# EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Wiskundedidactiek in *Volgens Barton*

Simon Stevin

Meetkunde in andere tijden

Bingo!

NR.4

JAARGANG 96 - JANUARI 2021

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

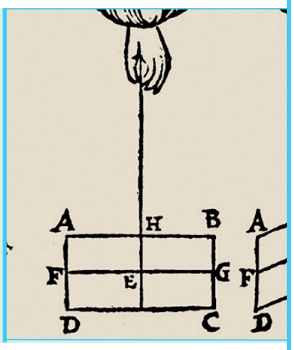
# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR4

## IN DIT NUMMER


WAAR IS DE WISKUNDEDIDACTIEK IN *VOLGENS BARTON?* 4
Theo van den Bogaart

SIMON STEVIN (1548-1620) 8
Ad Meskens




ANDERE TIJDEN MEETKUNDE 14
Martin Kindt

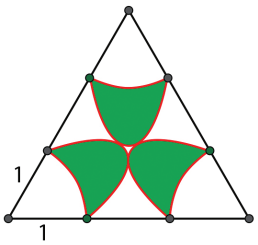
BINGO! 18
Desiree van den Bogaart

WIS EN WAARACHTIG 20

WITJE: LAPPENDEKENS 21

BERGSTATIONS VERBINDEN IN EGMOND AAN ZEE 22
Tjeerd Morsch

DON'T DITCH HOLDITCH! 26
Fred Muijrers

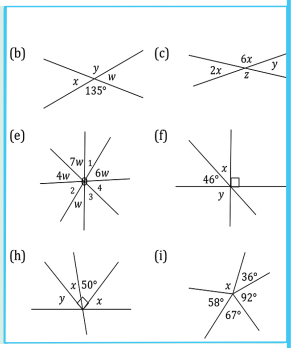



WAARDEVOLLE PRODUCTEN II 29
Gerard Koolstra

GLOBAL MATH PROJECT 33
Erik van Haaren

HOMOGENE FUNCTIES, POOLLIJN EN POOLVERWANTSCHAP 35
Kees Jonkers

GOEDE RESULTATEN MET *KEYBOOKS* IN ZUID-AFRIKA 38
Wereldwiskunde Fonds
Heleen van der Ree




PUZZEL 40
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Foto: Het Tokyo International Forum (東京国際フォーラム), een multifunctioneel gebouw in het centrum van Tokyo.
Architect: Rafael Viñoly (Uruguay / USA), zie www.t-i-forum.co.jp/en.

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

VASTGEROEST
Ab van der Roest
42

VERENIGINGSNIEUWS
JAARREDE 2020
43

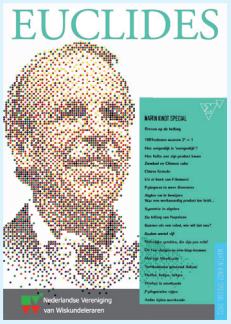
SERVICEPAGINA
46

## Top2000 en *Euclides* special

Het Excel-bestand van de Top2000 vind je op

*vakbladeuclides.nl/964top2000*

Heb je een mooi lesidee voor een statistiekles over de Top2000, schrijf dan een artikel voor *Euclides!*

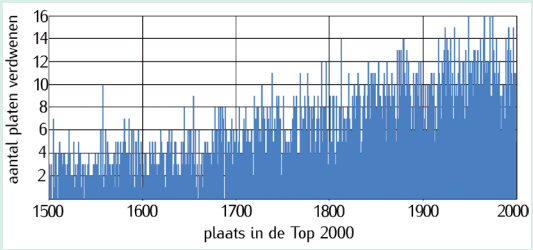



De special met artikelen van Martin Kindt vind je op:

*vakbladeuclides.nl/964Martin* Kindt

## Kort vooraf

Vorig jaar in het leven geroepen: de traditie om het eerste Kort vooraf van het nieuwe jaar te beginnen met een opmerkelijk feit uit de data van de Top2000, bij wijze van nieuwjaarswens.




In de loop van de 22 jaar dat de Top2000 bestaat, is er 4307 keer een plaat verdwenen uit de lijst. Ik dacht dat de plaatsen van waaraf die platen verdwijnen willekeurig verdeeld zouden zijn over de laagste 500 posities, de gevarenzone, maar het levert dit grillige patroon op.
Liggen we hier wakker van? Uiteraard niet, maar het zijn misschien wel grappige zaken die onze leerlingen uit zouden willen zoeken met een groot (137.160 gevulde cellen) Excel-bestand. Daarom heb ik de 'Top2000 Masterfile' dit jaar helemaal compleet gemaakt. Alle noteringen stonden daar al in, maar nu ook alle jaartallen, tijdsduren, herkomst van de artiesten, samenstelling (groep, duo of solist) en de taal waarin het nummer klinkt.

In dit nummer staat het artikel 'Andere tijden meetkunde' van Martin Kindt. Ik heb Martin beloofd om dat wat hij te vieren had, het staat tussen de regels door in het artikel, niet op deze plek met het nodige bazuingeschal te melden. Maar het gaf wel aanleiding om een *Martin Kindt Euclides Special* te maken. Het bazuingeschal bewaar ik wel voor het Kort vooraf van die special!

Tom Goris

Theo van den Bogaart

# Waar is de wiskunde-didactiek in *Volgens Barton*?

Het boek *Volgens Barton* wordt langzaam maar zeker ook een begrip in Nederland. Het inspireert inmiddels velen van ons. Theo van den Bogaart hoopt dat het ook kan inspireren tot aanvullende inzichten en nuances.

## Inleiding

Een jaar geleden was ik op lesbezoek bij een stagiaire van de lerarenopleiding. Iedere keer dat ze iets op het bord schreef – en dat duurde soms wel een minuut – was het stil: niet alleen hielden de leerlingen netjes hun mond, maar ook de docent schreef in stilte. Toen ik haar hier in de nabespreking naar vroeg, vertelde ze me dat dit een methode was die ze uit het boek *Volgens Barton* had gehaald. Zij is niet de enige student die zich door dit boek laat inspireren, overigens zonder enige sturing vanuit de opleiding. Het boek maakt veel los!

Over het boek *Volgens Barton* verscheen al eerder een heldere recensie in *Euclides* (94/7) van Dédé de Haan en Maarten Müller. Kort samengevat: het boek kwam in 2018 uit en is geschreven door de Engelse wiskunde-leraar Craig Barton. De subtitel luidt *lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts en 12 jaar aan mislukkingen* en vat de essentie van het boek goed samen. Barton beschrijft hoe zijn ideeën over wiskundeonderwijs zich hebben ontwikkeld en hoe hij uiteindelijk tot een manier van lesgeven is gekomen die gefundeerd is op wetenschappelijke inzichten. In een andere editie van *Euclides* (95/3) staat een interessant interview met de auteur. Dit interview is afgenomen door René Kneyber, die het boek in twee delen heeft vertaald en heeft aangepast aan de Nederlandse context.

Laat ik maar meteen bekennen dat ik een fan ben van het boek. Het leest lekker, is zeer concreet, is goed onderbouwd vanuit de leerpsychologie en bevat een rijkdom aan mooie voorbeelden. Dit wordt allemaal goed geïllustreerd in de twee aangehaalde artikelen uit *Euclides*. Er is echter ook kritiek op het boek mogelijk. De genoemde artikelen noemen bijvoorbeeld dat Barton vanuit een te impliciete visie werkt. In mijn ogen is er echter iets veel fundamentelers aan de hand: Barton onderbouwt zijn handelen vanuit een wetenschappelijke theorie over hoe leerlingen leren, maar de kennis die hij gebruikt is verre van volledig. Op basis van dit gebrekkige fundament wordt vervolgens wel scherp stelling genomen. Ik zal mijn kritiek toelichten aan de hand van enkele passages uit het boek. Het is daarmee niet mijn bedoeling neerbuigend te zijn over het boek – ik heb al gezegd dat ik een fan ben. Sterker nog: ik zou iedere wiskundedocent willen aansporen het boek te lezen. Maar het doel van dit artikel is de lezers te motiveren ook te kijken naar aanvullende bronnen naast Barton én hen te laten zien dat 'goed wiskundeonderwijs' niet noodzakelijk hetzelfde is als klakkeloos 'lesgeven volgens Barton'.

## Hoe leerlingen leren en nadenken

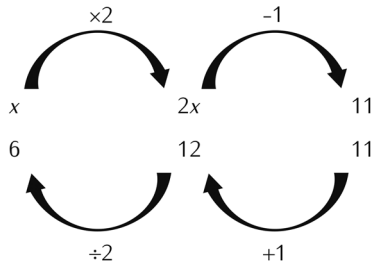
Meteen in de eerste paragraaf van het boek (§1.1) ontwikkelt Barton aan de hand van veertien teksten van wetenschappers een model over hoe leerlingen nadenken en leren. Dit vormt de basis voor de rest van het boek. Dit model maakt onderscheid tussen werkgeheugen en langetermijngeheugen. Het werkgeheugen heeft slechts een zeer beperkte capaciteit. Bartons docenthandelen is er dan ook op gericht dit werkgeheugen efficiënt te gebruiken en in ieder geval niet onnodig te belasten. Dit alles past bij de *theorie van cognitieve belasting*. Hij analyseert bijvoorbeeld hoe een opgave als 'Hoeveel is 25% van € 300' voor een expert vrijwel geen aanspraak doet op het werkgeheugen, omdat zo'n expert waarschijnlijk meteen ziet dat je gewoon een kwart moet nemen en bovendien direct weet hoeveel een kwart van 300 is. Voor een beginner daarentegen kan dit juist heel belastend zijn, bijvoorbeeld als een leerling een stappenplan gaat volgen en eerst terugrekent naar 1%.

In tegenstelling tot het werkgeheugen heeft het langetermijngeheugen een praktisch onbegrensde capaciteit. Het is echter wel vrij star, waardoor niet altijd de juiste zaken worden opgeslagen of foute of onhandige dingen die eenmaal zijn geleerd weer moeilijk kunnen worden 'ontleerd'. Barton geeft een voorbeeld van een les over het verdelen van een cake, waarbij de context (geklieder met voedsel) beklijft omdat leerlingen hier hun aandacht op richten, maar het eigenlijke lesdoel (over breukrekenen) niet.

Het model van de werking van geheugen is belangrijk. De eenzijdige aandacht hiervoor is echter ook meteen de grote tekortkoming van het boek. Van die veertien bronnen die Barton gebruikt om de vraag te beantwoorden hoe leerlingen denken en leren, gaat er niet één specifiek over wiskunde – ze gaan alle over algemene leerpsychologie. Dat is de teneur in belangrijke delen van het boek: Barton heeft een blinde vlek voor het onderzoeksgebied van de wiskundedidactiek. (Belangrijke uitzondering is het prima hoofdstuk 9 over probleemaanpak.) De vraag die gesteld kan worden, is of die blinde vlek erg is: kan leren immers niet als een universeel fenomeen worden beschouwd, dat voor wiskunde niet anders werkt dan voor Frans of het bespelen van een muziekinstrument? Mijn stelling is dat dit wel degelijk bezwaarlijk is. Door de algemene benadering lukt het Barton niet goed om rekening te houden met hoe in het vakgebied van de wiskunde kennis is georganiseerd en wordt ontwikkeld; en heeft hij daarbij te weinig inzicht in wat abstractie eigenlijk is en hoe leerlingen tot abstracties komen.

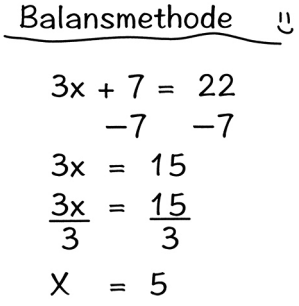
Kijk maar eens naar Bartons voorbeeld over de pijlenketting, die vanuit een andere invalshoek ook al in de eerdergenoemde recensie is behandeld. Barton bekijkt de vergelijking $2x - 1 = 11$ en bekritiseert hoe die in klas 1 volgens hem vaak wordt behandeld. Dat gebeurt door de vergelijking als volgt in woorden te vertalen: 'Ik heb een getal $x$. Als ik dit eerst verdubbel en er daarna 1 van afhaal, is de uitkomst 11.' Oplossen kan nu door het omdraaien van de rekenoperaties: als ik er niet 1 van had afgehaald, had ik op 12 moeten zijn uitgekomen en om $x$ te vinden moet ik dit getal 12 vervolgens nog halveren, zie figuur 1.

Barton merkt terecht op dat deze methode niet generaliseerbaar is naar andere vergelijkingen waar meerdere $x$'en in voorkomen, zoals $3x - 2 = x + 4$. Vervolgens koppelt Barton dit aan zijn model van de werking van het geheugen: een leerling zal naast de rekenpijlenaanpak




*figuur 1 Uit: Volgens Barton, blz 44*

ook een andere aanpak in zijn langetermijngeheugen moeten opnemen en Barton legt uit dat dit leidt tot onsamenhangende kennis en onnodige belasting van het werkgeheugen bij het oplossen van vergelijkingen. Daarom pleit hij ervoor om meteen bij de introductie van vergelijkingen een methode toe te passen die hij de balansmethode noemt, zie figuur 2.




*figuur 2 Uit: Volgens Barton, blz 46*

> "Goed wiskundeonderwijs is niet noodzakelijk hetzelfde als klakkeloos lesgeven volgens Barton."

## Inzichten over het leren van wiskunde

Bartons redenering is consistent en zet aan tot nadenken. Zij is echter verre van volledig. Laten we daarom eens kijken wat een bron uit de hoek van de wiskundedidactiek hierover zegt: het boek *How Humans Learn to Think Mathematically* (2013) van de gerenommeerde didacticus David Tall. Ik haal hier drie belangrijke inzichten over het leren van wiskunde uit die niet bij Barton voorkomen: >

1 De *dualiteit tussen proces en object* (Sfard, Thurston, Gray & Tall). Dit is een centraal fenomeen in de wiskunde, waarover veel is gepubliceerd (zie het artikel van Irene van Stiphout in *Euclides* 95/6). Wiskundekennis ontwikkelt zich in een continue wisselwerking tussen processen en objecten. Neem bijvoorbeeld de objecten 'negatieve getallen': om je deze eigen te maken, is het belangrijk dat je eerst vertrouwd bent met het proces 'getallen van elkaar aftrekken'. In het voorbeeld hierboven is de dualiteit ook herkenbaar: '$2x - 1 = 11$' wordt geïnterpreteerd als proces (je 'verdubbelt' en 'trekt er 1 van af'), in tegenstelling tot het object 'de vergelijking $3x - 2 = x + 4$' (waar vervolgens wel weer een proces van hogere orde op wordt uitgevoerd). Niet alleen is het belangrijk om de proces- en objectbenaderingen te verbinden, maar de procesbenadering leidt hier ook direct naar de objectenfunctie en inverse functie – en dat kan in hogere jaren bij leerlingen toch ook vruchten afwerpen.

2 De theorie van *embodiment* (Lakoff & Núnēz, Abrahamson). Deze verklaart hoe wij met onze apenhersens in staat zijn om abstract te denken (zie het artikel van Rosa Alberto en Rogier Bos in *Euclides 95/5*). De essentie is dat al het abstract denken uiteindelijk is te herleiden tot zintuiglijke waarnemingen en spierbewegingen. Zo start de ontwikkeling van getalbegrip bij kinderen met het aanraken en verplaatsen van objecten en ernaar wijzen. Deze embodiment zit verstopt in Bartons balansmethode – het is niet voor niets dat hij het over een 'balans' heeft! Zoals Barton het opschrijft heeft het al een hoge mate van abstractie, maar we kennen allemaal het onderliggende idee van een balans met blokjes om leerlingen inzicht te geven over waarom je links en rechts hetzelfde moet doen (zie ook het artikel van Marga Otten in *Euclides 93/6*). In latere delen van het boek (§3.7, §3.9) blijkt dat Barton dit ook heus wel kent en gebruikt, al koppelt hij het jammer genoeg aan het begrip 'analogie' en mist hij zo de kernliteratuur over embodiment ('metafoor' zou al mooier zijn geweest). Hoe dan ook: op de balansmethode kun je eenzelfde soort kritiek hebben als op de pijlenketting! En Tall doet dat ook: de concrete balansmethode laat zich ook niet in alle gevallen makkelijk toepassen, bijvoorbeeld bij negatieve getallen (negatieve gewichten?), of bij kwadratische vergelijkingen.

3 *Niveautheorie* (Van Hiele; en sterk gerelateerd aan bijvoorbeeld Freudenthal en Treffers' *progressief schematiseren*). Bij het leren van wiskunde ontwikkelt kennis zich richting een formele benadering, maar dat is niet het startpunt van het leerproces. Zowel de pijlenketting als de balansmethode zijn stappen richting een formele benadering, maar bij beide is het eindpunt nog niet bereikt en beide zullen leiden tot 'verkeerde kennis in het langetermijngeheugen' die Barton juist zo verfoeit. Bij de balansmethode is bijvoorbeeld de onderliggende logica niet transparant. Dat blijkt bijvoorbeeld als je het naïef gaat toepassen op de vergelijking $x^2 = 4$ door aan beide kanten de wortel te nemen (want dat is immers 'links en rechts hetzelfde doen'); je mist dan de negatieve oplossing $x = -2$.

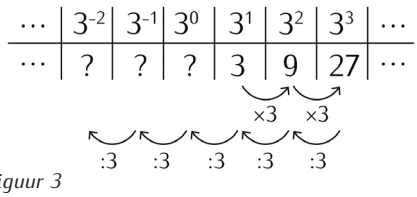
Deze drie inzichten impliceren niet dat rekenpijlen een goed idee zijn, maar tonen wel aan dat Barton niet het complete verhaal vertelt. En er is vast nog veel meer over te zeggen. Tall op zijn plaats besteedt overigens in het geheel geen aandacht aan cognitieve belasting. Ook hij vertelt dus niet het complete verhaal – maar kan dat eigenlijk wel?

## Begeleide ontdekking

Het probleem van de eenzijdige, en in dit geval te algemene, bronnen speelt ook in hoofdstuk 3. Barton houdt in dit hoofdstuk een pleidooi voor expliciete instructie in plaats van leerlingen onder begeleiding zelf tot kennis te laten komen. De onderbouwing vindt Barton in generieke effectiviteitsstudies en, wederom, de theorie van cognitieve belasting. De ideeën uit deze bronnen worden echter niet correct vertaald naar het vakgebied van de wiskunde.

