijs heus wel uitleggen aan leerlingen en hen ook bij de opbouw ervan betrekken. Maar het blijft dan toch typisch zo'n 'ik-snap-het-wel-maar-ik-had-'t-nooit-zelf-kunnen-vinden-bewijs'. Sinds kort staat de analytische meetkunde weer op het schoolmenu en een natuurlijke vraag is of de stelling van Napoleon ook hierin zou kunnen passen. Om die vraag bevestigend te beantwoorden, kijk ik naar een vierde variant van de stelling:



figuur 7

Buiten een niet-gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de middelloodlijnen van de zijden AB, BC en CA de punten P, Q en R zodat $\angle PBA = \angle QCB = \angle RAC$. Driehoek PQR is gelijkzijdig als en alleen als die hoeken gelijk zijn aan 30°

Merk op dat dit door de toevoeging 'en alleen als' een 'plus-variant' van de stelling van Napoleon is. Het ideaal van analytische meetkunde op school zou naar mijn idee moeten zijn dat je die gebruikt in situaties die niet 'analytisch-voorgekookt' zijn. Ik bedoel daarmee dat de leerling zelf een handig coördinatenstelsel moet kiezen voordat hij aan de algebra begint. Bij deze Napoleon-variant merk ik op dat je, gelet op de symmetrie in de situatie, en in het geval dat $AC \neq BC$, kunt volstaan met te bewijzen dat de lijnstukken PQ en PR even lang zijn onder de gestelde voorwaarde.



figuur 8

Ik kan nu met een gerust hart de driehoek in een Oxy -stelsel situeren zoals in figuur 8 en me toeleggen op het bepalen van de afstanden PQ en PR. Verder stel ik: $\tan \angle PBA = \tan \angle QCB = \tan \angle RAC = t$. De middens van K, L en M van respectievelijk AC, BC en AB hebben de coördinaten $(-a, c)$, (b, c) en $(b - a, 0)$. De vector $\overrightarrow{KR}$ staat loodrecht op AC en heeft de kentallen $t(-c, a)$. De coördinaten van R zijn dan: $(-a - ct, c + at)$. Net zo heeft Q de coördinaten: $(b + ct, c + bt)$ en P de coördinaten $(b - a, -at - bt)$. De kentallen van de vector $\overrightarrow{PR}$ zijn nu: $(-b - ct, c + 2at + bt)$. En die van $\overrightarrow{PQ}$ zijn dan: $(a + ct, c + at + 2bt)$. Het aan elkaar gelijkstellen van de kwadraten van de lengten van de vectoren $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{PQ}$ levert op:

$$(b + ct)^2 + (c + 2at + bt)^2 = (a + ct)^2 + (c + at + 2bt)^2$$

Ik werk graag met verschillen van twee kwadraten en vervang de vergelijking daarom door:

$$(b + ct)^2 - (a + ct)^2 = (c + at + 2bt)^2 - (c + 2at + bt)^2$$

Nu kan ik mooi ontbinden in factoren:

$$(b - a)(b + a + 2ct) = t(b - a)(2c + 3at + 3bt)$$

Uit $AC \neq BC$ volgt $b - a \neq 0$, zodat er komt:

$$b + a + 2ct = 2ct + 3(a + b)t^2$$

Dus: $t^2 = \frac{1}{3}$ en met $t > 0$ volgt $t = \tan 30^\circ$.

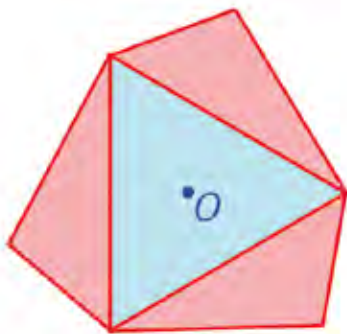
Opmerkingen:

1. De deelbaarheid van beide leden door $b - a$ in de voorlaatste vergelijking was op meetkundige gronden voorspelbaar!
2. De negatieve oplossing van $t^2 = \frac{1}{3}$ leidt tot de 'binnenwaartse stelling van Napoleon'.
3. In het geval $AC = BC \neq CA$ gaat de vlieger niet op deze wijze op, maar is het een kwestie van de driehoek anders plaatsen in het assenstelsel: C op de x-as, samen met A (of met B).
4. Over de organisatie van het algebrawerk ben ik zelf tevreden, maar er zijn ook andere verstandige aanpakken. Het lukt bijvoorbeeld ook goed met gebruik van complexe getallen.

Tegeltjes(be)wijs(baar)heid

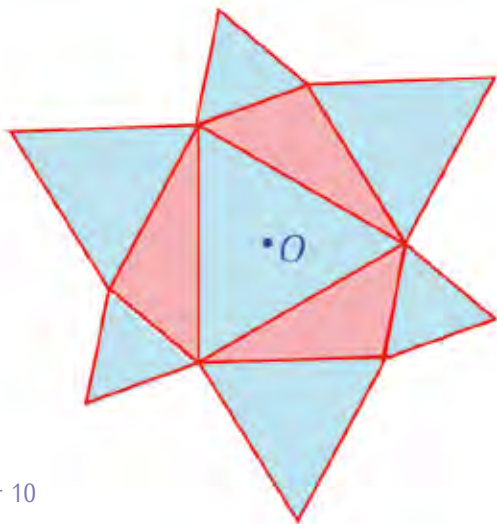
Zo'n analytisch bewijs overtuigt als je in algebra gelooft, maar je kunt niet volhouden dat het inzicht geeft en het is niet aanschouwelijk. In haar prachtige proefschrift bepleitte Dina van Hiele-Geldof ooit het gebruik van tegelvloeren bij aanvankelijk meetkundeonderwijs.^[3] Nu ik terugblik, vind ik het onbegrijpelijk dat bij het denken over de invoering van transformatiemeetkunde

op school, zo weinig is gedaan met het idee om tegelpatronen met hun symmetrieën te onderzoeken. Als staaltje ‘tegeltjeswijsheid’ volgt hier een aanschouwelijk bewijs van de (buitenwaartse) stelling van Napoleon. Ik begin met een gelijkzijdige driehoek en plak drie congruente driehoeken tegen de zijden, figuur 9.



figuur 9

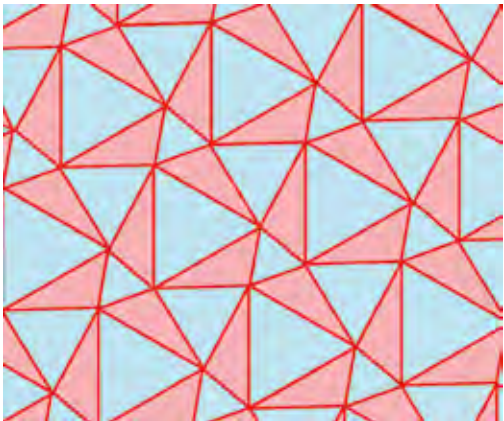
De totale figuur is duidelijk draaisymmetrisch om het zwaartepunt O van de gelijkzijdige driehoek. Bij elk van de drie rode driehoeken, plak ik gelijkzijdige driehoeken aan de twee andere zijden.



figuur 10

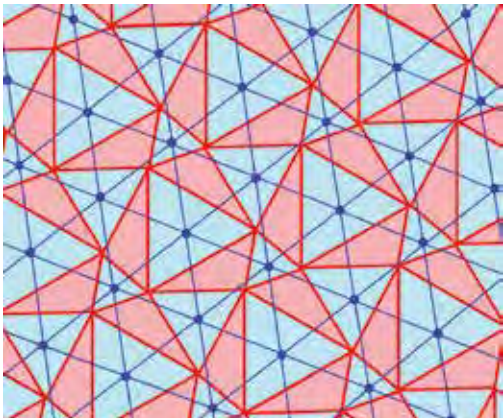
Zo ontstaat een nieuwe draaisymmetrische figuur, met hetzelfde centrum O . Deze figuur kan op zijn beurt weer worden uitgebreid door kopieën van de rode driehoek op geschikte wijze aan de gelijkzijdige driehoeken te plakken, en aan deze weer gelijkzijdige driehoeken, enzovoort. Er ontstaat dan een fraaie betegeling van het vlak, zie figuur 11.

In elk knooppunt ontmoeten drie gelijkzijdige driehoeken elkaar, zodat er 180° overblijft voor de drie verschillende hoeken van de rode tegels. Intuïtief is duidelijk dat dit (oneindige) patroon draaisymmetrisch is en ook dat elk zwaartepunt van een gelijkzijdige driehoek een symmetriepunt is van de orde 3. Door alle symmetriepunten met elkaar te verbinden ontstaat een draaisymmetrisch net van congruente driehoeken, zie figuur 12. Elk knooppunt van dit net is een symmetriepunt (orde 3) en daaruit volgt dat de driehoeken van dit net gelijkzijdig zijn!



figuur 11

Desgewenst kan uit dit verhaal een formeel bewijs worden gedistilleerd, maar dan verliest het veel aan charme. Daarom laat ik het hierbij.



figuur 12

Noten

- [1] Een opzienbarende experimentele methode in die tijd was *Transformatiemeetkunde* ontworpen door J. Bulens, A.J. de Groot, A.N. Haberman en R. Troelstra.
- [2] Als de draaihoeken tegengesteld zijn (of samen 360° zijn) is het product van de rotaties een translatie.
- [3] Hiele-Geldof, D. van (1957). *De didactiek van de meetkunde in eerste klas van het v.h.m.o.* Universiteit Utrecht.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

REKENEN ALS EEN ROBOT, WIE WIL DAT NOU?

Martin Kindt

Onlangs hoorde Martin Kindt de verzuchting: gelukkig weten de leerlingen weer dat 'delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Maar hoe 'gelukkig' is dat en hoe hebben ze dit kunstje geleerd? En een gevaar ligt om de hoek: je moet wel de juiste breuk omkeren! Het verhaal gaat dat zelfs leraren hierbij wel eens in de fout gingen ...

Bijles

Hé, Pawel Wasiljitsj! roept Pelageja Iwanowna haar man wakker. Je moest je liever eens wat met Stepa gaan bemoeien, want die zit over zijn boek gebogen te huilen. Er is weer iets dat hij niet snapt!



Anton Tsjechov (1860 – 1904)

Aldus begint 'Vastenavond', een van die mooie verhalen die Anton Tsjechov in 1887 schreef.^[1] Pawel W. gaat dan, zonder zich te haasten, naar de kamer van zoonlief, die hij aantreft met betraande ogen. Hij plaagt hem een beetje, zo van: 'smaakt de wetenschap niet zo lekker na al die pannenkoeken van gisteravond?' Dan volgt er:

- Is er iets wat je niet duidelijk is?
- Ja, kijk ... dat delen van die breuken! antwoordt de jongen boos, hoe je die ene breuk op de andere delen moet ...
- Hm, je bent me ook een rare! Wat is daar nu aan? Daar hoeft je toch je hoofd niet over te breken? Leer gewoon de regel van buiten en klaar ben je. Om een breuk op een andere te delen moet je de teller van de ene breuk vermenigvuldigen met de noemer van de andere en dat wordt dan de teller van je deelsom ...

Nou ja, en dan verder, dan neem je de noemer van de eerste breuk

- Ja, dat weet ik allemaal ook wel zonder jou! valt Stepa hem in de rede, (...) je moet me het bewijs laten zien!
- Het bewijs? Goed, geef je potlood en luister. Stel dat we zeven achtsten moeten delen door twee vijftien. Goed. Weet je, kerel, de kneep zit 'm daarin, dat je die breuken de een op de ander delen moet (...). Maar goed, luister. We zullen zo redeneren; stel, dat we die zeven achtsten nu eens niet door twee vijftien, maar door twee, dus alleen door de teller moesten delen. Goed, dat doen we, wat krijgen we dan?
- Zeven zestienden.
- Juist! Knappe jongen! Welnu, kerel de hele kneep zit 'm daarin, dat we ... als we door twee gedeeld hebben, dan krijgen we dus ... Wacht even, daar ben ik zelf in de war geraakt.

Vader weet kennelijk niet meer hoe het verder moet en begint dan te vertellen over de slechte wiskundeleraar die hij vroeger heeft gehad, die geen orde kon houden en voortdurend vastliep in een bewijs. Hij is nog niet klaar met zijn verhaal als moeder hen roept voor het ontbijt. En de schrijver komt in zijn verhaal niet meer terug op het delen van breuken.

Socratisch leergesprek

Ik neem aan dat Tsjechov zelf de achtergrond van de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' goed begreep en dat hij volstond met het hekelen van wat we nu mechanistisch (of traditioneel) rekenonderwijs noemen. En laten we wel zijn, een verdere uitleg zou wel wat te veel hebben geëist van het uithoudingsvermogen van de gemiddelde lezer. Misschien zal Tsjechov – als een moderne Plato – wel een voortzetting van het afgebroken leergesprek van Pawel Wasiljitsj (in de rol van Socrates) en Stepa voor ogen hebben gezweefd. Ik verzin hier zo'n vervolg:

- *Als we door twee hebben gedeeld, dan krijgen we dus een breuk die twee keer zo klein is als zeven achtsten. Ben je het daarmee eens?*
- *Ja.*
- *Dus als je de noemer van een breuk tweemaal zo groot maakt, dan ...?*
- *Dan wordt de breuk tweemaal zo klein.*
- *Mooi zo, en als je nu deelt door een getal dat kleiner is dan twee, wordt de uitkomst dan groter of kleiner dan zeven achtsten?*
- *... groter, ja natuurlijk, groter!*
- *En als dat getal waar je door deelt nu eens vijf keer zo klein is als twee, hoeveel keer zo groot wordt de uitkomst dan?*
- *Eh ... vijf keer zo groot, denk ik.*
- *Ja, zo is het! En hoeveel keer zo klein is twee vijftien in vergelijking met twee?*
- *Vijf keer, vanzelf.*
- *Dus bij deling van zeven achtsten door twee vijftien moet je die zeven zestienden van daarnet nog ...*
- *Met vijf vermenigvuldigen.*
- *En wat komt er dan uit?*
- *Even kijken ..., vijf en dertig zestienden.*
- *Ja, helemaal goed!*
- *Snap je het nu, jongen?*
- *Ik geloof van wel ...*

Ik zeg niet dat de hier gesuggereerde uitleg de meest ideale is, maar het is wel een van de mogelijkheden om het delen door een breuk te leren begrijpen.

De 'algemene' noemer

Ook in de Nederlandse literatuur van de 19de eeuw vond ik iets over breukrekenen. Multatuli's geesteskind Woutertje Pieterse repeteert, als hij in de wachtkamer zit voor een sollicitatiegesprek bij de firma Ouwetijd & Kopperlith, al mijmerend de kennis die hij opgedaan heeft op de basisschool: *'En als er breuken zijn, ... lastig is 't, nu ja, maar ik zoek de algemene noemer.'*

Bij een presentatie over breukrekenen heb ik aan de toehoorders wel eens deze inleidende vraag gesteld: *In welke situaties heeft het zin om twee breuken gelijknamig te maken?* Een vraag die reflectie uitlokt en die je daarom ook heel goed aan een klas zou kunnen voorleggen. De verwachte antwoorden kwamen vlot: 'als je breuken wilt optellen of aftrekken' en kort daarna 'of als je wilt weten welke van twee breuken het grootst is'. Het antwoord 'als je ze op elkaar wilt delen' kwam zelden. Voor de lezer die nu zijn wenkbrauwen fronsst:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{35}{40} : \frac{16}{40} = \frac{35}{16} = 2\frac{5}{16}$$

Dit werkt dus ook en ik denk dat het in eerste instantie makkelijker te snappen is dan de befaamde vuistregel

die zegt dat je de 'deler-breuk' moet omkeren en dan vermenigvuldigen met de 'deeltal-breuk'. Het risico van het aanleren van het gelijknamig maken van de twee breuken bij een deling is misschien dat de leerlingen dan ook bij vermenigvuldigen 'onder één noemer brengen' (waarom zeggen we trouwens niet 'boven' één noemer?) en dan alleen de tellers vermenigvuldigen'. Tja ...

We kunnen het wel, maar snappen het niet

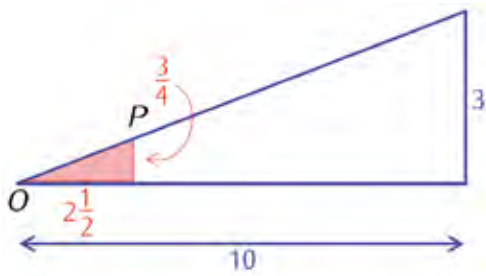


Stepa in het verhaal van Tsjechov, wilde duidelijk niet rekenen als een robot. Hij nam geen genoegen met een voorgekauwde standaardprocedure, nee, hij wilde een 'bewijs'. 'Bewijs' in zijn eigenlijke rol: om te begrijpen en om overtuigd te raken.

Ik herinner me een voorval van lang geleden. Onze tweeling kwam uit school – ze zaten toen in wat nu groep acht heet, maar toen de zesde klas was – en spraken als het ware uit één mond: 'papa, we hebben iets nieuws geleerd met breuken, we kunnen het wel, maar snappen het niet! Ik kon wel raden waar het over ging, en – mijn beroepseer stond op het spel – ik moest spontaan een didactische oplossing bedenken. Zo kreeg ik de inval dat 'gelijknamig maken' een oplossing bood voor een inzichtelijk resultaat. Via een rijtje van geschikte voorbeelden, waren de problemen voor hen snel opgelost. Althans ze konden nu controleren dat de resultaten overeenkwamen met die van de op school geleerde, raadselachtige regel. Óf en hóe ik toen het verband heb uitgelegd met de procedure die de leraar had voorgeschreven, kan ik me niet meer herinneren. In dit licht vermeld ik een ervaring van een collega van een paar jaren terug. In een vergadering van een commissie over het rekenonderwijs, werd gevraagd waarom 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' niet in een lijst van standaardprocedures was opgenomen. Het antwoord van een van de commissieleden luidde: omdat je ook kunt delen door de breuken gelijknamig te maken. 'Dat mag niet' was het antwoord van een wiskundige. Ik kon het niet geloven en besloot een onderzoekje te doen onder natuurkundendidactici. Zo van: hoe reken jij een sommetje als 'zeven achtsten gedeeld door twee vijftien' uit. Eén antwoord was: ik vermenigvuldig ze eerst allebei met 40. En dat is misschien wel de beste aanpak ..

Het hellingmodel

In *Euclides* heb ik eerder enige artikelen^[2] gewijd aan het idee om, althans in het voortgezet onderwijs, het rekenen met breuken te koppelen aan het begrip ‘helling van een rechte lijn’. Ieder heeft wel eens van ‘stijgingspercentage’ gehoord en om in plaats daarvan te werken met het quotiënt van verticale en horizontale ‘sprong’ is geen grote stap. En dat de helling niet verandert als de beide ‘sprongen’ met dezelfde factor worden vergroot (of verkleind), is intuïtief duidelijk. Schaalvergroting van figuren, daar zijn we bij wijze van spreken vanaf de wieg al mee vertrouwd. In figuur 1 is te zien hoe het rode driehoekje met een factor 4 is vermenigvuldigd.



figuur 1

Figuur 1 kan dienen als illustratie bij:

helling_{OP} = $\frac{\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \times 4}{2\frac{1}{2} \times 4} = \frac{3}{10}$

Twee isomorfe rekenwetten

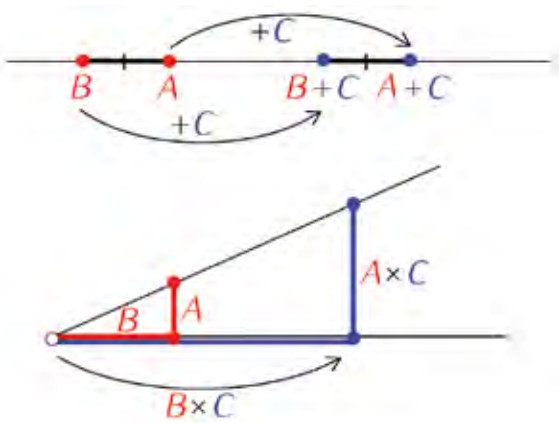
Dat de verhouding van twee getallen hetzelfde blijft als je beide met eenzelfde getal (≠ 0) vermenigvuldigt, is een van de basisprincipes van de verhoudingstabel. Je kunt eigenlijk wel op je klompen aanvoelen dat dit waar is, figuur 1 maakt de zaak aanschouwelijk. Een isomorfe eigenschap vind je bij het verschil van twee getallen. Als je bij beide getallen hetzelfde getal optelt, verandert het verschil niet. Ook hier zorgt een plaatje – de getallenlijn – voor duidelijkheid in één oogopslag. Naar mijn smaak zouden deze beide eigenschappen, die ik hieronder in formele taal schrijf, meer expliciete aandacht moeten krijgen in het onderwijs.

I $A - B = (A + C) - (B + C) \dots\dots (V+)$

II $A : B = (A \times C) : (B \times C) \dots\dots (D\times)$

NB: bij II hoort natuurlijk de voorwaarde dat C ≠ 0.

De hierbij passende plaatjes staan in figuur 2:



figuur 2

Deze regels kun je voortdurend met succes toepassen, zowel in het basis als in het voortgezet onderwijs. Uit mijn schooljeugd herinner ik me nog hoe een aantal medeleerlingen moeite had met ‘lenen’ en ‘onthouden’ bij aftrekking van getallen met meer dan twee cijfers. Het is niets nieuws als ik zeg dat je handig kunt zijn en de aftrekker eerst wat ‘mooier’ maken. Bijvoorbeeld:

	$\xrightarrow{+16}$	
1961		1977
1784	$\xrightarrow{+16}$	1800
-		-
?		177

Een handige toepassing van regel (V+). En je moet er ook een beetje bij nadenken. Aan degenen die volhouden dat je toch vooral de klassieke procedures erin moet slijpen, en rekenen als een robot, zeg ik: ‘mensen moet je niet willen programmeren’. Of om het fraaier met Freudenthal te zeggen: ‘It’s a human right and dignity to learn by insight and understanding’.

Bij het rekenen met negatieve getallen levert regel (V+) ook didactische winst op. Kijk maar;

	$\xrightarrow{+55}$	
78 - (-55)		
	$\xrightarrow{+55}$	
133 - 0		= 133

Eventueel kan een minder rekenvaardige leerling nog wat meer tussenstapjes maken, bijvoorbeeld van die 78 eerst 80 en van die - 55 eerst - 53 maken.

Zulke voorbeelden geven inzicht in de regel die – als de tijd rijp is! – aldus kan worden geformuleerd: *‘aftrekken van een getal is optellen met het tegengestelde’*.

Als de tijd rijp is, en dat geldt ook voor de regel waar Stepa in het verhaal van Tsjechov mee worstelde. Bij de deling die zijn vader als voorbeeld koos, kun je tenslotte ook beide breuken zo vermenigvuldigen dat de tweede breuk 1 wordt:

$$\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{7}{8} \times \frac{5}{2} : \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{35}{16} : 1 = \frac{35}{16}$$

Natuurlijk, je moet dan eerst hebben ingezien dat ‘twee breuken zijn elkaars omgekeerde’ hetzelfde betekent als ‘het product van twee breuken is gelijk aan 1’. Langs deze weg, waarbij de deler ‘geneutraliseerd’ wordt, kan de ‘standaardprocedure’ steunen op inzicht. De kern van wiskunde is dat het ‘waarom’ voorafgaat aan het ‘hoe’. Dat het ‘hoe’ (of parten daarvan) meestal meer beklijft (of beklijven) dan het ‘waarom’ is helaas de realiteit. In zijn beroemd geworden rede^[3] in 1934 stelde Dijksterhuis dat *de leerling op elk ogenblik in staat moet zijn, zichzelf en anderen rekenschap te geven van de betekenis van de termen die hij gebruikt en van de motivering van de methoden die hij toepast*. Hooggestemd idealisme? Zeker. Er is echter ook een didactische aspect. Door bij herhaling nadruk te leggen op de ‘opbouw’ en het ‘waarom’ kan worden bereikt dat de leerling een basis heeft om een algoritme, zo nodig, zelf te reconstrueren!

Noten

[1] Tsjechov, A., *Verhalen 1886-87*, G.A. van Oorschot, 1954.
[2] Kindt, M. (2015). Breuken op de helling (1) en (2). *Euclides*, 90 (5 en 6).
[3] Dijksterhuis E.J. (1934). Epistemisch wiskunde-onderwijs. *Euclides*, 10 (4), pp. 165-213.

Over de auteur

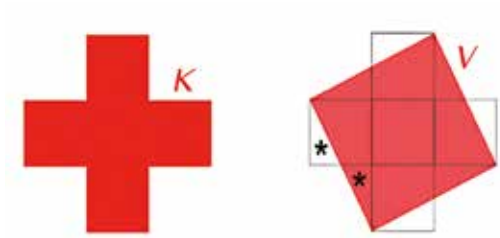
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Het wonder dat er paren lijnstukken bestaan, waarvan de lengten zich niet verhouden als twee natuurlijke getallen, staan we daar op school nog wel eens bij stil? In de tijd van Pythagoras werden ze daar volgens overlevering wel stil van. Martin Kindt stelt zich voor dat de aandacht hiervoor, mits met veel gevoel voor drama gepresenteerd, door de leerling van vwo of havo als een welkome afwisseling van die eindeloze reeksen willekeurige sommetjes kan worden ervaren.



Van kruis naar vierkant

Het rode kruis (net als zijn witte broertje op de Zwitserse vlag) is samengesteld uit vijf even grote vierkanten. Vier hoekpunten van het kruis K zijn ook hoekpunten van een scheef vierkant V .



figuur 1

In figuur 1 is te zien dat de oppervlakte van V gelijk is aan die van het kruis. Ik beschouw nu de vierkanten waaruit K is opgebouwd als eenheidsvierkanten, met als gevolg dat de oppervlakte van V gelijk is aan 5. Leerlingen kunnen K en V tekenen op millimeterpapier, zodat de oppervlakte van V dan 5 cm² wordt, en je kunt dan vragen om de zijde van vierkant V nauwkeurig op te meten. Zij zullen dan vinden dat de uitkomst tussen 2,2 en 2,3 cm ligt. Maar hoe zit het exact?

Benaderen met breuken

Zo'n 2500 jaar geleden deden de Grieken de wonderbaarlijke ontdekking dat er lijnstukken bestaan waarvan de lengten zich niet verhouden als twee gehele getallen. Zulke lijnstukken noemde men *onderling onmeetbaar*. Zij zagen kans hiervoor een waterdichte 'redentheorie' te ontwikkelen^[1], wat een ongelooflijke intellectuele prestatie kan worden genoemd. Wat geven we hiervan mee aan onze leerlingen? De lezer zal het moeten beamen: 'bedroevend weinig'. Maar moeten we daar wel bedroefd over zijn? Ik wil absoluut niet beweren dat we zouden moeten proberen een theorie van irrationale getallen aan

onze leerlingen op te dringen. Maar de revolutionaire ontdekking dat er onderling onmeetbare lijnstukken bestaan en de getalsmatige interpretatie daarvan, dat zou toch niet onderbelicht mogen blijven! In dit artikel gebruik ik nu eens het getal $\sqrt{5}$ in plaats van het klassieke voorbeeld $\sqrt{2}$. Natuurlijk ga je dan eerst zoeken naar een breuk tussen 2 en 3 die vermenigvuldigd met zichzelf 5 oplevert. Op grond van de hiervoor beschreven meting, kun je eerst denken aan $2\frac{1}{4}$.