Laten we eens kijken naar Bartons kritiek op iets wat hij 'begeleide ontdekking' (§3.4) noemt. Barton geeft hiervan een aantal voorbeelden die ik merkwaardig vind. Zo presenteert hij een werkvorm waarbij leerlingen op hun rekenmachine een aantal gebroken en negatieve machten intypen om zo uiteindelijk zelf 'de regels voor machten' te ontdekken. Barton legt uit – in mijn ogen terecht – dat dit efficiënt noch effectief is, waarna hij aangeeft hoe het wel moet: de docent voert voor het bord de berekeningen uit en vraagt leerlingen in een klassikale situatie of ze patronen herkennen. Laten we allereerst vaststellen dat in beide situaties nog steeds sprake is van het door leerlingen iets laten ontdekken, alleen de begeleiding is in het tweede geval een stuk strakker. Barton is zich hier ook van bewust. Maar vreemder is dat dit niks van doen heeft met wat in wiskundedidactiek vaak als 'ontdekken' wordt gezien: leerlingen leren hier wat een knop op hun rekenmachine doet, maar ze krijgen geen enkel inzicht in waarom $x^{-1}$ en $1/x$ hetzelfde zijn. Had Barton in publicaties over wiskundedidactiek gekeken, dan was hij al snel

voorbeelden tegengekomen waarin bijvoorbeeld een machtstabel werd gegeven, zoals in het plaatje van figuur 3.



*figuur 3*

Ik ben benieuwd hoe Barton een dergelijke benadering zou analyseren! Overigens volgt veel later in het boek (§7.2) een voorbeeld over rekenen met negatieve getallen dat wel in dit straatje past.

Tot slot is het ook bevreemdend dat Barton bij een begrip als 'begeleid ontdekken' nergens Freudenthal of zijn geestverwanten noemt, die immers een halve eeuw geleden al schreven over geleide herontdekking. Datzelfde geldt trouwens ook voor realistisch wiskundeonderwijs (hoofdstuk 2). Het lijkt erop dat Barton zich er in het geheel niet van bewust is dat dit thema's zijn met een rijke geschiedenis in het wetenschapsdomein van de wiskundedidactiek! Je mag best tegen ideeën ageren, maar verdiep je dan wel eerst in wat voorstanders hierover zeggen.

> "Het zou goed zijn om visie van evidentie te onderscheiden."

## Meer dan 'visie'

In replieken op Bartons boek wordt hem vaak verweten dat hij sterk vanuit een specifieke visie op wiskundeonderwijs redeneert. Het gevaar van een dergelijk betoog is – en ik vermoed dat Barton het met me eens zal zijn – dat didactiek een kwestie van mening wordt. Een visie vertelt je weliswaar wat voor soort doelen je met je onderwijs wilt bereiken, maar over de wijze waarop die doelen vervolgens kunnen worden bereikt, kan visie niet zomaar boven wetenschappelijke inzichten worden gesteld. Het is waar dat ik in Barton veel mechanistische didactiek herken (hoewel hij tot flinke nuances komt), maar dat komt omdat hij meent dat de wetenschap aantoont dat je zo het beste zijn curriculum onderwijst. Ik hoop dat mijn voorbeelden hierboven aantonen dat enige nuance van Bartons ideeën op zijn plaats is: niet omdat hij een verkeerde visie zou aanhangen, maar omdat er – ongeacht je visie – aanvullende wetenschappelijk inzichten zijn over hoe leerlingen wiskunde leren!

Dit brengt me bij mijn laatste kritiek op Barton: de stijl van het boek. We hebben hierboven voorbeelden gezien waarbij Barton een stroman opricht om vervolgens lekker te polariseren. Ik zie dezelfde discussiestijl regelmatig terug in onderwijsland: van Twitter tot bijeenkomsten over curriculumontwikkeling. Ik ken veel goede collega's en studenten die hierdoor worden ontmoedigd en soms zelfs persoonlijk worden geraakt. Dat draagt niet bij aan de kwaliteit van ons onderwijs. Het zou goed zijn om daar waar ideeën wetenschappelijk worden onderbouwd vooral de nuance aan te geven, al is het maar omdat wetenschap nooit af is. En om daarnaast in discussies visie van evidentie te onderscheiden. Verschillen in visie leiden tot felle debatten, maar over evidentie kan veel rustiger van gedachten worden gewisseld.

## Conclusie

Door de nadruk op tekortkomingen in *Volgens Barton* doe ik absoluut geen recht aan dit goede boek. Dat was dan ook niet mijn doel. Ik hoop duidelijk te hebben gemaakt dat Barton een inspirerend, consistent en gefundeerd verhaal heeft, maar dat er daarbij ook ruimte moet zijn voor aanvullende inzichten en nuances. Helaas zijn boeken die over die aanvullende inzichten gaan vaak taaier geschreven dan *Volgens Barton*. Hier ligt dus een mooie taak. Wie pakt de pen op?

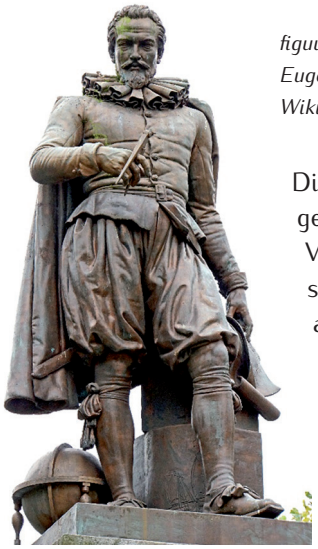

## Over de auteur

Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde en verbonden aan het lectoraat Wiskundig en analytisch vermogen van professionals aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadres: *theo.vandenbogaart@hu.nl.*

Ad Meskens

# Simon Stevin (1548-1620)

Op 10 oktober vond het online symposium *In de geest van Stevin* plaats, georganiseerd door de werkgroep Geschiedenis van de NVvW. Ad Meskens was een van de sprekers. Hij schetst onder andere het belang van de bijdragen van Stevin aan zwaartepuntsberekeningen en ziet dat dat eigenlijk het begin was van de integraalrekening.



*figuur 1 Het standbeeld van Simon Stevin van Eugene Simonis in Brugge. Foto: Dennis Jarvis/ Wikimedia Commons*

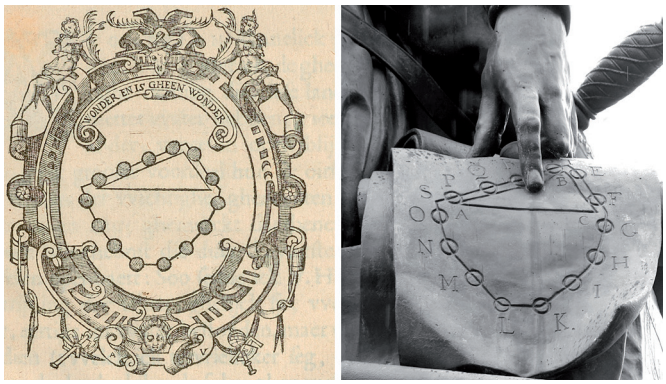
Dit jaar is het vierhonderd jaar geleden dat de wereldvermaarde Vlaamse 'wiskundige' in Nederland stierf. Helaas wordt hieraan weinig aandacht besteed. Opnieuw laat Vlaanderen kansen liggen om haar wetenschapshistorisch erfgoed voor het voetlicht te plaatsen.

Wie vraagt naar de verdiensten van Stevin, krijgt onveranderlijk een tweeledig antwoord; hij heeft de decimalisering uitgevonden en hij heeft de wiskunde talrijke nieuwe Nederlandse woorden geschonken die de uit het Latijn geleende woorden vervingen. Vaak wordt eraan toegevoegd dat dit de reden is waarom het Nederlands een eigen wiskunde-terminologie heeft. Zelfs het woord wiskunde vindt zijn etymologische oorsprong bij Stevin. 'Wis' betekent hier 'zeker', zoals in *wis en waarachtig* of in *een wisse dood*. Stevin gebruikte echter 'wisconst'. In het toenmalig woordgebruik betekende kunst echter niet alleen 'kunst' maar ook 'bekwaamheid, vaardigheid' en 'kennis, wetenschap'. In de negentiende eeuw werd 'kunde' als wetenschappelijk aanzien en hierdoor kreeg ook het woord 'wiskunde' zijn huidige vorm.

Stevin is echter veel meer dan dat. Tegelijk moeten we ons hoeden om te veel in zijn werk te willen lezen. Stevin was een kind van zijn tijd, hij wist wonderwel de toenmalige kennis didactisch te verwoorden en ook om ze uit te breiden. In de eerste zin van deze tekst hebben we met opzet het woord wiskundige tussen aanhalingstekens geplaatst. Een zestiende-eeuwse wiskundige was niet wat wij onder een wiskundige verstaan. Een wiskundige was tegelijkertijd ook natuurkundige, ingenieur, bouwkundige, sterrenkundige, soms zelfs sterrenwichelaar … afhankelijk van zijn interesses. Stevin was hierop geen uitzondering, zijn werk omvat zowel de wiskunde als boekhouden, mechanica, hydrostatica, architectuur en fortenbouw.

## De *clootcrans*

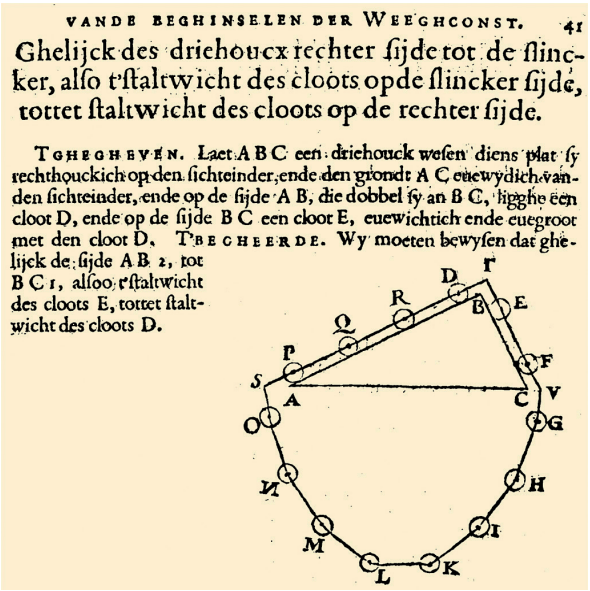
Stevin is bij wiskundigen wel bekend, maar vaak niet om zijn natuurkundig werk. Dit natuurkundig werk bracht hem wel tot wiskundig nieuwe en interessante denkbeelden. We beperken ons hier tot de clootcrans en de wet van Pascal-Stevin.




*figuur 2 Links: titelpagina De beghinselen der weeghconst (1586), rechts: detail van het beeld. Foto: Ad Meskens*

Een iconisch beeld uit de boeken van Stevin is de zogenaamde *clootcrans* (het kralensnoer of bollentouw), zie figuur 2. Daarin gebruikt Stevin het begrip *staltwicht*. Dit moeten we begrijpen als het schijnbaar gewicht, dat

wil zeggen de component van de kracht die een daadwerkelijke, zichtbare invloed uitoefent. In dit voorbeeld is dat de wrijving.


VANDE BEGHINSELEN DER WEEGHCONST. 41

Ghelijck des driehoucx rechter ſijde tot de ſlincker, alſo t'ſtaltwicht des cloots opde ſlincker ſijde, tottet ſtaltwicht des cloots op de rechter ſijde.

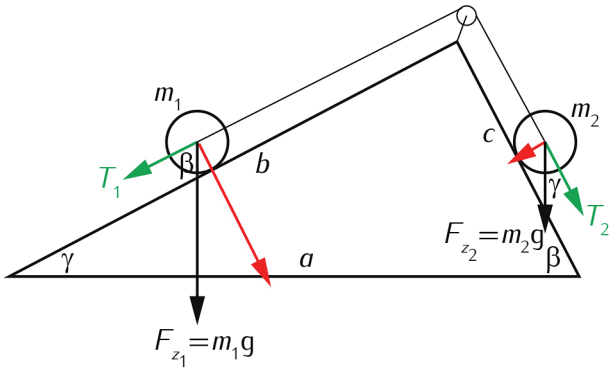
TGHEGHEVEN. Laet A B C een driehouck weſen diens plat ſy rechthouckich op den ſichteinder, ende den grondt A C euewydich vanden ſichteinder, ende op de ſijde A B, die dobbel ſy an B C, ligghe een cloot D, ende op de ſijde B C een cloot E, euewichtich ende euegroot met den cloot D. T'BECHEERDE. Wy moeten bewyſen dat ghelijck de ſijde A B 2, tot B C 1, alſoo t'ſtaltwicht des cloots E, tottet ſtaltwicht des cloots D.

*figuur 3 Uit: De beghinselen der weeghconst (1586)*[1]

Beschouw een rechthoekige driehoek $\Delta ABC$ met $|AB| = 2|BC|$. Over deze driehoek wordt een snoer gehangen met evenredig gespreide even zware bollen, zodanig dat vier bollen op $AB$ liggen en twee op $BC$. De zijden van de driehoek zijn, met andere woorden, hellende vlakken. In een gedachtenexperiment toont Stevin nu aan dat het *staltwicht* (de wrijving) van de vier bollen langs $AB$ even groot is als die van de twee bollen langs $BC$. Veronderstel immers dat het *staltwicht* van $P$, $Q$, $R$ en $D$ groter is dan dat van $E$ en $F$. Vanwege de symmetrie houden de bollen $O$, $N$, $M$, $L$ de bollen $K$, $I$, $H$, $G$ in evenwicht. De groep van acht bollen $D$, ..., $L$ is dus 'swaerder na de gestalt' dan de groep $E$, ..., $K$. Hierdoor komt het snoer in beweging waarbij de bollen $D$, $R$, $Q$, $P$ naar beneden rollen en zo de andere bollen omhoogtrekken. Op een bepaald moment zal iedere bol de initiële positie van zijn voorganger innemen. Er is op dat moment geen verschil meer te maken met de uitgangsconfiguratie. '*Den crans der clooten sal alsulcken ghestalt hebben als sy te vooren dede" ..."ende clooten sullen uyt haer selven een eeuwich roersel maecken, t'welck valsch is.*"

Door nu de hangende bollen $O$, ... , $G$ weg te denken concludeert hij dat de totale wrijving op de bollen $P$, $Q$, $R$, $D$ even groot is als die op $E$ en $F$. Het staltwicht van $E$ is dus tweemaal zo groot als dat van $D$. Stevins redenering valt op door haar eenvoud. De lezer heeft nauwelijks voorkennis nodig om het te begrijpen, dagelijkse ervaring volstaat. Merk echter ook op dat de conclusie berust op het aanvaarden van een axioma: een eeuwig roersel is onmogelijk.

De verhouding 2 voor $|AB|/|BC|$ is willekeurig, dus geldt de conclusie ook voor een willekeurige verhouding: als twee bollen op loodrechte hellende vlakken liggen en met elkaar verbonden zijn door een touw over een katrol dan zullen ze in evenwicht zijn als de verhouding van hun massa's gelijk is aan die van de zijden, zie figuur 4. Als er evenwicht is dan geldt $T_1 = T_2$. Nu is $T_1 = m_1 g\cos\beta = m_1 g\sin\gamma$ en $T_2 = m_2 g\cos\gamma$. Waaruit volgt: $m_2/m_1 = \tan\gamma = c/b$.

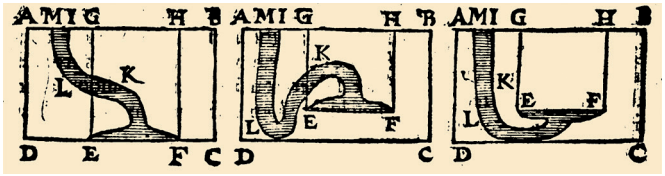



*figuur 4*

## De wet van Stevin-Pascal

In *Beghinselen des waterwichts* (p.20, VIII vertoogh, X Voorstel) vinden we de hydrostatische paradox terug, zie figuur 5 en 6:

*Op yder bodem des vvaters euevviydich sijnde vanden sichteinder, rust een ghevvicht euen ande svvaerheyt vvaters die euegroot is met den pilaer, vviens grondt dien bodem is, ende hoochde, de hanghende lini van t'plat duer t'vvaters oppervlack tot den grondt.*



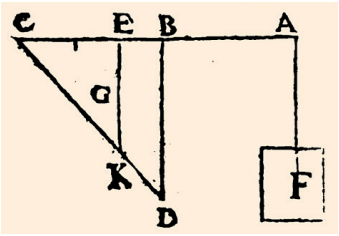
*figuur 5 Uit Beghinselen des waterwichts (1586)*[1]

*figuur 6 Detail van het standbeeld van Simon Stevin in Brugge. foto: Ad Meskens*

Als gevolg poneert hij dat op een gegeven diepte een even grote kracht opwaarts als neerwaarts op een voorwerp 'stoot'. Dit is niets anders dan zeggen dat de druk $p$ in alle richtingen gelijk is. Deze hydrostatische paradox wordt geassocieerd met Robert Boyle.
Het begrip druk was Stevin nog onbekend, de formulering *'de swaerheyt die euegroot is met de pilaer vviens grondt dien bodem is'* is echter niets anders dan de wet die wij als de wet van Pascal kennen:
$F_z = mg = hAρg \rightarrow p = F/A = hρg$.
Waarbij $A$ de oppervlakte van het grondvlak, $h$ de hoogte van 'de pilaer' en ρ de soortelijke massa van de vloeistof is.

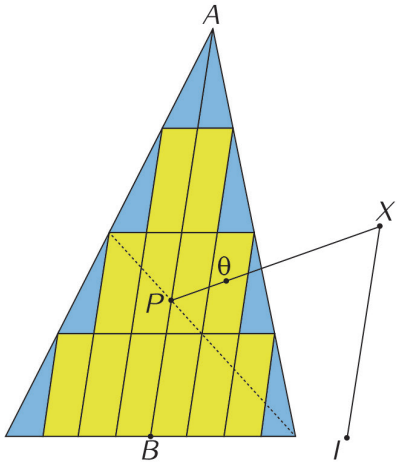
## Begin van de integraalrekening

Infinitesimaalmethoden kennen een nederig begin in de zestiende eeuw. In eenvoudige rekenboeken vindt men problemen over het evenwicht van hefbomen waaraan verschillende vormen zijn verbonden. Zo vinden we in *Practique Pour Brievement Apprendre a Ciffrer*, een boek van Valentin Mennher (1521 - 1570), een Duitse rekenmeester die in Antwerpen werkte, het probleem:
*Gegeven een hefboom AC met de draaipunt in het middelpunt B. Als een vierkant gewicht in A wordt opgehangen en een rechthoekige driehoek op BC, dan zal de driehoek en het vierkant een verhouding van 3:1 hebben,* zie figuur 7.



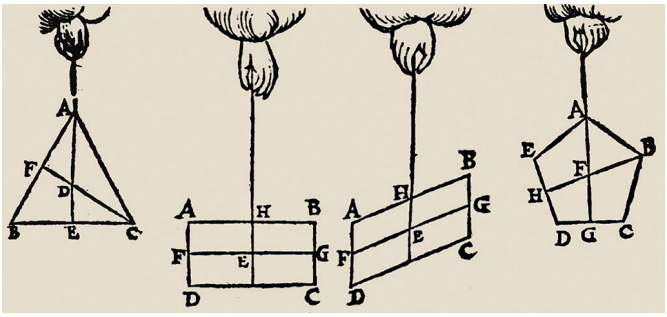

*figuur 7 Uit: Practique Pour Brievement Apprendre a Ciffrer*[1]

Mennher wijst er terecht op dat als de driehoek in het massamiddelpunt is opgehangen, deze naar believen om dit punt kan worden gedraaid zonder dat het evenwicht van de hefboom wordt verbroken.
Het probleem verwijst naar resultaten die al bekend waren bij Archimedes, die bewees dat het massamiddelpunt van een driehoek op de zwaartelijn ligt. Om dit te bewijzen heeft Archimedes parallellogrammen in de driehoek ingesloten. Door de constructie staan de massamiddelpunten van deze parallellogrammen op de zwaartelijn. Door het aantal ingeschreven parallellogrammen te vergroten kan Archimedes met behulp van een *reductio ad absurdum* bepalen dat het massamiddelpunt van de driehoek inderdaad op de zwaartelijn ligt. Archimedes' bewijs is behoorlijk complex, we geven er hier slechts een schets van. We verwijzen de geïnteresseerde lezer voor het volledige bewijs naar vertalingen van Archimedes' werk zoals die van Paul Ver Eecke[2] of Thomas Heath[3].



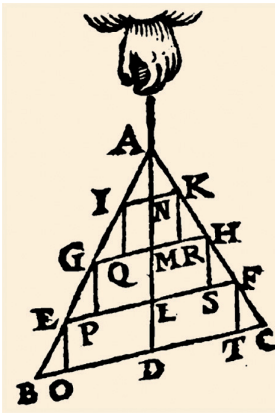

*figuur 8*

Om te beginnen veronderstelt Archimedes dat het zwaartepunt van een driehoek *niet* op de lijn $AB$ die een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde verbindt ligt, maar in een punt θ. Hij schrijft dan parallellogrammen in de driehoek in. Het zwaartepunt van de samenstelling van deze paralellogrammen ligt op $AB$. We noemen dit punt $P$. Het zwaartepunt van de samenstelling van de overblijvende driehoekjes moet op de rechte $P\theta$ liggen. Met de hefboomwet kan dit zwaartepunt, dat we $X$ noemen, worden bepaald. Archimedes bewijst dat $X$ buiten de driehoek ligt. Dit zou betekenen dat alle driehoekjes langs één kant van de rechte $XI \,//\, AB$ liggen, wat volgens de hefboomwet onmogelijk is.
In *Beghinselen der Weeghconst* vinden we Stevins bewijs van de stelling dat het zwaartepunt van de driehoek op de zwaartelijn ligt. Stevin gebruikt geen *reductio ad absurdum*, maar een directe methode. De initiële opbouw is dezelfde als bij Archimedes: schrijf parallellogrammen in een driehoek in. Hij volgt met deze paralellellogrammen echter een eigen en eigenzinnige weg die een voorafspiegeling is van wat wij kennen als integraalrekening. Stevins bewijs volgt op een aantal voorbeelden waaruit blijkt dat het zwaartepunt van een vlakke figuur samenvalt met haar middelpunt: 'Yder plats middelpunt der form, is oock sijn swaerheyts middelpunt.' (Boek II, p.66, zie figuur 9).



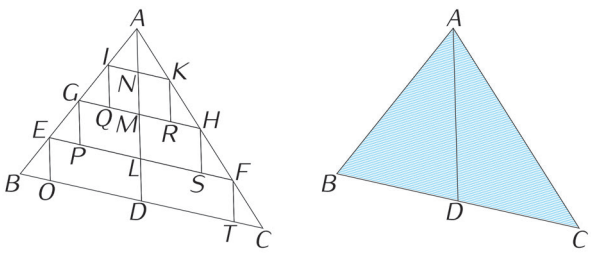
*figuur 9 Uit: De beghinselen der weeghconst (1586)*[1]

We zullen hier Stevins bewijs dat het zwaartepunt van een driehoek op de zwaartelijn ligt, gedeeltelijk aangepast aan onze notaties, volgen.



*figuur 10 Uit: De beghinselen der weeghconst (1586)*[1]

Beschouw een willekeurige driehoek $\Delta ABC$ met $AD$ als zwaartelijn, zie figuur 10.
Verdeel $AD$ in vier delen in $N$, $M$, $L$. Trek door deze punten de evenwijdige lijnen $EF$, $GH$ en $IK$ met $BC$.
Omdat $EF$ // $BC$ en $EO$ // $FT$ // $LD$ is $EFTO$ een parallellogram waarvoor $|EL| = |LF|$ en $|OD| = |DT|$, zodat het zwaartepunt van het parallellogram $EFTO$ zich op $DL$ bevindt[4].
Analoog zullen de zwaartepunten van $GHSP$ en $IKRQ$ zich respectievelijk op $LM$ en $MN$ bevinden. Het zwaartepunt van de figuur van de samengestelde parallellogrammen $IKRHSFTOEPGQ$ ligt dus op $ND \subset AD$.



*figuur 11 Links de figuur van Stevin, rechts dezelfde figuur, maar deze keer met een onderverdeling van honderd parallellogrammen.*

Nu is het zo dat men het aantal ingeschreven parallellogrammen willekeurig kan laten toenemen. Het zwaartepunt van hun samenstelling zal altijd op $AD$ liggen.
In Stevins woorden: '*Nu ghelijck hier in beschreuen sijn drie vierhoucken, also canmender oneindelicke sulcke vierhoucken in beschrijuen, ende des binneschreuens formen swaerheyts middelpunt, sal altijt sijn (om de redenen als vooren) inde lini AD.*' (Boek 2, p.68)
Maar hoe meer parallellogrammen er zijn, hoe minder de samenstelling ervan van de driehoek zal verschillen.
*'Maer hoe datter sulcke vierhoucken meer sijn, hoe dat den driehouck ABC min verschilt vande binneschreuen form der vierhoucken;'* (Boek 2, p.68)
We kunnen dus het aantal naar oneindig laten gaan en zo het verschil tussen de driehoek en de samenstelling willekeurig klein maken.
*'Wy connen dan door dat oneindelick naerderen sulck een form binnen den driehouck stellen, dattet verschil tusschen haer ende den driehouck, minder sal wesen dan eenich ghegheuen plat hoe cleen het sy:'* (Boek 2, p.68)
Stevin komt nu tot de conclusie:
Als twee zwaartekrachten [*staltswaerheden*] van elkaar verschillen dan bestaat er een zwaartekracht die kleiner is dan hun verschil. Het verschil tussen de zwaartekracht op $ADC$ en deze op $ADB$ verschilt minder dan enig gegeven getal.
Dus zijn deze zwaartekrachten gelijk en ligt het zwaartepunt op de middellijn $AD$.

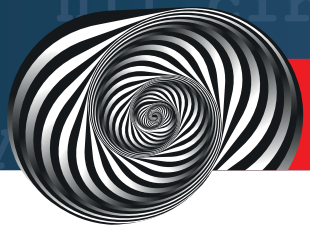
Omdat in dit bewijs geen voorkeur voor één van de hoekpunten aanwezig is, kan door het tekenen van twee zwaartelijnen het zwaartepunt worden bepaald. Als we elegantie buiten beschouwing laten, dan komt Stevins redenering neer op: Als twee grootheden verschillen, dan kan men een derde grootheid van dezelfde soort[5] vinden die kleiner is dan hun verschil, dus als men aan die twee grootheden geen grootheid van dezelfde soort die kleiner is dan hun verschil kan toekennen, dan zijn de grootheden gelijk.

Als we Stevins bewijs met moderne ogen bekijken, dan zien we een zeer intuïtieve redenering, die evenwel reeds enkele concepten in zich draagt die niet onbelangrijk zijn. Het vergelijken van klassieke teksten met onze moderne methoden loopt dikwijls mank. Vergelijk het met het vergelijken van de eerste 'auto's', die niet meer dan gemotoriseerde koetsen waren, met een Formule 1-wagen. Toch is het belangrijk de vergelijking te maken om te zien hoe reeds vroeg in de geschiedenis diepe concepten op een zeer intuïtieve wijze naar boven komen. >

# Coderen en kunst maken

## Uitdagende prijsvraag voor creatieve leerlingen!

Daag uw leerlingen uit om creatief te zijn met wiskunde! Laat ze meedoen aan de **Texas Instruments prijsvraag Mathe-Magische Kunst**. Algoritmisch denken en coderen kunnen tot magische kunst leiden. Wij zoeken de mooiste optische illusies, creatieve graphics of bijzondere vorm- en kleurcombinaties!



**Mathe-Magische Kunst** 2021

## Wedstrijd in het kort

- Maak kunst via coderen in TI Basic of Python (op handheld of met computersoftware)
- Open voor leerlingen van 14-19 jaar
- Er zijn 4 categorieën en 12 prijzen
- Ook 10 scholen met de meeste deelnemers krijgen een prijs
- Insturen voor **15 april 2021**

python™ TI-Basic

Meld nu aan!

**education.ti.com/nl/prijsvraag**

## »WIN MOOIE PRIJZEN!

ZOALS EEN STEM-PAKKET VOOR SCHOLEN EN EEN PAKKET MET DRONE VOOR LEERLINGEN.

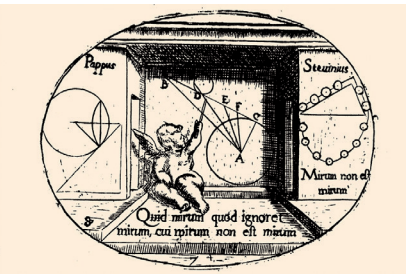
**education.ti.com/nederland**

TEXAS INSTRUMENTS

©2020 Texas Instruments

Bij Stevin vinden we dat twee grootheden gelijk zijn als ze willekeurig dicht benaderd kunnen worden, of in Stevins woorden *'minder dan eenich ghegeven plat* [=vlak(deel)] *hoe cleen het sy'* verschillen.
In moderne symbolen: $\forall \varepsilon > 0 : \left| A - B \right| < \varepsilon \Rightarrow A = B$.
Er is echter meer in de zin '*Wy connen dan door dat oneindelick naerderen sulck een form binnen den driehouck stellen, dattet verschil tusschen haer ende den driehouck, minder sal wesen dan eenich ghegheuen plat hoe cleen het sy:'* (Boek 2, p.68).
Merken we op dat Stevin flirt met het concept dat wij limiet noemen:
$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \left| S - S_N \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N = S$
Waarin $S_N$ de som van de oppervlakten van de ingeschreven parallellogrammen is, $S$ de oppervlakte van de driehoek en ε de oppervlakte van het 'ghegheuen plat'.

Nu Stevin weet dat het zwaartepunt op een zwaartelijn ligt en er geen voorkeur voor een hoekpunt was, volgt hieruit natuurlijk dat de zwaartelijnen elkaar in één punt *Z*, het zwaartepunt, snijden. Het zwaartepunt verdeelt bovendien de zwaartelijn in een verhouding 2 : 1.
Het voorbeeld van een driehoek kan bij de lezer de indruk wekken dat dit wel een zeer eenvoudig voorbeeld is. Stevin beperkt zich echter niet tot deze eenvoudige figuren. Hij gaat op dezelfde manier verder om vast te stellen dat het massamiddelpunt van een parabool op de as ligt. Ook hier stelt hij dat het verschil tussen de gebieden van de parallellogrammen en de parabool kleiner kan worden gemaakt dan een bepaalde oppervlakte. Met deze stellingen in de hand bepaalde hij ook de massamiddelpunten van prisma's, cilinders, piramides en paraboloiden. Hij past bovendien zijn methode toe op een aantal vraagstukken uit de hydrostatica en vindt zo, correct, resulterende krachten en hun aangrijpingspunten.




*figuur 12 Uit: Theorema Mathematica (1624)*[1]

## Inspiratiebron

In 1624 verdedigden twee jezuïeten, Walter van Aelst S.J. en Johannes Ciermans S.J., te Leuven de *Theorema Mathematica*. Zoals toen gebruikelijk waren de stellingen in het boekje geschreven door de promotor, in dit geval Gregorius a Sancto Vincentio S.J. Voor enkele stellingen was Stevin een duidelijke inspiratiebron. Voor zover geweten is Gregorius a Sancto Vincentio ook de enige wiskundige die door Stevin werd beïnvloed waar het integraalrekening betreft. Stevins inzichten hebben, met uitzondering van de Vlaamse jezuïeten, weinig Europese wiskundigen beïnvloed. Dit is hoogstwaarschijnlijk te wijten aan het feit dat zijn boeken in het Nederlands werden geschreven én aan het feit dat de methode aan bod kwam in boeken over toegepaste natuurkunde. Willibrod Snell bracht van Stevins *Wisconstighe ghedachtenissen*, met daarin *De Beghinselen Der Weeghconst en De Beghinselen Des Waterwichts*, een Latijnse vertaling uit, *Hypomnemata Mathematica* (1608). Een Franse vertaling, van de hand van Albert Girard, volgde in 1634. In 1635 publiceerde Bonaventura Cavalieri zijn boek *Geometria indivisibilibus continuorum*. In tegenstelling tot Stevins boek was dit geheel gewijd aan zuivere wiskunde. Het is dit laatste boek dat nog steeds als de aanzet tot de integraalrekening wordt beschouwd.

Dit artikel verscheen eerder in *Wiskunde & Onderwijs*, het tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

## Noten

[1] zie: *https://books.google.nl/* of de website van *Euclides* voor de originele werken van Stevin.
[2] Archimedes, Paul Ver Eecke (vertaler) (1960). *Les Œuvres Complètes d'Archimède suivies des Commentaires d'Eutocius d'Ascalon. Trad. du Grec en Français avec une Introd. et des Notes par Paul Ver Eecke*. Liège: Vaillant-Carmanne.
[3] Archimedes, T.L. Heath (vertaler) (2002). *The works of Archimedes*. Mineola, N.Y.: Dover Publications.
[4] In één van de vorige stellingen heeft Stevin bewezen dat het zwaartepunt van een parallellogram het snijpunt van de middellijnen is.
[5] Bedoeld wordt een lengte, een oppervlakte, een inhoud.

## Over de auteur

Ad Meskens is lector wiskunde aan de lerarenopleiding van AP-Hogeschool (Antwerpen). Hij is sinds jaren actief VVWL-lid (Vlaamse Vereniging Wiskunde Leraars).
Hij heeft frequent gepubliceerd over 16de- en 17de-eeuwse bronnen uit de wiskunde.

Martin Kindt

# Andere tijden meetkunde

Geen onderdeel van het wiskundeprogramma is de afgelopen zes decennia zo vaak gewijzigd als de meetkunde, zowel in de onder- als bovenbouw. Dit artikel geeft een impressie van het meetkundeonderwijs in de eerste 25 jaar na de Tweede Wereldoorlog.

## Mijn eerste meetkundelessen (1)

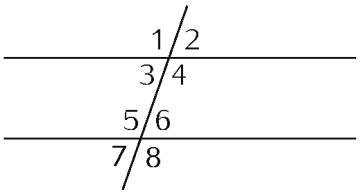
*In de meetkunde wordt de vorm en de grootte onderzocht van de voorwerpen die wij om ons zien. De meetkundige houdt geen rekening met de stof waaruit een voorwerp is gemaakt en evenmin met de kleur, de temperatuur of andere natuurkundige eigenschappen van het voorwerp, maar let alleen op de uitgebreidheid en op de plaats, welke het in de onbegrensde ruimte inneemt; het deel van de ruimte, dat een voorwerp inneemt, noemt men een meetkundig lichaam of kortweg een lichaam.*

Dit was de eerste alinea in het schoolboek *meetkunde* van Kobus/Van Thijn (1948) voor de eerste klas van het toenmalige vhmo.[1] Werd je geacht als twaalfjarige dit te kunnen lezen? Of schreven de auteurs over de hoofden van de leerling aan de leraar in de hoop dat die er wel chocola van zou kunnen maken bij de introductie van de meetkundelessen? Mijn leraar van destijds had daar geen zin in, want voor ons werd die eerste meetkundeles een soort hardop-leesles. Om beurten moesten we een stuk uit het boek voorlezen, waarbij dan op commando van de leraar het stokje moest worden doorgegeven aan een leerling die wat minder actief leek mee te doen.

De alinea die volgde, luidde aldus:

*Aan elk voorwerp (bv, een blok hout) zien we vlakken; zij zijn de grenzen tussen het voorwerp en de omringende ruimte. Waar twee vlakken van een voorwerp samenkomen, zien wij kanten of lijnen; een lijn is de grens tussen twee vlakken of tussen twee delen van een vlak. De uiteinden van een lijn noemt men punten.*

Wat daarna volgde was een ware stortvloed van vetgedrukte woorden uit de euclidische vaktaal. Ik herinner me hoe vreemd dit alles op mij overkwam. Toen we een aantal lessen later met passer en liniaal constructies leerden uitvoeren (loodlijn oprichten, loodlijn neerlaten, bissectrice et cetera), begon het een beetje te leven. Maar afgezien daarvan bleef meetkunde nog een poos saai en moeilijk. Wat te denken van *tien* stellingen over twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde, zie figuur 1?




*figuur 1*

Daarbij kwam van alles om de hoeken kijken: *overeenkomstige*, *verwisselende binnen en buiten*, *binnen en buiten aan dezelfde kant van de snijlijn*. Vijf soorten paren keer twee uitspraken - implicatie heen en terug – geeft tien stellingen die we uit het hoofd moesten leren.

De termen *F-hoeken*, *Z-hoeken* en *U-hoeken*, werden pas later didactisch bon ton in het onderwijs.

In mijn herinnering duurde het tot november voor ik meetkunde leuk ging vinden en zelf bewijzen kon geven die ik dan, net als mijn leraar, triomfantelijk kon afsluiten met drie hoofdletters: Q.E.D.

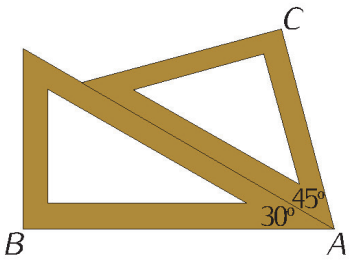
## Mijn eerste meetkundelessen (2)

Elf jaar later, in 1960 kort na de herfstvakantie, begon ik mijn loopbaan als leraar op een school in Den Haag. Het meetkundeboek had de niet erg originele titel *Elementen, Leerboek der Meetkunde*, auteur: Van der Wilt.