Het kwadraat hiervan is $\frac{81}{16}$ ofwel $5\frac{1}{16}$, een wat te grote schatting dus. Dat de vierkantswortel uit 5 groter is dan $2\frac{1}{5}$ bleek uit de meting, maar je kunt ook even narekenen hoe veel of weinig het scheelt:

$$2\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{11}{5} = \frac{121}{25} = 5 - \frac{4}{25}$$

Tussen $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$ liggen oneindig veel breuken. Een handige en snelle manier om 'tussenbreuken' te vinden is: 'fout optellen', dat wil zeggen tel zowel de tellers als de noemers bij elkaar op. Bij $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$ geeft dit $\frac{2}{9}$, waarvan je bijna met het blote oog kunt zien dat dit inderdaad tussen die twee in ligt.

Dat deze operatie altijd een 'tussenbreuk' geeft, kan met algebra worden bewezen, maar aardiger is een aanschouwelijk bewijs. Positieve breuken kun je noteren als getallenparen (noemer, teller) en kun je zo voorstellen door vectoren in het eerste kwadrant. Het 'fout optellen' van breuken correspondeert nu met 'goed optellen' van vectoren, met als resultaat een 'tussenvector' met een 'tussenhelling'.^[2]

Ik reken nu een paar stappen zo door. De operatie 'fout optellen' is aangegeven met het teken $\oplus$.

$$2\frac{2}{9} \times 2\frac{2}{9} = \frac{20}{9} \times \frac{20}{9} = \frac{400}{81} < 5$$

$$\frac{2}{9} \oplus \frac{1}{4} = \frac{3}{13}$$

$$2\frac{3}{13} \times 2\frac{3}{13} = \frac{29}{13} \times \frac{29}{13} = \frac{841}{169} < 5$$

$$\frac{3}{13} \oplus \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$$

$$2\frac{4}{17} \times 2\frac{4}{17} = \frac{38}{17} \times \frac{38}{17} = \frac{1444}{289} < 5$$

De resultaten zijn steeds betere onderschattingen.
 Het laatste kwadraat verschilt nog slechts $\frac{1}{289}$ van 5.
 Die $2\frac{4}{17}$ benadert $\sqrt{5}$ aardig goed.

Ook zonder het voorgaande procedé te volgen kun je wel zien dat $2\frac{4}{17}$ kleiner is dan $2\frac{1}{4}$ ($= 2\frac{4}{16}$).

En wat te denken van deze voorstelling:
 $2\frac{4}{17} = 2 + \frac{4}{17} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$

De noemer 4 is een beetje groter gemaakt, de breuk wordt dan dus iets kleiner.

Even tussendoor. Ik herinner me een sommetje uit een natuurkundeboek over de bekende lenzenformule, die wel wordt toegeschreven aan Barrow.

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

De vraag luidde: *wat gebeurt er met de beeldafstand (b) als de voorwerpafstand (v) groter wordt?* Mijn oudste dochter kwam daar ooit mee thuis en ik liep met haar de meetkundige constructie langs. Zo kwamen we op het antwoord *b* wordt kleiner en zij begreep dit goed.
 De volgende dag vroeg ik haar hoe de natuurkundeleraar het had uitgelegd.

Antwoord: heel anders, want hij zei: *als v groter wordt, dan wordt 1 / v kleiner en omdat 1 / v + 1 / b niet verandert, moet 1 / b groter worden en dus wordt b kleiner.* Dit type redeneren, zogezegd majoreren en minoreren, daar zouden we in de wiskundeles best wat meer aan kunnen doen, dacht ik toen en denk ik nog.

Terug naar de benadering van $2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$ van $\sqrt{5}$.
 Je kunt dit een breuk met verdiepingen noemen.
 Wat gebeurt er als ik er nog zo'n zelfde verdieping bij maak? Ik bedoel:

$$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}$$

Nu is

$$4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}} < 4+\frac{1}{4}$$

Zodat

$$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} > 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$$

Even narekenen:

$$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{4}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = \frac{161}{72}$$

Kwadrateren en vergelijken met 5:

$$\frac{161}{72} \times \frac{161}{72} = \frac{25921}{5148} = 5 + \frac{1}{5148}$$

En ja, een nog scherpere benadering, maar nu aan de bovenkant. De breuk zou ik ook hebben gevonden via de 'foute optelmethode', maar pas drie stappen later. Het heeft er alle schijn van dat het patroon van stapelbreuken, waarbij in elke stap de '4' wordt vervangen door $4 + \frac{1}{4}$, een snel algoritme geeft om steeds betere breukbenaderingen van $\sqrt{5}$ te leveren. Ook lijkt het erop dat de benaderingen beurtelings boven- en onderschattingen van $\sqrt{5}$ zijn, majoreren en minoreren afgewisseld^[3].

(On)eindige afdaling

Het eindcijfer van het kwadraat van een natuurlijk getal kan zijn: 0, 1, 4, 5, 6, 9, en nooit 2, 3, 7, 8. Het kwadraat van een 5-voud eindigt op 0 of 5 en omgekeerd: als het eindcijfer van een kwadraat 0 of 5 is, moet het gekwadeerde getal een 5-voud zijn. Met deze wetenschap kan worden bewezen dat er geen rationaal getal bestaat waarvan het kwadraat gelijk is aan 5.

Stel dat er natuurlijke getallen *a*, *b* bestaan met:

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \text{ ofwel } \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 5$$

Dan: $a^2 = 5b^2 \longrightarrow a^2$ is 5-voud

a is 5-voud: $a = 5c$, met *c* geheel

$$b^2 = 5c^2 \longrightarrow b = 5d, \text{ met } d \text{ geheel}$$

$$\text{Gevolg: } \sqrt{5} = \frac{5c}{5d} = \frac{c}{d} \text{ met } c < a \text{ en } d < b$$

Dus uit de veronderstelling dat $\sqrt{5}$ gelijk is aan een breuk met gehele teller en noemer, volgt dat er ook een breuk bestaat met kleinere gehele teller en noemer die gelijk is aan $\sqrt{5}$. Echter dit proces kan niet oneindig doorgaan omdat het ten slotte zou moeten leiden tot de noemer 1.

Maar $\sqrt{5}$ is niet geheel, dus de noemer 1 is uitgesloten. Daarmee is de veronderstelling dat $\sqrt{5}$ gelijk zou zijn aan een breuk met gehele teller en noemer weerlegd. Kortom: $\sqrt{5}$ is geen rationaal getal.

Van deze bewijsmethode - ‘descente infinie’ – een soort omgekeerde volledige inductie, was Fermat de trotse bedenker.^[4] Zou je leerlingen op een dergelijk bewijs willen trakteren? Waarom eigenlijk niet? Zelf vond ik als jonge leerling het principe van ‘reductio ad absurdum’ heel fascinerend en ik heb ervaren dat ook leerlingen die niet dromen van een wiskundige toekomst zo’n redenering wel spannend vinden.

Repeterende kettingbreuk

Ik kom nu terug op de breuken met verdiepingen. Het is inmiddels bewezen dat regelmatige voortzetting van het patroon met de getallen 1 en 4, nooit tot een exact resultaat leidt. Dat het een kwestie van ‘oneindig lange adem’ is, wordt aangetoond met een staaltje ‘wortel-rekenen’. Dit staaltje is om $\sqrt{5} - 2$ en $\sqrt{5} + 2$ met elkaar te vermenigvuldigen. De uitkomst is 1, zodat de twee wortelvormen elkaars omgekeerde blijken te zijn.

En daaruit volgt dan:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}$$

Nu volgt er een soort Droste-effect:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}$$

En nog een stap:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}}$$

Dit kan eindeloos worden voortgezet:

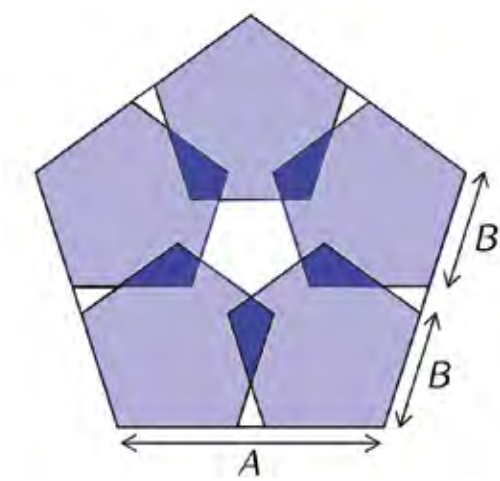
$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

Deze voorstelling heet een *oneindige repeterende kettingbreuk*. Bij afbreken van de kettingbreuk op een willekeurige plaats komt er een rationale benadering van $\sqrt{5}$. Zo’n benadering is des te beter naarmate je verder afdaalt in de kettingbreuk.

Opnieuw de irrationaliteit van $\sqrt{5}$

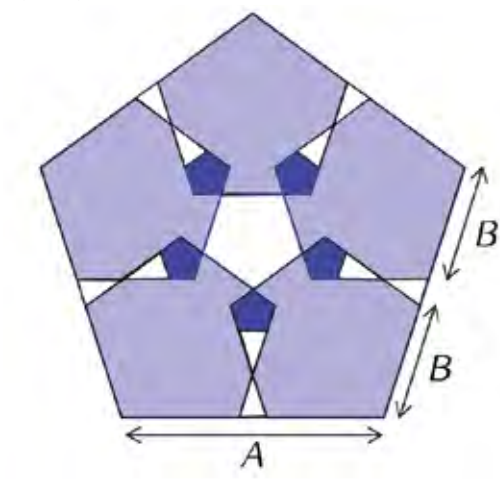
Zie figuur 2. In de regelmatige vijfhoek met zijde A zijn vijf kleine regelmatige veelhoeken (met zijde B) geplaatst.^[5]

Veronderstel dat de vijf kleine veelhoeken samen evenveel oppervlakte hebben als de grote vijfhoek, dus dat $A^2 = 5B^2$.



figuur 2

De vijf donkerblauwe overlappingen (‘vliegers’) hebben dan samen dezelfde oppervlakte als de witte vijfhoek in het centrum samen met de vijf witte driehoekjes aan de rand! In figuur 3 zie je hoe die driehoekjes van de vliegers zijn afgehaald.



figuur3

De witte centrale vijfhoek heeft nu dezelfde oppervlakte als de vijf donkerblauwe vijfhoekjes samen. Dat die witte vijfhoek in het centrum regelmatig is, volgt direct uit de symmetrie van de totale figuur. De donkerblauwe vijfhoekjes zien er ook regelmatig uit, maar dat vraagt nog wel om een bewijs!

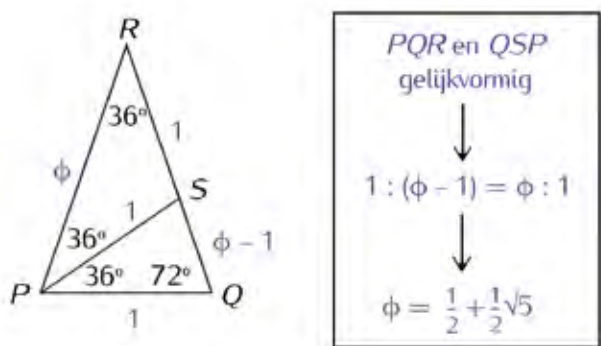
Als ik nu eerst even aanneem dat die inderdaad regelmatig zijn, dan kan er weer in Fermats geest worden geredeneerd. Stel dat A en B gehele getallen zijn, waarvoor dus geldt $A^2 = 5B^2$.

De zijden van een donkerblauw vijfhoekje zijn dan elk gelijk aan $A - 2B$ en die van de witte vijfhoek in het centrum zijn dan $B - 2(A - 2B) = 5B - 2A$. Vanwege de gelijkheid van oppervlakten geldt: $(5B - 2A)^2 = 5(A - 2B)^2$

Kortom: als er gehele getallen A en B bestaan die voldoen aan $A^2 = 5B^2$, dan zijn er ook kleinere gehele getallen, namelijk $a = 5B - 2A$ en $b = A - 2B$, met de eigenschap $a^2 = 5b^2$. Volgens het principe van de oneindige afdaling zijn er geen gehele getallen die voldoen aan $A^2 = 5B^2$.

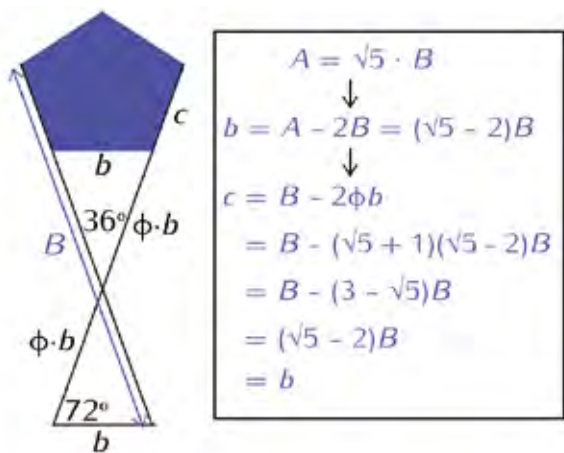
Het guldensnede-getal geeft opheldering

Ik ben de lezer nog het bewijs schuldig dat de vijf kleinste vijfhoekjes regelmatig zijn. Eerst merk ik op dat de basishoeken van de witte driehoekjes elk gelijk zijn aan $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Van zo'n driehoek is de opstaande zijde gelijk aan het guldensnede-getal ($= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$) maal de basis. Waarom ook alweer? Kijk naar figuur 4.



figuur 4

Zie nu verder figuur 5. Als $b = c$, dan is de donkerblauwe vijfhoek zeker regelmatig. Het bewijs dat dit inderdaad het geval is, staat in het kader naast de afbeelding.



figuur 5

Pell-benaderingen

In plaats van ' $\sqrt{5}$ is irrationaal' kun je ook zeggen dat de vergelijking $x^2 - 5y^2 = 0$ geen gehele oplossingen heeft. Ik noem een breuk met teller x en noemer y een *Pell-benadering* van $\sqrt{5}$ als x en y voldoen aan één van beide zogeheten *Pellvergelijkingen* $x^2 - 5y^2 = \pm 1$. $2\frac{1}{4}$, de eerstgenoemde benadering in dit artikel, is een Pell-benadering van $\sqrt{5}$, want $9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$.

Dat een Pell-benadering des te nauwkeuriger is naarmate x en y groter zijn, volgt uit

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 = \pm \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

In het regelmatige-vijfhoeken-verhaal is uit het paar (A, B) het kleinere paar (a, b) afgeleid. Omgekeerd volgt uit $(a, b) = (5B - 2A, A - 2B)$ dat $(A, B) = (2a + 5b, a + 2b)$, dat is dan een (lineaire) transformatie van klein naar groot. Ik begin nu met kleinste paar, namelijk $(2, 1)$ dat voldoet aan $x^2 - 5y^2 = \pm 1$ en pas de van-klein-naar-groot-transformatie herhaald toe. Er komt:
 $(2, 1) \rightarrow (9, 4) \rightarrow (38, 17) \rightarrow (161, 72) \rightarrow \dots$
 De opletende lezer zal deze getallen herkennen als tellers en noemers van de eerder genoemde kettingbreuken. Dat al deze en de daaropvolgende getallenparen beurtelings oplossingen zijn van $x^2 - 5y^2 = 1$ en $x^2 - 5y^2 = -1$ volgt uit de identiteit:
 $(2a + 5b)^2 - 5(a + 2b)^2 = -(a^2 - 5b^2)$

Het feit dat het eerste paar $(2, 1)$ voldoet aan $x^2 - 5y^2 = \pm 1$, garandeert dat alle volgende paren in de ketting waarvan hierboven een begin is gemaakt, dit ook doen! En dat de breuken die overeenkomen met die getallenparen als het ware rondom $\sqrt{5}$ dansen, is nu ook aangetoond. Uit

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 = \pm \left(\frac{1}{y}\right)^2$$

volgt dan nog dat die breuken onbeperkt dicht bij $\sqrt{5}$ komen.

Noten

- [1] Zie: Grootendorst, A. (2006). Enkele aspecten van de wiskunde in de Griekse Oudheid. In M. Keestra (Red.), *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*. Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds.
- [2] Kindt, M. (2006). Breuken op de helling (2). *Euclides*, 90(6).
- [3] Kindt, M. & Lemmens, P. (2011). *Ontwikkelen met kettingbreuken*. Zebra 33. Amsterdam: Epsilon.
- [4] In 1659 schreef Fermat aan Huygens dat hij een bijzondere methode had ontdekt.
- [5] Dit idee vond ik in het artikel 'Irrationality from the Book' van Steve J. Miller en David Montague (2010).

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

NATUURLIJKE GETALLEN, DIE ZIJN PAS ECHT!

Martin Kindt

Volgens overlevering gebruikten de Pythagoreeërs stippenpatronen om natuurlijke getallen te presenteren, bijvoorbeeld bij de 'driehoeksgetallen'. Zulke patronen die later door allerlei wiskundigen zijn gebruikt, kunnen een natuurlijke uitdaging zijn bij het leren van en oefenen met algebra.

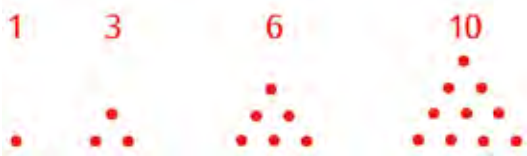
Een artikel van Krooshof

De kop boven dit artikel ontleen ik aan een uitspraak van de schatrijke Amerikaanse wiskundige, bankier en filantroop Jim Simons, die overstapte van de wereld van de wiskunde naar de wereld van het geld. Toen hij die stap had gezet, werd hem gevraagd hoe het voelt om nu in 'de echte wereld' te zijn. Zijn antwoord was dat de wiskunde-wereld hem heel wat echter leek dan de zakenwereld. *De natuurlijke getallen, die zijn pas echt! Als je een stelling bewijst dan heb je iets concreets gedaan, waar geen enkele zakelijke onderneming het wat echtheid betreft tegen kan opnemen.*^[1]

Dat de natuurlijke getallen voor leerlingen een concrete wereld vormen, zal niemand ontkennen. Dat zij aanvankelijk in algebraonderwijs een belangrijke rol zouden moeten spelen, staat voor mij als een paal boven water. Dit idee is verre van nieuw. Gerrit Krooshof (1909 - 1980) schreef hierover in 1950 in *Euclides* het artikel 'De eerste algebralessen'^[2]. Hij begint daarin met het noemen van vier uitgangspunten:

1. Sluit aan bij het gewone rekenen van de lagere school.
2. Laat toch de algebra volkomen nieuw zijn.
3. Geef de leerlingen iets, waarmee ze direct zelf kunnen werken.
4. Laat de leerlingen van het begin af merken dat wetenschappelijk denken een kritische houding eist, die niets vanzelfsprekend vindt.

Krooshof begint de eerste algebrales met het noemen van 'enkele historische bijzonderheden'. Zo komt hij al snel bij de getallenleer en getallenmystiek van de 'school van Pythagoras' en bij de 'driehoeksgetallen', zie figuur 1.



figuur 1

Via de verschillen van de rij 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... , dus 2, 3, 4, 5, 6, ... worden enkele volgende driehoeksgetallen bepaald. Dan – de lezer kan het raden – volgt de vraag naar een veel verder gelegen driehoeksgetal, dat met rangnummer 50. Om de rekenklus het hoofd te bieden komt de volgende formule op het bord:

$$\frac{1}{2} \times n \times (n+1)$$

en Krooshof laat zien hoe substitutie van $n = 1, 2, 3, \dots$ de driehoeksgetallen oplevert. Volledige intimidatie, denk ik dan. De rol van de variabele n komt zo wel over het voetlicht, maar deze aanpak bevordert toch het 'uit-de-hoge-hoed'-imago van wiskunde?! Krooshof schetst in zijn artikel hoe het verdergaat met vierhoeksgetallen (kwadraten) en vijfhoeksgetallen, waarbij de formules $n \times n$ en $\frac{1}{2} \times n \times (3n-1)$ opduiken.

Stippenpatronen

Het idee van Krooshof om algebraonderwijs te starten met stippenpatronen en bijpassende formules was helemaal niet gek. En hij wilde het meteen spannend maken door met driehoeksgetallen te beginnen, ook goed. Maar dan zou je toch verwachten dat zo'n stippenpatroon gebruikt wordt voor de ontdekking van de formule. Ik neem maar eens het driehoeksgetal 21, waar natuurlijk ook elk van deze patronen bij passen, zie figuur 2.

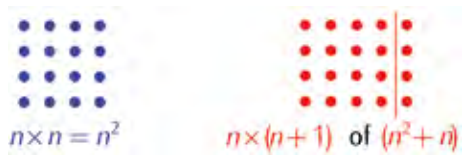


figuur 2

Dat deze patronen zich laten verenigen tot een rechthoek van 6×7 stippen is gemakkelijk te zien. Het zesde driehoeksgetal is daarom dan ook te schrijven als

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (6+1): \text{een eerste opmaat naar de formule!}$$

Na nog wat grotere voorbeelden kan – generalisatie! – worden doorgestoten naar de vorm met het symbool n . Intussen kan er ook aandacht zijn voor de ‘rechthoeksgetallen’ (producten van twee opeenvolgende natuurlijke getallen en daarom altijd even!) en de vierkantsgetallen (kwadraten) met passende formules, zie figuur 3.



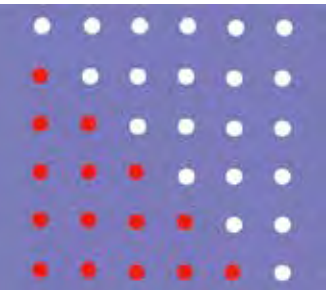
figuur 3

Over kwadraten gesproken: herkennen leerlingen nog dat bijvoorbeeld 144 het kwadraat van 12 is? Het gros niet, ben ik bang, maar jammer is dat wel. Ik wil niet propaganderen dat je, net als ik vroeger, alle kwadraten tot en met 900 uit het hoofd moet weten, maar het kunnen herkennen van een aantal kleine kwadraten is toch wel handig. Kijk eens naar de rij driehoeksgetallen in figuur 4:



figuur 4

Is de som van *elk* paar opeenvolgende driehoeksgetallen een kwadraat? Via een computer kun je zoveel gevallen doorrekenen als je maar wilt, maar zekerheid geeft dat niet.



figuur 5

De afbeelding in figuur 5 doet dat wel, want het staat model voor alle mogelijke sommen van twee opeenvolgende driehoeksgetallen en overtuigt absoluut. Een formulebewijs van de gesignaleerde eigenschap van de rij driehoeksgetallen ziet er zo uit:

$$\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = n^2$$

Overtuigt dit meer dan het stippenpatroonbewijs? Ik denk van niet, maar in het kader van zinvol oefenen met algebra, zou ik het wel mooi vinden om leerlingen dit op zeker moment te laten uitvoeren.

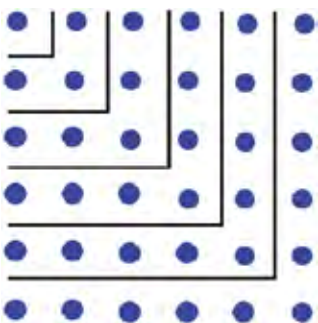
Alleen al het vervangen van n in de formule door $n - 1$ is leerzaam. En misschien is er wel een leerling die

$$\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

voorstelt, en dan is de uitwerking nog wat spannender. Algebra oefenen aan de hand van ‘getaltheoretische’ eigenschappen, ik beveel het warm aan.

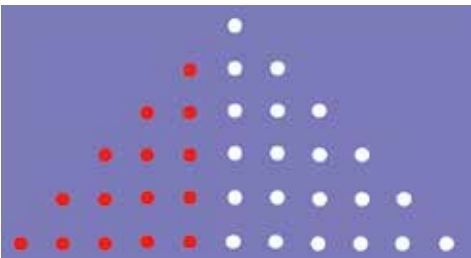
Partiële sommen van oneven getallen

Hieronder versta ik sommen van ‘deelrijtjes’ (series opeenvolgende termen) van de rij 1, 3, 5, 7, 9, 11, Als zo’n deelrijtje begint met 1, krijg je als uitkomst van de partiële som altijd een kwadraat. Kijk maar naar figuur 6:



figuur 6

Je kunt dit leerlingen zelf laten ontdekken: eerst maar eens gewoon rekenen, zo ontstaat een vermoeden, dan een plaatjesbewijs met stippen of vierkantjes, zoals in figuur 6. Voor hen die de ‘stelling’ van de som van twee opeenvolgende driehoeksgetallen kennen kan het ook via het patroon in figuur 7.



figuur 7

In serieuze wiskundeboeken bewijst men deze eigenschap met volledige inductie, maar dat is meer iets voor de bovenbouw van het vwo, zeg bij wiskunde D. Als je toch op de formele toer wilt, zijn er nog andere wegen. Een aardige mogelijkheid is om eerst de even getallen tussen te voegen en dan twee keer de formule voor de driehoeksgetallen toe te passen:

$$1+2+3+\dots+(2n-1)+2n=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)$$

$$2+4+6+\dots+2n=2\cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

Het verschil van de twee uitkomsten is nu:
 $n(2n+1) - n(n+1) = n \cdot n = n^2$
 Voor beginners in algebra gaat dit misschien wat ver.
 Maar ik ga nog een stapje verder en vervang kwadraten door hogere machten. Een paar voorbeelden:

$$\begin{aligned}
 7^5 &= 7 \times 7^4 = 7 \times 343 \\
 &= 337 + 339 + 341 + 343 + 345 + 347 + 349 \\
 6^5 &= 6 \times 6^4 = 6 \times 1296 \\
 &= 1291 + 1293 + 1295 + 1297 + 1299 + 1301
 \end{aligned}$$

Deze voorbeelden doen vermoeden dat elke natuurlijke macht van een natuurlijk getal gelijk is aan een partiële som van de rij oneven getallen, met het **aantal** termen gelijk aan het **grondtal** van de macht. En als je nog wat dieper nadenkt, kun je wel begrijpen dat dit vermoeden waar is. De omgekeerde stelling is natuurlijk niet waar. Bekijk maar het volgende rijtje:

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + 5 &= 3^2 \\
 7 + 9 + 11 &= 3^3 \\
 25 + 27 + 29 &= 3^4 \\
 79 + 81 + 83 &= 3^5 \\
 241 + 243 + 245 &= 3^6
 \end{aligned}$$

Alleen speciale partiële sommen met drie termen, namelijk die met een macht van 3 in het midden hebben als som een macht van 3.

$$(3^k - 2) + 3^k + (3^k + 2) = 3^{k+1} \quad (k=1,2,3,\dots)$$

Bij een macht van een even getal zijn er twee middelste termen, bijvoorbeeld:

$$(4^k - 3) + (4^k - 1) + (4^k + 1) + (4^k + 3) = 4^{k+1} \quad (k=1,2,3,\dots)$$

Het idee dat natuurlijke machten gelijk zijn aan partiële sommen van de rij oneven getallen, leidt tot een bewijs van één van de leukste formules in de wereld van de natuurlijke getallen, namelijk:

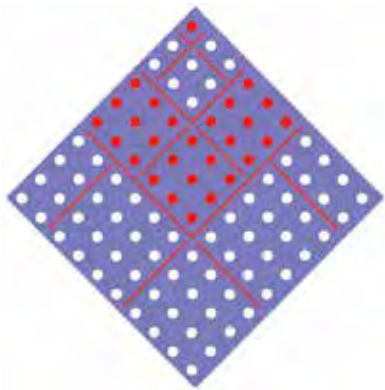
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

Ik kijk naar het geval $n = 5$:

$$\begin{aligned}
 1^3 &= 1 \\
 2^3 &= 3 + 5 \\
 3^3 &= 7 + 9 + 11 \\
 4^3 &= 13 + 15 + 17 + 19 \\
 5^3 &= 21 + 23 + 25 + 27 + 29
 \end{aligned}$$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ is zichtbaar gelijk aan de som van de eerste $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ oneven getallen en die is gelijk aan het kwadraat van $1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Klaar? Nog niet helemaal, want je kunt je afvragen waarom de partiële sommen bij de opvolgende derdemachten zo mooi op elkaar aansluiten. Algebra biedt zekerheid: de partiële som bij n^3 begint met $n^2 - (n - 1) = n^2 - n + 1$ en stopt bij $n^2 + (n - 1)$.