Ik schat in dat de methode niet heel bekend was in die tijd, waarvan wel gezegd werd dat iedere zichzelf respecterende leraar zijn eigen boek schreef. Het voorwoord (bij de eerste druk, 1951) opent met de veelzeggende woorden:

*Alweer een nieuw meetkunde leerboek? Was dat nodig?* De auteur vond uiteraard van wel. Hij gaf als argument dat de leerlingen in de gangbare boeken voor opgaven worden geplaatst die door de meesten niet zelfstandig kunnen worden opgelost. Als voorbeeld van zo'n te lastige opgave geeft de auteur:
*Men heeft twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde. Men deelt twee overeenkomstige hoeken middendoor. Bewijs dat deze deellijnen evenwijdig lopen.*
Laat dit nu uitgerekend het vraagstuk zijn, waaraan ik als leerling mijn doorbraak in het 'bewijzen' te danken had.[2] Dat voorwoord van Van der Wilt heb ik destijds vast niet gelezen. Ook van de inhoud van het boek herinner ik me niet al te veel. Er was een werkboek bij, dat sprak me wel aan.
De inleiding was toen ik de klas overnam een gepasseerd station en net als mijn leraar van vroeger legde ik de theorie uit op mijn eigen wijze en de meeste opgaven vond ik best geschikt. Maar na zoveel jaren vind ik het wel grappig om even naar de start van het eerste hoofdstuk (titel: 'Punt. Lijn.') te kijken.
*Als men de punt van een potlood over een stuk papier beweegt, ontstaat een lijn. Beweegt een punt zich steeds in dezelfde richting, dan ontstaat een r e c h t e lijn. Verandert een bewegend punt steeds van richting, dan ontstaat een k r o m m e lijn.*

In het tweede hoofdstuk (titel: 'Hoeken') is onder meer het plaatje uit figuur 2 te vinden:




*figuur 2*

De tekst erbij:
*Met behulp van de tekendriehoeken kunnen we hoeken tekenen van 30°, 45°, 60° en 90°. Ook is het mogelijk om een hoek van 75° te tekenen door beide driehoeken te gebruiken.*
Je zou dan toch de vraag verwachten: 'welke andere hoeken kun je met die twee driehoeken maken?' Nou ja, er moest ook wat voor de leraar overblijven.
Die twee tekendriehoeken, iedere leerling had die (ik heb ze nog steeds) zijn in latere jaren vervangen door de geo-driehoek. Stiekem heb ik dat altijd een beetje jammer gevonden, want je kon er bijvoorbeeld mooi evenwijdige lijnen mee tekenen door de een langs de ander te schuiven en zo de stelling van de gelijke overeenkomstige hoeken mee in praktijk brengen. Het had natuurlijk ook via de twee rechte hoeken gekund, maar daar heb ik toen nooit aan gedacht. Die twee oude tekendriehoeken waren wat je noemt klassiek. Want in het boek *Timaios* zegt Plato:
*Laten we dus kiezen voor de twee (rechthoekige) driehoeken waaruit de lichamen van het vuur en de andere elementen kunnen worden gemaakt: de gelijkbenige driehoek en de driehoek waarvan de langste (rechthoeks) zijde in het kwadraat altijd driemaal zo lang is als het kwadraat van de kortste zijde.*
Met 'vuur en de andere elementen' (dat zijn aarde, water en lucht) bedoelt Plato atomen in de vorm van regelmatige veelvlakken met uitzondering van de dodecaëder. Met tekendriehoeken van de ene soort kun je een vierkant, met die van de andere soort een regelmatige driehoek maken. In beide gevallen kan met twee exemplaren worden volstaan. Voor mij is het raadselachtig waarom Plato er vier voor het vierkant en zes voor de gelijkzijdige driehoek gebruikt. Was ik als leraar maar op de hoogte geweest van Plato's tekst, ik had er chocola van kunnen maken.

## Vernieuwing in de jaren zestig

In 1958 was het zogenaamde Wimecos-leerplan[3] ingevoerd. Maar veel verschil met het oude leerplan (uit 1937) was in de meeste schoolboeken niet te ontdekken, al waren er wel uitzonderingen zoals *Van figuren naar begrippen* van het echtpaar Van Hiele[4].
In dit verband wil ik ook de mooie serie *Planimetrie* van de auteurs Maassen en Van Oosten noemen. In het eerste hoofdstuk met als titel 'Figuren' worden de leerlingen uitgedaagd door een serie taken. Daarbij figureert een set van plastic staafjes, waarmee veelhoeken kunnen worden gemaakt. Zo wordt met de staafjes met lengte 8, 12, 8 en 12 cm het idee parallellogram geïntroduceerd, met de daarbij horende opdracht:
*Pak dat parallellogram vast bij twee overstaande hoekpunten en vervorm het. Er zijn dus zeer veel parallellogrammen die zijden hebben van 8, 12, 8 en 12 cm en je kunt er net zoveel maken als je wilt.*
Vervolgens wordt er gelet op de overstaande hoeken en naar een conclusie toegewerkt.
Ik was in 1963 van school veranderd en in Wageningen gaan werken, en wilde na een jaar deze methode daar graag ingevoerd zien, maar kreeg mijn collega's toen helaas niet mee.

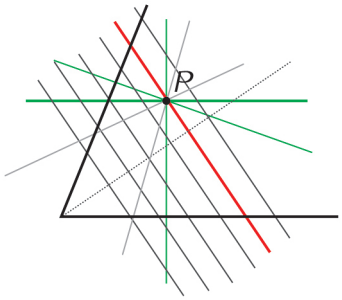
>

## New math

Inmiddels was er een soort pandemie uitgebroken met de naam 'new math'. In Nederland was de CMLW[5] opgericht die zich eerst richtte op een soort heropvoeding van wiskundeleraren en later experimenten met nieuwe leerstof organiseerde. Er werd toegewerkt naar een nieuw leerplan dat tegelijkertijd met de Mammoetwet ingevoerd zou moeten worden. Voor de meetkunde van de onderbouw was al vaker gepleit voor een intuïtieve inleiding, liefst vanuit de ruimte en nu kwamen ook transformatiemeetkunde en vectormeetkunde in zicht. In sommige, vooral Zuid-Europese landen, werd Euclides van zijn voetstuk gehaald met de kreet: '*A bas Euclide*'. De afstand tussen de wiskunde van het voortgezet en die van het hoger onderwijs was te groot geworden en er werd gepleit voor een sterk structuralistisch georiënteerd wiskundeonderwijs.
In oktober 1963 stond in ons vakblad een artikel van professor N.H. Kuiper onder de titel 'Lofzang op de Meetkunde'. Als lovenswaardige elementen vatte hij samen:

a. deduceren
b. vertrouwdheid met vlak en ruimte; praktisch nut;
c. creativiteit en inventiviteit geprikkeld;
d. genot;
e. opbouw intuïtie en steun voor belangrijke wiskundige begrippen;
f. voorbereiding voor later te gebruiken wiskunde.

Daar kan ik het nog steeds hartroerend mee eens zijn, maar dat geldt minder voor de voorbeelden die Kuiper etaleerde. Hij pleitte voor een modernisering waarbij er meer aandacht zou moeten zijn voor affiene meetkunde en waarbij hij uitlegt hoe coördinaten kunnen worden ingevoerd als lineaire functies op het vlak. Verder maakte hij consequent gebruik van de verzamelingentaal ('verzisch') die ik toen ook al enthousiast in mijn lessen was gaan gebruiken, met name bij de behandeling van 'meetkundige plaatsen'. Ik weet nog hoe ik in mijn nopjes was met een oplossing van een van mijn tweedeklasleerlingen bij de volgende toetsopgave:
*Gegeven een hoek en een punt P binnen die hoek. Construeer door P de lijn die gelijke stukken van de benen van de hoek afsnijdt.*
Die leerling redeneerde aldus, zie figuur 3: twee eisen, dat betekent twee verzamelingen.
(1) de verzameling van alle lijnen door *P*.
(2) de verzameling van alle lijnen die gelijke stukken van de benen van de hoek afsnijden.
Verzameling (1) is de lijnenwaaier met top *P*.
Verzameling (2) is een serie evenwijdige lijnen die loodrecht staan op de bissectrice van de hoek.
De doorsnede van beide verzamelingen is dus de lijn door *P* die loodrecht op de bissectrice van de hoek staat!
Hij gebruikte bij zijn oplossing ook foutloos de geijkte 'verzische' notaties.

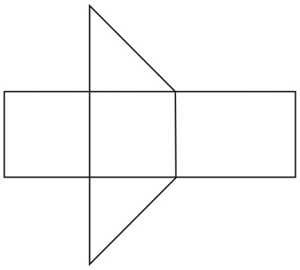


*figuur 3*

## Curriculum.toen

Het is het jaar 1968, de Mammoetwet komt sneller dan door sommigen was verwacht. Experimenten waren nog niet afgerond, laat staan geëvalueerd. Dat gold ook voor de CMLW-proeven met nieuwe leerstof. Voor de meetkunde betroffen die transformatiemeetkunde (in de onderbouw) en meetkunde met vectoren (in de bovenbouw).
Enige jaren eerder was er, door een team onder leiding van R. Troelstra[6] een proef gedaan met vlakke meetkunde gebaseerd op transformaties in deductieve stijl, dus van: gegeven-te bewijzen-bewijs. Het was een fraaie serie van drie boekjes, ik zag dat toen als toekomstmuziek.
Ook bij het CMLW-experiment werd Troelstra betrokken, maar nu werd de stijl minder streng en werd er gekozen voor een intuïtieve ruimtelijke inleiding. Dit leidde tot voor zover ik weet het laatste exclusieve schoolboek meetkunde voor de onderbouw, met als titel: *Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen*[7]. De eerste paragraaf van dit boek ('De kubus') begon aldus:
*Ieder van ons die wel eens met een blokkendoos heeft gespeeld, weet wat een kubus is. Laten we eens nagaan hoe zo'n kubus kan ontstaan. Stel je voor, dat we een kubus gaan snijden uit een appel of een brok kaas.*
Dat is toch wel andere koek, dan de alinea waarmee ik dit artikel ben begonnen. Al gauw komt dan een mogelijk bouwplaatje (de auteurs zeggen 'netwerk') van de kubus ter sprake. Ik weet nog dat ik mijn brugklasleerlingen de opdracht had gegeven om thuis een kubus van karton te fabriceren en dat de eerstvolgende les iedereen met een kubus op tafel, de een nog mooier dan de andere, op mijn goedkeuring zat te wachten. Natuurlijk kon ik niet nalaten er meteen een probleempje aan vast te knopen:
*Stel je voor er zit een mier op een van de punten van je kubus. De mier wandelt over de kubus naar het hoekpunt dat het verst weg ligt. Welke is de kortste route die de*

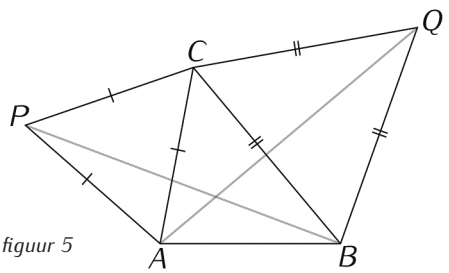
*mier kan nemen?* Bij de oplossing bood het bouwplaatje goede diensten, zoals de lezer zich kan voorstellen.
Een leuke opgave uit het boek betrof het netwerk van een langs een diagonaalvlak gehalveerde kubus, zie figuur 4.



*figuur 4*

Door na het bouwen van de halve kubus deze met het diagonaalvlak tegen een spiegel te plaatsen werd een hele kubus zichtbaar. Zo werd de spiegeltransformatie ruimtelijk geïntroduceerd. In het volgende hoofdstuk werd de spiegeling beperkt tot het platte vlak. Daarbij werd in eerste instantie een vierkantjesrooster (als bovenaanzicht van een aantal kubussen) gebruikt. In het derde hoofdstuk ('Afbeeldingen') kwam de 'ware' transformatiemeetkunde in beeld. Dat wil zeggen: spiegelingen, rotaties, translaties met hun onderlinge relaties. Na een serie toepassingen (hoofdstuk 4) werd in het vijfde (slot)hoofdstuk het begrip 'congruentie' gedefinieerd: *twee figuren noemen we congruent als de ene figuur beeldfiguur van de andere is bij spiegeling, draaiing, verschuiving of een combinatie ervan.* Geheel volgens het principe van Felix Klein!

Maar de auteurs hinkten op twee gedachten waar ze aan het eind van het boek nog gauw de vijf congruentiekenmerken behandelden, de bouwstenen bij het vroegere bewijzen. Zie bijvoorbeeld deze opgave:
*Teken een driehoek ABC met de gelijkzijdige driehoeken ACP en BCQ (zie figuur 5).*
*Bewijs dat AQ en BP congruent zijn.*
*Probeer dit eerst eens met een afbeelding, namelijk een rotatie om C. Zoek daarna een congruentiekenmerk.*
Waarom die rotatie werd voorgezegd? Dat had toch aan de leraar kunnen worden overgelaten, niet het voorzeggen, maar het zo nodig voorzichtig sturen.




*figuur 5*

Ik vond het vraagstuk wel mooi en van de bespreking herinner ik me dat de leerlingen het lastig vonden om het 'transformatiebewijs' netjes op te schrijven. Dat ging met die ZHZ toch wel makkelijker, al moest je daarbij wel op het idee komen dat de hoeken *PCB* en *ACQ* gelijk zijn.
Zo legden de auteurs de vinger op zere plek van de 'new-look-meetkunde': het bewijzen, toch de ziel van de wiskunde, werd er niet makkelijker op. Het gevolg was dat er aan de 'bewijsvaardigheid' in de loop van de jaren, steeds minder aandacht werd besteed. Exit deductie!
Was dat spijtig? Als leraar had ik ervaren dat het zelfstandig bewijzen vinden en ook nog netjes opschrijven, vooral was weggelegd voor de 'happy few', dus nee.

*Het idee om in de onderbouw zoveel mogelijk intuïtieve en concrete meetkunde te onderwijzen en in de bovenbouw leerlingen met het meest exacte pakket wel 'bewijsmeetkunde' te geven, al of niet aangevuld met analytische methoden en zeker met ruimtemeetkunde, waarbij de eerder genoemde zes elementen van professor Kuiper tot hun recht komen, vind ik - sinds lang en nog steeds - met stip de beste optie voor het meetkundeonderwijs.*

## Noten

[1] v.h.m.o. stond voor 'voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs
[2] Zie M. Kindt (2015). *Wat te bewijzen was.* Utrecht: Freudenthal Instituut.
[3] Wimecos (vereniging voor leraren wiskunde, mechanica en cosmografie) was de voorloper van de NVvW
[4] P. van Hiele (*De problematiek van het inzicht*) en D. van Hiele-Geldof (*De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het vhmo*) waren in 1957 gepromoveerd in Utrecht.
[5] CMLW stond voor Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde
[6] Auteurs *Transformatiemeetkunde*: R. Troelstra, A.N. Habermann, A.J. de Groot en J. Bulens.
[7] Auteurs: M,G. Kuipers, J. Siepelinga, R. Troelstra, G. Tromp

## Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Desiree van den Bogaart

# Bingo!

Bekende gezelschapsspelletjes kun je met een beetje creativiteit prima inzetten in het onderwijs. In dit artikel beschrijft Desiree van den Bogaart hoe het ouderwetse spel bingo op een onverwachte manier door een docent kan worden ingezet in de les, met veel mooie interactie met de leerlingen tot gevolg.

## Bekend verhaal

We kennen allemaal het spel bingo, waarbij je een kaart met daarop 25 getallen tussen 1 en 75 vol moet zien te krijgen (of een rijtje of een kolom of ...). Dat speel je op kinderfeestjes tot een bepaalde leeftijd en daarna een tijd niet en daarna weer wel als je op bezoek bent bij opa en oma in het bejaardenhuis.

*figuur 1 Een ouderwetse bingomolen*

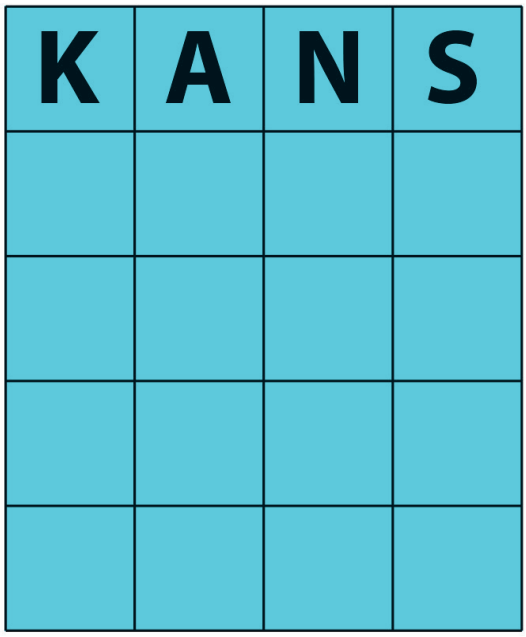
We kennen waarschijnlijk allemaal ook wel varianten. Bij ons in de buurt kun je (als er geen corona-maatregelen zijn) één keer in de maand disco-bingo spelen. Dan worden er muziekfragmenten gedraaid die je moet zien te herkennen en na een blik op de meegeleverde legenda 'oh dit is volgens mij Ed Sheeran, die staat op nummer 17' kijk je vervolgens of jij 17 op je bingokaart hebt. Valse bingo betekent daar liedje zingen, dus hilariteit gegarandeerd. (Ik kan niet wachten tot we weer mogen.) Bij jaarlijkse evenementen zoals Prinsjesdag en het Songfestival zijn er speciale bingokaarten te vinden op sociale media waarmee je veelgehoorde uitspraken van de tv-commentatoren kunt aanstrepen. Bij ons thuis werd onlangs ook hartelijk gelachen om een zogenaamde Puberbingo, zie figuur 2, die inmiddels toch ook wel heel herkenbare uitspraken bevat.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Zucht... | Waarom moet ik dat ALTIJD doen? | Jaahaa, ik heb je wel gehoord | Hoezo is 180 euro voor een trui te duur? | Als jullie maar niet raar gaan doen |
| Mam, overdrijf niet zo... | Hoezo? | Heb je m'n ... al gewas-sen? | Nou, dan geloof je me niet | Doe nou niet meteen zo boos |
| Weet jij waar mijn ... is | Jahaa... | Maar ik gebruik hem als wekker! | Mag ik de ... ik kan er nét niet bij | Ik kan er toch ook niets aan doen! |

*figuur 2 Puberbingo*

## Activerende werkvorm

In het boek *Activerende werkvormen voor bètadocenten* van Martin Bruggink[1] staat de bingo ook als werkvorm beschreven. Je bedenkt als docent opgaven die opgelost moeten worden. Leerlingen mogen zelf hun bingokaarten maken. De opgaven komen in willekeurige volgorde aan bod. Leerlingen maken de opgaven en hebben dan hopelijk de oplossing (op de juiste plek) op hun bingokaart staat. Als variant daarop kun je de leerlingen ook opgaven laten bedenken waarvan de oplossingen precies een aantal voorgeschreven getallen zijn. Deze vormen van bingo heb




*figuur 3 Lege bingokaart van een les over kansrekening*

ik ook wel gespeeld met mijn leerlingen, met name bij hoofdstukken over rekenen of algebra. Maar eigenlijk vind ik die Prinsjesdag-/Songfestival-/Puberbingo veel leuker en wilde ik die ook gebruiken in mijn wiskundeles. Nu werk ik inmiddels al jaren aan de lerarenopleiding, dus dat is een iets andere setting, maar mijn studenten geven aan dat ze mijn versie van bingo prima kunnen toepassen in het voortgezet onderwijs. Ook als ik wel eens een training over activerende werkvormen geef aan middelbare-schooldocenten van verschillende vakgroepen en dan deze bingo gebruik, is de reactie positief en zien niet alleen de collega's van wiskunde het zeker zitten om er zelf mee aan de slag te gaan.

## Hoe werkt het?

Stel je voor dat je in klas 2 een hoofdstuk over meetkunde gaat behandelen en je wilt bij je leerlingen de al bekende meetkundekennis uit klas 1 peilen en opfrissen. Geef je leerlingen eerst de opdracht om zelf een bingokaart te maken van 9, 16 of 25 vakjes (of geef ze een kopietje van een lege bingokaart die je zelf hebt voorbereid, zie figuur 3, dit is een bingokaart die ik zelf gebruikt heb bij het onderwerp kansrekening). Vervolgens schrijven ze in de vakjes begrippen die zij kunnen bedenken bij het onderwerp meetkunde. Bijvoorbeeld: hoek, evenwijdig, graden, oppervlakte, et cetera. Ik laat mijn studenten altijd hun kaart zoveel mogelijk zelf vullen, maar je kunt ze hierbij ook laten samenwerken.

Daarna begin jij aan je klassikale herhaling van de lesstof. Als jij een woord gebruikt wat de leerling op de kaart heeft staan, mag deze leerling het woord afstrepen. Ik ga meestal meteen voor de volle kaart, maar dat kun je ook in stapjes doen. Er wordt super goed geluisterd naar alles wat je zegt, zeker als er een kleine beloning op staat. Bij mijn (jong)volwassenen is de beloning meestal een echte kop cappuccino van de coffee-corner in de hal.
Maar nu komt het mooiste: als er woorden overblijven op de bingokaarten, die niet door jou zijn gezegd, dan kunnen de leerlingen je vragen gaan stellen. Ze formuleren de vraag dan zo, in de hoop jou te verleiden om in je reactie het door hun gezochte woord te gebruiken. Dit leidt tot een hele leuke interactie met de leerlingen, tot slimme vragen en soms nog slimmere antwoorden. Want als ik vind dat een student het er te dik bovenop legt, of ik wil het nog even uitstellen, dan omzeil ik soms in mijn antwoord het woord waarvan ik vermoed dat ze daarop uit zijn. Waarop die student dan gaat proberen met nog een slimme vraag te komen.
Deze vorm van bingo is naar mijn idee vooral geschikt om voorkennis mee op te halen, of om een samenvatting van de lesstof te geven aan het einde van een hoofdstuk. Ik hoef meestal niet te veel extra regels te geven zoals 'de woorden de/het/een/in/op/etc mogen niet op je bingokaart' maar dat kun je natuurlijk naar wens toevoegen. Nog een laatste praktische tip: laat de woorden bij voorkeur niet doorstrepen maar omcirkelen. Dat maakt het voor jou makkelijker om te controleren of het een goede bingo is. Dat moet bij de disco-bingo ook altijd, anders is het alsnog: liedje zingen.

## Noot

[1] Bruggink, M. (2017). *Activerende werkvormen voor bètadocenten.* Apeldoorn: Garant

## Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over o.a. vakdidactiek en activerende werkvormen in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

# Wis en Waarachtig

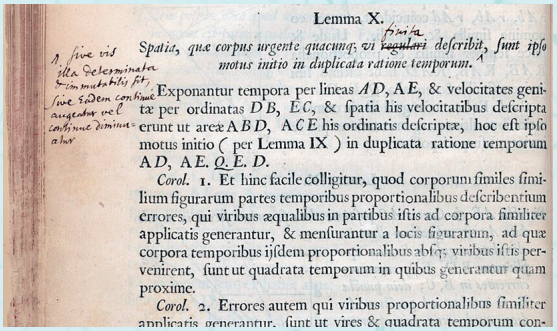
## De kortste route langs twee miljoen sterren

Het handelsreizigersprobleem lijkt eenvoudig, maar het is een enorm lastige puzzel. Het draait om het vinden van de kortste route tussen vele locaties, waarbij je ze elk slechts één keer bezoekt en uiteindelijk terugkeert naar het beginpunt. Het kan worden opgelost voor bepaalde datasets, maar er is nog geen algemeen algoritme gevonden. William Cook, wiskundige, en Keld Helsgaun, computerwetenschapper, zijn erin geslaagd om de puzzel op de grootste schaal tot nog toe op te lossen. Hiervoor analyseerden ze gegevens van de Gaia-ruimtetelescoop, die de locaties van 2.079.471 sterren in de Melkweg heeft gemeten. De meest efficiënte route is ongeveer 94.208.157,5 lichtjaar lang, ontdekten de onderzoekers. Ze berekenden dat als er toch een kortere route is, deze niet meer dan een factor 0,0000074 kan afwijken. Dat komt neer op ongeveer 700 lichtjaar. Vervolgens brachten ze de route door de sterren in 3D in kaart. 'Nu hoef je niet gelijk je warp-motor erbij te pakken', zegt Cook. Zelfs met de snelheid van het licht zou het bijna honderd miljoen jaar duren om deze reis te maken. Toch is het oplossen van het handelsreizigersprobleem geen puur academische oefening. De methoden die Cook en Helsgaun gebruiken, kunnen ook worden toegepast op andere soorten datasets, zoals vluchtplanning en genetische kaarten. 'Hoe groter het probleem dat je kunt oplossen, hoe dichter je bij de realiteit kunt komen, oftewel bij het modelleren van de werkelijke wereld', aldus Cook.
*Bron: www.newscientist.nl*

## Wiskundeangst verminderen

In een nieuwe Australische studie hebben onderzoekers de impact van angst op het leren van rekenen en wiskunde onderzocht. Ze ontdekten dat het vergroten van het vertrouwen van studenten cruciaal is voor een grotere betrokkenheid bij het onderwerp. Hoofdonderzoeker Florence Gabriel: 'Wanneer studenten wiskundeangst ervaren, zullen ze de neiging hebben om zich door wiskundevragen te haasten, hun focus te verliezen of gewoon op te geven als het allemaal te moeilijk lijkt.' Het is niet verrassend dat dit leidt tot slechte wiskundeprestaties en later tot een terughoudendheid tot wiskunde.
Gabriel: 'Om deze cyclus te doorbreken, moeten we het vertrouwen van studenten in wiskunde opbouwen en vergroten, vooral voordat we aan een nieuw wiskundeconcept beginnen. Dit is gebaseerd op het idee van zelfregulerend leren - waarbij studenten het vermogen hebben om hun eigen leerproces te begrijpen, te volgen en te controleren. [...] Door de aandacht van een student te vestigen op gevallen waarin ze eerder een moeilijke wiskundige uitdaging hebben overwonnen, of op een aanzienlijk wiskundig succes, bouwen we in wezen hun vertrouwen en geloof in hun eigen capaciteiten op... .' Het onderzoek concentreerde zich op de psychologische factoren van het leren van wiskunde: motivatie, wiskunde zelfconcept (het geloof in hun vermogen om wiskunde te doen), rekenangst, doorzettingsvermogen, wiskundig zelfvertrouwen en wiskundige geletterdheid (het vermogen om wiskunde toe te passen op de echte wereld). 'Belangrijk is dat ons onderzoek het domino-effect aantoont dat deze variabelen op elkaar hebben', zegt Gabriel. 'Door het vermogen van een student te ontwikkelen om na te denken over successen uit het verleden - voordat de angst voor wiskunde toeslaat - kunnen we enkele van de negatieve en emotionele overtuigingen over wiskunde doorbreken en hopelijk de weg effenen voor studenten om wiskunde te accepteren en ermee bezig te zijn in de toekomst.'
Bron: *www.sciencedaily.com*

## Newtons *Principia* verrassend breed verspreid



Lemma X.

Spatia, quæ corpus urgente quacunq; vi ~~regulari~~ finita describit, sunt ipso motus initio in duplicata ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas $AD$, $AE$, & velocitates genitæ per ordinatas $DB$, $EC$, & spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ $ABD$, $ACE$ his ordinatis descriptæ, hoc est ipso motus initio ( per Lemma IX ) in duplicata ratione temporum $AD$, $AE$. Q. E. D.

*Corol.* 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus æqualibus in partibus istis ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur a locis figurarum, ad quæ corpora temporibus ijsdem proportionalibus absq; viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

*Corol.* 2. Errores autem qui viribus proportionalibus similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum con-

*figuur 1 Het handschrift van Newton in de kantlijn van zijn* Principia.
*foto: Babson College – The Huntington Library.*

Newtons *Principia* had de reputatie onleesbaar te zijn. Terwijl de auteur langsliep, zou een student in Cambridge hebben opgemerkt: 'Daar gaat de man die een boek schrijft dat hij noch iemand anders begrijpt.' De honderden vergelijkingen, diagrammen en obscure verwijzingen hielpen niet, noch dat het in het Latijn was geschreven, de wetenschappelijke taal van die tijd. Isaac Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, of *Mathematical Principles of Natural Philosophy*,
gepubliceerd in Londen in 1687, werd niettemin een wetenschappelijk standaardwerk. Het ontsloot het universum met zijn ontdekking van zwaartekracht en wetten van planetaire

beweging, en legde een onderzoeksmethode uit die de gouden standaard werd. Nu hebben historici ontdekt dat de eerste, gelimiteerde editie van het schijnbaar onbegrijpelijke boek in feite een verrassend brede verspreiding bereikte in de ontwikkelde wereld. Bij een eerdere telling van het boek, gepubliceerd in 1953, waren 189 exemplaren wereldwijd bekend. Maar in een nieuw onderzoek van Feingold Svorencík zijn er bijna 200 meer gevonden – in totaal 386 exemplaren, waaronder exemplaren ver buiten Engeland in Boedapest, Oslo, Praag, Zagreb, het Vaticaan en Gdansk. Volgens Feingold en Svorencík suggereert het onverwacht grote aantal dat het boek 'een veel grotere oplage had dan algemeen wordt aangenomen', evenals 'een breder en competent lezerspubliek'. Ze schatten dat de eerste editie van het boek uit zo'n 600 en mogelijk wel 750 exemplaren bestond – honderden meer dan de ongeveer 250 die historici eerder hadden aangenomen.

*Bron: www.nytimes.com*

# WiTje: Lappendekens

Wiskunde in teams

**WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).**

Lappendekens maken, of 'patchwork', is een handwerktechniek waarbij allemaal lapjes aan elkaar worden genaaid tot een lappendeken ('patch' betekent 'lapje stof'). Veel van deze lappendekens zijn kleurrijk en de verschillende soorten lapjes worden in regelmatige patronen aan elkaar gemaakt. Dan zie je er vaak herhaling of symmetrie in.

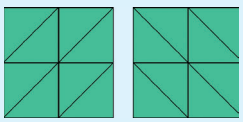
De lappendekens hierboven zijn alle drie gemaakt met dezelfde basisvorm: er is 64 keer eenzelfde vierkant gebruikt om deze deken te maken. Zo'n basisvorm (in dit geval één vierkantje) noem je een *grondvorm*. Door deze grondvorm steeds anders te draaien krijg je een heel ander resultaat.

## Grondvorm met twee kleuren

Het is veel werk om te bepalen hoeveel echt verschillende lappendekens er mogelijk zijn van 8 × 8 met bovenstaande grondvorm. Bij kleinere lappendekens van 2 × 2 met deze grondvorm, is dat nog steeds veel werk. (Vanzelfsprekend mag je dat gaan uitzoeken als volgende uitdaging!). Daarom gaat deze opdracht over het uitzoeken van hoeveel *echt verschillende* 2 × 2 patronen er zijn van de volgende grondvorm:

## Grondvorm in twee delen met één kleur

Voorbeeld van twee *dezelfde* 2 × 2 patronen:



Zoek uit hoeveel *echt verschillende* twee-bij-twee-patronen er zijn met bovenstaande grondvorm.
Patronen zijn hetzelfde als ze door te draaien precies op elkaar passen; hierboven zie je dus een voorbeeld van hetzelfde twee-bij-twee patroon, want als je het rechterpatroon een kwartslag draait is het hetzelfde patroon als het linkerpatroon). Je kunt daarbij gebruik maken van dit werkblad[1].

[1] *https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28136/documents/werkblad.pdf*

*Bron: Onderbouw Wiskunde Dag 2014.*

Tjeerd Morsch

# Bergstations verbinden in Egmond aan Zee

Afgelopen zomer zou de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaatsvinden in Sint-Petersburg. Vanwege de coronapandemie konden de deelnemers niet naar Rusland afreizen en hebben ze de olympiade in hun eigen land als wedstrijd-op-afstand gemaakt. In dit artikel bespreekt deelnemer Tjeerd Morsch opgave 4.

## Inleiding

De afgelopen drie jaar heb ik meegedaan met het trainingsprogramma van de wiskundeolympiade. Nadat ik een goede score op de finale had gehaald, werd ik uitgenodigd voor de trainingsgroep waar ik drie jaar lang een intensief (en heel leuk) trainingsprogramma heb gevolgd. Hier oefen je veel wiskunde en bereid je je voor op meerdere wedstrijden. De belangrijkste wedstrijd is de IMO (de internationale wiskundeolympiade). Ik was dan ook extreem blij dat ik me afgelopen zomer gekwalificeerd had voor de IMO en ondanks dat het dit jaar door corona niet in Sint-Petersburg was maar in Egmond aan Zee had ik er veel zin in. Aan de voorbereiding zou het in ieder geval niet liggen, want voordat de wedstrijd begon hadden we al heel veel oefentoetsen gemaakt en nog meer losse opgaven gedaan. Het grappige van veel IMO-opgaven is wel dat bijna elke opgave totaal anders is dus dat hoeveel je je ook voorbereidt, je altijd voor een compleet nieuw probleem staat.
De IMO bestaat uit zes opgaven die verspreid zijn over twee wedstrijddagen van 4,5 uur. Er zit verschil in moeilijkheidsgraad: opgave 1 is lastig, maar voor de meeste deelnemers wel op te lossen, opgave 2 is een heel stuk moeilijker en wordt meestal door redelijk wat leerlingen (gedeeltelijk) opgelost en opgave 3 is soms vrijwel onmogelijk (voor mij dan).
De opgave die ik vandaag ga bespreken was de eerste opgave van de tweede dag.

Mijn eerste gedachte was: 'Wat een lange tekst zeg!' Vervolgens heb ik de opgave meerdere keren gelezen om er zeker van te zijn dat ik de opgave helemaal begreep. Voor de lezers die zich aan de opgave willen wagen is dit het moment om dit artikel even opzij te leggen, want hieronder volgt de uitwerking.

IMO 2020

**Opgave 4.** Gegeven is een geheel getal $n > 1$. Er zijn $n^2$ stations op een berghelling, allemaal op verschillende hoogtes. Er zijn twee firma's, $A$ en $B$, die elk $k$ kabelbanen beheren. Met elke kabelbaan kun je van een van de stations naar een hogergelegen station gaan (zonder tussenstops). De $k$ kabelbanen van $A$ hebben $k$ verschillende beginpunten en $k$ verschillende eindpunten, en een kabelbaan die hoger begint dan een andere, eindigt ook hoger. Hetzelfde geldt voor firma $B$. We zeggen dat twee stations door een firma *verbonden* zijn als je van het lagere naar het hogere station kunt gaan door alleen gebruik te maken van een of meer kabelbanen van die firma (geen andere bewegingen tussen de stations zijn toegestaan).

Bepaal het kleinste (strikt) positieve gehele getal $k$ zodat je zeker weet dat er twee stations zijn die door de beide firma's verbonden zijn.

*Opgave 4 van IMO 2020*

## Kleine gevallen

Regel één bij bijna elke complexe opgave is om eerst wat te proberen met kleine gevalletjes. Met zo'n lange opgave als deze heb je soms geen idee waar je moet beginnen of waar de opgave nou precies om draait. Een voorbeeldje kan goed helpen om wat meer gevoel te krijgen voor de opgave. In deze opgave is $n$ een natuurlijk getal groter dan 1 dus laten we met $n = 2$ beginnen. Er zijn nu dus $2^2 = 4$ stations. Laten we deze voor het gemak stations 1, 2, 3 en 4 noemen, waarbij station 1 het laagst ligt, 2 het een-na-laagste enzovoort. We gaan nu proberen zoveel mogelijk kabelbanen in te delen, zo dat juist geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn.
We beginnen met de kleinst mogelijke $k$, namelijk $k = 1$. Beide firma's hebben nu één kabelbaan en het is nu overduidelijk dat er niet altijd hoeft te gelden dat er twee stations bestaan die door beide firma's verbonden zijn. Zo kan firma A stations 1 en 2 verbinden en firma B stations 3 en 4. Laten we nu $k = 2$ proberen, dus beide firma's hebben twee kabelbanen. We kunnen beginnen met firma A. Zeg dat firma A de verbindingen 1-2 en 2-3 heeft. Nu hebben we een probleem voor firma B. Het is onmogelijk om twee verbindingen voor firma B te kiezen

zodat geen twee stations verbonden zijn door zowel A als B. We weten namelijk dat firma B twee kabelbanen heeft en omdat twee eindstations van één firma niet hetzelfde station mogen zijn, weten we dat station 2 of 3 een eindstation moet zijn van een kabelbaan van firma B. In beide gevallen zijn van het drietal stations 1, 2, 3 er minstens twee verbonden door beide firma's (ofwel 1 en 2, ofwel 1 en 3, ofwel 2 en 3).
Dit betekent niet dat $k = 2$ niet kan, ik kan immers twee andere kabelbanen kiezen voor firma A dan 1-2 en 2-3. Stel dat firma A de kabelbanen 1-2 en 3-4 heeft en firma B de kabelbanen 1-3 en 2-4 heeft. Nu zien we dat geen twee stations door beide firma's verbonden zijn! Laten we nu $k = 3$ proberen. Als een firma drie kabelbanen heeft met verschillende eindstations en beginstations moeten dit wel de kabelbanen 1-2, 2-3 en 3-4 zijn, maar als beide firma's deze kabelbanen hebben is elk tweetal stations door beide firma's verbonden! Bij $n = 2$ is $k = 3$ dus de kleinste $k$ waarvoor je zeker weet dat twee stations door beide firma's verbonden zijn.

> "Hoeveel je je ook voorbereidt, je staat altijd voor een compleet nieuw probleem."