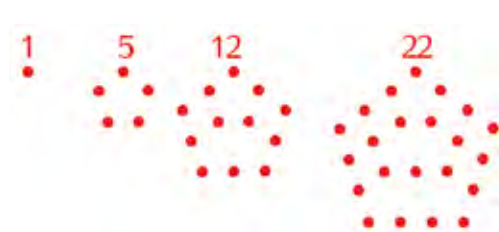
Vervanging van n door $n - 1$ in deze laatste vorm levert de eindterm van de partiële som bij $(n - 1)^3$ en dat is dan $(n - 1)^2 + (n - 2)$ ofwel $n^2 - n - 1$. En ja, dat is in de rij oneven getallen de voorganger van $n^2 - n + 1$. Er zijn ook mooie ‘kijk-en-zie-bewijzen’ voor deze merkwaardige identiteit, zie bijvoorbeeld figuur 8.^[3]



figuur 8

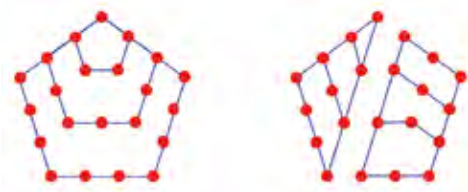
Veelhoeksgetallen

Ik keer even terug naar het artikel van Gerrit Krooshof. Daarin staat een plaatje van de eerste drie vijfhoeksgetallen, waaraan ik het vierde heb toegevoegd, zie figuur 9.



figuur 9

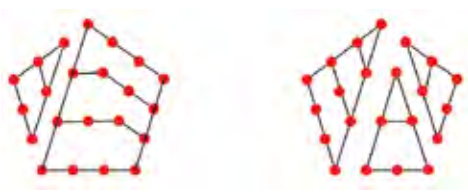
Met lijntjes kun je de structuur beter zichtbaar maken en bijvoorbeeld ontdekken dat zo’n getal de som is van een driehoeksgetal en een rechthoeksgetal, zie figuur 10.



figuur 10

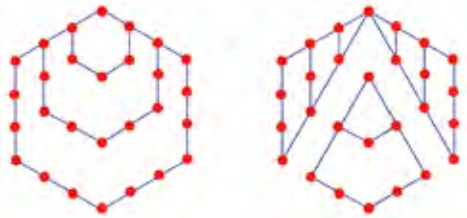
Zo kan Krooshofs formule $\frac{1}{2} \times n \times (3n - 1)$ worden begrepen via de som $\frac{1}{2}n(n + 1) + (n - 1)n$.

Er zijn ook andere strategieën mogelijk, zie figuur 11:



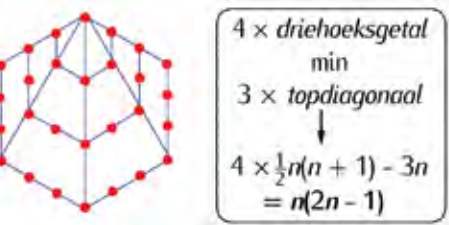
figuur 11

Ook deze verdelingen leiden tot Krooshofs formule. Er bestaan ook zeshoeksgetallen, zoals in figuur 12. Het rechter plaatje – twee driehoeksgetallen (met overlap van één stip) en een patroon van opvolgende oneven getallen – helpt bij het vinden van een formule.



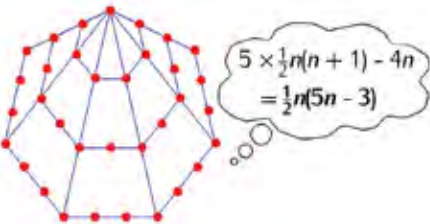
figuur 12

Dit leidt tot: $2 \times \frac{1}{2}n(n+1) - 1 + (n-1)^2 = n(2n-1)$. Een algemenere aanpak is via de drie ‘topdiagonalen’, zie figuur 13.



figuur 13

Deze aanpak laat zich ook toepassen bij ‘m-hoeksgetallen, met $m = 7, 8, 9, \dots$. Bijvoorbeeld voor zevenhoeksgetallen, zie figuur 14:



figuur 14

Uit het algebraboek van Euler

Leonard Euler (1707-1783) liet, nadat hij op 59-jarige leeftijd na een mislukte staaroperatie volledig blind werd, zijn wiskundige gedachten opschrijven door zijn bediende. Omdat die geen wiskundige scholing had ontvangen, dicteerde Euler hem een ‘Vollständige Einleitung zur Algebra’. In dit boek is een lijst met formules te vinden die kunnen worden geverifieerd met de zojuist besproken diagonaalmethode.

3-hoek	$\frac{n(n+1)}{2}$	9-hoek	$\frac{n(7n-5)}{2}$
4-hoek	n^2	10-hoek	$n(4n-3)$
5-hoek	$\frac{n(3n-1)}{2}$	11-hoek	$\frac{n(9n-7)}{2}$
6-hoek	$n(2n-1)$	12-hoek	$n(5n-4)$
7-hoek	$\frac{n(5n-3)}{2}$	20-hoek	$n(9n-8)$
8-hoek	$n(3n-2)$	25-hoek	$\frac{n(23n-21)}{2}$

Het patroon in het rijtje formules wordt zichtbaar door alle formules te schrijven als breuk met noemer 2. Euler gaf ook de algemene formule voor de m -hoek:

$$\frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$$

Deze kan worden gevonden door het ‘ m -hoeksgetal met rangnummer n ’ te bepalen via het aantal stippen in de $m - 2$ deeldriehoeken, minus het aantal stippen op de $m - 3$ diagonalen, dus via:

$$(m-2)\frac{1}{2}n(n+1) - (m-3)n$$

Euler vond zijn formules niet op deze wijze, maar met de somformule van de rekenkundige rij. Als voorbeeld neem ik de zevenhoek. De ‘groei-aantallen’ 1, 6, 11, 16, ... van de stippen per ‘verdieping’ vormen een rekenkundige rij. Op de n -de verdieping bevinden zich $1 + 5(n - 1) = 5n - 4$ nieuwe stippen. De som van de eerste n termen van de rij groei-aantallen is gelijk aan:

$$\frac{1}{2}n(1+5n-4) = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Koningin van de wiskunde

Gauss, een andere wiskundige van de buitencategorie, heeft ooit de getaltheorie gekroond tot ‘koningin van de wiskunde’. Wat je hier ook van vindt, feit is dat veel getaltheoretische stellingen, even toegankelijk als ontoegankelijk zijn, iets wat ook wel bij koninginnen voorkomt. De portee van bijvoorbeeld: ‘*ieder natuurlijk getal is de som van ten hoogste drie driehoeksgetallen*’ is direct te begrijpen, maar Gauss heeft alle zeilen bij moeten zetten om dit te bewijzen. Daarvan getuigt zijn triomfantelijke notitie:

Eureka!
Num = Δ + Δ + Δ

Dat ‘ten hoogste’ kun je weglaten als je 0 ook als driehoeksgetal wilt zien. Die stelling van Gauss is gelijkwaardig met: ‘ieder 8-voud + 3 is de som van drie oneven kwadraten.’ Kijk maar:

$$\begin{aligned} 8n + 3 &= (2a+ 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 \\ &= 4(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 3 \end{aligned}$$



$$n = \frac{1}{2} a(a + 1) + \frac{1}{2} b(b + 1) + \frac{1}{2} c(c + 1)$$

Elementaire algebra dus! Op dergelijke wijze kun je ook aantonen dat twee even kwadraten en één oneven kwadraat nooit een 8-voud + 3 opleveren en ook dat je met minder dan drie kwadraten niet kunt toekomen. Gauss had voor deze drie-kwadraten-stelling stevige getaltheorie nodig. Euler bewees eerder met elementaire (niet hetzelfde als eenvoudige!) algebra, dat elk natuurlijk getal de som van ten hoogste vier kwadraten is. Uit $7 = 1 + 1 + 1 + 4$, volgt dat het met minder dan vier niet altijd lukt. Drie 3-hoeksgetallen, vier 4-hoeksgetallen, gaat dit zo door? Als je natuurlijke getallen als de som van 5-hoeksgetallen wilt schrijven, zul je er soms vijf nodig hebben. Kijk naar: $9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 5$. En van de m -hoeksgetallen heb je ten hoogste m nodig om een natuurlijk getal als som te schrijven. Een getal waar je zeker niet met minder toekomt is:

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ keer}} + (m - 1) = 2m - 1$$

Cauchy heeft als eerste bewezen dat je er nooit méér dan m nodig hebt. Kortom: het aantal m -hoeksgetallen waarin je een natuurlijk getal kunt splitsen is ten hoogste gelijk aan m .

En over de drie-kwadratenstelling gesproken. We leven nu in 2019 en dat is een 8-voud + 3. En ja, als ik met $[a, b, c]$ bedoel $a^2 + b^2 + c^2$, dan geldt:
 $2019 = [1, 13, 43] = [5, 25, 37] = [7, 11, 43] = [7, 17, 41]$
 $= [11, 23, 37] = [13, 13, 41] = [13, 25, 35] = [17, 19, 37]$
 $= [23, 23, 31]$.

Tot slot van mijn pleidooi ‘doe meer met natuurlijke getallen’ een uitspraak van de bekende Engelse wiskundige Ian Stewart: ‘*A natural number is an idea that has long ago been ‘thingified’ so thoroughly that everybody thinks of it as a thing.*’^[4]

Noten

[1] Uit de mooie oratie van H.W. Lenstra (2000). *Aeternitatem Cogita*. Leiden. In het *NRC Handelsblad* stond in november 2018 een stukje onder de kop ‘Een blij leraar wiskunde is beter’. Pia de Jong deed daarin verslag van het jaarlijkse gala van ‘Math for America’ in New York waar zo’n duizend leraren voor waren geselecteerd. ‘Math for America’, opgericht en gefinancierd door Jim Simons, stimuleert leraren in exacte vakken onder meer door het toekennen van beurzen.

[2] Krooshof, G. (1950). De eerste algebralessen, *Euclides*, 25(3), pp. 164-168.

[3] Kindt, M. (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[4] Stewart, I., (1995). *Nature’s number’s. the unreal reality of mathematical imagination*. New York: Basic Books.

‘DOE MEER MET
NATUURLIJKE GETALLEN!’

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

DE TWEE-VLIEGEN-IN-ÉÉN-KLAP-KROMME

Martin Kindt

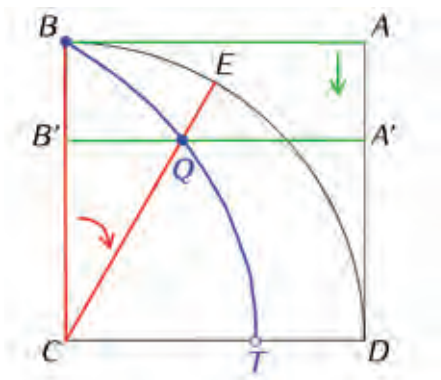
Griekse wiskundigen in de Oudheid vonden allerlei krommen uit, geïnspireerd als ze waren door de drie klassieke constructieproblemen: de trisectie van de hoek, de kwadratuur van de cirkel en de verdubbeling van de kubus. Eén van die krommen, de zogeheten *kwadratrix*, blijkt een dubbelrol te spelen.

De kwadratrix van Hippias^[1]

Kwadratrix zou zo maar een figuur in een van de geestige stripboeken van Goscinny kunnen zijn. En misschien treedt daar ergens wel een Galliër met die naam op. De kwadratrix in dit artikel heeft niets met Asterix en Obelix te maken, maar is een figuur bedacht door de Griek Hippias (460 v.Chr. – 400 v.Chr.). Het is een kromme die in eerste instantie is ontworpen om een willekeurige hoek in drie gelijke delen te kunnen verdelen, maar die meer noten op haar zang blijkt te hebben. Zeven eeuwen later schrijft Pappos (290 – 350) dat ook Dinostratos (390 v.Chr. – 320 v.Chr.) en Nicomedes (280 v.Chr. – 210 v.Chr.) de kwadratrix kenden. Zij gebruikten die dan voor de kwadratuur van de cirkel en dat verklaart haar naam. Pappos definieert de kwadratrix aldus, zie figuur 1.

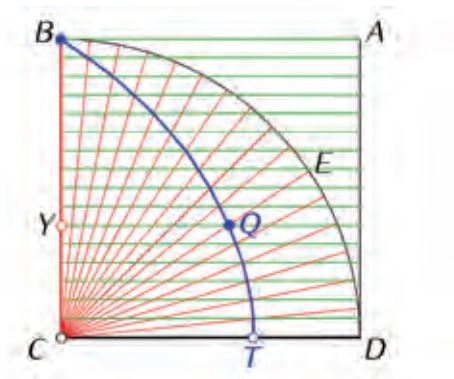
Laat ABCD een vierkant en BED een cirkelboog met middelpunt C en straal CB zijn. Laat lijnstuk CB eenparig om C draaien, zodat B de cirkelboog BED doorloopt en laat lijnstuk BA simultaan (en ook eenparig) verticaal naar beneden schuiven.

Laat beide bewegingen in dezelfde tijd voltooid zijn, zo dat CB en BA op hetzelfde ogenblik met CD samenvallen. De meetkundige plaats van de snijpunten Q van de twee bewegende lijnstukken is een kromme (in figuur 1 blauw) die de kwadratrix wordt genoemd.



figuur 1

De eenparigheid van beide bewegingen houdt in dat steeds geldt: $BB' : BC = BE : bg BD$.^[2] In figuur 2 is te zien hoe via een serie van zestien snijpunten de kwadratrix is getekend.



figuur 2

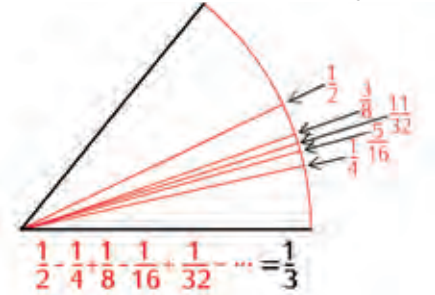
Bisectie en trisectie

Uit het bouwvoorschrift van de kwadratrix volgt dat de kromme kan worden gebruikt om een gegeven scherpe hoek ECD te verdelen in drie gelijke parten. Teken de lijn door het snijpunt Q van CE met de kwadratrix evenwijdig aan CD en bepaal het snijpunt Y van deze lijn met CB. Verdeel dan YC in drie gelijke stukken en trek door de deelpunten lijnen evenwijdig aan CD en via de snijpunten met de kwadratrix kan de trisectie van hoek ECD worden voltooid.

Pappos vermeldt dat Sporos (240 – 300) ernstige kritiek had op de definitie van de kwadratrix en zich afvroeg hoe het mogelijk is om de twee simultaan uitgevoerde bewegingen te definiëren zonder de verhouding van de lengte van BC en boog BD te kennen? En dan: hoe zou je het lijnstuk BC en de boog BD in stukken kunnen verdelen met dezelfde verhouding (rationaal of irrationaal)?

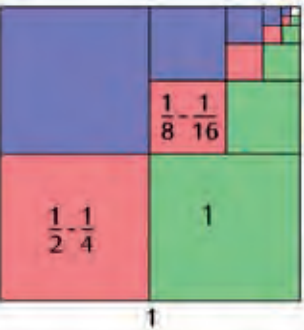
Het komt er in de praktijk op neer dat je voor het tekenen van de kwadratrix de rechte hoek BCD in een groot aantal gelijke delen moet zien te verdelen en om dan die kwadratrix te gebruiken voor de trisectie van een hoek,

dat ruikt toch naar boerenbedrog! Van der Waerden^[3] schrijft dat Sporos' kritiek wel ten dele terecht is, maar dat de kromme *theoretisch* wel bepaald is en dat de *praktische* 'constructie' kan plaatsvinden door hoeken stapsgewijs te halveren. In figuur 2 is dat zo gebeurd (via zestien standen van de draaiende lijn) en dat maakt een benaderingstrisectie van een of andere scherpe hoek wel acceptabel. Maar stap voor stap halveren kan ook rechtstreeks worden toegepast op een willekeurige hoek! Na vijf bisecties is in figuur 3 een hoek getekend die $\frac{11}{32}$ van de gegeven hoek is.



figuur 3

Dat de *limietsom* van de alternerende rij breuken gelijk is aan $\frac{1}{3}$ kan op diverse manieren plausibel worden gemaakt. Een anschouwelijk 'bewijs' zie je in figuur 4. De (oneindige) sommen van de rode, blauwe en groene vierkanten zijn aan elkaar gelijk.



figuur 4

De kwadratrix op het scherm

Een aardige opdracht bij wiskunde B kan zijn om de leerlingen de definitie van de kwadratrix voor te leggen zoals Pappos die gaf en dan te vragen om die kromme met de grafische rekenmachine of met GeoGebra te produceren. Dat is dan een uitdaging om de meetkundige beschrijving te vertalen naar een parametervoorstelling. Bijvoorbeeld zó.

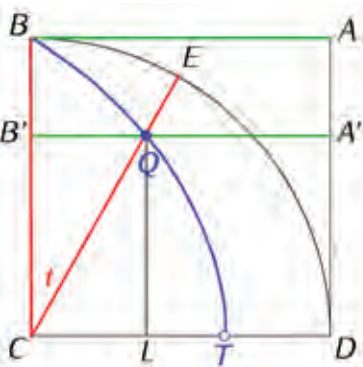
Beschouw $ABCD$ als eenheidsvierkant, zodat geldt: $bg\ BD = \frac{1}{2}\pi$, zie figuur 5.

Om de kwadratrix volgens Pappos' beschrijving van boven naar beneden te laten tekenen kun je stellen $\angle BCE = t$. De verhouding van de booglengten van BE en BD is dan gelijk aan $t : \frac{1}{2}\pi$ ofwel $2t : \pi$ en hieruit volgt dan $y = B'C = 1 - 2t/\pi$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$

$x = B'Q = ((1 - 2t/\pi) \cdot \tan(t))$

Zo is een parametervoorstelling van de kwadratrix gevonden en de machine kan zijn werk doen.



figuur 5

Het 'limietpunt' T op de x -as wordt niet bereikt, want $\tan(t)$ is niet gedefinieerd voor $t = \frac{1}{2}\pi$. Uit de parametervoorstelling kan de x -coördinaat van T worden berekend via een limiet:

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} (1 - 2t/\pi) \tan(t) =$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{2/\pi \cdot (\pi/2 - t)}{\tan(\pi/2 - t)} = 2/\pi$$

Het rekenwerk ziet er wat vriendelijker uit als je stelt $\angle ECD = t$, en dat leidt tot deze parametervoorstelling:

$$x = 2/\pi \cdot \frac{t}{\tan(t)}$$

$$0 < t < \frac{1}{2}\pi$$

$$y = 2/\pi \cdot t$$

Via deze formules wordt de kwadratrix van onder naar boven op het scherm getekend, waarbij dan een klein stukje boven de x -as wordt gestart.

De kwadratrix kan ook goed worden geproduceerd via een vergelijking in poolcoördinaten. Stel $CQ = r$ en $\angle ECD = \theta$, dan $QL = 2\theta/\pi$ en vervolgens $r = 2\theta/(\pi \sin(\theta))$

De afstand CT wordt nu gevonden uit

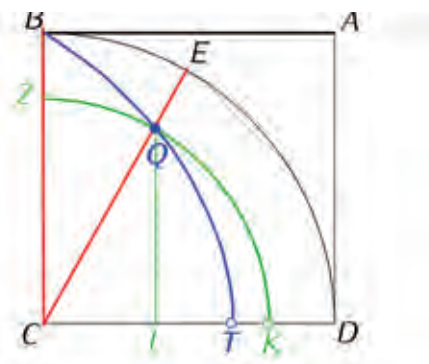
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \lim_{\theta \rightarrow 0} 2\theta/(\pi \sin(\theta)) = 2/\pi$$

Het optreden van π in de limiet verklaart waarom de kwadratrix in verband werd gebracht met de kwadratuur van de cirkel. Maar hoe konden de Grieken dit snappen zonder een limietberekening met goniometrische functies?

Het bewijs van Pappos

De Grieken waren meesters in het hanteren van 'reductio ad absurdum' (bewijs uit het ongerijmde) en Pappos^[4] hanteert dit op fraaie wijze om aan te tonen dat CT de lengte $2/\pi$ heeft. Hij poneert de stelling dat *boog BED en lijnstuk BC zich verhouden als de lijnstukken BC en CT*.

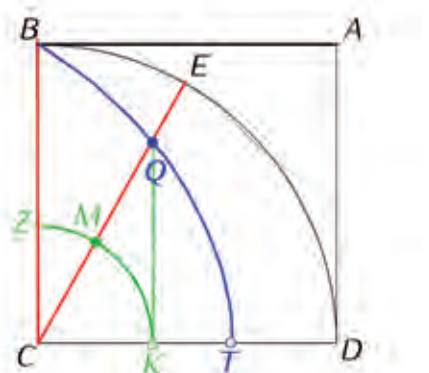
Dit komt op hetzelfde neer als $CT = 2/\pi$.
Pappos stelt dat er ergens op CD een punt K moet liggen zodat $bg\ BED : BC = CD : CK = BC : CK$
Dan laat hij langs meetkundige weg zien dat CK *niet groter én niet kleiner* kan zijn dan CT , zodat K wel moet samenvallen met T .
(A) Stel eerst $CK > CT$, zie figuur 6.



figuur 6

Beschouw de kwartcirkelboog ZQK met middelpunt C . Die boog snijdt de kwadratrix in Q .
Als gezegd geldt:
 $bg\ BED : BC = BC : CK$ (1)
Maar ook:
 $bg\ BED : bg\ ZQK = BC : CK$ (2)
want de booglengten van twee kwartcirkels verhouden zich als hun stralen. Uit (1) en (2) volgt nu:
 $bg\ ZQK = BC$ (3)
Uit de definitie van de kwadratrix volgt
 $bg\ BED : bg\ ED = BC : QL$ (4)
Ook geldt:
 $bg\ BED : bg\ ED = bg\ ZQK : bg\ QK$ (5)
Uit (3), (4) en (5) volgt dan:
 $bg\ QK = QL$
wat absurd is.
Dus is CK niet groter dan CT .

(B) Stel nu $CK < CT$, zie figuur 7.
De kwartcirkel met middelpunt C en straal CK ligt nu geheel onder de kwadratrix (zie figuur 7).



figuur 7

De verticale lijn door K snijdt de kwadratrix in Q en de kwartcirkel met middelpunt C en straal CK snijdt CQ in M .
Net zo als in bewijs (A) volgt:
 $bg\ ZMK = BC$ (6)
Verder geldt:
 $bg\ BED : bg\ ED = bg\ ZMK : bg\ MK$ (7)
Uit de definitie van de kwadratrix volgt:
 $bg\ BED : bg\ ED = BC : QK$ (8)
Uit (6), (7) en (8) volgt dan:
 $bg\ MK = QK$
en ook dit noemt Pappos absurd.

Ik vergelijk nog even de twee absurditeiten van Pappos en stel $\angle ECK = \varphi$ en $CK = r$.
In de situatie van figuur 6 geldt: $bg\ QK = r \cdot \varphi$ en $QL = r \cdot \sin(\varphi)$. Voor $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ geldt $\varphi > \sin(\varphi)$, dus $bg\ QK > QL$.
In figuur 7 geldt: $bg\ MK = r \cdot \varphi$ en $QK = r \cdot \tan(\varphi)$.
Uit $\varphi < \tan(\varphi)$ voor $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ volgt $bg\ MK < QK$.
 $\varphi > \sin(\varphi)$ en $\varphi < \tan(\varphi)$ zijn respectievelijk equivalent met opp. sector $CQK > opp. CQL$, zie figuur 6, en opp. sector $CMK < opp. CGK$, zie figuur 7. Dit was voor Pappos natuurlijk gesneden koek!

Pappos sluit zijn verhaal af met de opmerking dat het nu duidelijk is dat de derde evenredige bij de lijnstukken CT en CB dezelfde lengte heeft als de kwartcirkel BED zodat vier keer dit lijnstuk gelijk is aan de omtrek van de gehele cirkel.
En ja, noem ik die derde evenredige a , dan bedoelt hij dat uit $CT : CB = CB : a$ volgt $a = bg\ BED$ zodat $4a = 2\pi$. Pappos beroept zich op Archimedes wanneer hij zegt dat met een lijnstuk gelijk aan de omtrek van een cirkel eenvoudig een vierkant kan worden geconstrueerd met een oppervlakte gelijk aan die van de cirkel. En dat heet dan ‘de kwadratuur van de cirkel’.

Noten

- [1] Jeanine Daems schreef eerder een mooi artikel over de kwadratrix (*Pythagoras*, februari 2017).
- [2] Met bg wordt hier booglengte bedoeld (de internationale aanduiding is arc).
- [3] Van der Waerden B.L. (1950). *Ontwakende Wetenschap*. Groningen: P. Noordhoff N.V.
- [4] Thomas, I. (1991). *Greek Mathematical Works I, Thales to Euclid*, Loeb Classical Library. Harvard: Harvard University Press.

Over de auteur

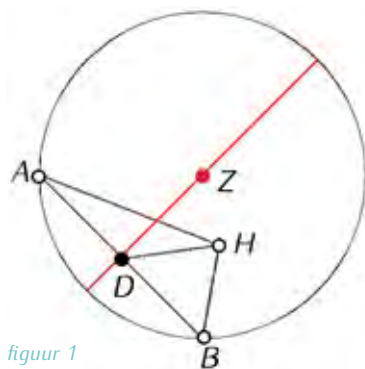
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Machtige Meetkunde (1)

De wiskundige term ‘macht’ kennen we niet alleen in de rekenkunde of algebra. Ook in de meetkunde behoort de term ‘macht’ tot de vaktaal. Zo’n halve eeuw geleden kon je dit begrip nog in de schoolboeken voor de middenbouw tegenkomen, en wie weet komt het ooit weer eens terug. Want met leerplannen weet je het maar nooit.

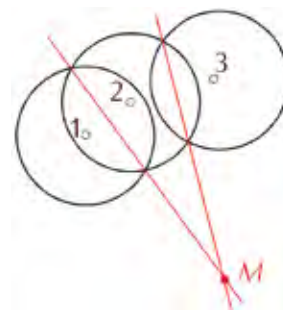
Euclides in zijn Element(en)

Boek III van *De Elementen* van Euclides behandelt de cirkel. Na een lijst van elf definities, onder andere van het begrip raaklijn, komt de eerste propositie in de vorm van een constructieopdracht: ‘Bij een gegeven cirkel het middelpunt te vinden’. De oplossing van Euclides is zó: teken een willekeurige koorde (AB), verdeel die in twee gelijke stukken, richt in het midden de loodlijn op die koorde op, construeer dan het midden van het lijnstuk dat de cirkel van die loodlijn afsnijdt en je hebt het middelpunt Z . Zie figuur 1.



figuur 1

Euclides bewijst uit het ongerijmde dat een punt H buiten de middelloodlijn van AB niet het middelpunt kan zijn. Deze gedachtegang is later in de schoolboeken tevoorschijn gekomen in het bewijs dat de middelloodlijn van een lijnstuk AB de meetkundige plaats (locus) is van de punten in het vlak die even ver van A en B afliggen. Met als belangrijk gevolg: *door drie punten die niet op één lijn liggen gaat precies één cirkel*. Dat stond vroeger in elk meetkundeboek en het was een fraaie toepassing van het principe dat door Polya werd aangeduid als dat van ‘the two loci’ [1]. Dat het er niet toe doet hoe dichtbij of hoe ver uit elkaar de drie punten liggen, stond niet in het boek, waarom ook, maar was voor de leraar wel leuk om erbij te vertellen.



figuur 2

Figuur 2 toont de bijpassende constructie van het middelpunt van de cirkel die door 1, 2 en 3 gaat. De rode lijnen zijn niet parallel omdat de punten 1, 2 en 3 niet collineair zijn!