We hebben nu een beter gevoel wat de bedoeling is. Dit soort opgaven zijn eigenlijk twee opgaven in één. Ten eerste moet je bewijzen dat voor een zekere $k$ altijd geldt dat twee stations door beide firma's verbonden zijn en ten tweede moet je bewijzen dat er voor alle $k$ kleiner dan het antwoord een constructie bestaat waarbij geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Een van de begeleiders zei ooit dat je zo'n soort opgave eigenlijk als een wedstrijd met jezelf kunt zien, aan de ene kant probeer je een constructie te vinden waarbij geen twee stations verbonden zijn door beide firma's voor een zo groot mogelijke $k$ en aan de andere kant probeer je te bewijzen dat er altijd twee stations verbonden zijn door beide firma's voor een zo klein mogelijke $k$. Als deze twee $k$'s elkaar tegenkomen ben je klaar!

## Meer kleine gevallen

We weten dat bij $n = 2$, de $k$ die we zoeken 3 is, maar helaas moeten we de opgave voor alle $n$ oplossen. Op dit moment hebben we eigenlijk geen idee wat de minimale $k$ voor andere $n$ moet worden. We kunnen kijken naar meer kleine gevallen natuurlijk!

Het volgende waar we naar kunnen kijken is $n = 3$. Dan hebben we $3^2 = 9$ stations. Ik vond het zelf nog best leuk om met negen stations te prutsen en te kijken wat de maximale $k$ is waarvoor geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Dit is al wat moeilijker dan bij $n = 2$. Hier was ik tijdens de wedstrijd ook best een tijdje mee bezig. Ik dacht eerst dat er bij zes kabelbanen altijd twee stations door beide firma's verbonden zijn, maar dit blijkt niet zo te zijn! Als we de $3^2 = 9$ stations net als eerder de cijfers 1 tot en met 9 geven waarbij 1 het laagste station is, 2 het een-na-laagste, enzovoort, dan kunnen we de negen stations in een tabel zetten op de volgende manier:

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 |

Laat firma A de horizontale lijnen verbinden en firma B de verticale, dan krijgen we voor A de verbindingen: 1-2, 2-3, 4-5, 5-6, 7-8, 8-9 en voor B de verbindingen: 1-4, 4-7, 2-5, 5-8, 3-6 en 6-9.
Dit is een oplossing, omdat er nu geen tweetal stations door beide firma's verbonden zijn. Dit zou namelijk betekenen dat deze twee stations in dezelfde rij en dezelfde kolom zouden moeten staan, wat natuurlijk niet kan.

## Ingeving

Het voelt intuïtief alsof deze gevonden verdeling die we nu hebben optimaal is, omdat deze zo moeilijk te vinden was, maar hoe bewijs je zoiets? Een goed idee is meestal om te kijken of we iets kunnen vinden dat bij $k = 7$ altijd anders is dan bij $k = 6$. Ik vond dit de lastigste stap in de opgave en ik zat hier, denk ik, wel 20 minuten vast tot ik opeens een heel goed idee kreeg, gek genoeg, op de wc!

Ik vroeg me af: wanneer zijn twee stations door één firma met elkaar verbonden? Door de voorwaarde dat elk station bij iedere firma hoogstens één keer het eindstation is van een kabelbaan en hoogstens één keer het beginstation, kunnen we stations die bij elkaar verbonden zijn in een rijtje zetten. In het voorbeeld hierboven heeft firma B de rijtjes 1-4-7, 2-5-8 en 3-6-9. Het leek me nuttig om naar dit soort rijtjes te kijken en ik noemde dit soort rijtjes een keten.

Er geldt nu dat in elke keten elk station $a$ precies verbonden is met het hoogste station lager dan $a$ en het laagste station hoger dan $a$ uit de keten. Dit is intuïtief heel logisch maar om het als een goed bewijs te formuleren is nog best lastig. Daarom heb ik besloten dat ik het hierbij laat en dat jullie het van mij mogen aannemen. We zien nu dat twee stations met elkaar verbonden zijn als ze in dezelfde keten staan. In het voorbeeld zijn de stations 1 en 7 dus verbonden door firma B.

Wat me hierna opviel was dat in het voorbeeld hierboven firma A en B allebei precies drie verschillende ketens hebben. Als we nu voor $k = 7$ wat voorbeeldjes proberen, valt het op dat beide firma's altijd maar twee verschillende ketens hebben! Dit kunnen we ook bewijzen. Stel we schrijven alle verschillende ketens van een firma onder elkaar. Als een station met geen enkel ander station verbonden is en dus niet in een keten voorkomt, kunnen we zeggen dat dit station zelf een keten is, alleen dan zonder verbindingen. Op deze manier zien we dat elk van de negen stations in precies één keten voorkomt. Hoeveel kabelbanen zijn er nu in iedere keten?
In ons geval geldt voor 1-4-7 dat dit er twee zijn en het is simpel na te gaan dat er altijd één kabelbaan minder is dan het aantal stations in de keten, want in een keten is elk station met precies zijn buren verbonden. Nu proberen we het aantal kabelverbindingen uit te drukken in het aantal ketens. Als er in totaal maar één keten is hebben we in totaal acht kabelbaanverbindingen. Bij twee ketens is het misschien wat lastiger in te zien dat we in totaal zeven kabelverbindingen hebben. Als we een keten van $x$ stations hebben en een keten van $9 - x$ stations, dan heeft de keten van $x$ stations in totaal $x - 1$ kabelverbindingen en de keten van $9 - x$ stations in totaal $9 - x - 1$ kabelverbindingen. In totaal geeft dit samen $x - 1 + 9 - x - 1 = 7$ kabelverbindingen. Andersom moeten er precies twee ketens zijn als er zeven kabelverbindingen zijn, omdat iedere extra keten een kabelverbinding minder geeft.
Dus in ons voorbeeld met $n = 3$ en $k = 7$ hebben firma A en firma B elk twee ketens. Omdat er negen stations zijn en twee ketens per firma moeten er minstens vijf stations in eenzelfde keten zitten van firma A! Maar als we nu drie van deze vijf stations bekijken voor firma B zien we dat deze niet allemaal in een andere keten kunnen zitten, omdat firma B ook maar twee verschillende ketens heeft! Samengevat: er zijn altijd twee stations te vinden die in dezelfde keten zitten van firma A en in dezelfde keten van firma B, maar dat betekent dat deze twee stations door beide firma's verbonden zijn en dat we bij $k = 7$ dus altijd weten dat er twee stations verbonden zijn door beide firma's!

## Het bewijs

We hebben de opgave nu opgelost voor $n = 2$ en $n = 3$, en bij $n = 3$ hebben we veel nuttige dingen gevonden die misschien ook wel werken voor andere $n$. Zo viel het mij tijdens de wedstrijd op dat we de constructie voor $n = 3$ en $k = 6$ algemeen kunnen maken voor alle $n$. We kunnen elke $n^2$ stations namelijk altijd in een dergelijke matrix zetten en op dezelfde wijze de horizontale rijen en verticale kolommen verdelen over firma's A en B. We verbinden dus voor firma A de stations 1 en 2, 2 en 3, ..., $n - 1$ en $n$ op de onderste rij, $n + 1$ en $n + 2$, ..., $2n - 1$ en $2n$ op de tweede rij, tot en met $n^2 - 1$ en $n^2$ op de bovenste rij. Voor firma B verbinden we de stations 1 en $n + 1$, $n + 1$ en $2n + 1$, ..., $n^2 - 2n + 1$ en $n^2 - n + 1$ in de linkerkolom, tot en met $n^2 - n$ en $n^2$ in de rechterkolom.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n^2 - n + 1$ | $n^2 - n + 2$ | ... | ... | $n^2 - 1$ | $n^2$ |
| $n^2 - 2n + 1$ | $n^2 - 2n + 2$ | ... | ... | $n^2 - n - 1$ | $n^2 - n$ |
| ... | ... | | | ... | ... |
| ... | ... | | | ... | ... |
| $n + 1$ | $n + 2$ | | | $2n - 1$ | $2n$ |
| 1 | 2 | ... | ... | $n - 1$ | $n$ |

We zien nu dus dat twee stations door firma A verbonden zijn als ze in dezelfde rij staan en alleen wanneer ze in dezelfde rij staan en voor firma B geldt precies hetzelfde maar dan voor de kolommen. Hoeveel kabelverbindingen levert dit op? Firma A heeft $n$ horizontale rijen met $n - 1$ verbindingen per rij en firma B heeft $n$ verticale kolommen met $n - 1$ verbindingen per kolom, dus in totaal hebben ze beide $n \cdot (n - 1)$ kabelbanen. Met dezelfde redenering als in het geval $n = 3$ zien we weer dat geen twee stations door beide firma's verbonden zijn. Dit zou namelijk weer betekenen dat deze twee stations in dezelfde rij en dezelfde kolom zouden moeten staan, wat natuurlijk niet kan.

Dus algemeen: voor $n^2$ stations weten we dat we voor $k = n \cdot (n-1) = n^2 - n$ kabelbanen een oplossing kunnen vinden waarbij geen tweetal stations door beide firma's is verbonden.

Ik had tijdens de wedstrijd ook een heel sterk voorgevoel dat dit de maximale $k$ was waarvoor er niet altijd een tweetal stations door beide firma's verbonden is, dus dat $k = n^2 - n + 1$ het goede antwoord was. Bij de olympiadetraining leren we altijd dat als je zo'n vermoeden hebt het slim is om eerst nog het geval $n = 4$ te doen om te kijken of alles klopt, maar ik had daar toen geen zin in en besloot, met mijn bewijs voor $n = 3$ naast me, vol vertrouwen aan mijn bewijs voor alle $n$ te beginnen.
We hebben al laten zien dat we voor $k = n^2 - n$ kabelverbindingen een verdeling kunnen vinden zonder dat twee stations door beide firma's verbonden zijn.
Als we dus kunnen bewijzen dat met één extra kabelbaan (dus $k = n^2 - n + 1$) er altijd een tweetal stations te vinden is dat door beide firma's verbonden is, dan zijn we klaar en is het antwoord dus $k = n^2 - n + 1$.
We bekijken $k = n^2 - n + 1$ en we willen bewijzen dat er altijd twee stations zijn die door beide firma's verbonden zijn. We proberen dit op dezelfde manier te bewijzen als bij $n = 3$ dus we definiëren ketens weer op dezelfde manier. Net konden we bewijzen dat we met negen stations en zeven verbindingen altijd precies twee ketens hebben. Op dezelfde manier kunnen we, met een klein beetje algebra, het volgende bewijzen:

Bij $a$ stations en $b$ ketens zijn er in totaal $a - b$ kabelverbindingen.

Het bewijs gaat eigenlijk precies hetzelfde als bij het minibewijs hierboven, alleen dan met $b$ ketens in plaats van twee en $a$ stations in plaats van negen.

We hebben $a = n^2$ stations en $n^2 - n + 1$ kabelverbindingen. Hieruit volgt dat we $b = n - 1$ ketens moeten hebben.

Er zijn $n^2$ stations verdeeld over $n - 1$ ketens. Stel nu dat firma A geen ketens heeft met meer dan $n - 1$ stations. Dit zou betekenen dat er hoogstens $(n-1)^2$ stations zijn, wat natuurlijk niet klopt, dus er is een keten van Firma A met minstens $n$ stations erin.
Bekijk nu $n$ van deze stations die allemaal in dezelfde keten van firma A zitten. Omdat firma B ook maar $n - 1$ ketens heeft, moet er een keten voor firma B zijn waarin twee of meer van deze $n$ stations zitten. Ze kunnen namelijk niet allemaal in een andere keten zitten, want er zijn maar $n - 1$ ketens. Dit betekent dus dat er altijd een tweetal stations te vinden is dat in dezelfde keten van firma A zit en in dezelfde keten van firma B, maar dat betekent dat deze stations door beide firma's verbonden zijn! Dus voor $k = n^2 - n + 1$ zijn er altijd twee stations verbonden en voor $k = n^2 - n$ niet altijd, dus $k = n^2 - n + 1$ is de minimale $k$.

Ik vond dit zelf een erg gave opgave, maar dat komt misschien ook omdat ik hem tijdens de IMO wist op te lossen. Daarnaast vond ik de opgave erg elegant omdat beide kanten van het bewijs een mooie oplossing hadden. Deze opgave werd door het hele Nederlandse team goed gemaakt en dit leverde ook mooie resultaten op. Het Nederlandse team werd 29ste van alle landen die meededen en we kunnen dus terugkijken op een geslaagde wedstrijd!

## Over de auteur

Tjeerd Morsch is oud-leerling van het Corderius College (Amersfoort) en deed afgelopen zomer mee met de Internationale Wiskunde Olympiade. Hier behaalde hij een bronzen medaille. Hij is 19 jaar en studeert nu wiskunde aan de universiteit van Groningen. E-mailadres: *tjeerd.morsch@gmail.com*

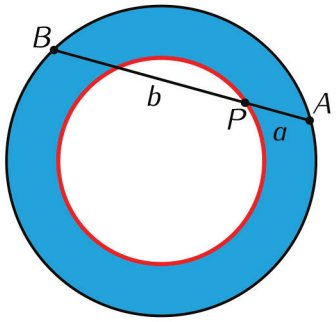
Fred Muijrers

# Don't ditch Holditch!

De oppervlakte tussen twee krommen berekenen is vaak een hele klus met flink wat integraalrekening. Soms hebben we geluk en is het opvallend gemakkelijk. Jacques Jansen onderzocht dit voor cirkels en ellipsen[1] maar meer variatie is mogelijk.

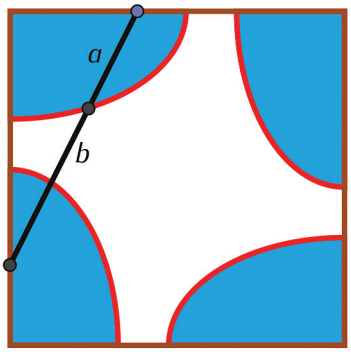
## Voorbeelden

In een cirkel gaat een koorde $AB$ rond. Op die koorde ligt een punt $P$ op afstanden $a$ en $b$ van de uiteinden. De koorde heeft dus een vaste lengte $a + b$, zie figuur 1. Wat is de oppervlakte van het blauwe deel?




*figuur 1*

Zie figuur 2, de 'kromme' is nu een vierkant en daarin gaat ook een 'koorde' rond. De oppervlakte van het blauwe deel is bijna triviaal als bewezen is, dat de vier gebieden samen een ellips vormen.

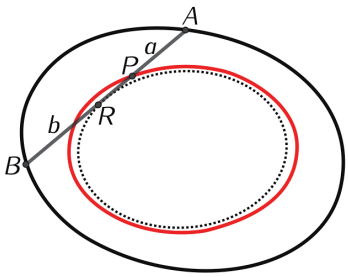



*figuur 2*

De resultaten zijn verrassend. De lezer zal in beide gevallen hebben gevonden: $\pi ab$. De grootte van de cirkel of het vierkant doet er blijkbaar niet toe! Dit vraagt om nader onderzoek.

## Raakkrommen

We beginnen met een kromme, niet geheel willekeurig, waarbinnen een koorde $AB$ met lengte $a + b$ rond gaat. Daarop ligt een punt $P$ zodat $|AP| = a$ en $|BP| = b$, $b$ groter of gelijk aan $a$. Dat betekent niet geheel willekeurig dat er wel zo'n gebied als bij figuur 1 moet kunnen ontstaan. Minimale eis is dan dat de startkromme convex is, zie de zwarte kromme in figuur 3. Om de oppervlakte beschreven door $PA$ te kunnen berekenen, gebruiken we de (gestippelde) raakkromme aan de koorden.




*figuur 3*

Bij de rondgang varieert $|RP|$ voortdurend, maar blijft $R$ wel tussen $B$ en $P$ gelegen. Denken we een horizontale as hierbij, dan geldt: $|RP| = f(\theta)$ met $\theta = \angle(\text{as, raaklijn})$. We krijgen nu voor de situatie in figuur 3[2]:
De oppervlakte van het gebied beschreven door $RP$ bij rondgang: $O_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2 \mathrm{d}\theta$.

De oppervlakte van het gebied beschreven door *RA*:

$$O_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f(\theta)+a)^2 d\theta .$$

En de oppervlakte van het gebied beschreven door *RB*:

$$O_3 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(b-f(\theta))^2 d\theta .$$

Merk op: $O_2 = O_3$. Uitwerking met de bijbehorende integralen geeft: $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \pi(b-a)$.

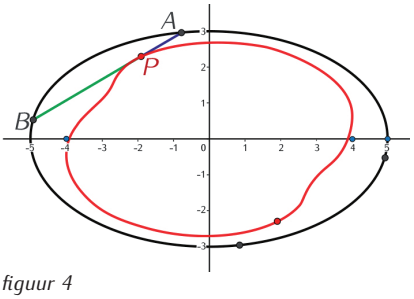
We zoeken oppervlakte $O_4$ van het gebied bij rondgaan van *PA* en daarvoor geldt:

$$O_4 = O_2 - O_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(f(\theta)+a)^2 - f(\theta)^2 d\theta =$$

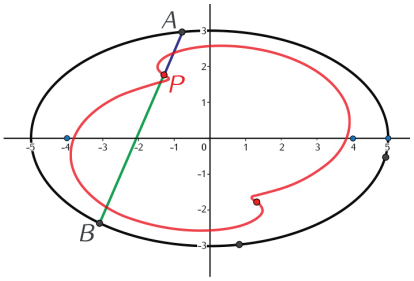
$$a\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta + \pi a^2 = a\pi(b-a)+\pi a^2 = \pi ab$$

## Vondst met beperkingen

Dat is een mooi en bijzonder resultaat. Bij figuur 1 hadden we dus snel het antwoord kunnen geven. We hebben integraalrekening toegepast maar het resultaat is vanaf nu vaker te gebruiken. Er zijn enige voorwaarden bij dat gebruik. De startkromme moet convex zijn, *PA* moet geheel buiten de kromme, die *P* beschrijft, blijven opdat bovenstaande afleiding klopt, de 'koordlengte' $a + b$ heeft beperkingen, etc. Zie [3] voor meer details.




*figuur 4*

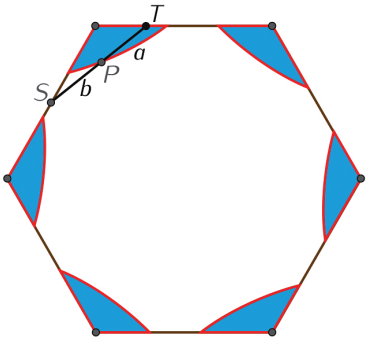



*figuur 5*

Met als startkromme een ellips is te zien: in figuur 4 gaat het net goed, in figuur 5 niet meer. De aanpak om $O_4$ te vinden zal in dit laatste geval anders moeten zijn dan in bovenstaand verhaal.