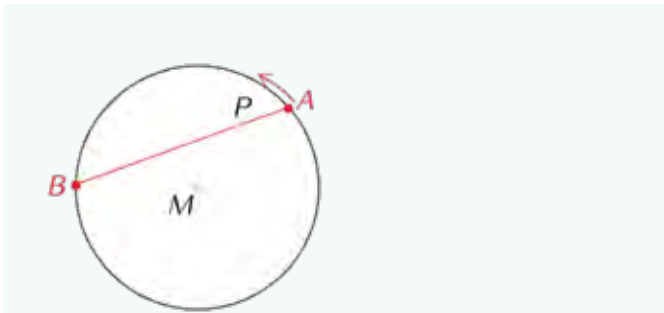
Het kan ook analytisch

De analytische meetkunde is terug van weggeweest in havo en vwo. Een cirkel wordt daarin gerepresenteerd door een vergelijking, bijvoorbeeld van de vorm $x^2 + y^2 = Ax + By + C$. Een kwestie van de stelling van Pythagoras en een beetje algebra. De drie onafhankelijke parameters vertellen dat een cirkel bepaald is door ten minste drie punten, zeg (x_1, y_1) , (x_2, y_2) en (x_3, y_3) . Substitutie in bovenstaande vergelijking leidt immers tot een stelsel van drie eerstegraadsvergelijkingen met drie onbekenden (A, B, C) en daarbij kun je dan één oplossing verwachten, mits het stelsel onafhankelijk is! Het niet-collineair zijn van de drie punten blijkt hiervoor garant te staan. Op school worden stelsels van drie vergelijkingen niet meer systematisch behandeld, dus deze redenering zal de huidige leerling misschien niet aanspreken. Een vaardigheid die bij het onderwijs in de analytische meetkunde zou moeten worden aangebracht, is om bij een gegeven probleem een geschikt assenstelsel te kiezen. In dit geval is het handig om één van de drie gegeven punten, zeg (x_3, y_3) , te promoveren tot oorsprong. Met als gevolg dat in de cirkelvergelijking de parameter C

de waarde 0 krijgt. Substitutie van de coördinaten x_1, y_1, x_2, y_2 leidt nu tot twee vergelijkingen met A en B als onbekenden en die hebben precies één oplossing als de paren (x_1, y_1) en (x_2, y_2) onafhankelijk zijn, dus als $(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ niet collineair zijn!

Een vergeten stelling

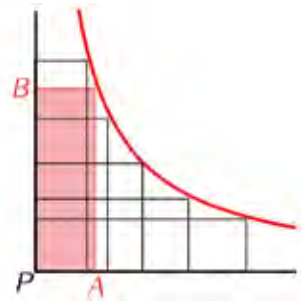
Bij een gastcollege meetkunde voor studenten van de eerstegraads lerarenopleiding aan de Hogeschool van Amsterdam werd aan de volgende opgave gewerkt:



figuur 3

$P \neq M$ ligt op koorde AB van een cirkel met middelpunt M . Het punt A doorloopt de cirkel. Pas de lijnstukken PA en PB af op respectievelijk de positieve X -as en Y -as van een rechthoekig assenstelsel (met P in de oorsprong) en teken de rechthoek met zijden PA en PB . Herhaal dit enige malen. Krijg je een vermoeden? Zo ja, welk?

Sommige studenten vermoedden al snel dat de hoekpunten tegenover P van de rechthoeken (PA, PB) op een orthogonale hyperbool liggen, ofwel dat de rechthoeken allemaal dezelfde oppervlakte hebben, zie figuur 4.



figuur 4

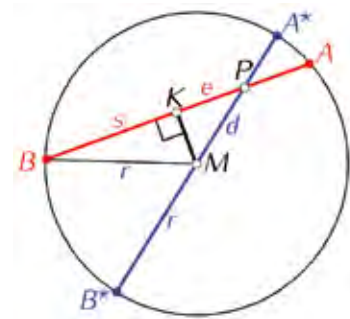
Met andere woorden: het product van de stukken waarin de draaiende koorde XY door P wordt verdeeld, lijkt constant te zijn. En ja, dit is een stelling die vroeger in de schoolboeken stond, maar nu vergeten lijkt:

Als twee koorden van een cirkel elkaar binnen de cirkel snijden, dan zijn de producten van de lijnstukken waarin die koorden door hun snijpunt worden verdeeld, gelijk aan elkaar.

Het practicum dat ik de studenten van de HvA voorlegde sloot aan bij Euclides' formulering in boek III van *De Elementen* (propositie 35):

Als binnen een cirkel twee rechten elkaar snijden, is de rechthoek omvat door de delen van de ene, gelijk aan de rechthoek omvat door de delen van de andere.

Ik geef nu eerst een bewijs dat in essentie overeenkomt met dat van Euclides, maar door gebruik van algebrataal makkelijker te volgen is. In het geval $P = M$ is er weinig te bewijzen, stel daarom $P \neq M$. Nog een ingreep: ik kies voor een van de koorden de middellijn A^*B^* . Als ik nu voor een willekeurige andere koorde AB kan bewijzen dat $PA \times PB = PA^* \times PB^*$, dan ben ik klaar.



figuur 5

Stel de straal van de cirkel is r en de afstand van P tot M is d . Trek nu MK loodrecht op de koorde AB en stel $KB (= KA !)$ = s en $KP = e$.

Er geldt, zie figuur 5:

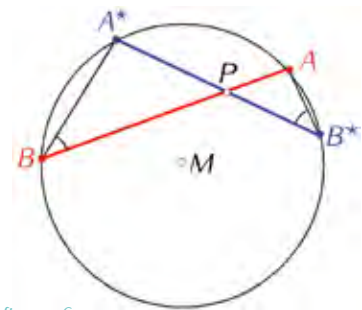
$$PA^* \times PB^* = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$$

$$PA \times PB = (s - e)(s + e) = s^2 - e^2$$

Blijft te bewijzen: $r^2 - d^2 = s^2 - e^2$ ofwel

$r^2 - s^2 = d^2 - e^2$. Nu helpt Pythagoras, want die laatste twee verschillen van kwadraten zijn elk gelijk aan KM^2 . (Q.E.D.)

Zo stond het bewijs niet in de schoolboeken van weleer. Hoe dan wel? Zie figuur 6.



figuur 6

De driehoeken PAB^* en PA^*B hebben gelijke hoeken en zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt:

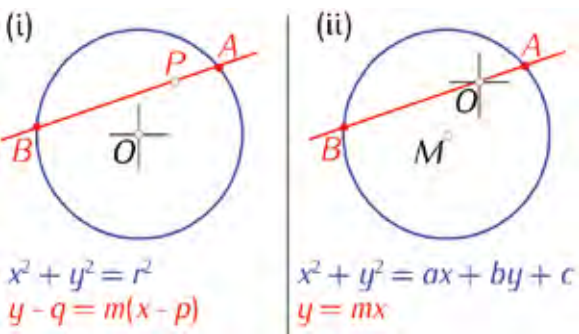
$$\frac{PA}{PB^*} = \frac{PA^*}{PB} \text{ en dus: } PA \times PB = PA^* \times PB^*.$$

Alles goed en wel, maar hoe weet je nu dat de hoeken bij B en B^* aan elkaar gelijk zijn? Het antwoord is omdat die twee zogeheten *omtrekshoeken* op dezelfde boog AA^* staan. Dit bewijs oogt misschien makkelijker dan het vorige, maar vereist ook meer voorkennis. En bij Euclides kwamen de stellingen over hoeken en bogen pas in het volgende boek (IV) ter sprake.

Het kan ook analytisch

De natuurlijke vraag is weer: kan het ook analytisch? En daarbij: *hoe kies ik het coördinatenstelsel en wat wordt de strategie?*

In de koordenstelling komen twee vaste punten voor: het punt P en het middelpunt M van de cirkel. Het lijkt handig om één van de twee als oorsprong te kiezen, zie figuur 7.



figuur 7

In beide opties krijg ik te maken met vier parameters en zal ik de coördinaten van A en B daarin moeten uitdrukken. Ik kies voor optie (ii) omdat de vergelijking waaraan de x -coördinaten van A en B moeten voldoen in dat geval wat vriendelijker oogt:

$$(1 + m^2)x^2 - (a + bm)x - c = 0 \quad (*)$$

Ook de uitdrukkingen voor de lengten van de lijnstukken waarin de koorde wordt verdeeld zijn bij optie (ii) eenvoudiger, namelijk:

$$|x_A|\sqrt{1+m^2} \text{ en } |x_B|\sqrt{1+m^2}$$

zodat het product gelijk is aan

$$|x_A x_B|(1+m^2)$$

Ik hoef de afzonderlijke x -coördinaten van A en B niet te kennen, als ik maar hun product weet!

Vroeger was dit een eitje: iedere leerling hoorde te weten dat het product van de wortels van de standaard vierkantsvergelijking gelijk is aan ‘ c gedeeld door a ’.

Hier wordt dat:

$$x_A x_B = \frac{-c}{1+m^2}.$$

$$\text{Dus: } PA \times PB = \left| \frac{-c}{1+m^2} \right| (1+m^2) = |c|.$$

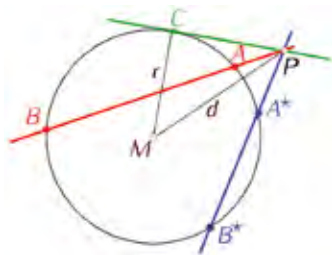
Dit product is onafhankelijk van m en dus constant! Het bewijs is geleverd. Zonder de *product-van-de-wortels-formule* is het rekenwerk een stukje lastiger. Om toch de discriminant te omzeilen, zou je de leerling een handje kunnen helpen door de vierkantsvergelijking (*) ook te schrijven als:

$$(1 + m^2)(x - x_A)(x - x_B) = 0.$$

De constante term levert bovenstaande formule voor het product van x_A en x_B .

Vind ik het analytische bewijs mooi? Jawel, maar de twee synthetische bewijzen bevredigen mij toch meer.

Echter, het analytische bewijs heeft wel een belangrijk pluspunt! Als je het nog eens naloopt, zie je dat nergens gebruik gemaakt is van het feit dat het punt P *binnen* de cirkel moet liggen. Kortom het constant zijn van het product $PA \times PB$ geldt ook voor het geval P *buiten* de cirkel ligt (over P op de cirkel hoef ik uiteraard niets te zeggen). Je zou het een cadeautje van de analytische meetkunde kunnen noemen. Bij Euclides is dit een volgende propositie (36), in boek III van *De Elementen*, en het bewijs dat hij geeft is analoog aan dat van propositie 35. Ook het gelijkvormigheidsbewijs laat zich analoog vertalen, maar moet eveneens apart worden gegeven. Een verschil met de situatie waarbij P binnen de cirkel ligt is nog dat nu niet alle lijnen door P de cirkel in twee punten snijden. Er zijn oneindig veel lijnen door P die geheel buiten de cirkel liggen en er zijn twee raaklijnen door P aan de cirkel.



figuur 8

De draaiende lijn door P heeft een limietstand PC , waarbij C de rol van zowel A als B overneemt.

Dat brengt ons op het idee dat niet alleen

$$PA \times PB = PA^* \times PB^*$$

maar ook:

$$PA \times PB = PC^2 = d^2 - r^2.$$

Het bewijs hiervan laat ik aan de lezer.

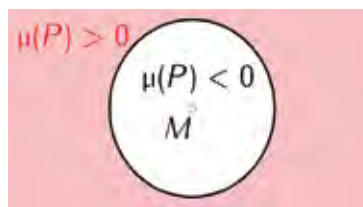
De macht van een punt t.o.v. een cirkel

In het geval dat P buiten de cirkel ligt, zeggen we dat P de koorde AB uitwendig verdeelt in de stukken PA en PB . In dit geval is het product van PA en PB gelijk aan $d^2 - r^2$, terwijl (zie het bewijs bij figuur 5) dit bij een inwendige verdeling (dus P binnen de cirkel) gelijk is aan $r^2 - d^2$.

Een typisch kenmerk van wiskunde is om verschillende gevallen onder één hoedje te vangen. In de hier beschreven situaties gaat dat zó:

Als het punt P op een afstand d van het middelpunt M van een cirkel met straal r ligt, is de *macht* van P t.o.v. die cirkel gelijk aan het getal $d^2 - r^2$. Een soms gebruikte notatie hiervoor is: $\mu(P) = d^2 - r^2$.

De cirkel (M, r) verdeelt het vlak in twee gebieden die gekenmerkt worden door $\mu(P) < 0$ en $\mu(P) > 0$, zie figuur 9:



figuur 9

Voor de punten op de cirkelomtrek geldt $\mu(P) = 0$.

De minimale waarde van $\mu(P)$ is $-r^2$ ofwel $\mu(M)$.

Uitgaande van de cirkelvergelijking

$x^2 + y^2 = Ax + By + C$ kan de macht van (x_p, y_p) ook analytisch worden gedefinieerd, namelijk zó:

$$\mu(x_p, y_p) = x_p^2 + y_p^2 - Ax_p - By_p - C$$

want het rechterlid is gelijk aan:

$$(x_p - x_M)^2 + (y_p - y_M)^2 - r^2.$$

Machtlijnen

Bekijk twee cirkels, c_1 en c_2 , die elkaar in twee punten, A en B , snijden. Als P een punt is op de lijn door A en B , dan geldt $\mu_1(P) = \pm PA \times PB = \mu_2(P)$. Hier zijn μ_1 en μ_2 de respectievelijke machtsfuncties bij c_1 en c_2 . Je moet er dan nog bij bedenken dat elk punt van AB óf buiten, óf op, óf binnen beide cirkels ligt.

De lijn AB wordt de *machtlijn* van c_1 en c_2 genoemd. De middelpunten van c_1 en c_2 liggen elk even ver van A en B , dus de verbindingslijn van die middelpunten (de *centraal*) is de middelloodlijn van AB .

Voor elk punt P buiten de machtlijn geldt $\mu_1(P) \neq \mu_2(P)$.

Met andere woorden: de machtlijn is de 'locus' van de punten met gelijke macht t.o.v. c_1 en c_2 .

Dit laatste is hier nog niet bewezen en kan á la Euclides uit het ongerijmde worden aangetoond. Hier wint opnieuw de analytische meetkunde. Stel de twee cirkels voor door de vergelijkingen

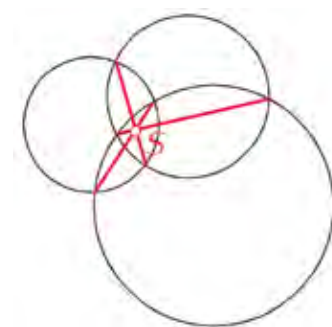
$$x^2 + y^2 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

en het is onmiddellijk duidelijk dat een punt gelijke machten heeft t.o.v. beide cirkels, als en alleen als:

$$(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$$

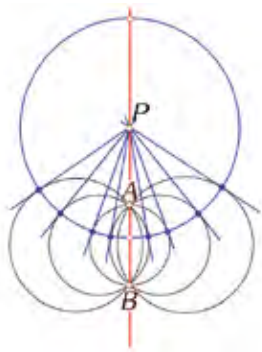
De vergelijking van de machtlijn wordt in de sommetjes op school wel gebruikt om de snijpunten van twee cirkels, elk gegeven door een vergelijking, te berekenen. Een aardig gevolg van het voorgaande is, dat als drie cirkels elkaar twee aan twee snijden, de drie gemeenschappelijke koorden door één punt S gaan, zie figuur 10.



figuur 10 S is het *machtpunt* van de drie cirkels

Het bewijs is analoog aan het bewijs van het concurrent zijn van de drie middelloodlijnen van een driehoek. >

Laten twee cirkels elkaar snijden in A en B en laat P een punt op de machtlijn zijn, dat buiten die cirkels ligt. De raaklijnstukken vanuit P aan de beide cirkels zijn dan even lang. Het wordt nog wat spectaculairder als je de raaklijnen uit P aan *alle* cirkels door A en B bekijkt, zie figuur 11.



figuur 11

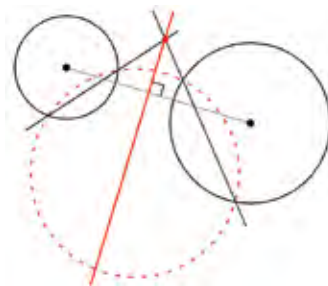
Het punt P heeft ten opzichte van alle cirkels van de bundel dezelfde macht, namelijk $PA \times PB$. Omdat die macht ook gelijk is aan het kwadraat van elk raaklijnstuk uit P aan een cirkel van de bundel, liggen alle bijbehorende raakpunten op een cirkel met middelpunt P . Is nu elk punt van de blauwe cirkel zo'n raakpunt? Er zijn twee uitzonderingen, namelijk de snijpunten van de lijn AB met de blauwe cirkel. Elk ander punt van de blauwe cirkel vormt samen met A en B een niet-collineair drietal en ligt dus op één cirkel uit de bundel. En de snijpunten van elk exemplaar uit de bundel met de blauwe cirkel zijn de raakpunten van de raaklijnen uit P aan die cirkel.

Bij de redenering vanuit de twee cirkelvergelijkingen is niets gezegd over de onderlinge ligging van de twee cirkels. Alleen in het geval dat de cirkels concentrisch zijn, is er geen machtlijn.

Dan geldt $A_1 = A_2$ en $B_1 = B_2$ en dan stelt $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$ geen rechte lijn voor. Ook uit de definitie $\mu(P) = d^2 - r^2$ volgt direct dat er bij concentrische cirkels geen punten bestaan met gelijke macht ten opzichte van die cirkels.

Als twee niet-concentrische cirkels geen gemeenschappelijke punten hebben, is er wel een machtlijn, met de hierboven genoteerde vergelijking. Die machtlijn is eenvoudig te construeren door een derde (hulp)cirkel te nemen die de beide cirkels snijdt en te bedenken dat de machtlijn loodrecht staat op de centraal van de twee cirkels, zie figuur 12. Dit laatste kan via de algebraïsche voorstelling van de machtlijn worden begrepen.

De begrippen macht, machtlijn en machtpunt zijn verdwenen uit de schoolmeetkunde. In de planimetrie van voor 1968 kwamen ze in de laatste fase van de



figuur 12

middenbouw aan bod, mits er genoeg tijd was. In de boeken voor analytische meetkunde in die tijd kwamen deze begrippen ter sprake bij het onderwerp *cirkelbundels*. In het vervolg op dit artikel kom ik daarop terug. Ook daarin wil ik laten zien dat een soort van fusie van analytische en synthetische meetkunde tot mooie resultaten kan leiden.

Noten

- [1] George Polya beschrijft in zijn inspirerende boek *Mathematical Discovery (deel1)*, dit principe bij het oplossen van constructieproblemen als volgt:
- Reduceer het probleem tot de constructie van één punt.
 - Splits de voorwaarde in twee delen zó dat elk deel een locus (rechte of cirkel) voor het gezochte punt voortbrengt.

Over de auteur

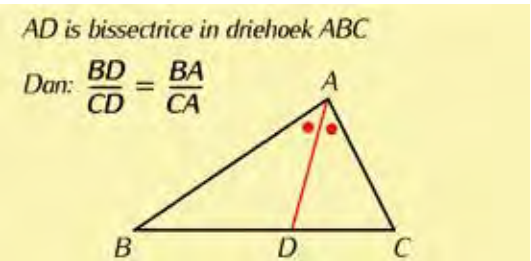
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Machtige meetkunde (2)

In een eerder artikel met deze titel passeerden de begrippen ‘macht’, ‘machtlijn’ en ‘machtpunt’ de revue. In dit vervolg verschijnen deze begrippen opnieuw en spelen zij een rol bij speciale verzamelingen van cirkels, de zogeheten cirkelbundels. En net als in het vorige artikel vullen synthetische en analytische methoden elkaar aan.

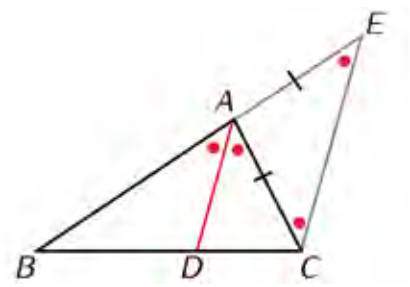
Twee bissectricestellingen

Evenals in de voorganger van dit artikel over ‘macht’ in de meetkunde^[1] begin ik met een stelling uit de goede oude *Elementen* van Euclides (boek IV, propositie 3), zie figuur 1.



figuur 1

Euclides verwoordt het aldus:
Indien de hoek van een driehoek middendoor wordt gedeeld en de rechte, die de hoek verdeelt, snijdt ook de basis, dan zullen de stukken van de basis dezelfde verhouding hebben als de overblijvende zijden van de driehoek.
 Bij het bewijs gebruikt hij twee hulplijnen, AE (verlengde van BA) en CE (// DA), zie figuur 2.



figuur 2

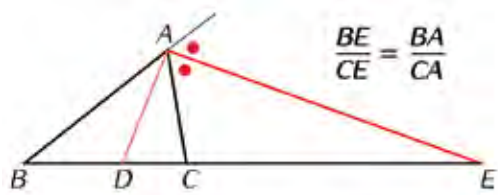
Uit de evenwijdigheid van DA en CE volgt dat driehoek ACE gelijkhoekig in C en E en bijgevolg gelijkbenig is. Via een bekende evenredigheidsstelling volgt dan

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{EA} = \frac{BA}{CA}.$$

Dezelfde figuur kan worden gebruikt voor het bewijs van het omgekeerde van de bissectricestelling, die door Euclides expliciet is opgenomen in zijn propositie^[2].

Een aardige aanschouwelijke demonstratie:
Knip een (niet-gelijkbenige) driehoek uit dun karton en vouw een bissectrice van een van de hoeken. Die bissectrice verdeelt de driehoek in twee driehoeken waarvan de oppervlakten zich verhouden als de stukken waarin de basis wordt verdeeld. Klap nu de kleinste driehoek om langs de bissectrice en de verhouding van de oppervlakten is zichtbaar gelijk aan de verhouding van twee zijden van de driehoek^[3].

Er is ook een stelling over de ‘buitenbissectrice van een driehoek’ (niet in de *Elementen* te vinden), zie figuur 3.



figuur 3

Laat AE de bissectrice zijn van een buitenhoek (bij A) van driehoek ABC met $AB \neq AC$. Die buitenbissectrice AE verdeelt nu de zijde BC uitwendig in de stukken BE en CE die zich ook verhouden als de zijden BA en CA. Het bewijs kan worden geleverd met hulp van de

lijn door C evenwijdig aan EA . Een aanschouwelijke vouwdemonstratie werkt hier natuurlijk niet.

Drie opmerkingen:

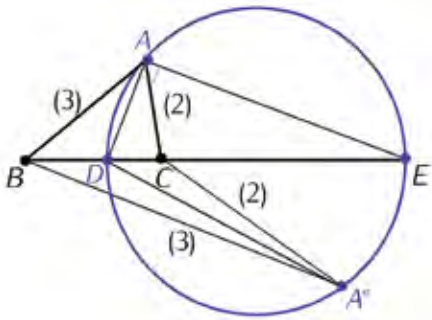
- (1) Het puntenviertal $BCDE$ heet *harmonisch*. Dit vanwege de gelijkheid $BD : CD = BE : CE$.
- (2) Als $AB = AC$ is D het midden van AC en is de buitenbissectrice evenwijdig aan BC en wordt E ook wel 'gezien' als het 'oneigenlijke punt' van de lijn BC .
- (3) De bissectrices AD en AE staan loodrecht op elkaar.

Een cirkel van Apollonius

Veronderstel dat in figuur 3 geldt: $BD : CD = 3 : 2$.

Dan is ook $BA : CA = 3 : 2$ en $BE : CE = 3 : 2$.

Er zijn dus ten minste drie punten met de eigenschap dat hun afstanden tot B en C zich verhouden als $3 : 2$. Die punten D , E en A liggen uiteraard op één cirkel, zie figuur 4. Het lijnstuk DE is een middellijn van die cirkel omdat de lijnstukken AD en AE onderling loodrecht zijn^[4].

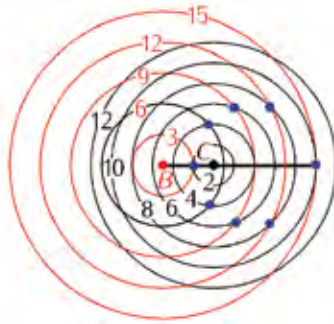


figuur 4

Dat er op de lijn BC behalve D en E niet nog meer punten zijn met de eigenschap dat de afstanden tot A en B zich verhouden als 3 en 2 is eenvoudig te snappen. Als je het punt D op lijnstuk BC een beetje verschuift naar links (rechts) wordt BD kleiner (groter) en CD groter (kleiner), dus de verhouding $AD : BD$ verandert dan. Verschuiving van E heeft tot gevolg dat AE en BE beide met hetzelfde verschil groter dan wel kleiner worden, zodat hun verhouding verandert.

Dat er buiten de lijn BC nog oneindig veel punten met die eigenschap zijn, is ook duidelijk. Neem twee cirkels om B en C waarvan de stralen zich verhouden als 3 en 2 en die niet door D of E gaan en je vindt nog twee (snij)punten met de bedoelde eigenschap. Als je dit daadwerkelijk uitvoert, bijvoorbeeld met GeoGebra, dan rijst al gauw het vermoeden dat al die punten op een gesloten kromme liggen, misschien wel een cirkel...

Het kan ook ouderwets op papier met een passer, zie figuur 5. Om de punten B en C zijn concentrische rode en zwarte cirkels getekend, respectievelijk met straal $3, 6, 9, 12, 15$ en $2, 4, 6, 8, 10, 12$. Let op de snijpunten (blauw)



figuur 5

van een rode en een zwarte cirkel waarvan de stralen zich verhouden als 3 en 2 en je krijgt de indruk dat die op een gesloten kromme liggen die wel eens een cirkel zou kunnen zijn.

De oplettende lezer heeft het natuurlijk al door: dit is de blauwe cirkel uit figuur 4. Hoe bewijs je dit? Wel, stel A^* is een punt met $BA^* : CA^* = 3 : 2$, dan zal volgens de omgekeerden van de bissectricestellingen A^*D een binnenbissectrice zijn van driehoek BCA^* en A^*E een buitenbissectrice, zo dat $A^*D \perp A^*E$. Volgens de stelling van Thales^[4] ligt A^* dan op de cirkel met middellijn DE . Maar weet je nu ook zeker dat je op deze wijze alle punten van de cirkel met middellijn DE te pakken krijgt? Dat dit wel goed gaat, kan via een kleine kunstgreep worden bewezen. Ik laat dit hier voor wat het is en stap even over naar de analytische meetkunde.

Plaats B en C in een assenstelsel zo dat $B = (-3, 0)$ en $C = (2, 0)$. Laat $P = (x, y)$ een punt zijn met de eigenschap $PB : PC = 3 : 2$, dus $PB^2 : PC^2 = 9 : 4$. Er volgt dan:

$$4[(x + 3)^2 + y^2] = 9[(x - 2)^2 + y^2]$$

wat leidt tot

$$(x - 6)^2 + y^2 = 36$$

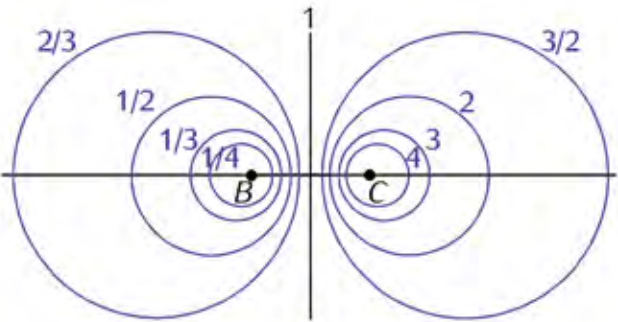
Nu zijn er drie vliegen in één klap geslagen. Je weet dat elk punt met de eigenschap $PB : PC = 3 : 2$ op een cirkel ligt en ook dat elk punt van die cirkel de bedoelde eigenschap heeft. De analytische meetkunde wint het hier van de klassieke synthetische meetkunde, want het opsporen én het heen-en-terug bewijzen van een meetkundige plaats (locus) gaat als het ware in één ademtocht.

Dit was voor mij vroeger de ultieme legitimatie van het onderwijzen van de analytische meetkunde in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Na drie jaar planimetrie viel de analytische meetkunde wat je noemt op vruchtbare bodem, en kon zij, onder meer daar waar >

kegelsneden opbloeden, efficiënt worden benut. Bij de modernisering van het leerplan in 1968 kwam er een nieuwe analytische meetkunde met vectoren, waarin meetkundige plaatsen nauwelijks voorkwamen en kegelsneden helemaal niet en waarin de meetkunde pover kon worden genoemd. Heeft die geschiedenis zich inmiddels een beetje herhaald of vergis ik mij?

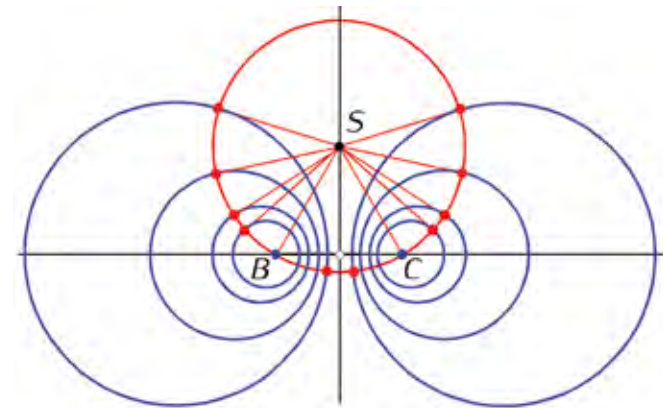
Een Apollonische familie

De verzameling van de punten die een vaste afstandsverhouding ($\neq 1$) tot twee gegeven punten hebben, is een cirkel die de naam van Apollonius draagt. De verhouding van de afstanden van punten (in een plat vlak) tot B en C (in datzelfde vlak) stel ik gelijk aan $\alpha : 1$. Iedere positieve waarde van $\alpha \neq 1$ levert een cirkel (van Apollonius) op en $\alpha = 1$ levert de middelloodlijn van BC . Zo ontstaat een ‘Apollonische familie’, zie figuur 6, die ook de naam *cirkelbundel* draagt.



figuur 6 De Apollonische familie bij B en C

Natuurlijk geldt voor elk tweetal cirkels van zo’n familie dat ze disjunct zijn, dat wil zeggen de een ligt ofwel buiten, ofwel binnen de andere. Cirkels die elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de middelloodlijn van BC , corresponderen met omgekeerde verhoudingsgetallen. Elk punt van de middelloodlijn van BC zal blijken gelijke machten te hebben ten opzichte van alle cirkels van de Apollonische familie (bundel). Die lijn wordt daarom ook de *machtlijn* genoemd van de bundel. Dat betekent dan ook dat, als je vanuit een punt van de machtlijn de raaklijnen aan alle cirkels van de bundel trekt, de raaklijnstukken aan elkaar gelijk zijn, zie figuur 7. Dit moet natuurlijk nog wel worden bewezen. Daartoe plaats ik de figuur in een assenstelsel zó dat B en C de coördinatenparen $(-c, 0)$ en $(c, 0)$ hebben. Laat $S = (0, s)$ een punt van de middelloodlijn van BC zijn. Een willekeurig exemplaar van de bundel snijdt de x -as in de punten $P = (p, 0)$ en $Q = (q, 0)$. Het middelpunt M van de cirkel met middellijn PQ heeft dan de x -coördinaat $\frac{1}{2}(p + q)$. De straal r van die cirkel is $\frac{1}{2}|p - q|$.



figuur 7

De macht van een punt S ten opzichte van een cirkel met middelpunt M en straal r is gelijk^[1] aan $SM^2 - r^2$. Dit levert hier op:

$$s^2 + \frac{1}{4}(p + q)^2 - \frac{1}{4}(p - q)^2 = s^2 + pq \quad (*)$$

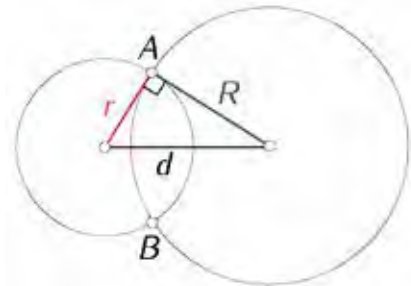
Ik moet nu nog laten zien dat deze vorm alleen afhankelijk is van de waarde van s , met andere woorden dat het product pq een constante waarde heeft. Het viertal $BCPQ$ is een *harmonisch* puntenviertal, zie opmerking (1) onder figuur 3. Dat houdt in dat $BP : BQ$ en $CP : CQ$ aan elkaar gelijk zijn. En dus:

$$\frac{p+c}{c-p} = \frac{q+c}{q-c}$$

Kruislings vermenigvuldigen leidt tot $pq = c^2$, inderdaad constant! De macht van S ten opzichte van alle cirkels van de bundel is gelijk aan $s^2 + c^2$. Dit is juist gelijk aan SC^2 (en SB^2). Kortom: alle raaklijnstukken uit S aan de Apollonische cirkels zijn even lang als SC .

Orthogonale cirkels

De hoek tussen twee cirkels die elkaar in de punten A en B snijden is per definitie de hoek tussen de raaklijnen aan die cirkels in A (of B). Als die hoek 90° is, zeggen we dat de cirkels elkaar loodrecht snijden of ook dat zij orthogonaal zijn, zie figuur 8.

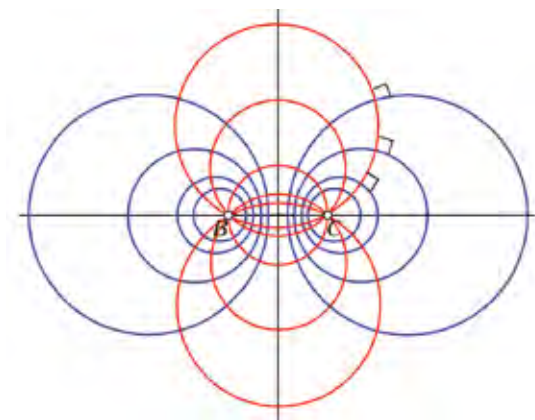


figuur 8

In dit geval moet de raaklijn aan de ene cirkel door het middelpunt van de andere gaan en vice versa. Als de stralen van de cirkels de lengte r en R hebben en als de afstand van de middelpunten d is, dan is $r^2 + R^2 = d^2$ een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het orthogonaal zijn van de cirkels.

Bekijk nogmaals figuur 7. De rode cirkel blijkt orthogonaal te zijn met elke blauwe cirkel. Als ik de straal van de rode cirkel r (dus $r^2 = s^2 + c^2$) noem, die van een willekeurige blauwe cirkel R en de afstand van S tot het middelpunt van die blauwe cirkel d , dan kan de relatie (*) worden vervangen door $d^2 - R^2 = r^2$, de nodige en voldoende voorwaarde voor het orthogonaal zijn van de rode en elke blauwe cirkel.

Als S de middelloodlijn van BC doorloopt, ontstaat er een bundel van rode cirkels die alle door B en C gaan. Elke rode cirkel uit die bundel is orthogonaal met elke blauwe cirkel en we spreken dan van twee *orthogonale bundels*, zie figuur 9.



figuur 9

Een analytische kijk

Als ik het assenstelsel weer zo kies dat $B = (-c, 0)$ en $C = (c, 0)$ en als ik het middelpunt S van een willekeurige rode cirkel het coördinatenpaar $(0, s)$ toewijs, dan past bij een rode cirkel de vergelijking

$$x^2 + (y - s)^2 = c^2 + s^2$$

ofwel

$$x^2 + y^2 - 2sy - c^2 = 0 \quad (1)$$

Dit is een analytische voorstelling van de rode cirkelbundel. Elke waarde van de parameter s correspondeert met één exemplaar van de bundel.

Nu de blauwe bundel. Geef ik het middelpunt van een blauwe cirkel de coördinaten $(t, 0)$ en noem ik de straal even R , dan volgt uit het voorgaande dat

$$R^2 = (s^2 + t^2) - (s^2 + c^2) = t^2 - c^2$$

zodat een vergelijking van een blauwe cirkel wordt:

$$(x - t)^2 + y^2 = t^2 - c^2$$

ofwel

$$x^2 + y^2 - 2tx + c^2 = 0 \quad (2)$$

waarmee een analytische voorstelling van de blauwe bundel is verkregen.

Vergelijk de vergelijkingen (1) en (2). Ze lijken enigszins op elkaar, maar er zijn wel duidelijke verschillen. De parameterwaarde $s = 0$ in (1) levert de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = c^2$, dit is de kleinste cirkel van de bundel.

De parameterwaarde $t = 0$ in (2) leidt tot $x^2 + y^2 = -c^2$ en dit is geen reële cirkel. Net zo min worden er reële cirkels gevonden voor t -waarden tussen $-c$ en c . Bij de randwaarden $t = \pm c$ levert (2) de puntcirkels B en C .

Ik bekijk nu de zogenaamde machtsfuncties van de rode en blauwe cirkels, dat wil zeggen de functies

$$\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 2sy - c^2, \tau(x, y) = x^2 + y^2 - 2tx + c^2.$$

Via 'impliciet differentiëren' kan nog eens de orthogonaliteit van de s -cirkels en de t -cirkels worden bewezen.

Ik merk op dat het niet al te gebruikelijk is om op school bij analytische meetkunde ook differentiaalrekening te gebruiken. Zelf denk ik dat het af en toe differentiëren van 'impliciete functies' de vaardigheid in het differentiëren zou kunnen versterken.

Bij wijze van voorproefje kijk ik naar de oervergelijking van de cirkel: $x^2 + y^2 = r^2$. Afgezien van de punten $(r, 0)$ en $(-r, 0)$ kun je om elk punt van de cirkel een gebied kiezen waarop y een functie is van x . Differentiatie van y naar x geeft dan $2x + 2y \cdot y' = 0$. Voor $y \neq 0$, geeft dit: $y' = -x/y$ voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (x, y) , waaruit nog eens volgt dat die raaklijn loodrecht staat op de straal naar (x, y) , waarvan de richtingscoëfficiënt immers gelijk is aan y/x . Voor wie geen angst heeft voor differentiaalrekening in combinatie met vectoren, kan het ook via

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0$$

Ik pas deze werkwijze nu toe op de s - en t -cirkels.

— Differentiëren naar x van $\sigma(x, y) = 0$ en $\tau(x, y) = 0$ geeft respectievelijk:

$$x + (y - s)y' = 0 \text{ en } (x - t) + y \cdot y' = 0.$$

— Voor de snijpunten van een s -cirkel en een t -cirkel geldt: $\sigma(x, y) = \tau(x, y)$ ofwel $tx - sy = c^2$.

>

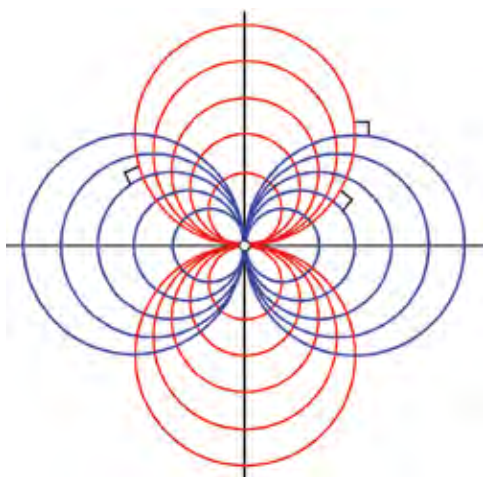
Nu nog een beetje goochelen met richtingscoëfficiënten of normaalvectoren om de orthogonaliteit te verifiëren. Ik kies voor het laatste en kijk naar het inproduct van de vectoren $(x, y - s)$ en $(x - t, y)$. Dit is:

$$x^2 - tx + y^2 - sy$$

Substitutie van $tx = sy + c^2$ geeft $x^2 + y^2 - 2sy - c^2$ en dat is gelijk aan 0 voor elk punt dat het snijpunt is van een s - en een t -cirkel.

Twee orthogonale (raak)bundels

In het voorgaande heb ik stilzwijgend aangenomen dat $c \neq 0$, ofwel dat B en C verschillende punten zijn. Wat gebeurt er nu als ik B en C laat samenvallen, dus als $c = 0$? De machtsfuncties worden dan $\sigma(x, y) = x^2 + y^2 - 2sy$ en $\tau(x, y) = x^2 + y^2 - 2tx$ die dan horen bij de verzamelingen cirkels, gegeven door: $x^2 + y^2 - 2sy = 0$ en $x^2 + y^2 - 2tx = 0$, die dan weer paarsgewijs orthogonaal zijn, zie figuur 10.



figuur 10

De s -cirkels zowel als de t -cirkels gaan door de oorsprong. Zij hebben respectievelijk de middelpunten $(s, 0)$ en $(t, 0)$ en de stralen $|s|$ en $|t|$.

De s -cirkels raken de x -as in O , de t -cirkels doen dit met de y -as en daaruit volgt, zonder differentiaalrekening, dat elke s -cirkel orthogonaal is met elke t -cirkel.

De drie typen cirkelbundels

In dit verhaal zijn drie verschillende typen cirkelbundels langsgelopen.

- (1) Een bundel waarvan alle exemplaren door twee vaste punten (de basispunten) gaan en die geen puntcirkels bevat.
- (2) Een bundel waarvan alle exemplaren in één basispunt aan dezelfde lijn raken. Dat basispunt is als puntcirkel ook element van de bundel.

- (3) Een bundel zonder basispunten, maar met twee puntcirkels die als element van de bundel kunnen worden beschouwd.

Bij alle drie typen bundels hoort een machtslijn, dat is dan de lijn waarvan elk punt gelijke machten heeft ten opzichte van alle cirkels van de bundel.

De algemene analytische voorstelling voor deze drie typen bundels is:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C + \lambda(Dx + Ey + F) = 0 \quad (*)$$

Hierin zijn A, B, C, D, E en F vast en doorloopt λ de reële getallen. Er zijn drie mogelijkheden voor de onderlinge ligging van de lijn $Dx + Ey + F = 0$ en de cirkel $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

- ze snijden elkaar in twee punten: dan stelt $(*)$ een bundel van type (1) voor, met die twee als basispunten;
- de lijn raakt de cirkel en de bundel is dan van type (2);
- de lijn ligt buiten de cirkel en dan hebben we te maken met een bundel van type (3).

De lijn $Dx + Ey + F = 0$ is dan steeds de machtslijn van de bundel.

In twee artikelen over 'macht' in de meetkunde heb ik willen demonstreren, dat synthetische en analytische meetkunde elkaar prima kunnen ondersteunen. Het vertalen van een zuiver meetkundig probleem naar algebra kan worden gezien als modelleren, en is dat niet een zeer waardevolle activiteit in hedendaags wiskundeonderwijs?

Noten

- [1] Zie *Euclides* 95-3
- [2] Het zich bewust zijn van het feit dat het omgekeerde van een ware implicatie niet automatisch waar is, was een belangrijk aandachtspunt in het vroegere meetkundeonderwijs.
- [3] Zie ook Kindt, M. (1992). De bissectricestelling, *Euclides*, (68)2, 37-43, waarin negen bewijzen van de stelling staan.
- [4] Stelling van Thales: een driehoek is rechthoekig als en alleen als een zijde de middellijn is van de omgeschreven cirkel.

Over de auteur

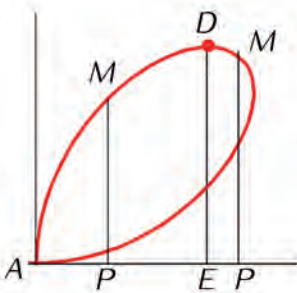
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Twee krommen genaamd 'folium'

Beroemde krommen hebben soms de naam van de (al of niet vermeende) eerste ontdekker. Twee voorbeelden zijn: het folium van Descartes (uit 1638) en het folium van Dürer (1525). Beide krommen vertonen een lus in de vorm van een blad, vandaar de Latijnse naam folium. Hoewel ze daarvoor niet zijn uitgevonden, kunnen beide krommen worden gebruikt voor de oplossing van een klassiek constructieprobleem.

Uit het boek van De l'Hôpital

Het allereerste leerboek over differentiaalrekening verscheen in 1696 van de hand van markies De l'Hôpital onder de titel *Analyse des infiniments petits*.^[1] Het was in feite het collegedictaat van Johann Bernoulli van wie de markies de rechten had gekocht. De bekende (naar mijn smaak wat overbodige) regel die zijn naam draagt, zou eigenlijk de regel van Bernoulli moeten heten Het eerste hoofdstuk in het boek is in euclidische stijl geordend: definities, postulaten, proposities. De proposities zijn hier de bekende rekenregels voor het differentiëren. In het derde hoofdstuk, over optimaliseren, worden extreme punten van krommen bepaald. Daaruit bekijk ik het eerste voorbeeld. Dit behandelt de kromme 'waarvan de aard' – aldus de markies – wordt uitgedrukt door de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$. Daarbij worden a , x , en y positief verondersteld, zie figuur 1.



figuur 1

Van het punt D , het hoogste punt van de kromme, berekende De l'Hôpital de coördinaten als volgt. Eerst differentiëren:

$$3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx.$$

Hieruit dy opgelost en gelijk aan 0 gesteld:

$$dy = \frac{aydx - 3x^2dx}{3y^2 - ax} = 0$$

Er volgt dan:

$$y = \frac{3x^2}{a}$$

en substitutie in $x^3 + y^3 = axy$ levert op:

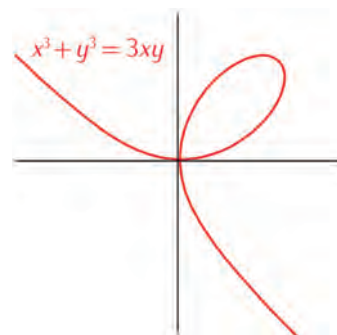
$$x = \frac{1}{3}a \cdot \sqrt[3]{2}$$

De markies merkt dan op dat ED de grootste van alle *ordinaten* naar punten van de kromme is. Hoe groot die maximale ordinaat is, vermeldt hij niet, maar substitutie

leert dat de lengte daarvan $\frac{1}{3}a \cdot \sqrt[3]{4}$ is.

Het folium van Descartes

De kromme van figuur 1 heeft de vorm van een blaadje en dat verklaart de naam 'folium'. Zij draagt nu de naam van Descartes en ziet er zonder de beperking tot het eerste kwadrant zó uit, zie figuur 2.



figuur 2

In het vervolg kies ik voor het gemak $a = 3$, dus voor de kromme met vergelijking $x^3 + y^3 = 3xy$.
 Uit die vergelijking volgt onmiddellijk de symmetrie van de kromme ten opzichte van de lijn $x = y$.
 Wat opvalt in de figuur is, dat er geen punten van de kromme in het derde kwadrant liggen. Allicht: als x en y beide negatief zijn is $x^3 + y^3$ dat ook, maar is $3xy$ juist positief. De figuur suggereert een beetje dat de kromme tussen twee grenslijnen ligt die een vergelijking van de vorm $x + y = c$ hebben.
 Dit kan met algebra worden opgehelderd. Hiertoe gebruik ik de identiteit:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

Daarmee kan de vergelijking van de kromme worden omgebouwd tot:

$$(x + y)^3 = 3xy(x + y + 1)$$

Voor mogelijke snijpunten van het folium met een lijn $x + y = c$ geldt dan $c^3 = 3xy(c + 1)$ en dus

$$xy = \frac{c^3}{3c + 3}$$

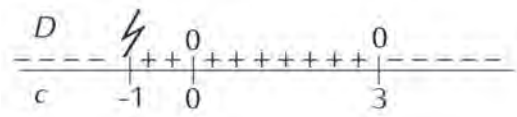
Gevolg: de coördinaten van eventuele snijpunten voldoen aan de vierkantsvergelijking:

$$x^2 - c \cdot x + \frac{c^3}{3c + 3} = 0.$$

De discriminant D hiervan is:

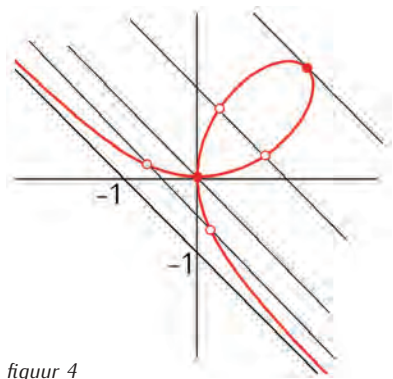
$$c^2 \left(\frac{3 - c}{3c + 3} \right)$$

Het ‘tekenverloop’ van D is:



figuur 3

- De conclusies hieruit zijn, zie ook figuur 4:
- i. De kromme ligt tussen de beide lijnen $x + y = 3$ en $x + y = -1$.
 - ii. De lijnen $x + y = 3$ en $x + y = 0$ hebben één punt met de kromme gemeenschappelijk.
 - iii. De lijnen $x + y = c$ met $0 < c < 3$ en $-1 < c < 0$ hebben twee snijpunten met de kromme.
 - iv. De lijn $x + y = -1$ zou wel eens een asymptoot van de kromme kunnen zijn.

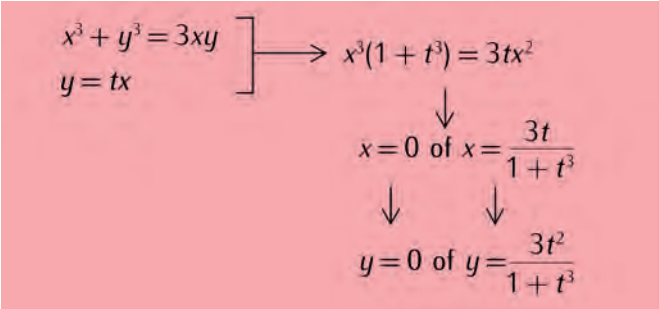


figuur 4

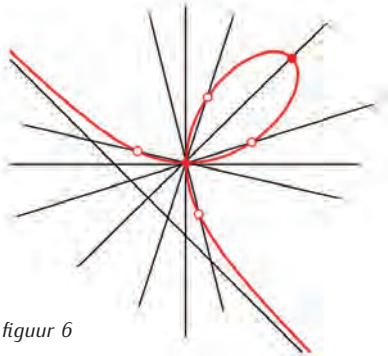
Leve de parametervoorstelling!

Bij de herziening van het curriculum wiskunde in 1968 werd het analyseprogramma in het toen kersverse vwo flink uitgebreid. Een van de nieuwe onderwerpen was: parametervoorstellingen van krommen. Daar was ik destijds heel verheugd over. Parametervoorstellingen hebben een dynamisch karakter en verbinden op een natuurlijke wijze analyse met kinematica. Veel later toen de grafische rekenmachine zijn intree deed, was ik opnieuw blij vanwege de mode PAR. Ik vind dat we daar in het onderwijs en in de eindexamens te weinig vruchten van hebben geplukt.

Neem het folium van Dürer. Om die te produceren op het scherm van de GRM is er een parametervoorstelling nodig. Hoe die te vinden:
 Iedere lijn door O , zeg $y = tx$, snijdt het folium buiten O in één punt, zie figuur 6. Inderdaad:



figuur 5



figuur 6

Kortom, het folium van Descartes luistert naar de parameter-
voorstelling:

$$(x,y)=\left(\frac{3t}{1+t^3},\frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

Duidelijk is nu dat de beide coördinaten naderen tot $\pm\infty$
in het geval $t \rightarrow -1$.

Dat in dit geval $x + y$ tot -1 nadert volgt dan uit:

$$\frac{3t}{1+t^3} + \frac{3t^2}{1+t^3} = \frac{3t(1+t)}{1+t^3} = \frac{3t}{1-t+t^2}$$

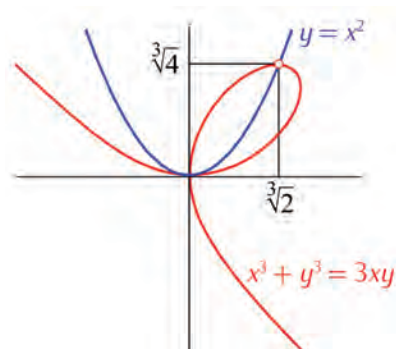
Hiermee is hard gemaakt dat de lijn $x + y = -1$ een
asymptoot is van de kromme $x^3 + y^3 = 3xy$.

Verdubbeling van de kubus

Een van de vermaarde constructieproblemen uit de
Griekse wiskunde is de verdubbeling van de kubus. Ik zal
de legende van de pestepidemie in Athene rond 430 v.Chr.
hier niet o(p)rakelen, maar me beperken tot het daaruit
voortvloeiende vraagstuk: *hoe een kubus te construeren
met de dubbele inhoud van een gegeven kubus?* Dit komt
neer op een constructie van het getal $\sqrt[3]{2}$.

Inmiddels weten we al zo'n 200 jaar dat dit niet lukt via
snijpunten van cirkels en rechte lijnen. Via snijpunten met
andere krommen lukt dat wel, bijvoorbeeld via de kegel-
smeden $y = x^2$ en $xy = 2$.