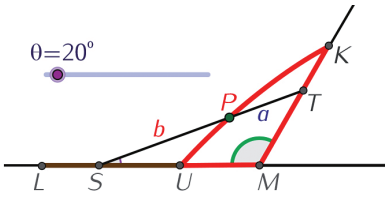
## Ook bij veelhoeken

Een punt *P* op een 'koorde' van lengte $a + b$, binnen een veelhoek getekend, kan ook een nieuwe kromme geven. De oppervlakte daarbuiten, maar binnen de veelhoek, past in bovenstaand verhaal. Als voorbeeld bekijken we in een zeshoek, zie figuur 6, het blauwe gedeelte.




*figuur 6*

Overigens hoeft de zeshoek niet regelmatig te zijn maar binnen *GeoGebra* is het handiger tekenen, als dat wel zo is. $|SP| = b$, $|PT| = a$, $a + b \leq$ (*elke*) *zijde*.
We gaan rekenen in één zo'n hoekpunt, zie figuur 7, met $L(0, 0)$, $U(b, 0)$, $M(a + b, 0)$ en met $\theta = \angle MST$. In de figuur is één situatie getekend met $\theta = 20°$. $\angle LMK = \alpha$, een hoek van de veelhoek.




*figuur 7*

We lezen nu af:

$$y_P = b\cdot\sin(\theta) .$$

$$x_P = x_T - |PT|\cdot\cos(\theta) =$$

$$(a+b)+\frac{(a+b)\sin(\theta)}{\tan(\pi-\alpha)} - a\cdot\cos(\theta)$$

De oppervlakte onder het boogje *UK* is, met $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$:

$$O_5 = \int_b^{x_K} y dx = \int_0^{\pi-\alpha} y(\theta)\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta =$$

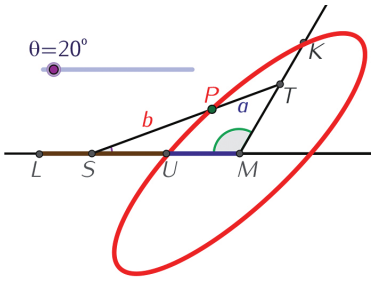
$$-(a+b)b\cdot\frac{\sin^2(\alpha)}{2\cdot\tan(\alpha)} + \frac{1}{2}ab(\pi-\alpha+\sin(\alpha)\cos(\alpha))$$

>

De oppervlakte van de driehoek onder $MK$ moet eraf: $O_6 = -\frac{1}{2}b^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. NB: $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.
We vinden voor de gevraagde oppervlakte na een kleine uitwerking:
$O_7 = O_5 - O_6 = \frac{1}{2}ab(\pi - \alpha)$.
Voor het blauwe gebied in de regelmatige zeshoek in figuur 6 krijgen we:
$O_8 = 6 \cdot \frac{1}{2}ab(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \pi ab$.
Voor het blauwe gebied in het vierkant van figuur 2:
$O_9 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab(\pi - \frac{\pi}{2}) = \pi ab$.
Ook voor een willekeurige convexe $n$-veelhoek is het resultaat eenvoudig te bewijzen.

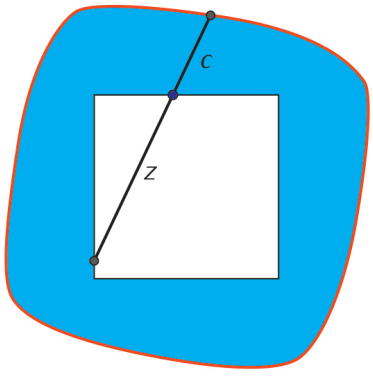
## Weer die ellipsen

Het is aan de lezer om te laten zien dat zo'n punt $P$ met de gevonden coördinaten op een ellips ligt, zie figuur 8. Voor $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ geldt $\frac{1}{\tan(\pi-\alpha)} \neq 0$ en geeft het wat rekenwerk. Overigens is de constructie van $P$ met lijnstuk $ST$ een variant op de constructie met een ellipsograaf van Simon Stevin[4].



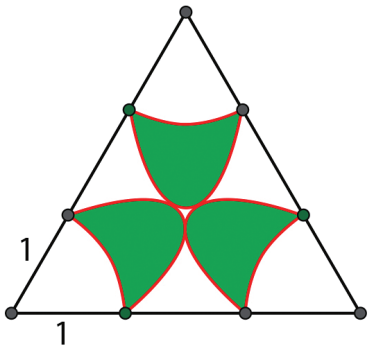

*figuur 8*

Nog meer variatie? We volgen een punt op het verlengde van de koorde van het vierkant. Als de koorde een lengte heeft gelijk aan de zijde van het vierkant, dan ontstaat er buiten het vierkant een 'gladde' gesloten kromme, zie figuur 9. De oppervlakte van het blauwe gebied is $\pi c(c + z)$ en dat kan de lezer nagaan.




*figuur 9*

In een driehoek is het ook leuk werken natuurlijk, zie figuur 10. Wat zou de oppervlakte van het groene gebied zijn? De rode bogen zijn ontstaan met een punt op een koorde met $a = b = 1$.




*figuur 10*

De besproken stelling is van Hamnet Holditch, voorzitter van het Cajus College in Cambridge, en is een haast vergeten juweeltje uit 1858. *Don't ditch it.*

## Noten


[1] Jansen, J (2019). Uitdagende problemen door dynamisch denken. *Euclides, 95*(3), 32-35.
[2] De oppervlakteberekening gaat hier met de formule voor poolvergelijkingen. De raakvector draait en beweegt tegelijkertijd maar de formule is ook nu bruikbaar.
[3] Zie *http://www.math.pitt.edu/~troy/sflood/holditch.pdf* en zie *https://www.geogebra.org/m/HUprjjw7* voor een mooie animatie.
[4] Zie bijvoorbeeld *https://www.geogebra.org/m/KQUjh5Zf*


## Over de auteur


Fred Muijrers was tot zijn pensioen lerarenopleider aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
E-mailadres: *fmuijrers@yahoo.com*

Gerard Koolstra

# Waardevolle producten II

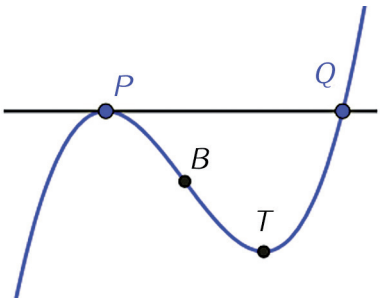
Door polynomen als productvormen te schrijven doe je verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

## Inleiding

In deel I (*Euclides* 96-3) is een begin gemaakt met de analyse van de productvormen van derdegraadsvergelijkingen. Daar gaan we nu mee verder.

## Top op de x-as

Als we uitgaan van een derdegraads kromme met twee toppen, kunnen we deze natuurlijk ook zo verschuiven dat een van de toppen precies op de $x$-as terechtkomt. Als we de linkertop op de $x$-as plaatsen kunnen we de functie daarna schrijven als $f(x) = a(x - p)^2(x - q)$, zie figuur 1.




*figuur 1*

De $x$-coördinaat van het buigpunt is nu $\frac{2p+q}{3}$: het gewogen gemiddelde van $p$ en $q$, waarbij $p$ twee keer meetelt door het dubbele nulpunt. Merk op dat het buigpunt horizontaal gezien precies ligt op een derde van $PQ$. De $y$-coördinaat berekenen we met:

$$y_B = \frac{a}{27}(-p + q)(-p + q)(2p - 2q) = -\frac{2a}{27}(q - p)^3$$

Spiegelen van $P$ in $B$ geeft de tweede top

$$T\colon \left(\frac{2p+q}{3}, -\frac{4a}{27}(q - p)^3\right) \qquad [1]$$

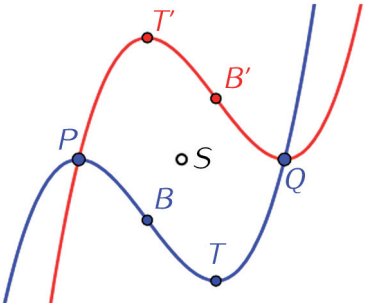
Dit punt ligt horizontaal gezien precies op twee derde van $PQ$.

Als we uitgaan van $f(x) = a(x - p)^2(x - q)$ ziet de afgeleide er ook wat prettiger uit:
$f'(x) = a[2(x - p)(x - q) + (x - p)^2] =$
$a[(x - p)(3x - (2q + p)]$.

Hiermee zijn de $x$-coördinaten van de toppen uiteraard ook te berekenen.
Wanneer we de rechtertop kiezen als raakpunt met de $x$-as wordt het functievoorschrift $f(x) = a(x - q)^2(x - p)$.
In dat geval geldt:

$$x_B = \frac{p+2q}{3} \text{ en } x_T = \frac{2p+q}{3}$$

Horizontaal gezien verwisselen ze van plaats.
De $y$-coördinaten zijn nu respectievelijk $\frac{2a}{27}(q - p)^3$ en $\frac{4a}{27}(q - p)^3$. Verticaal gezien is er sprake van een spiegeling in de $x$-as. We kunnen dit korter en krachtiger formuleren met behulp van punt $S$, het midden van $P$ en $Q$. Beide krommen, $y = a(x - p)^2(x - q)$ en $y = a(x - q)^2(x - p)$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. punt $S$, zie figuur 2.




*figuur 2*

Bij spiegeling in $S(\frac{p+q}{2}, 0)$ heeft een punt $(x_1, y_1)$ als beeldpunt: $(p + q - x_1, - y_1)$.
Om aan te tonen dat $y = a(x - p)^2(x - q)$ en $y = a(x - q)^2(x - p)$ elkaars spiegelbeeld zijn, gaan we uit van een punt $(x_1, y_1)$ op $y = a(x - p)^2(x - q)$ en laten zien dat $(p + q - x_1, - y_1)$ op de kromme $y = a(x - q)^2(x - p)$ ligt. Een kwestie van invullen en uitwerken:
$a(p + q - x_1 - q)^2(p + q - x_1 - p) =$
$(p - x_1)^2(q - x_1) = -(x_1 - p)^2(x_1 - q) = -y_1$.

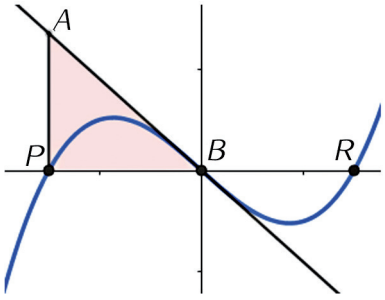
Het is misschien goed om erop te wijzen dat, uitgaande van rationale waarden voor $a$, $p$ en $q$, de toppen (en uiteraard ook het buigpunt) rationale waarden hebben. Het is ook niet zo moeilijk om waarden voor $p$ en $q$ te kiezen waarbij alle $x$-coördinaten geheel zijn.

## Voorbeeld

Als we uitgaan van $p = -1$ en $q = 5$ (zodat het verschil $q - p$ een drievoud is), krijgen we $y = a(x + 1)^2(x - 5)$, met toppen (-1, 0) en (3, -32$a$). Met $a = ¼$ krijgen we dan (1, 0) en (3, -8) als toppen, en (1, -4) als buigpunt. Desgewenst verschuiven we de grafiek nog wat naar boven, bijvoorbeeld drie eenheden. Het functievoorschrift wordt dan $y = ¼ (x + 1)^2(x - 5) + 3$ en dit is ook te schrijven als: $y = ¼x^3 - ¾x^2 - 2¼x + 1¾$, en we weten nu zeker dat de toppen (en het buigpunt) 'mooi uitkomen'. Daar staat tegenover dat er geen enkele garantie meer is dat ook de nulpunten mooi uitkomen. We komen later terug op de vraag hoe ervoor gezorgd kan worden, dat zowel de snijpunten met de $x$-as als de toppen rationale coördinaten hebben.

## Raaklijn door het buigpunt

Het opstellen van de raaklijn door het buigpunt is een mooie oefening waar doorgaans de functie zelf, de eerste en de tweede afgeleide een centrale rol spelen. We bekijken eerst de situatie waarbij het buigpunt in de oorsprong ligt, zie figuur 3.




*figuur 3*

Uitgaande van $g(x) = ax(x - p)(x + p)$ krijgen we:
$g'(x) = a[(x - p)(x + p) + x(x + p) + x(x - p)] =$
$a(3x^2 - p^2) \rightarrow g'(0) = -ap^2$.
De raaklijn door het buigpunt heeft dus als vergelijking $y = -ap^2x$.
Dat betekent dat in figuur 3 $AP$ gelijk is aan $-ap^3$ en de oppervlakte van driehoek $PBA$ gelijk aan $\frac{a}{2}p^4$.
Nu het algemene(re) geval. Als het buigpunt niet op de $x$-as ligt geldt (met $k = \frac{p+q+r}{3}$):

$$f'(k) = a(k - q)(k - r) + a(k - p)(k - r) + a(k - p)(k - q) =$$

$$\frac{f(k)}{k-p}+\frac{f(k)}{k-q}+\frac{f(k)}{k-r} =$$

$$f(k)\left(\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}\right) \qquad [2]$$

De raaklijn door het buigpunt is nu te schrijven als:
$y - f(k) = f'(k)(x - k) \leftrightarrow$

$$y - f(k) = f(k)\left(\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}\right)(x - k)$$

We stellen $\frac{1}{h}=\frac{1}{k-p}+\frac{1}{k-q}+\frac{1}{k-r}$ [1].

De vergelijking van de raaklijn in het buigpunt kan nu geschreven worden als:

$$y - f(k) = f(k)\ \frac{1}{h}\ (x - k) \qquad [3]$$

Voor het snijpunt van de raaklijn door het buigpunt met de $x$-as geldt nu:
$-f(k) = f(k)\ \frac{1}{h}\ (x - k) \leftrightarrow$
$[f(k) \neq 0]\ \frac{1}{h}(x - k) = -1 \leftrightarrow$

$$x - k = -h \leftrightarrow x = k - h \qquad [4]$$

## Voorbeeld

$y = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 7)$. Hier geldt: $k = \frac{-2+1+7}{3} = 2$ en
$f(k) = \frac{1}{5} \times 4 \times 1 \times -5 = -4$. Het buigpunt is dus (2, -4).
We kunnen nu (het omgekeerde van) $h$ berekenen:
$\frac{1}{h}=\frac{1}{2--2}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2-7}=\frac{21}{20}$, dus $h = \frac{20}{21}$.
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn door het buigpunt is (zie [2; 3]): $-4 \cdot \frac{21}{20} = -\frac{21}{5} = -4\frac{1}{5}$.
Een vergelijking van de buigpuntraaklijn is dus

$$y + 4 = -4\tfrac{1}{5}(x - 2).$$

Desgewenst kan dit herschreven worden als

$$y = -4\tfrac{1}{5}x + 4\tfrac{1}{5} \text{ of } y = -4\tfrac{1}{5}(x - 1\tfrac{1}{21}).$$

Deze raaklijn snijdt de $x$-as dus in $(1\frac{1}{21}, 0)$.
De $x$-coördinaat is inderdaad gelijk aan $k - h$.
Immers: $2 - \frac{20}{21} = 1\frac{1}{21}$.

## Toppen en nulpunten rationaal

Zoals eerder gemeld is de vergelijking $f'(x) = 0$ in de vorm: $(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)$ niet zo eenvoudig op te lossen. Bij wijze van uitzondering gaan we dit schrijven als som van machten van $x$.
Uitwerken geeft:
$3x^2 - 2(p + q + r)x + pq + pr + qr = 0 \leftrightarrow$

$$x^2 - 2\left(\frac{p+q+r}{3}\right)x + \frac{pq+pr+qr}{3} = 0$$

Merk op dat het gemiddelde van $p$, $q$ en $r$ (ofwel de $x$-coördinaat van het buigpunt) hier een rol speelt, evenals het gemiddelde van $pq$, $pr$ en $rq$.

Met de afspraken $k = \frac{p+q+r}{3}$ en $l = \frac{pq+pr+qr}{3}$ kunnen we de oplossing van $f'(x) = 0$ kort noteren:
$x^2 - 2kx + l = 0 \leftrightarrow$
$(x - k)^2 = k^2 - l \leftrightarrow$
$x = k \pm \sqrt{k^2 - l}$ [5]

Deze uitdrukking bevestigt dat het buigpunt precies het midden van de twee toppen is.
Als we uitgaan van hele, of in ieder geval rationale, waarden voor $p$, $q$ en $r$ (en $a$) bepaalt de uitkomst van $k^2 - l$ of de coördinaten van de toppen rationaal zijn.
Als we $k^2 - l$ weer uitdrukken in $p$, $q$ en $r$ krijgen we:

$$k^2 - l = \left(\frac{p+q+r}{3}\right)^2 - \frac{pq+pr+qr}{3} =$$

$$\frac{(p+q+r)^2}{9} + \frac{pq+pr+qr}{3} =$$

$$\frac{(p+q+r)^2 - 3(pq+pr+qr)}{9}$$

Als $(p + q + r)^2 - 3(pq + pr + qr)$ een kwadraat is, zeg $n^2$, dan is $k^2 - l$ het kwadraat van een getal $\frac{n}{3}$.
Om de berekeningen wat te vereenvoudigen veronderstellen we $p = 0$ (en r $\neq$ 0). $(p + q + r)^2 - 3(pq + pr + qr)$ gaat dan over in $(q + r)^2 - 3qr = q^2 - qr + r^2$.
Wanneer ook geldt $q = 0$ is deze vorm altijd het kwadraat van $r$, en dus $k^2 - m$ gelijk aan $\left(\frac{r}{3}\right)^2$.

In dat geval geldt: $f(x) = ax^2(x - r)$ en dus:
$f'(x) = 2ax(x - r) + ax^2 = ax(3x - 2r)$.
Hieruit valt af te leiden dat er toppen zijn voor $x = 0$ en $x = \frac{2r}{3}$.

Iets algemener geldt dat de grafiek van de functie $f(x) = a(x - p)^2(x - r)$ altijd toppen met rationale coördinaten heeft, een voor $x = p$ en een voor $x = \frac{p+2r}{3}$.

Dit laatste kan, zonder differentiëren, snel berekend worden door te bedenken dat bij een derdegraads functie het buigpunt precies tussen beide toppen in ligt, en de $x$-coördinaat van het buigpunt in dit geval (dus $p = q$) gelijk is aan $\frac{2p+r}{3}$.

De *som* van de $x$-coördinaten van beide toppen moet dus gelijk zijn aan $\frac{4p+2r}{3}$.

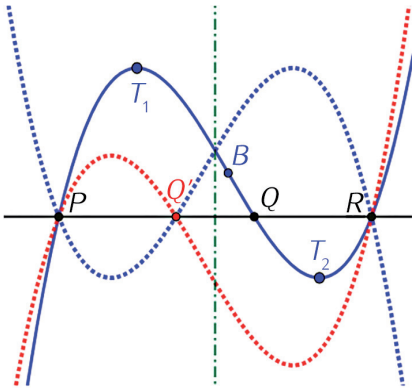
Omdat de ene top ligt bij $x = p$ $(= \frac{3p}{3})$ moet de andere top liggen op de lijn $x = \frac{p+2r}{3}$.