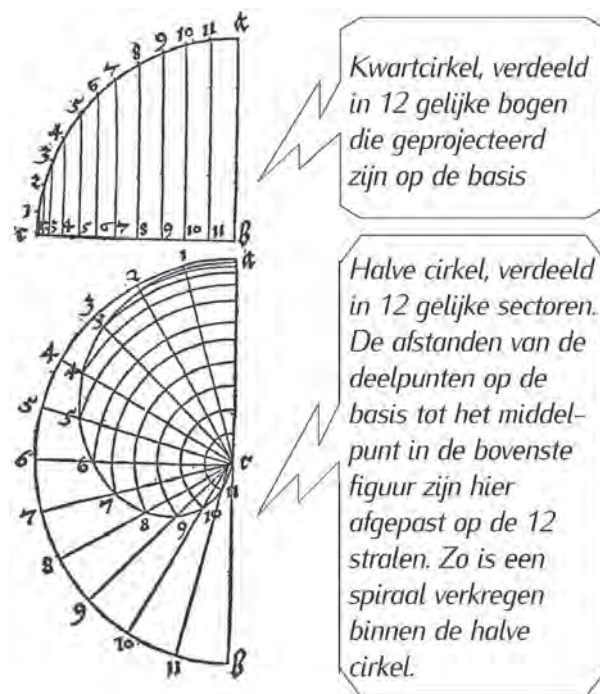
Het voorbeeld in het boek van markies De l'Hôpital leerde
mij dat het folium van Descartes samen met een parabool,
het snijpunt $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ oplevert, zie figuur 7.



figuur 7

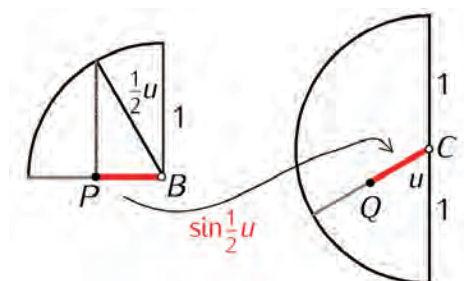
Het folium van Dürer

De beroemde schilder Albrecht Dürer (1471 – 1528)
schreef tegen het eind van zijn leven een meetkundeboek
voor kunstenaars en kunstliefhebbers: *Underweysung der
Messung*. In het eerste deel van dit werk worden diverse
kromme lijnen voorgesteld, waaronder (een deel van) de
kromme die nu de naam 'folium van Dürer' draagt,^[2] zie
figuur 8.



figuur 8

In figuur 9 is Dürers constructie vertaald in 'goniotaal'
(die toen nog moest worden uitgevonden).



figuur 9

Via deze figuur kan een parametervoorstelling van Dürers
kromme worden opgesteld. Bijvoorbeeld:

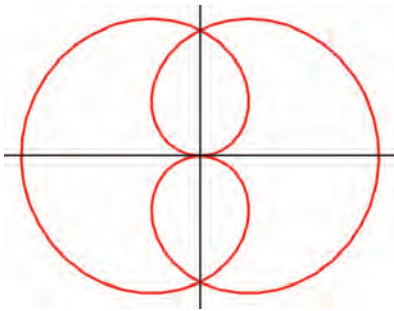
$$(x,y)=(\sin\frac{1}{2}u \cdot -\cos u, \sin\frac{1}{2}u \cdot \sin u)$$

of na substitutie $u = \pi - t$:

$$(x,y)=(\cos\frac{1}{2}t \cdot \cos t, \cos\frac{1}{2}t \cdot \sin t)$$

Met $0 \leq t \leq \pi$ levert dit Dürers kromme, maar dan een
kwartslag gedraaid, zoals onmiddellijk op een GRM of met
GeoGebra kan worden geverifieerd.

Bij uitbreiding van het t -domein tot $[0, 4\pi]$ komt er
een symmetrische kromme tevoorschijn, zie figuur 10, die
vanwege de twee bladvormige lusjes later de naam 'folium'
kreeg.



figuur 10 Het complete Folium van Dürer

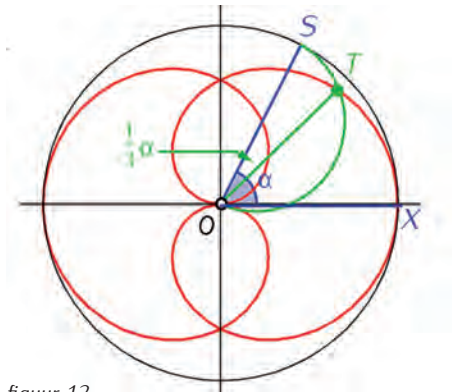
De x, y - vergelijking van het folium van Dürer is wel een stukje ingewikkelder dan die van het folium van Descartes. Om haar te vinden bekijk ik eerst een vergelijking in poolcoördinaten: $r = \cos \frac{1}{2} \theta$. Van hier naar een x, y - vergelijking vraagt ouderwets rekenwerk:

$$\begin{aligned}
 r &= \cos \frac{1}{2} \theta \text{ en } r^2 = x^2 + y^2 \text{ en} \\
 2(\cos \frac{1}{2} \theta)^2 - 1 &= \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 \downarrow \\
 [2(x^2 + y^2 - 1)]^2 &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\
 \downarrow \\
 y^2 &= 4(x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2 - 1)
 \end{aligned}$$

figuur 11

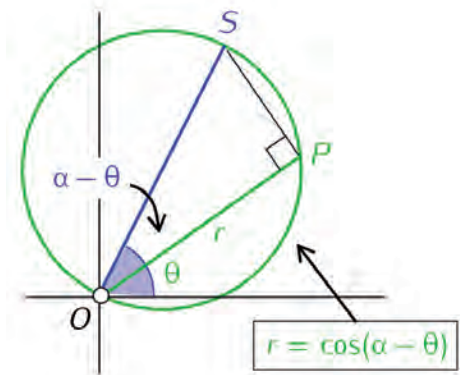
Trisectie van een hoek

Dat het folium van Dürer ook in verband kan worden gebracht met een andere oud-Griekse constructieopgave, namelijk de trisectie van een willekeurige hoek, was voor mij verrassend. In figuur 12 is het folium met omgeschreven cirkel afgebeeld. Dat de straal van die cirkel gelijk is aan 1 volgt uit de poolvergelijking $r = \cos \frac{1}{2} \theta$. In de figuur is bovendien de hoek $XOS (= \alpha)$ getekend. Op het been OS is een halve cirkel opgericht aan de kant van het been OX . Die halve cirkel snijdt het folium in het punt T . Bewering: *de lijn OT is nu één van de trisectrices van hoek α* . Om dit te bewijzen gebruik ik vergelijkingen in poolcoördinaten van zowel het folium als de halve cirkel. Die van het folium is al genoemd, nu nog die van de cirkel met middellijn OS .



figuur 12

Zie figuur 13. OS heeft de lengte 1. Als $P(r, \theta)$ een willekeurig punt is van de cirkel met middellijn OS , geldt $OP \perp SP$. En omdat $\angle SOP = \alpha - \theta$, weet ik nu dat $r = \cos(\alpha - \theta)$ een poolvergelijking is van de cirkel met middellijn OS .



figuur 13

Van het snijpunt T van deze cirkel met het folium van Dürer (zie figuur 12) voldoen de poolcoördinaten aan de twee vergelijkingen:

$$r = \cos \frac{1}{2} \theta \text{ en } r = \cos(\alpha - \theta).$$

Het is nu een kwestie van θ oplossen uit:
 $\cos \frac{1}{2} \theta = \cos(\alpha - \theta).$

Dit levert op:
 $\theta = \frac{2}{3} \alpha.$

En hiermee is aangetoond dat OT een ‘trisectrice’ is van hoek α .

Bij mij rijst even de vraag: doen we op school wel wat aan poolcoördinaten, als alternatief voor ‘gewone’ coördinaten? Dit kan immers heel goed in de onderbouw, terwijl later poolvergelijkingen van krommen ter sprake zouden mogen komen. En is er niet een mode POL op de GRM? >

Kennis van krommen

De ondertitel van l'Hôpital's boek uit 1699 luidde: *pour l'intelligence des lignes courbes*, ofwel 'voor de kennis van krommen'. Het begrip 'kromme' definieert l'Hôpital (in navolging van Bernoulli) als 'een oneindige verzameling van oneindig kleine lijnstukken'. Zo praat je in de wiskunde dus 'recht wat krom is'. Maar serieus: de lezer zal toch toegeven dat het in ons wiskundeonderwijs niet veel zaaks is met de kennis van kromme lijnen. Er is wel (te?) veel aandacht voor de parabool, maar dan niet voor de meetkundige aspecten en de toepassingen daarbij, denk aan 'focuserende spiegel' en 'kogelbaan'.

Van tijd tot tijd komen ook de andere kegelsneden aan de beurt in het curriculum, maar dat was en is nooit van al te lange duur. En er zijn zoveel meer interessante krommen die met een modern hulpmiddel als *GeoGebra* op school zouden kunnen worden bestudeerd en die het wiskundeonderwijs zouden kunnen verrijken.^[3] Ik citeer uit een lijstje van aanbevelingen door een vakontwikkelgroep wiskunde uit 1995:

- *archimedische en logaritmische spiraal*,
- *astroïde, cycloïde en trochoïde*,
- *cardioïde en slaklijnen*,
- *figuren van Lissajous*.^[4]

Het is er toen niet van gekomen. Wél is er nu een mooi zebraboek (auteurs Jan Aarts en Swier Garst) waarin een aantal van deze krommen met gebruik van *GeoGebra* worden behandeld.^[5]

Tot slot wil ik nog eens een lans breken (in infinitesimale stukjes) voor meer mooie krommen op school!

Noten

- [1] Zie bijvoorbeeld: Bradley, R.E., Salvatore J., Petrilli, C., Sandifer, E. (2015). *L'Hôpital's Analyse des Infiniments petits, an annotated translation with sources material by Johann Bernoulli*, Science Networks, Historical Studies, volume 50. Bazel: Birkhäuser.
- [2] Zie ook Kindt, M. (2018). *De meetkunst van Albrecht Dürer*, Zebra 55. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [3] Een rijke bron is: Lockwood, E.H. (1961). *A book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Dit was opgenomen in het advies examenprogramma's havo/vwo van de Stuurgroep Profiel Tweede Fase als onderdeel van het domein Periodieke Bewegingen waarbij een dynamische behandeling van krommen in parametervoorstelling werd aanbevolen.
- [5] Aarts, J. en Garst, S. (2017). *Een verkenning van krommen (nu met GeoGebra)*, Zebra 49. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Haakjes, hokjes, hekjes

‘Haakjes’ zijn de leestekens van de algebra-taal. Aan de neiging om die weg te willen werken moet lang niet altijd worden toegegeven. Met ‘hokjes’ worden de cellen in een vermenigvuldigingstabel bedoeld. En ‘hekjes’? Daar kun je een probleem van maken.

Sturen met haakjes

De boer had een varken en de vader van de boer was ook de moeder van het varken.

Dit was een van de vele grapjes waar mijn vader, taalliefhebber, mij op trakteerde in mijn jeugd. Hij las deze zin hardop, met volslagen onbegrip van mijn kant tot gevolg. Door een rustpauze in te lassen na ‘vader’ en de klemtoon op de volgende ‘van’ te leggen, werd alles duidelijk. Schriftelijk kan dit raadsel eenvoudig worden opgelost met een komma achter ‘vader’. Komma’s sturen betekenis!

In de algebra sturen we betekenis met haakjes. Zeg je bijvoorbeeld ‘het kwadraat van x plus y ’, dan kun je niet weten of er $x^2 + y$ of $(x + y)^2$ wordt bedoeld. Je redt het ook niet met ‘ x plus y in het kwadraat’ want dat kan even goed slaan op $x + y^2$ als op $(x + y)^2$. Tussen twee haakjes, hier ligt een kans voor een aardig sommetje: voor welke waarden van x en y maakt het niet uit welke van de drie interpretaties je kiest?

Dat het voor $x = y = 0$ niks uitmaakt, voel je op je klompen aan, maar dat dit ook geldt voor $x = y = \frac{1}{3}$ vraagt even wat algebra. Hoe los je $x^2 + y = (x + y)^2 = x + y^2$ op? Natuurlijk: ‘haakjes wegwerken’ bij de middelste vorm.

‘Haakjes wegwerken’, is populair jargon voor wat in rekenmachinetaal ‘expand’ of ‘uitwerken’ heet. ‘Haakjes toevoegen’ hoor je zelden, terwijl dat toch een net zo’n belangrijke actie in algebra kan zijn. Bij de invoer van functies in de GRM of bij het gebruik van computeralgebra heb je daar om de haverklap mee te maken.

En dan is er ook nog zoiets als ‘haakjes vergeten’. Hoe vaak heb ik dat vroeger niet gezien?

De leerling wil bijvoorbeeld -5 substitueren voor x in de vorm $x^2 + 6x + 4$. Hij schrijft doodleuk op:

$$-5^2 + 6 \cdot -5 + 4 = 25 - 30 + 4 = -1.$$

Als leraar rekende ik dit in zo’n geval niet fout, maar schreef op zijn minst twee rode haakjes om die eerste -5 . In de klas vergeleek ik wel $(0 - 5)^2$ met $0 - 5^2$ om de noodzaak van de haakjes duidelijk te maken. Het verstandig plaatsen van haakjes, ook waar het misschien niet per se noodzakelijk is, maar om te verduidelijken, verdient veel aandacht. Daartoe kun je ook uitdagende probleempjes voorleggen. Bijvoorbeeld^[1]:

Plaats zo nodig haakjes in de vier vormen in het linkerlid zo dat er steeds een identiteit ontstaat:

$$\begin{aligned} a + 2 \cdot a + 7 &= 3a + 7 \\ a + 2 \cdot a + 7 &= 3a + 14 \\ a + 2 \cdot a + 7 &= a^2 + 2a + 7 \\ a + 2 \cdot a + 7 &= a^2 + 9a + 14 \end{aligned}$$

Natuurlijk kan het best nog wat moeilijker, en kun je er eventjes een sport van maken. Nog aardiger: laat de leerlingen zelf zulke opgaven ontwerpen, dat verdiept en het bevordert reflectie!

De Horner-vorm

Wat maakt de kwadratische functie zo belangrijk dat er zoveel aandacht aan wordt besteed? Ik heb het nooit kunnen ontdekken, maar dat zij al heel lang een plaag is voor een zekere categorie leerlingen is een feit. In de jaren zeventig hadden we in het kader van het project Wiskivon^[2] een proefschool voor lbo/mavo in Utrecht. De lerares Nanda kon heel wat aan, maar wat was nu een simpele en inzichtelijke manier om die ellendige kwadratische functies te lijf te gaan? Samen bedachten we dat ‘ x buiten haakjes brengen’ bij twee termen een optie kon zijn. Neem bijvoorbeeld: $x^2 - 6x + 4 = x(x - 6) + 4$. Als je $x = 0$ invult komt er 4 uit en dit gebeurt ook voor $x = 6$. Je hebt dan twee punten op de grafiek, te weten $(0, 4)$ en

(6, 4), die ‘even hoog’ liggen. Maar dan weet je ook dat de symmetrieas door het punt (3, 0) moet gaan, enzovoort. Dit sloeg aan bij de leerlingen en Nanda was blij. Tegenwoordig gebruiken de leerlingen een rekenmachine om bij een zekere x de bijpassende y te berekenen, maar er is een tijd geweest dat dit zonder hulp van elektronica moest. Zo van: bereken $f(11)$ als $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Wel, $11^2 - 6 \cdot 11 + 4 = 121 - 66 + 4 = 59$. Vergelijk dit eens met: $11 \times (11 - 6) + 4 = 59$. De laatste berekening is makkelijker en sneller! Met hervorming tot $f(x) = x(x - 6) + 4$ is tijdswinst te boeken. Dat had niemand minder dan Newton al in de gaten waar hij bijvoorbeeld $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0$ herschreef^[3] als

$$y-4 \times y+5 \times y-12 \times y+17=0$$

Waarmee hij bedoelde: $((y - 4)y + 5)y - 12)y + 17 = 0$ Newton gebruikte dus overkappingen in plaats van haakjes. Ieder polynoom kan op deze wijze worden herschreven. Ik vermoed dat de GRM, via zo’n gestapelde vorm, functiewaarden berekent bij een gegeven polynoom-functie! Dat scheelt rekentijd en spaart de batterij. Deze ‘Horner-vorm’ is de meest zuinige om functiewaarden bij polynomen te berekenen.^[4]

De hokjes van Sawyer

Een van de aardigste boeken over didactiek van de algebra is *Vision in Elementary Mathematics* van W.W. Sawyer, dat ooit (1969) in vertaling is uitgegeven als Prismaboek met de titel *Aanschouwelijk Algebra*. Het vermenigvuldigen van veeltermen wordt daarin vormgegeven met tabellen. Zo wordt bijvoorbeeld $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 3)$ gegoten in een tabel:

	x^2	$-2x$	$+3$
x^2	x^4	$-2x^3$	$3x^2$
$-4x$	$-4x^3$	$8x^2$	$-12x$
$+5$	$5x^2$	$-10x$	15

De gelijksoortige uitkomsten staan in de diagonalen van ‘linksonder naar rechtsboven’. Samennemen daarvan leidt tot een vijfterm van de graad 4, zodat de conclusie is $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 2x + 3) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15$. De lezer zal het beamen, daar kan geen ‘papegaaienbek’ tegen op!

Ooit heb ik als leraar zo’n stuk of twintig stencils met zulke tabellen ter invulling gemaakt en die op een vrijdag uitgedeeld aan mijn brugklas met de opdracht thuis een paar van die werkbladen in te vullen. Het weekend was zeer regenachtig en de volgende maandag kwam een meisje triomfantelijk in de les met alle tabellen foutloos ingevuld en mijn hoop de klas een paar dagen voor te zijn met lesmateriaal was vervlogen. Zou dat ook gebeurd zijn als ik dezelfde opgaven op de traditionele manier, dus ‘lineair’ had afgedrukt?

Terug naar Newtons vierdegraads veelterm. Hij demonstreerde zijn rekenwijze door als voorbeeld de substitutie $y = p + 3$ stapsgewijs toe te passen. Zijn tekst luidde, vrijwel letterlijk vertaald:

De nieuwe vergelijking wordt

$$\overbrace{p-1} \times \overbrace{p+3} = p^2 + 2p - 3 \text{ en}$$

$$p^2 + 2p + 2 \text{ maal } p + 3 = p^3 + 5p^2 + 8p + 6$$

$$\text{en } p^3 + 5p^2 + 8p - 6 \text{ maal } p + 3 =$$

$$p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 18$$

$$\text{en dit geeft } p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1 = 0$$

Ik doe dit na, maar dan met Sawyers aanpak:

	p	$+3$
p	p^2	$3p$
-1	$-p$	-3

$+ 5 \rightarrow p^2 + 2p + 2$

	p	$+3$
p^2	p^3	$3p^2$
$2p$	$2p^2$	$6p$
2	$2p$	6

$- 12 \rightarrow p^3 + 5p^2 + 8p - 6$

	p	$+3$
p^3	p^4	$3p^3$
$5p^2$	$5p^3$	$15p^2$
$8p$	$8p^2$	$24p$
-6	$-6p$	-18

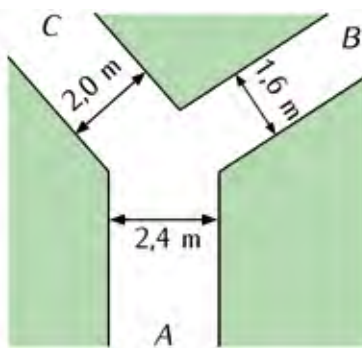
$+ 17 \rightarrow p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 18p - 1$

>

Maar dit soort algebra doen we toch al lang niet meer op school? Dat is waar, maar de vraag is of we daar dan misschien toch in tekortschieten. Het stoeien met wat meer ingewikkelde vormen, het organiseren van herleidingen, vooral ook als er meer variabelen in het spel zijn, kan zowel de vaardigheid als het inzicht in algebra vergroten.

Hekjesproblemen

Geïnspireerd door het werk van Sawyer legde ik mijn leerlingen ooit het volgende probleem voor:^[5]
Bij een driesprong komen drie landweggetjes bij elkaar die respectievelijk 1,6 m, 2,0 m en 2,4 m breed zijn. Regelmatig worden er over die wegen kudde vee geleid. Als zo'n kudde bijvoorbeeld geleid moet worden van A naar B (of omgekeerd) wordt de weg naar C door middel van draaihekken afgesloten, zie figuur 1 en 2.



figuur 1

Een slimme ambtenaar heeft bedacht dat je met drie hekken, elk draaiend om een paal geplaatst in een hoekpunt van de door de wegen ingesloten driehoek, kunt volstaan om naar believen één van de wegen precies af te sluiten.



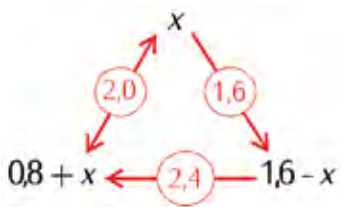
figuur 2 illustratie uit Wiskrant 9 (1977)

De vraag is nu hoe breed moet elk van die hekken zijn, wil het precies passen? Er zijn verschillende strategieën mogelijk.

- (1) *Trial and error*
- (2) Stel de breedte van één van de hekjes x , druk de breedte van de andere twee ook uit in x en stel een vergelijking op in x .
- (3) Stel de breedte van de hekjes x , y en z . Dit leidt tot drie vergelijkingen in x , y en z (waarbij in elke vergelijking één variabele ontbreekt).
- (4) Bedenk dat de som van de breedtes van de hekjes gelijk moet zijn aan de halve omtrek van het driehoekige kruispunt.

Methode (4), zou je de gezond-verstand-methode kunnen noemen. Dit gaat zó: de halve omtrek van de driehoek is 3 m. De twee hekjes die de weg naar A afsluiten zijn samen 2,4 m breed, dus blijft er voor het derde hekje 0,6 m over. Net zo vind je voor de andere hekjes de breedte 1,0 m en 1,4 m.
 Proef op de som: $0,6 + 1,0 = 1,6$; $0,6 + 1,4 = 2$ en $1,0 + 1,4 = 2,4$.

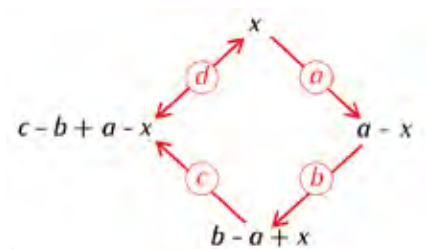
In mijn klas stuurde ik destijds aan op methode (2), omdat ik mijn leerlingen met ‘haakjes’ en ‘minnen’ wilde laten opereren. Ik geef de drie hekjes nu zonder verdere uitleg aan met AB , BC en CA .
 Stel hekje $BC = x$. Dan: hekje $BA = 1,6 - x$ en hekje $AC = 2,4 - (1,6 - x) = 0,8 + x$.
Daar was het Sawyer in zijn boek (en mij in mijn les) om te doen: als je 1,6 van 2,4 aftrekt krijg je 0,8, als je minder van 2,4 aftrekt, krijg je natuurlijk meer, in dit geval $+x$.
 Hekje BC en hekje AC moeten samen de weg naar C kunnen afsluiten, $x + 0,8 + x = 2,0$ dus $x = 0,6$.
 Je kunt deze aanpak schematisch weergeven, zie figuur 3:



figuur 3

Kan het ook bij een viersprong?

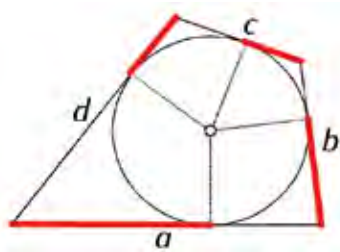
Het is verleidelijk om dan ook eens te kijken naar situaties waarbij meer dan drie wegen bij elkaar komen. Eerst maar eens een viersprong. En om gelijk maar te generaliseren stel ik de breedtes van de vier wegen voor door a , b , c en d . Het bijpassende oplossingsschema wordt dan, zie figuur 4:



figuur 4

En zie: het gaat alleen goed in het speciale geval $c - b + a = d$ ofwel als $a + c = b + d$. Kortom, wil er een oplossing zijn, dan moeten van het vierhoekige plein waar de wegen elkaar ontmoeten de sommen van de paren overstaande zijden aan elkaar gelijk zijn. In dit geval kun je de breedte van het hekje langs de kortste zijde (zeg a) vrij kiezen (mits $< a$). De breedtes van de andere hekjes liggen dan vast en het gaat altijd goed.

Met een vierhoek waarvoor $a + c = b + d$ is er iets speciaals aan de hand. Sla een oud meetkundeboek er op na en je vindt dat zo'n vierhoek een *raaklijenvierhoek* moet zijn,^[6] met andere woorden, dat zo'n vierhoek een ingeschreven cirkel heeft, zie figuur 5.

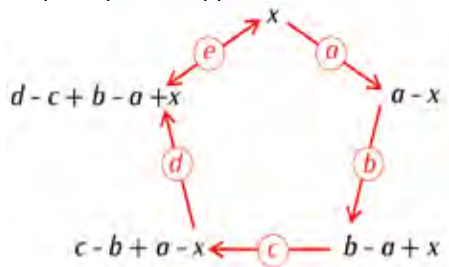


figuur 5

De raaklijnstukken kunnen nu als hekjes worden gezien waarmee de wegen op overstaande zijden worden afgesloten. Er blijft dan één route voor een kudde schapen over. Dit geldt vanzelf ook voor elk ander viertal hekjes dat voldoet.

Het wordt nu nog eens duidelijk dat het bij een driesprong altijd lukt met de hekjes. Elke driehoek heeft immers een ingeschreven cirkel en de raaklijnstukken uit de hoekpunten representeren dan het – in dit geval unieke – drietal hekjes.

Ik ga nu nog één stapje verder. Het schema bij een vijfprong



figuur 6

Het gevolg is dat er precies één oplossing is, namelijk $x = \frac{1}{2}(a - b + c - d + e)$. Helaas, met vijf hekjes kun je slechts twee wegen afsluiten en er blijven dan nog drie wegen open, zodat de kudde zich gemakkelijk in twee groepen kan splitsen.

Noten

- [1] Zie Kindt, M. (2011). Principles of Practice. In P. Drijvers (Red.), *Secondary Algebra Education* (pp. 137-178). Rotterdam: Sense Publishers.
- [2] Wiskivon (= wiskunde in het vo) was een project van de voorloper van het Freudenthal Instituut, het IOWO.
- [3] Uit Newtons boek met de titel *De Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (uitgegeven in 1711).
- [4] Zie Knuth, D. (1938). *The Art of Computer Programming*.
- [5] Sawyer introduceerde dit als 'het berenprobleem', waarbij een man zijn driehoekige erf deels kan afsluiten voor beren. Ik heb de context destijds aangepast en erover geschreven in het artikel Tussen twee haakjes (*Wiskrant* 9, november 1977)
- [6] Voor een fraai bewijs van de stelling zie bijvoorbeeld Fladt, K. (1932). *Elementargeometrie band 1*, B.G. Berlijn: Teubner.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Dualiteit in meetkunde

Dualiteit komt in verschillende gedaanten voor in verschillende meetkonden. De projectieve meetkunde spant daarbij de kroon, want die is volmaakt dual. Maar ook in de 'gewone' euclidische meetkunde zijn er sporen van dualiteit te vinden.

Dualiteit in projectieve meetkunde

Dualiteit in de meetkunde is een zekere symmetrie tussen begrippen (bijvoorbeeld 'punt' en 'lijn') en relaties (bijvoorbeeld 'ligt op' en 'gaat door'). In de projectieve meetkunde is het *bon ton* om beide relaties te betitelen als *is incident met*.

De absolute dualiteit tussen punten en lijnen in de projectieve meetkunde wordt vastgelegd door de axioma's dat er bij elk paar punten juist één lijn *incident* is met beide punten en dat er bij elk paar lijnen juist één punt is dat *incident* is met beide lijnen. Elke stelling in de projectieve meetkunde heeft een duale pendant. Het bewijs van de ene stelling kan door 'vertaling' worden omgezet in een bewijs voor de duale stelling. De meetkundige Von Staudt (1798 – 1867) maakt in zijn boek *Geometrie der Lage* de dualiteit zichtbaar door teksten af te drukken in twee kolommen gescheiden door een verticale lijn. Bij elke stelling kreeg de lezer zo een duale-stelling-met-bewijs als het ware cadeau.

Dualiteit tussen hoek en zijde

Als 12-jarige beginnening in de euclidische meetkunde vond ik de stellingen over de gelijkbenige driehoek mooi en handig bij allerlei opgaven. Mooi vanwege dat wat ik nu als een soort dualiteit zie.

(1) *Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de hoeken tegenover die zijden gelijk.*

(2) *Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de zijden tegenover die hoeken gelijk.*

Je hoeft in stelling (1) alleen maar 'zijde(n)' in 'hoek(en)' en 'hoek(en)' in 'zijde(n)' te vertalen om stelling (2) te krijgen.

Zo presenteerde mijn leraar dat niet, maar hij legde wel uit dat stellingen (1) en (2) elkaars omgekeerde zijn.

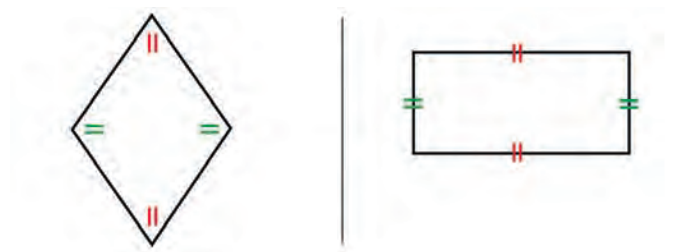
Dat 'omgekeerd' niet hetzelfde betekent als 'dual' blijkt duidelijk uit de volgende stellingen voor vierhoeken:

(3) *Als in een vierhoek de vier zijden gelijk zijn, dan zijn de overstaande hoeken paarsgewijs gelijk.*

(4) *Als in een vierhoek de vier hoeken gelijk zijn, dan zijn de overstaande zijden paarsgewijs gelijk.*

Deze stellingen zijn min of meer vanzelfsprekend, want in het eerste geval is er sprake van een ruit, in het tweede geval van een rechthoek.

(3) en (4) zijn niet elkaars omgekeerde, maar er is wel sprake van dualiteit tussen zijde(lengte) en hoek(grootte). 'Ruit' en 'rechthoek' kun je blijkbaar als duale figuren zien, zie figuur 1.

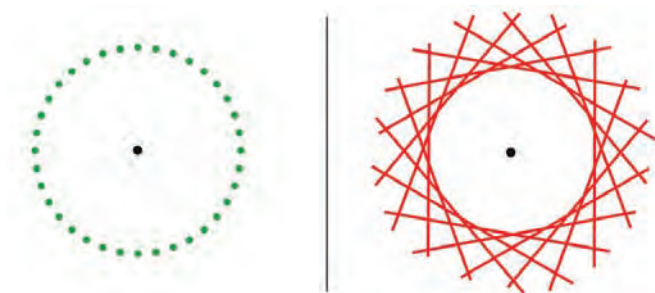


figuur 1

Een vierkant is zowel ruit als rechthoek en zou je daarom 'zelfdual' kunnen noemen.

Dualiteit tussen 'omcirkel' en 'incirkel'

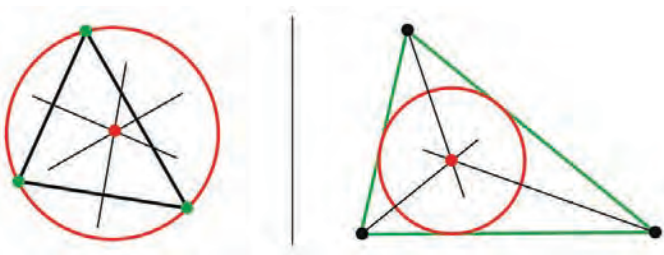
Een cirkel wordt normaliter gedefinieerd als de 'meetkundige plaats' van punten die op een vaste afstand van een vast punt liggen. Maar een cirkel is ook de 'omhullende' van de lijnen die op vaste afstand van een vast punt liggen, zie figuur 2.



figuur 2

De begrippen *meetkundige plaats* en *omhullende* kunnen worden beschouwd als duale begrippen. Iedere driehoek heeft zowel één ‘omcirkel’ als één ‘incirkel’, ook een voorbeeld van dualiteit!

Het middelpunt van de omcirkel is het snijpunt van de symmetrieassen van de zijden en dat van de incirkel is het snijpunt van de symmetrieassen van de hoeken, zie figuur 3, dualiteit tussen hoeken en zijden!



figuur 3

Hoe zit het nu bij vierhoeken?

Er zijn vierhoeken (*koordenvierhoeken*) die een omcirkel hebben en er zijn er met een incirkel (*raaklijnvierhoeken*).

Koordenvierhoek en raaklijnvierhoek zijn duale begrippen en daar passen duale stellingen met duale bewijzen bij. Eerst de stellingen:

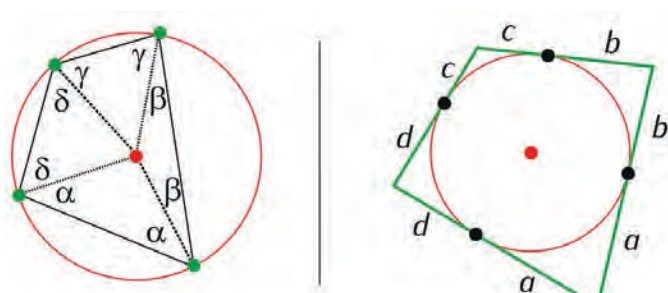
(5) Een vierhoek heeft een omcirkel, als en alleen als de som van het ene paar overstaande hoeken gelijk is aan de som van het andere paar.

(6) Een vierhoek heeft een incirkel, als en alleen als de som van het ene paar overstaande zijden gelijk is aan de som van het andere paar.

‘Als en alleen als’ betekent hier twee keer twee bewijzen. Ik begin met ‘alleen als’, dus met de twee noodzakelijke voorwaarden, zie figuur 4.

In de figuur links is de som van elk paar overstaande hoeken gelijk aan $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

In de figuur rechts is de som van elk paar overstaande zijden gelijk aan $a + b + c + d$. De volledige bewijzen zijn niet volmaakt dual. De gelijkheid van de paren

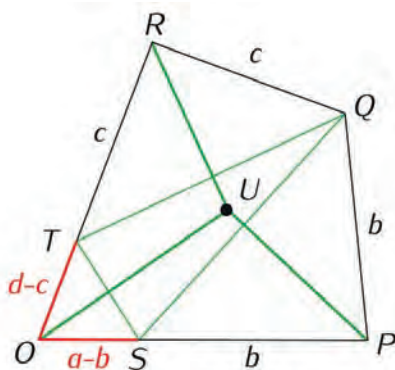


figuur 4

‘deelhoeken’ (links) volgt direct uit stelling (1). Maar voor de gelijkheid van de ‘deelzijden’ (of raaklijnstukken) is wat meer nodig dan – de met (1) duale – stelling (2). Ook is het zo dat in het geval van de koordenvierhoek gekeken moet worden naar situaties waarbij het middelpunt niet binnen de vierhoek ligt. Dit levert niet al te grote problemen op, maar wel variaties op het in figuur 4 verbeelde bewijs. Het bewijs voor het ‘voldoende zijn’ van de voorwaarden kan zowel bij (5) als (6) uit het ongerijmde worden bewezen en zo stond het in sommige schoolboeken van vroeger. Daarbij moet dan wel een aantal gevallen worden onderscheiden en de bewijzen in de boeken waren vaak niet volledig. Er zijn ook mooie directe bewijzen voor het voldoende zijn van de voorwaarden in (5) en (6), die ik hier uit de doeken doe.^[1]

Ik begin hier, zie figuur 5, met stelling (6). Gegeven is vierhoek $OPQR$ met $OP = a$, $PQ = b$, $QR = c$ en $RO = d$. Bovendien geldt: $a + c = b + d$.

Als $a = b = c = d$ is de vierhoek een ruit en omdat de diagonalen van een ruit de bissectrices zijn van de hoeken is hun snijpunt het middelpunt van een cirkel die aan de vier zijden raakt. Veronderstel nu $a > b$. Omdat $a + c = b + d$ volgt dan $c < d$. Op zijde OP is er een punt S te vinden zó dat $PS = b$ en dus $OS = a - b$. Net zo is er op OR een punt T zo dat $RT = c$ en $OT = d - c$.

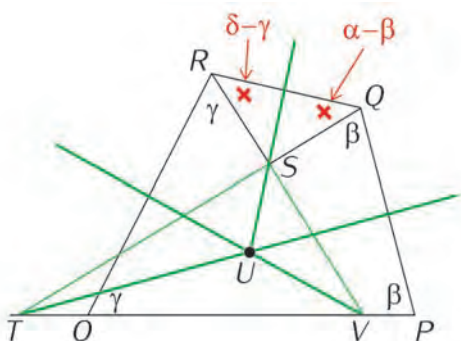


figuur 5

>

Uit $a + c = b + d$ volgt $a - b = d - c$, zodat $OS = OT$. Dat betekent dat de bissectrice van $\angle POR$ ook de middelloodlijn van lijnstuk TS is! De driehoeken QPS en QRT zijn ook gelijkbenig, zodat de bissectrices van de hoeken QPS en QRT de middelloodlijnen zijn van achtereenvolgens de lijnstukken QS en QT .

Kortom, de bissectrices van de hoeken O , P en R van vierhoek $OPQR$ zijn tevens de middelloodlijnen van de zijden van driehoek QST en gaan dus door één punt U . Hieruit volgt dan dat U op gelijke afstanden van de zijden van vierhoek $OPQR$ ligt, die daarmee is bevorderd tot raaklijnenvierhoek! Nu het bewijs voor het voldoende zijn van de voorwaarde genoemd in de duale stelling (5). De vraag is of ik dit kan vinden door het voorgaande bewijs als het ware te dualiseren? Het antwoord is 'ja'. Van vierhoek $OPQR$ weet ik nu dat de sommen van de paren overstaande hoeken, zeg $\alpha + \beta$ en $\gamma + \delta$ aan elkaar gelijk zijn. Als $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, dan is de vierhoek een rechthoek en het snijpunt van de twee symmetrieassen van de rechthoek is het middelpunt van de cirkel die door de vier hoekpunten gaat.

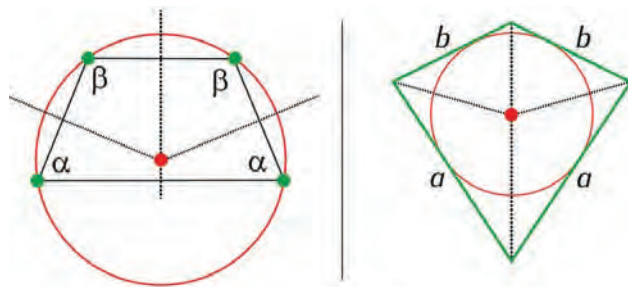


figuur 6

Veronderstel nu $\alpha > \beta$. Omdat $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ volgt dan $\gamma < \delta$. Dat betekent, zie figuur 6, dat binnen hoek PQR een lijn QT kan worden getrokken die met PQ een hoek gelijk aan β maakt. Net zo is er een lijn RV binnen hoek ORQ die met OR een hoek maakt gelijk aan γ . Uit $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ volgt $\alpha - \beta = \delta - \gamma$, zodat de hoeken SQR en SRQ gelijk zijn aan elkaar. Dat betekent dat de middelloodlijn van QR ook de bissectrice is van hoek TSV . De driehoeken ROV en QPT zijn ook gelijkhoekig zodat de middelloodlijnen van OR en PQ de bissectrices zijn van achtereenvolgens OVR en PTQ . Kortom de middelloodlijnen van de zijden QR , PQ en RO zijn tevens de bissectrices van de hoeken van driehoek TVS en gaan dus door één punt U . Daaruit volgt dat U gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten van vierhoek $OPQR$ die daarmee is bevorderd tot koordenvierhoek.

Het 'duaal denken' levert hier inderdaad het bewijs op dat ik zocht. Zoiets lukt in de projectieve meetkunde altijd, maar in de euclidische meetkunde slechts sporadisch.

Beide bewijzen ben ik begonnen met het uitsluiten van de bijzondere exemplaren 'ruit' en 'rechthoek'. Er zijn nog twee speciale gevallen, zie figuur 7. Dit is bij (5) de vierhoek met $\alpha = \beta \neq \gamma = \delta$ ofwel het *gelijkbenig trapezium* en bij (6) de vierhoek met $a = b \neq c = d$ ofwel de *vlieger*.

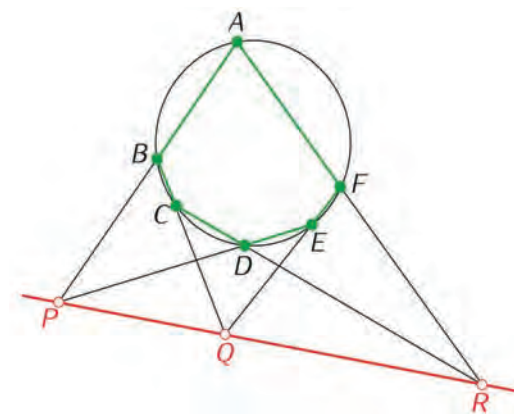


figuur 7

In de twee hier beschreven bewijzen hoefden deze gevallen niet te worden uitgezonderd.

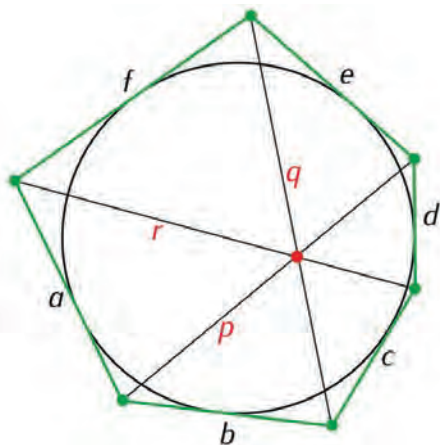
Pascal en Brianchon

De stellingen genoemd naar Pascal (1623 – 1662) en Brianchon (1783 – 1864) vormen een beroemde duale tweeling in de meetkunde. Pascal ontdekte en bewees op 16-jarige leeftijd dat de snijpunten van de (verlengden van) de overstaande zijden van een *koordenzeshoek* op één rechte lijn liggen, zie figuur 8.



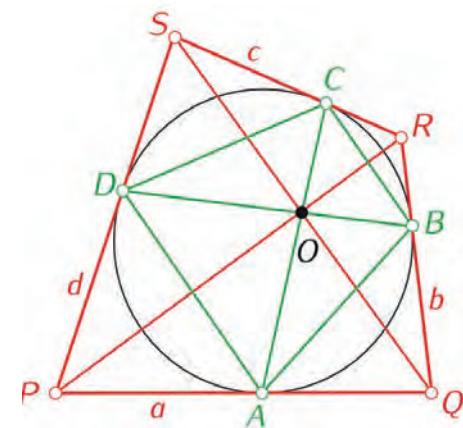
figuur 8

De duale stelling (Brianchon) heeft als onderwerp een *raaklijnenzeshoek* en zegt dat daarin de verbindingslijnen van overstaande hoekpunten door één punt gaan, zie figuur 9.



figuur 9

De dualiteit van de eerdere stellingen (5) en (6) heeft te maken met de grootte van hoek en zijde. Dit zou je een ‘metrieke dualiteit’ kunnen noemen. Bij de stellingen van Pascal en Brianchon heeft de dualiteit betrekking op ‘snijpunt’ en ‘verbindingslijn’ en dat is typisch de dualiteit die we kennen in de projectieve meetkunde en die betrekking heeft op incidentie.^[2] De bewijzen geef ik hier niet, ze zijn in elk projectieve-meetkundeboek te vinden, en dan in algemenere vorm waarbij in plaats van *cirkel*, sprake is van *kegelsnede*. In [3] staat ook de originele tekst die de jonge Pascal produceerde. Een fraai gevolg van Brianchons stelling is een stelling die koorden- en raaklijnvierhoek als het ware verenigt, zie figuur 10.



figuur 10

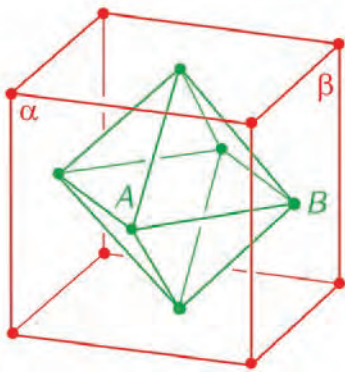
De raakpunten van de incirkel van de vierhoek met zijden PQ (of a), QR (of b), RS (of c) en SP (of d) zijn de hoekpunten van koordenvierhoek $ABCD$. De snijpunten van de diagonalen van beide vierhoeken vallen dan samen! Deze stelling kan worden bewezen met wat ik hier een

‘Brianchon-speciaal’ noem. Dat gaat zo. Beschouw de raaklijnvierhoek als de raaklijnenzeshoek met zijden a, a, b, b, c, c en d . Naast de hoekpunten P, Q, R en S zijn er nog twee ‘hoekpunten’: het punt A (als ‘snijpunt’ van a en a) en het punt C (als snijpunt van c en c). De drie verbindingslijnen van overstaande hoekpunten zijn nu AC, QS en RP en die gaan volgens Brianchon door één punt. Op analoge wijze kan $PQRS$ worden gezien als de zeshoek met zijden b, b, c, c, d, d en a , waarvan de hoekpunten zijn Q, B, R, S, D , en P , waarbij de drie lijnen QS, BD en RP ook concurrent zijn.

- Ik merk nog op dat er twee speciale gevallen zijn:
- Is vierhoek $PQRS$ een vlieger, dan is $ABCD$ een gelijkbenig trapezium.
 - Is $PQRS$ een ruit, dan is $ABCD$ een rechthoek.

In de ruimte

In dit artikel heb ik me beperkt tot duale vormen en stellingen in de vlakke meetkunde. Ook in de ruimtemeetkunde zijn er duale fenomenen. Daar zijn ‘punt’ en ‘vlak’, ‘verbindingslijn’ (van punten) en ‘snijlijn’ (van vlakken) voorbeelden van duale begrippen. Drie punten die niet op één lijn liggen, bepalen een vlak en drie vlakken die niet door één lijn gaan bepalen een punt, tenzij ... Om hier perfecte dualiteit te krijgen moet er worden overgestapt naar de projectieve ruimte. Als mooi voorbeeld van duale ruimtelijke figuren noem ik de kubus en regelmatig achthoek, zie figuur 11.



figuur 11

De kubus heeft acht (hoek)punten en zes (zij)vlakken, het achthoek heeft acht (zij)vlakken en zes (hoek)punten. Beide figuren hebben twaalf ribben. De 1-1 correspondentie tussen de ribben van beide vormen is dual bepaald! Als het voorvlak en het rechterzijvlak van de kubus

>

respectievelijk α en β heten, en de hoekpunten van het achthoekig vlak die in die vlakken liggen A en B , dan correspondeert de snijlijn van α en β met de verbindingslijn van A en B . Een laatste dualistische opmerking die hierbij past: de omgeschreven bol van het achthoekig vlak is tevens de ingeschreven bol van de kubus.

“Meetkundige dualiteit is een intrigerend aspect van de schoonheid van de wiskunde en verdient wat mij betreft meer aandacht in ons onderwijs!”

Noten

- [1] Zie bijvoorbeeld: Molenbroek, P. (1931). *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: Noordhoff.
- [2] De letters a, b, c, d, p, q, r in figuur 9 stellen niet lengten maar (namen van) zijden voor.
- [3] Kindt, M. (1996). *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Pythagorische rijtjes

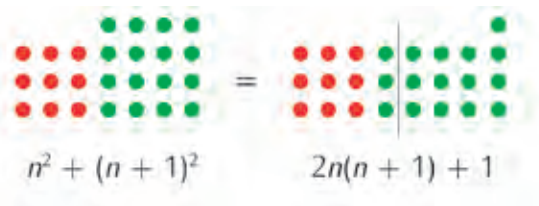
Een rijtje van n positieve gehele getallen wordt een pythagorisch rijtje (P_n -rijtje) genoemd als het kwadraat van het grootste getal gelijk is aan de som van de kwadraten van de kleinere getallen. Over P_3 -rijtjes is sinds de Oudheid alles bekend. In dit artikel worden ook P_n -rijtjes met $n = 4$ of 5 bekeken.

Aanleiding

Een poos geleden ontving ik een bericht van Rolf Doets^[1], die mij vertelde dat hij een leuke manier had ontdekt om P_4 -rijtjes te maken:

- kies twee opeenvolgende getallen;
- bereken het product daarvan;
- tel 1 bij dit product op.

Kortom, maak een rijtje (a, b, c, d) van de vorm: $a = n$, $b = n + 1$, $c = n(n + 1)$, $d = n(n + 1) + 1$. Een beetje algebra leert dat er dan inderdaad sprake is van een P_4 -rijtje. Hij vroeg mij of ik ook een ‘plaatjesbewijs’ voor dit feit wist. Mijn antwoord was dat c en d van een hogere dimensie zijn dan a en b en dat het me daarom moeilijk (zo niet onmogelijk) lijkt om de complete identiteit met één plaatje aan te tonen, maar dat er wel een paradigmatisch plaatje is bij $a^2 + b^2 = 2c + 1$, zie figuur 1, en dat het dan nog een kwestie is van bij beide leden c^2 optellen.



figuur 1

Nu eerst een tabelletje om te zien wat het recept van Rolf oplevert:

n	(a, b, c, d)	
1	(1, 2, 2, 3)	$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
2	(2, 3, 6, 7)	$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
3	(3, 4, 12, 13)	$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
4	(4, 5, 20, 21)	$4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$
5	(5, 6, 30, 31)	$5^2 + 6^2 + 30^2 = 31^2$

tabel 1

Dit noem ik speciale P_4 -rijtjes, speciaal omdat ze bestaan uit twee paren van opeenvolgende getallen. Voor ik hiermee verder ga, wil ik eerst kijken naar speciale P_3 -rijtjes. Het beroemdste daarvan is ongetwijfeld (3, 4, 5) dat uit drie opeenvolgende getallen bestaat. Dat dit het enige P_3 -rijtje is met drie opeenvolgende getallen is een leuk sommetje voor de leerling: *de vierkantsvergelijking $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ heeft de oplossingen $x = 3$ en $x = -1$, klaar.*

Maar met twee opeenvolgende getallen, zoals het op één na bekendste P_3 -rijtje (5, 12, 13), dat verstopt zit in tabel 1, zijn er oneindig veel. Voorbeelden: (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85).

Er is een recept zoals dat van Rolf Doets om die te maken, daar kom ik later op terug. Er zijn ook P_3 -rijtjes waarvan de kleinste twee getallen elkaar opvolgen. Voorbeeld: (20, 21, 29).

En een befaamd Babylonisch kleitablet^[2] bevat, zij het impliciet, het rijtje (119, 120, 169). Ook voor zulke trio's bestaat een recept zoals zal blijken.

Algemene recepten

In de Oudheid werden diverse recepten ontdekt om P_3 -rijtjes te genereren. Het meest algemene recept kan worden gevonden uit de identiteit:

$(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2$

Als je voor x en y kwadraten invult krijg je zeker een P_3 -rijtje. Kortom, kies natuurlijke getallen m, n en neem $a = |m^2 - n^2|, b = 2mn, c = m^2 + n^2$.

Dat je zo alle mogelijke trio's (dat wil zeggen op een constante factor na!) vindt, kan op allerlei manieren worden bewezen, ook daar kom ik op terug.

Het recept om Pythagorische viertallen (a, b, c, d) te maken is analoog. De identiteit

$(x - y - z)^2 + 4xy + 4xz = (x + y + z)^2$

zegt dat bij elke keuze van de natuurlijke getallen k, m, n het kwartet $a = |k^2 - m^2 - n^2|, b = 2km, c = 2kn$ en $d = k^2 + m^2 + n^2$ een P_4 -rijtje vormt. Tabel 2 toont het begin van een oneindig voort te zetten tabel:

k	m	n	a	b	c	d
1	1	1	1	2	2	3
2	1	1	2	4	4	6
2	2	1	1	8	4	9
3	1	1	7	6	6	11
3	2	1	4	12	6	14
3	2	2	1	12	12	17
3	3	1	1	18	6	19
3	3	2	4	18	12	22
4	1	1	14	8	8	18
4	2	1	11	16	8	21
4	3	1	6	24	8	26
4	3	2	3	24	16	29
4	3	3	2	24	24	34
4	4	1	1	32	8	33
4	4	3	9	32	24	41

tabel 2

Het eerste rijtje uit deze tabel is ook het eerste rijtje van tabel 1. Het tweede rijtje is niet echt nieuw, want het is evenredig met het eerste. De rijtjes (2,3, 6,7) en (3, 4, 12, 13) van tabel 2 zijn hier respectievelijk terug te vinden in vermomming: (4, 12, 6, 14) en (6, 24, 8, 26). De vraag die je kunt stellen is nu of bijvoorbeeld het rijtje (5, 6, 30, 31) van tabel 1 ook te vinden is via het k, m, n -recept. Even kijken: stel $k^2 - m^2 - n^2 = 5, km = 3, kn = 15$ en $k^2 + m^2 + n^2 = 31$. Uit de eerste en de laatste betrekking volgt $k^2 = 18$. Ik neem $k = 3\sqrt{2}$ zodat m en n achtereenvolgens gelijk zijn aan $1/\sqrt{2}$ en $5/\sqrt{2}$. Substitutie levert dan het gewenste rijtje op. Zoiets lukt voor elk 'Rolf-Doets-rijtje', het bewijs daarvan is een goede oefening in algebra. Bij toepassing van het k, m, n -recept moet je blijkbaar ook irrationale waarden voor k, m, n toelaten om alle denkbare P_4 -rijtjes te genereren.

Rationale punten op eenheidscirkel en -bol

Dat het m, n -recept voor P_3 -rijtjes en net zo het k, m, n -recept voor P_4 -rijtjes 'volledig' zijn, kan bijvoorbeeld worden aangetoond met analytische meetkunde. Met 'volledig' bedoel ik dan dat deze recepten een (of meer) representant(en) leveren van elke equivalentieklasse van evenredige rijtjes.

Eerst de P_3 -rijtjes. Daartoe kijk ik naar de cirkel in het Oxy -vlak met de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Op die cirkel liggen oneindig veel punten met rationale coördinaten, zoals $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}), (\frac{8}{17}, \frac{15}{17})$.

Zulke punten corresponderen met P_3 -rijtjes en omgekeerd levert elk P_3 -rijtje een punt op van de eenheidscirkel (in het eerste kwadrant) met rationale coördinaten. De clou is nu om een algebraïsche parametervoorstelling van de eenheidscirkel op te stellen, zie figuur 2.



figuur 2

Ik laat de rechte lijn met richtingscoëfficiënt t draaien om het punt $(0, -1)$ van de eenheidscirkel. De x -coördinaat van het tweede snijpunt S met de cirkel voldoet aan $x^2 + (tx - 1)^2 = 1$ en is daarom gelijk aan $\frac{2t}{t^2 + 1}$; de y -coördinaat is dan: $\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.

Daarmee is een rationale parametervoorstelling gevonden van de eenheidscirkel. Stel t gelijk aan de breuk met noemer m en teller n , waarbij $m > n$. De coördinaten van S uitgedrukt in m en n zijn dan:

$$x = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ en } y = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$$

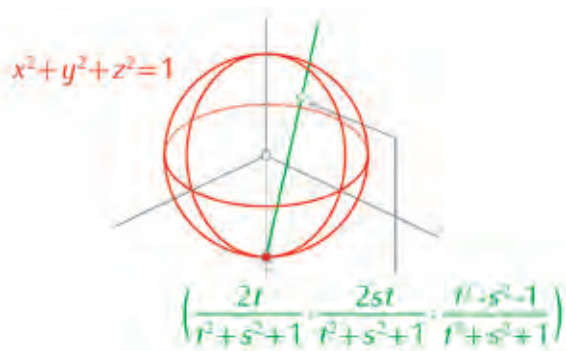
en nu is het duidelijk dat elk P_3 -rijtje evenredig is met een rijtje van de vorm $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ waarbij m en n natuurlijke getallen zijn.

Op analoge wijze kunnen de P_4 -rijtjes worden behandeld. Ik ga dan uit van de bol met middelpunt $(0, 0, 0)$ en straal 1, in een orthonormaal assenstelsel $Oxyz$ en kies een variabele lijn door de 'zuidpool' met richtingsvector $(1, s, t)$.