Maar uitgaan van $p = q = 0$ is uiteraard een echte beperking. Die laten we nu los. Wel gaan we gemakshalve uit van $p = 0$ en $0 < q < r < 100$. Via een aanpak die we hier niet uit de doeken zullen doen[2], kunnen we berekenen dat $q^2 - qr + r^2$ een kwadraat is voor de volgende paren:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| $r$ | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 | 63 | 80 | 99 |

Omdat verwisseling van $q$ en $r$ in de uitdrukking $q^2 - qr + r^2$ deze niet verandert, mogen we in principe in bovenstaande tabel $q$ en $r$ ook verwisselen.
Maar we hadden afgesproken dat $q < r$.
Interessanter is dat we $q$ mogen vervangen door $r - q$.
Immers
$(r - q)^2 - (r - q)r + r^2 =$
$r^2 - 2rq + q^2 - r^2 + qr + r^2 =$
$q^2 - qr + r^2$.
Maar er is meer: Hierboven namen we steeds aan $p = 0$. In feite staan alle bovenstaande tweetallen $(q, r)$ voor *reeksen* drietallen. Zo hoort bij het tweetal (5, 8) niet alleen het drietal (0, 5, 8) maar alle drietallen van de vorm $(p, p + 5, p + 8)$. De getallen kunnen ook allemaal met een rationale factor vermenigvuldigd worden. Dit kan allemaal ingezien worden door de grafiek in gedachten >

horizontaal te verplaatsen, of horizontaal te vermenigvuldigen met een rationaal getal. Om in te zien dat we bijvoorbeeld het drietal (-1, 4, 7) door het drietal (-1, 2, 7) kunnen vervangen is het misschien aardig om de grafiek van $y = (x + 1)(x - 4)(x - 7)$ te vergelijken met die van $y = -(x + 1)(x - 2)(x - 7)$, zie figuur 4.




*figuur 4*

Zij zijn elkaars spiegelbeeld bij spiegeling in de lijn $x = 3$. Wanneer we deze laatste grafiek weer spiegelen in de $x$-as krijgen we $y = (x + 1)(x - 2)(x - 7)$. Beide laatstgenoemde grafieken snijden de $x$-as in de punten $P$, $Q'$ en $R$. Merk op dat $PQ' = QR$ en $Q'R = QP$. Meer algemeen gaat het om een spiegeling in de verticale lijn $x = \frac{p+r}{2}$, door het midden van $PR$.

## Voorbeeld

We gaan uit het eerste tweetal in de tabel: (5, 8). We veranderen dit in (3, 8). Dit geeft het drietal (0, 3, 8), wat we transformeren tot (-2, 1, 6). We weten dus dat bijvoorbeeld $y = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 6)$ twee toppen heeft met rationale coördinaten. De berekening van deze coördinaten loopt via het bepalen van $k^2 - l$ (zie [5]).
In dit geval geldt $p = -2$, $q = 1$ en $r = 6$, zodat

$$k = \frac{-2+1+6}{3} = \frac{5}{3},\ k^2 = \frac{25}{9} \text{ en}$$

$$l = \frac{pq+pr+qr}{3} = \frac{-2-12+6}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Dit geeft voor de $x$-coördinaten van de toppen:

$$x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{8}{3}} = \frac{5}{3} \pm \frac{7}{3} \leftrightarrow$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ of } x = 4$$

De toppen zijn $(-\frac{2}{3}, 2\frac{26}{27})$ en $(4, -7\frac{1}{5})$.

## Noten

[1] $h$ is het *harmonisch totaal* van $k - p$, $k - q$ en $k - r$. Over dit begrip, verwant aan het harmonisch gemiddelde, is meer te lezen in mijn artikel in *Euclides* 94-5.

[2] Voor achtergronden zie bijvoorbeeld: Martin Kindt (2015). *Wat te bewijzen was*. Utrecht: Freudenthal Instituut, p. 90.

## Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: *gerardk@xs4all|.nl*

# Het paradijs

'Beste Adam,' sprak de Heer.

Hij richtte zich tot een meneer

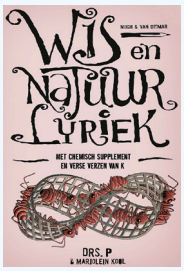
in naar zichzelf vernoemd tenue,

'Ga heen, vermenigvuldig u.'

Maar Adam riep: 'Wat een verdriet.

O God, ik ken de tafels niet.'

*Marjolein Kool*




*De dichtbundel* Wis- en natuurlyriek *van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. 'Het paradijs' is een van de nieuwe gedichten.*

Erik van Haaren

# Global Math Project

Vorig jaar organiseerde het Global Math Project de eerste Global Math Week, oktober 2002 was de tweede. Miljoenen leerlingen gingen wereldwijd aan de slag met speels lesmateriaal over talstelsels.

## Inleiding

Als ambassadeur van het Global Math Project[1] heb ik getracht om docenten rekenen en wiskunde te informeren over de Global Math Weeks van 2019 en 2020. Ruim 20.000 leraren rekenen/wiskunde over de hele wereld gingen aan de slag met ons decimale talstelsel door middel van 'exploderende stippen'.

*figuur 1*

## James Tanton

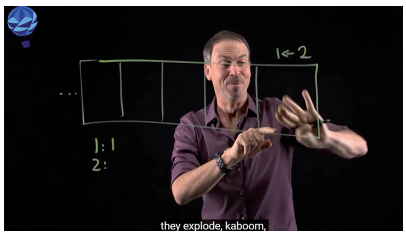
Om je wat meer achtergrond te geven bij dit bijzondere lesprogramma heb ik een gesprek gevoerd met een van de oprichters van het Global Math Project en de schrijver van het lesprogramma *Exploding Dots*: professor James Tanton. James vertelde me dat hij in zijn jeugd niet hield van school-wiskunde, het was vroeger in Australië gewoon 'onthouden en doen'. Zeker geen vragen stellen. Hierdoor leerde hij veel algoritmes waarvan hij zich afvroeg wat hij eigenlijk aan het doen was. Vooral van het delingsalgoritme raakte hij in de war. Terugkijkend ziet hij dat hij wel een wiskundig denker was. Hij wilde weten 'waarom' de stelling van Pythagoras waar was. Hij wilde het grote verband tussen de ideeën zien en daarmee kunnen spelen. Bijvoorbeeld wat gebeurt er als je in plaats van vierkanten andere vormen aan de zijden van een rechthoekige driehoek zou tekenen? Werkt de stelling van Pythagoras dan nog steeds? Pas op de universiteit begon hij te leren dat het bij wiskunde niet gaat om zo snel mogelijk tot een antwoord te komen. Het gaat over het beantwoorden van alle 'waarom-' en 'wat-als-vragen' die hij zo graag wilde onderzoeken als kind. Hier voelde hij zich intellectueel thuis.

## Verhaallijn in de wiskunde

Hij verhuisde in 1988 naar Amerika om aan een PhD in wiskunde aan de Princeton University te beginnen. Hier deed hij zuiver onderzoek op hoog niveau in de wiskunde. Hij had altijd een roeping om les te geven. Dus nadat hij zijn diploma had afgerond koos hij ervoor om wiskundeleraar te worden aan de Liberal Arts College, een instelling voor hoger onderwijs dat zich zowel op onderzoek als onderwijs richt. In deze tijd onderzocht hij het curriculum van de Amerikaanse wiskunde tot in detail. Hij schrok ervan dat het in wezen hetzelfde, vreugdeloze, gewoon onthouden en doen curriculum was dat hij decennia eerder in een ander land had meegemaakt. Hij voelde zich moreel verplicht om iets te doen. Dus werd hij leraar op een middelbare school. Hij zocht de uitdaging in het begrijpen van de leeromgeving – de eisen, beperkingen, cultuur en mindset – en daar een weg doorheen te banen met het plezier en vertrouwen van wiskundig denken, én daarbij de noodzakelijke kennis over te brengen om te kunnen slagen voor de examens. Tijdens een les over polynoomalgebra kwam hij op het leeridee van het rekenen met exploderende stippen. Het was duidelijk dat dit idee aansloeg. Niet alleen leerden zijn studenten eenvoudig en snel de noodzakelijke delingen, het gaf ze ook een nieuwe ervaring. Een verhaallijn binnen wiskunde! Ze ervaarden dat alle wiskunde van de kleuterklas één geheel vormt. Tanton maakte van de exploderende stippen een lessenserie van tien lessen. >

## Exploding Dots

*Exploding Dots* is een visueel verhaal dat wiskunde uit de kleuterklas, basisschool, voorgezet onderwijs, sommige wiskunde op de universiteit, maar ook onopgelost onderzoek verbindt. Het is een verbazingwekkend eenvoudig verhaal. In de video van figuur 2 legt Tanton het op aanstekelijke wijze uit.

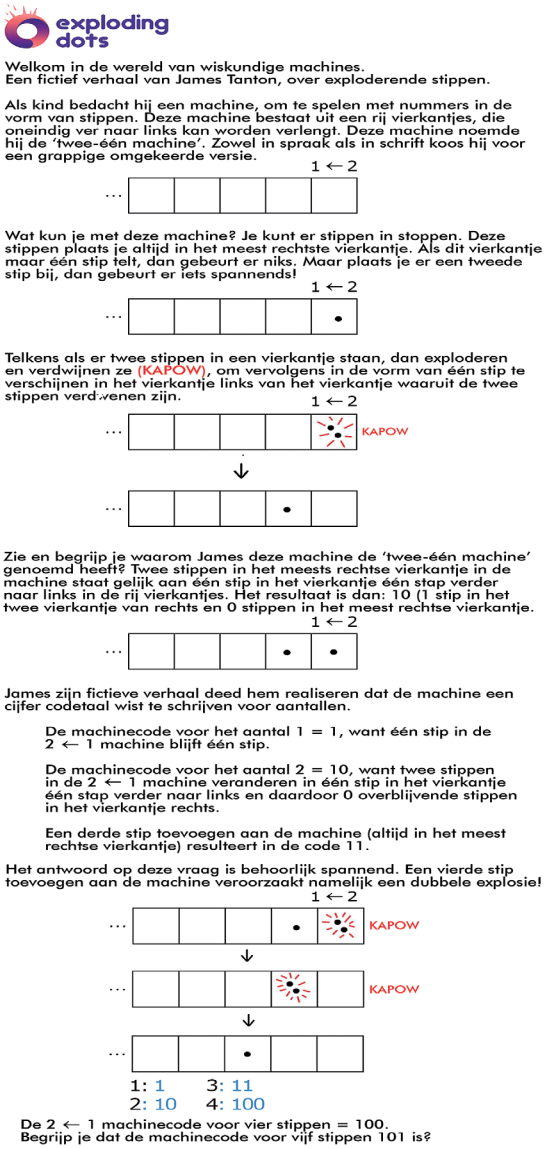



*figuur 2 De eerste videoles[2] van Exploding Dots*

In figuur 3 zie je de uitleg van de *Exploding Dots*, zoals deze te vinden is in het Nederlandse lesmateriaal.
Dit idee wordt steeds verder uitgewerkt, alle rekenkundige bewerkingen worden inzichtelijk gemaakt en uiteindelijk zelfs ook irrationale getallen en logaritmen.

## Succes

Het succes van het Global Math Project is bereikt op basis van goede wil, de liefde voor wiskunde en de inherente vreugde die echte wiskunde met zich meebrengt. Meer dan 5,5 miljoen (geregistreerde) leerlingen en leraren uit 170 landen hebben inmiddels met dit wonderbaarlijke stuk wiskunde gespeeld. Dit is bereikt door mond-op-mondreclame en inspanningen van onderaf, met name de nationale ambassadeurs spelen hier een grote rol. Samen werken we aan het bevorderen van inspirerende, echte, verheffende wiskunde en nodigen we iedereen uit om hieraan deel te nemen: docenten, studenten, volwassenen. Nieuw bij het Global Math Project is de 'Random Acts of Mathematical Delight' pagina. Hierin worden video's gedeeld die op extra (zeldzame) vrije momenten ingezet kunnen worden. Bijvoorbeeld in een extra les of wiskunde club. Mijn video 'Vouw de perfecte kubus' is één van de RAMD.
Ook zijn we begonnen met het maken van GMP Short Experiences; andere onderwerpen in het curriculum gedaan vanuit de inspirerende Global Math Project filosofie. Tot op heden zijn dit drie onderwerpen: *pencil pushing* over meetkundige hoeken, *garden path* over kansberekening en *U shaped graphs* over kwadratische verbanden. Het idee is ook om leraren over de hele wereld uit te nodigen om hun uitdagende wiskundecursussen te delen! En over tien jaar hopen we een volledige bibliotheek te hebben van menselijke, verbonden, vrolijke curriculumstukken, die eigenlijk het hele scala van de




*figuur 3 Uitleg van de Exploding Dots,*

schoolwiskunde bestrijkt. We willen de perceptie van wat wiskunde kan en zou moeten zijn, veranderen, en bewijzen dat wiskunde die relevant is voor de klas, ook inspirerend en uitdagend kan zijn.

## Noten

[1] zie *https://globalmathproject.org/*
[2] zie *https://www.youtube.com/watch?v=vstIoER3idM*

## Over de auteur

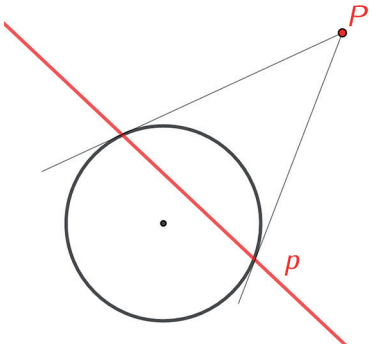
Erik van Haren is Nederlands ambassadeur van het Global Math Project. Op zijn YouTube-kanaal Erik van Haren, waar hij elke zondag om 12:00 uur een nieuwe video plaatst, staan enkele video's over exploding dots. 21 januari 2021 start hij met het online experttraject 'Wiskundeplezier', waarin ook Exploding Dots een rol speelt. Meer informatie hierover vind je op *www.mathplay.eu*.

Kees Jonkers

# Homogene functies, poollijn en poolverwantschap

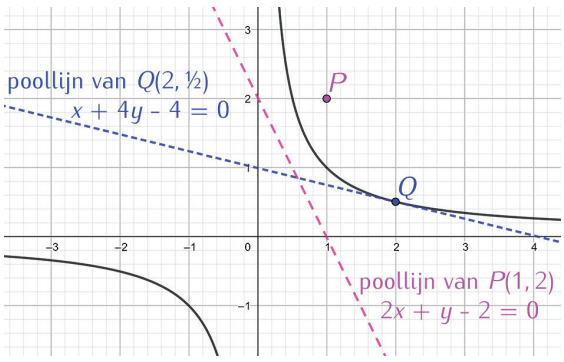
Hoe stel je een poolvergelijking op bij kegelsneden? Op internet[1] zijn enkele resultaten te vinden, maar er wordt niet aangegeven hoe het resultaat is verkregen. In dit artikel wordt een algemene methode behandeld. Ook zal blijken dat homogene functies toegepast kunnen worden bij het onderwerp *poolverwantschap*.

## Poollijnen




*figuur 1*

Aan de hand van figuur 1 kun je zien wat een poollijn is: teken de raaklijnen door een punt $P$ aan de cirkel en verbind de raakpunten. Deze verbindingslijn $p$ heet de poollijn van P ten opzichte van de cirkel. $P$ heet de pool. De raaklijnen moet je wegdenken, want ze zijn niet meer van belang. Het gaat erom dat aan elk punt $P$ precies één lijn is toegevoegd op een manier die afhangt van de gekozen cirkel. Algemeen geldt dit voor een willekeurige kegelsnede. Ik geef een rekenvoorbeeld met behulp van GeoGebra. Als kegelsnede nemen we de orthogonale hyperbool met vergelijking $xy = 1$ en gaan uit van een punt $P(1, 2)$, zie figuur 2.




*figuur 2*

Kies de mogelijkheid 'Poollijn of middellijn', klik op $P$ en de kromme.
Doe hetzelfde voor een punt $Q(2, ½)$. Dit punt ligt op de hyperbool. Je ziet dat de poollijn nu de *raaklijn* in $Q$ is.
Ik geef aan dit voorbeeld een meer algemene vorm:
Zoek de poollijn van $P(p, q)$ ten opzichte van $xy - c = 0$.
Maar eerst moeten *homogene* coördinaten ingevoerd worden. Het zal blijken dat de komende berekeningen dan efficiënter verlopen.

## Homogene coördinaten

De cartesische coördinaten $x$ en $y$ kun je aanvullen tot *drie* coördinaten $x$, $y$ en $z$. Het punt (1, 2) bijvoorbeeld, wordt dan (1, 2, $z$). De lijn $x + y - 2 = 0$ wordt $x + y - 2z = 0$. Dit is een *homogene* vergelijking.
Het getal $z$ is een willekeurig getal $\neq 0$.
Dit proces heet homogeniseren van de coördinaten.
Ik ga nu de vergelijking van de poollijn opstellen voor een orthogonale hyperbool met vergelijking $xy = c$.
Gevraagd wordt de poollijn van $P(p, q)$ ten opzichte van $xy - c = 0$.
Vervang $x$ door $\frac{x}{z}$ en $y$ door $\frac{y}{z}$. Er komt dus $\frac{xy}{z^2} - c = 0$.

Anders genoteerd: $xy - cz^2 = 0$. Dit is een *homogene* vergelijking van de tweede graad.
We hebben dus $f(x, y, z) = 0$ met $f(x, y, z) = xy - cz^2$.
Voor $P$ nemen we $P(p, q, 1)$ dus $z = 1$.
Partieel differentiëren geeft $f_x = y$, $f_y = x$ en $f_z = -2cz$.
Voor $P(p, q, 1)$ vullen we de drie coördinaten in. >

Er komt dan $f_x = q$, $f_y = p$ en $f_z = -2c$.
De raaklijn (= poollijn) vergelijking is $f_x x + f_y y + f_z z = 0$.
Dit wordt $qx + py - 2cz = 0$.
Nu nog naar twee coördinaten teruggaan. Neem dus $z = 1$. Het eindresultaat is: $qx + py - 2c = 0$.
In het voorbeeld van GeoGebra was $p = 1$, $q = 2$ en $c = 1$ zodat we vinden $2x + y - 2 = 0$.

## Het algemene geval

We zoeken nu de poollijnvergelijking van $P(p, q)$ ten opzichte van de kegelsnede met vergelijking $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Deze opgave wordt als puzzel in *Euclides* 95-1 gegeven.
Eerst weer homogeniseren: $x$ wordt $