Door $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ te combineren met de vectorvoorstelling $(x, y, z) = (0, 0, -1) + \lambda(1, s, t)$ vind ik de coördinaten van het tweede snijpunt S :

$$x = \frac{2t}{t^2 + s^2 + 1}, \quad y = \frac{2st}{t^2 + s^2 + 1} \text{ en } z = \frac{t^2 - s^2 - 1}{t^2 + s^2 + 1}.$$

Zo is er een rationale parametervoorstelling van de eenheidsbol gevonden, zie figuur 3.



figuur 3

Door voor s en t rationale getallen te substitueren, krijg ik rationale punten op de eenheidsbol die op hun beurt P_4 -rijtjes voortbrengen. Laat nu k, m en n natuurlijke getallen ($\neq 0$) zijn en stel $s = m/n$ en $t = k/n$.

Substitutie in de parametervoorstelling levert op:

$$x = \frac{2kn}{k^2 + m^2 + n^2}, \quad y = \frac{2km}{k^2 + m^2 + n^2}, \quad z = \frac{k^2 - m^2 - n^2}{k^2 + m^2 + n^2}.$$

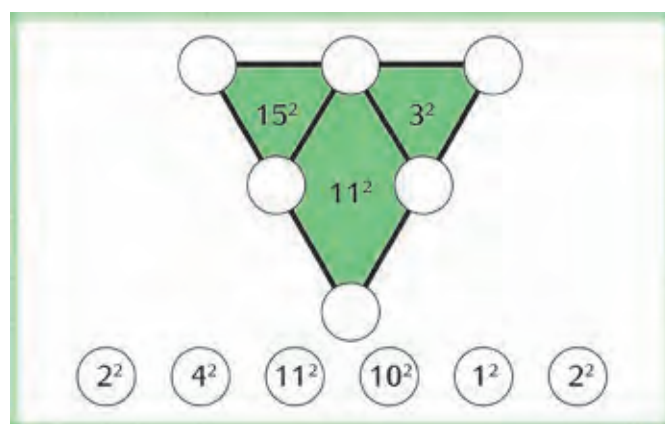
Dus elk P_4 -rijtje is evenredig met een rijtje $(|k^2 - m^2 - n^2|, 2km, 2kn, k^2 + m^2 + n^2)$.

Dat dit verhaal niet ophoudt bij drie dimensies zal geen verwondering wekken. Door in een 4D-stelsel de

'eenheids-hypersfeer' te snijden met een lijn door $(0, 0, 0, -1)$ krijg ik een algebraïsche parametervoorstelling van $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, waaruit dan een algemeen recept voor P_5 -rijtjes kan worden gevonden, en zo verder, en zo voort.

P-rijtjes met burens

Rolf Doets ontdekte zijn recept bij het ontwerpen van Resolf-puzzels met kwadraten, als in figuur 4.



figuur 4

De opdracht bij deze puzzel is:

Plaats de zes (ronde) speelgetallen in de knopen, zodat de som van de omringende knopen gelijk is aan de waarde in elk veld.

Een mooi type opgave, waarmee de leerling – en in dit geval de lezer – kan worden uitgedaagd. Met een combinatie van proberen, corrigeren en redeneren moet het lukken. De oplossing levert twee P_4 -rijtjes en één P_5 -rijtje op. De lezer heeft inmiddels waarschijnlijk al wel gevonden dat die rijtjes zijn: $(1, 2, 2, 3)$, $(2, 10, 11, 15)$ en $(1, 2, 4, 10, 11)$. Ze zijn speciaal in de zin dat ze ten minste één paar natuurlijke buurgetallen bevatten.

In het begin van dit artikel heb ik enkele P_3 -rijtjes met burens genoemd, en daar kom ik nu op terug. Om een bouwschema voor zulke trio's te vinden ga ik uit van het algemene recept met $m > n$, dus: $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$.

Stel dat $2mn$ en $m^2 + n^2$ buurgetallen zijn. Dan geldt: $(m - n)^2 = 1$, dus $m = n + 1$. Dit gesubstitueerd in de algemene formule, geeft het rijtje: $(2n + 1, 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1)$. Een recept à la dat van Rolf Doets, maar dan voor speciale P_3 -rijtjes!

Iets lastiger is het om een recept te vinden voor P_3 -rijtjes waarbij de kleinste twee getallen burens zijn. Er moet dan gelden:

$$(m^2 - n^2) - 2mn = \pm 1$$

ofwel

$$(m - n)^2 - 2n^2 = \pm 1. \quad (*)$$

Dit roept bij mij herinneringen op aan wat in de getaltheorie de *Pell-vergelijking* heet:

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1.$$

Als (x, y) een positief geheeltallig oplossingspaar is van een van beide vergelijkingen dan geldt dat ook voor het paar $(x + 2y, x + y)$, een mooie oefening in algebra op school!

De kleinste oplossing is $(1, 1)$ en van daaruit vind je dan $(x, y) = (3, 2), (7, 5), (17, 12)$, enzovoort.

Merk op dat deze getallenparen bij voortzetting teller en noemer zijn van steeds beter wordende breukbenaderingen van $\sqrt{2}$.

Dit geeft mij oplossingsparen van vergelijking $(*)$, namelijk $(m, n) = (2, 1), (3, 2), (12, 5), (29, 12), \dots$ die op hun beurt de P_3 -rijtjes $(3, 4, 5), (21, 20, 29), (119, 120, 169), (697, 696, 985), \dots$ genereren.

Die rijtjes passen bij geheelzijdige rechthoekige driehoeken die steeds betere look-a-likes zijn van – zeg maar – de geodriehoek!

Nog iets over speciale P_4 - en P_5 -rijtjes

Er is geen enkel pythagorisch kwartet met vier opeenvolgende getallen, omdat de vergelijking

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$$

gelijkwaardig is met $x^2 = 2$.

Het onderzoek naar het bestaan van P_4 -rijtjes met drie opeenvolgende getallen heeft wat meer voeten in de aarde. Ik bekijk achtereenvolgens de rijtjes

$$(x - 1, x, x + 1, y) \text{ en } (x, y - 1, y, y + 1).$$

In het eerste geval leidt dit tot $y^2 - 3x^2 = 2$. Eventuele geheeltallige oplossingsparen (x, y) moeten bestaan uit twee getallen met dezelfde pariteit.

(1) Stel x en y beide even.

$y^2 - 3x^2$ is dan een 4-voud en kan dus onmogelijk gelijk zijn aan 2.

(2) Stel x en y beide oneven.

Hun kwadraten zijn dan gelijk aan een 8-voud + 1 en

$y^2 - 3x^2$ is dan gelijk aan een 8-voud – 2 en dat kan niet gelijk aan 2 zijn.

Het tweede rijtje $(x, y - 1, y, y + 1)$ leidt tot de vergelijking $x^2 + y^2 - 4y = 0$ met als geheeltallige oplossingsparen $(0, 0), (2, 2), (0, 4)$ en $(-2, 2)$. Het paar $(2, 2)$ levert op $(2, 1, 2, 3)$ het enige P_4 -rijtje met drie opeenvolgende getallen.

Dit artikel opende met P_4 -rijtjes met twee paar burens. En inderdaad, als je wilt dat $(x, x + 1, y, y + 1)$ een P_4 -rijtje is, komt er $x^2 + x = y$, juist het recept van Rolf! P_4 -rijtjes met één paar burens zijn er talloze.

Ten slotte kijk ik nog even naar P_5 -rijtjes. De Resolf-puzzel in figuur 4 leverde een rijtje met twee paar burens: $(1, 2, 4, 10, 11)$. Dat er van zulke rijtjes oneindig veel zijn is snel te zien. Laat $(k, k + 1, m, n, n + 1)$ zo'n rijtje zijn. Er volgt dan $2k^2 + 2k + m^2 = 2n$, zodat m een even getal moet zijn.

Neem bijvoorbeeld $m = 6$. Voor elke waarde van k kleiner dan 6, vind ik uit bovenstaande vergelijking een P_5 -rijtje met paren burens. Die rijtjes zijn dan: $(1, 2, 6, 20, 21), (2, 3, 6, 24, 25), (3, 4, 6, 30, 31), (4, 5, 6, 38, 39), (5, 6, 6, 48, 49)$.

Het vierde rijtje bestaat zelfs uit een trio en een duo van opvolgende getallen, en ook van zulke rijtjes zijn er oneindig veel.

Noten

- [1] Rolf Doets is de bedenker van het spel RESOLF dat eindeloos veel mogelijkheden biedt om leerlingen spelenderwijs te laten oefenen in rekenen / algebra.
- [2] Bedoeld is het beroemde kleitablet Plimpton 322 waarop vijftien getallenparen staan die elk deel uitmaken van een pythagorische trio. Zie Zebraboekje 20 met de titel *Babylonische Wiskunde* (auteurs A. van der Roest en M. Kindt).

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Andere tijden meetkunde

Geen onderdeel van het wiskundeprogramma is de afgelopen zes decennia zo vaak gewijzigd als de meetkunde, zowel in de onder- als bovenbouw. Dit artikel geeft een impressie van het meetkundeonderwijs in de eerste 25 jaar na de Tweede Wereldoorlog.

Mijn eerste meetkundelessen (1)

In de meetkunde wordt de vorm en de grootte onderzocht van de voorwerpen die wij om ons zien. De meetkundige houdt geen rekening met de stof waaruit een voorwerp is gemaakt en evenmin met de kleur, de temperatuur of andere natuurkundige eigenschappen van het voorwerp, maar let alleen op de uitgebreidheid en op de plaats, welke het in de onbegrensde ruimte inneemt; het deel van de ruimte, dat een voorwerp inneemt, noemt men een meetkundig lichaam of kortweg een lichaam.

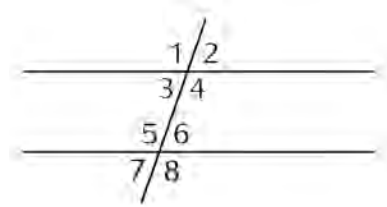
Dit was de eerste alinea in het schoolboek *meetkunde* van Kobus/Van Thijn (1948) voor de eerste klas van het toenmalige vmo.^[1] Werd je geacht als twaalfjarige dit te kunnen lezen? Of schreven de auteurs over de hoofden van de leerling aan de leraar in de hoop dat die er wel chocola van zou kunnen maken bij de introductie van de meetkundelessen? Mijn leraar van destijds had daar geen zin in, want voor ons werd die eerste meetkundeles een soort hardop-leesles. Om beurten moesten we een stuk uit het boek voorlezen, waarbij dan op commando van de leraar het stokje moest worden doorgegeven aan een leerling die wat minder actief leek mee te doen.

De alinea die volgde luidde aldus:

Aan elk voorwerp (bv, een blok hout) zien we vlakken; zij zijn de grenzen tussen het voorwerp en de omringende ruimte. Waar twee vlakken van een voorwerp samenkomen, zien wij kanten of lijnen; een lijn is de grens tussen twee vlakken of tussen twee delen van een vlak. De uiteinden van een lijn noemt men punten.

Wat daarna volgde was een ware stortvloed van vetgedrukte woorden uit de euclidische vaktaal. Ik herinner me hoe vreemd dit alles op mij overkwam. Toen we een aantal lessen later met passer en liniaal constructies leerden uitvoeren (loodlijn oprichten, loodlijn neerlaten, bissectrice

et cetera), begon het een beetje te leven. Maar afgezien daarvan bleef meetkunde nog een poos saai en moeilijk. Wat te denken van *tien* stellingen over twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde, zie figuur 1?



figuur 1

Daarbij kwam van alles om de hoeken kijken: *overeenkomstige, verwisselende binnen en buiten, binnen en buiten aan dezelfde kant van de snijlijn*. Vijf soorten paren keer twee uitspraken – implicatie heen en terug – geeft tien stellingen die we uit het hoofd moesten leren.

De termen *F-hoeken*, *Z-hoeken* en *U-hoeken*, werden pas later didactisch bon ton in het onderwijs.

In mijn herinnering duurde het tot november voor ik meetkunde leuk ging vinden en zelf bewijzen kon geven die ik dan, net als mijn leraar, triomfantelijk kon afsluiten met drie hoofdletters: Q.E.D.

Mijn eerste meetkundelessen (2)

Elf jaar later, in 1960 kort na de herfstvakantie, begon ik mijn loopbaan als leraar op een school in Den Haag. Het meetkundeboek had de niet erg originele titel *Elementen, Leerboek der Meetkunde*, auteur: Van der Wilt.

Ik schat in dat de methode niet heel bekend was in die tijd, waarvan wel gezegd werd dat iedere zichzelf respecterende leraar zijn eigen boek schreef. Het voorwoord (bij de eerste druk, 1951) opent met de veelzeggende woorden:

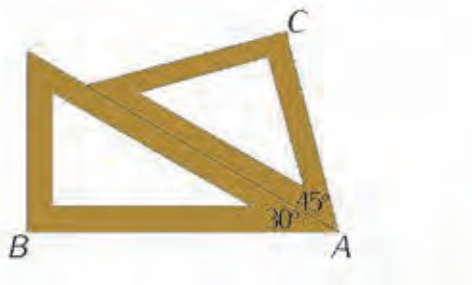
Alweer een nieuw meetkunde leerboek? Was dat nodig?
De auteur vond uiteraard van wel. Hij gaf als argument dat de leerlingen in de gangbare boeken voor opgaven worden geplaatst die door de meesten niet zelfstandig kunnen worden opgelost. Als voorbeeld van zo'n te lastige opgave geeft de auteur:

Men heeft twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde. Men deelt twee overeenkomstige hoeken midden-door. Bewijs dat deze deellijnen evenwijdig lopen.
Laat dit nu uitgerekend het vraagstuk zijn, waaraan ik als leerling mijn doorbraak in het 'bewijzen' te danken had.^[2] Dat voorwoord van Van der Wilt heb ik destijds vast niet gelezen. Ook van de inhoud van het boek herinner ik me niet al te veel. Er was een werkboek bij, dat sprak me wel aan.

De inleiding was toen ik de klas overnam een gepasseerd station en net als mijn leraar van vroeger legde ik de theorie uit op mijn eigen wijze en de meeste opgaven vond ik best geschikt. Maar na zoveel jaren vind ik het wel grappig om even naar de start van het eerste hoofdstuk (titel: 'Punt. Lijn.') te kijken.

Als men de punt van een potlood over een stuk papier beweegt, ontstaat een lijn. Beweegt een punt zich steeds in dezelfde richting, dan ontstaat een r e c h t e lijn. Verandert een bewegend punt steeds van richting, dan ontstaat een k r o m m e lijn.

In het tweede hoofdstuk (titel: 'Hoeken') is onder meer het plaatje uit figuur 2 te vinden:



figuur 2

De tekst erbij:
Met behulp van de tekendriehoeken kunnen we hoeken tekenen van 30°, 45°, 60° en 90°. Ook is het mogelijk om een hoek van 75° te tekenen door beide driehoeken te gebruiken.

Je zou dan toch de vraag verwachten: 'welke andere hoeken kun je met die twee driehoeken maken?' Nou ja, er moest ook wat voor de leraar overblijven.

Die twee tekendriehoeken, iedere leerling had die (ik heb ze nog steeds) zijn in latere jaren vervangen door de

geo-driehoek. Stiekem heb ik dat altijd een beetje jammer gevonden, want je kon er bijvoorbeeld mooi evenwijdige lijnen mee tekenen door de een langs de ander te schuiven en zo de stelling van de gelijke overeenkomstige hoeken mee in praktijk brengen. Het had natuurlijk ook via de twee rechte hoeken gekund, maar daar heb ik toen nooit aan gedacht. Die twee oude tekendriehoeken waren wat je noemt klassiek. Want in het boek *Timaios* zegt Plato:

Laten we dus kiezen voor de twee (rechthoekige) driehoeken waaruit de lichamen van het vuur en de andere elementen kunnen worden gemaakt: de gelijkbenige driehoek en de driehoek waarvan de langste (rechthoeks) zijde in het kwadraat altijd driemaal zo lang is als het kwadraat van de kortste zijde.

Met 'vuur en de andere elementen' (dat zijn aarde, water en lucht) bedoelt Plato de regelmatige veelvlakken met uitzondering van de dodecaëder. Met tekendriehoeken van de ene soort kun je een vierkant, met die van de andere soort een regelmatige driehoek maken. In beide gevallen kan met twee exemplaren worden volstaan. Voor mij is het raadselachtig waarom Plato er vier voor het vierkant en zes voor de gelijkzijdige driehoek gebruikt. Was ik als leraar maar op de hoogte geweest van Plato's tekst, ik had er chocola van kunnen maken.

Vernieuwing in de jaren zestig

In 1958 was het zogenaamde Wimecos-leerplan^[3] ingevoerd. Maar veel verschil met het oude leerplan (uit 1937) was in de meeste schoolboeken niet te ontdekken, al waren er wel uitzonderingen zoals *Van figuren naar begrippen* van het echtpaar Van Hiele^[4].

In dit verband wil ik ook de mooie serie *Planimetrie* van de auteurs Maassen en Van Oosten noemen. In het eerste hoofdstuk met als titel 'Figuren' worden de leerlingen uitgedaagd door een serie taken. Daarbij figureert een set van plastic staafjes, waarmee veelhoeken kunnen worden gemaakt. Zo wordt met de staafjes met lengte 8, 12, 8 en 12 cm het idee parallellogram geïntroduceerd, met de daarbij horende opdracht:

Pak dat parallellogram vast bij twee overstaande hoekpunten en vervorm het. Er zijn dus zeer veel parallellogrammen die zijden hebben van 8, 12, 8 en 12 cm en je kunt er net zoveel maken als je wilt.

Vervolgens wordt er gelet op de overstaande hoeken en naar een conclusie toegewerkt.

Ik was in 1963 van school veranderd en in Wageningen gaan werken, en wilde na een jaar deze methode daar graag ingevoerd zien, maar kreeg mijn collega's toen helaas niet mee.

>

New math

Inmiddels was er een soort pandemie uitgebroken met de naam 'new math'. In Nederland was de CMLW^[5] opgericht die zich eerst richtte op een soort heropvoeding van wiskundeleraars en later experimenten met nieuwe leerstof organiseerde. Er werd toegewerkt naar een nieuw leerplan dat tegelijkertijd met de Mammoetwet ingevoerd zou moeten worden. Voor de meetkunde van de onderbouw was al vaker gepleit voor een intuïtieve inleiding, liefst vanuit de ruimte en nu kwamen ook transformatiemeetkunde en vectormeetkunde in zicht. In sommige, vooral Zuid-Europese landen, werd Euclides van zijn voetstuk gehaald met de kreet: 'A bas Euclide'. De afstand tussen de wiskunde van het voortgezet en die van het hoger onderwijs was te groot geworden en er werd gepleit voor een sterk structuralistisch georiënteerd wiskundeonderwijs. In oktober 1963 stond in ons vakblad een artikel van professor N.H. Kuiper onder de titel 'Lofzang op de Meetkunde'. Als lovenswaardige elementen vatte hij samen:

- deduceren
- vertrouwdheid met vlak en ruimte; praktisch nut;
- creativiteit en inventiviteit geprikkeld;
- genot;
- opbouw intuïtie en steun voor belangrijke wiskundige begrippen;
- voorbereiding voor later te gebruiken wiskunde.

Daar kan ik het nog steeds hartroerend mee eens zijn, maar dat geldt minder voor de voorbeelden die Kuiper etaleerde. Hij pleitte voor een modernisering waarbij er meer aandacht zou moeten zijn voor affiene meetkunde en waarbij hij uitlegt hoe coördinaten kunnen worden ingevoerd als lineaire functies op het vlak. Verder maakte hij consequent gebruik van de verzamelingentaal ('verzisch') die ik toen ook al enthousiast in mijn lessen was gaan gebruiken, met name bij de behandeling van 'meetkundige plaatsen'. Ik weet nog hoe ik in mijn nopjes was met een oplossing van een van mijn tweedeklasleeringen bij de volgende toetsopgave:

Gegeven een hoek en een punt P binnen die hoek. Construeer door P de lijn die gelijke stukken van de benen van de hoek afsnijdt.

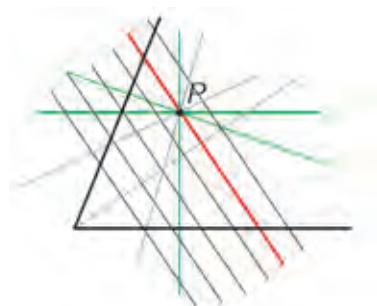
Die leerling redeneerde aldus, zie figuur 3: twee eisen, dat betekent twee verzamelingen.

- (1) de verzameling van alle lijnen door P .
- (2) de verzameling van alle lijnen die gelijke stukken van de benen van de hoek afsnijden.

Verzameling (1) is de lijnenwaaier met top P .

Verzameling (2) is een serie evenwijdige lijnen die loodrecht staan op de bissectrice van de hoek.

De doorsnede van beide verzamelingen is dus de lijn door P die loodrecht op de bissectrice van de hoek staat! Hij gebruikte bij zijn oplossing ook foutloos de geijkte 'verzische' notaties.

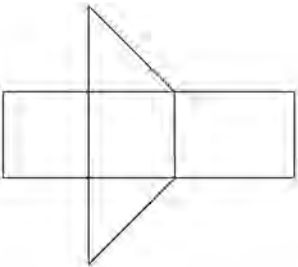


figuur 3

Curriculum.toen

Het is het jaar 1968, de Mammoetwet komt sneller dan door sommigen was verwacht. Experimenten waren nog niet afgerond, laat staan geëvalueerd. Dat gold ook voor de CMLW-proeven met nieuwe leerstof. Voor de meetkunde betroffen die transformatiemeetkunde (in de onderbouw) en meetkunde met vectoren (in de bovenbouw). Enige jaren eerder was er, door een team onder leiding van R. Troelstra^[6] een proef gedaan met vlakke meetkunde gebaseerd op transformaties in deductieve stijl, dus van: gegeven-te bewijzen-bewijs. Het was een fraaie serie van drie boekjes, ik zag dat toen als toekomstmuziek. Ook bij het CMLW-experiment werd Troelstra betrokken, maar nu werd de stijl minder streng en werd er gekozen voor een intuïtieve ruimtelijke inleiding. Dit leidde tot voor zover ik weet het laatste exclusieve schoolboek meetkunde voor de onderbouw, met als titel: *Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen*^[7]. De eerste paragraaf van dit boek ('De kubus') begon aldus: *Ieder van ons die wel eens met een blokkendoos heeft gespeeld, weet wat een kubus is. Laten we eens nagaan hoe zo'n kubus kan ontstaan. Stel je voor, dat we een kubus gaan snijden uit een appel of een brok kaas.* Dat is toch wel andere koek, dan de alinea waarmee ik dit artikel ben begonnen. Al gauw komt dan een mogelijk bouwplaatje (de auteurs zeggen 'netwerk') van de kubus ter sprake. Ik weet nog dat ik mijn brugklasleerlingen de opdracht had gegeven om thuis een kubus van karton te fabriceren en dat de eerstvolgende les iedereen met een kubus op tafel, de een nog mooier dan de andere, op mijn goedkeuring zat te wachten. Natuurlijk kon ik niet nalaten er meteen een probleempje aan vast te knopen: *Stel je voor er zit een mier op een van de punten van je kubus. De mier wandelt over de kubus naar het hoekpunt dat het verst weg ligt. Welke is de kortste route die de*

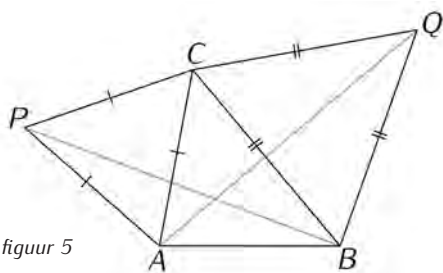
mier kan nemen? Bij de oplossing bood het bouwplaatje goede diensten, zoals de lezer zich kan voorstellen. Een leuke opgave uit het boek betrof het netwerk van een langs een diagonaalvlak gehalveerde kubus, zie figuur 4.



figuur 4

Door na het bouwen van de halve kubus deze met het diagonaalvlak tegen een spiegel te plaatsen werd een hele kubus zichtbaar. Zo werd de spiegeltransformatie ruimtelijk geïntroduceerd. In het volgende hoofdstuk werd de spiegeling beperkt tot het platte vlak. Daarbij werd in eerste instantie een vierkantjesrooster (als bovenaanzicht van een aantal kubussen) gebruikt. In het derde hoofdstuk ('Afbeeldingen') kwam de 'ware' transformatiemeetkunde in beeld. Dat wil zeggen: spiegelingen, rotaties, translaties met hun onderlinge relaties. Na een serie toepassingen (hoofdstuk 4) werd in het vijfde (slot)hoofdstuk het begrip 'congruentie' gedefinieerd: *twee figuren noemen we congruent als de ene figuur beeldfiguur van de andere is bij spiegeling, draaiing, verschuiving of een combinatie ervan*. Geheel volgens het principe van Felix Klein!

Maar de auteurs hinkten op twee gedachten waar ze aan het eind van het boek nog gauw de vijf congruentiekenmerken behandelden, de bouwstenen bij het vroegere bewijzen. Zie bijvoorbeeld deze opgave:
Teken een driehoek ABC met de gelijkzijdige driehoeken ACP en BCQ (zie figuur 5).
Bewijs dat AQ en BP congruent zijn.
Probeer dit eerst eens met een afbeelding, namelijk een rotatie om C. Zoek daarna een congruentiekenmerk.
Waarom die rotatie werd voorgezegd? Dat had toch aan de leraar kunnen worden overgelaten, niet het voorzeggen, maar het zo nodig voorzichtig sturen.



figuur 5

Ik vond het vraagstuk wel mooi en van de bespreking herinner ik me dat de leerlingen het lastig vonden om het 'transformatiebewijs' netjes op te schrijven. Dat ging met die ZHZ toch wel makkelijker, al moest je daarbij wel op het idee komen dat de hoeken PCB en ACQ gelijk zijn. Zo legden de auteurs de vinger op zere plek van de 'new-look-meetkunde': het bewijzen, toch de ziel van de wiskunde, werd er niet makkelijker op. Het gevolg was dat er aan de 'bewijsvaardigheid' in de loop van de jaren, steeds minder aandacht werd besteed. Exit deductie! Was dat spijtig? Als leraar heb ik ervaren dat het zelfstandig bewijzen vinden en ook nog netjes opschrijven, vooral was weggelegd voor de 'happy few'.

Het idee om in de onderbouw zoveel mogelijk intuïtieve en concrete meetkunde te onderwijzen en in de bovenbouw leerlingen met het meest exacte pakket wel 'bewijsmeetkunde' te geven, al of niet aangevuld met analytische methoden en zeker met ruimtemeetkunde, waarbij de eerder genoemde zes elementen van professor Kuiper tot hun recht komen, vind ik – sinds lang en nog steeds – met stip de beste optie voor het meetkundeonderwijs.

Noten

[1] v.h.m.o. stond voor 'voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs

[2] Zie M. Kindt (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[3] Wimecos (vereniging voor leraren wiskunde, mechanica en cosmografie) was de voorloper van de NVvW

[4] P. van Hiele (*De problematiek van het inzicht*) en D. van Hiele-Geldof (*De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het vmo*) waren in 1957 gepromoveerd in Utrecht.

[5] CMLW stond voor Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde

[6] Auteurs *Transformatiemeetkunde*: R. Troelstra, A.N. Habermann, A.J. de Groot en J. Bulens.

[7] Auteurs: M.G. Kuipers, J. Siepeling, R. Troelstra, G. Tromp

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl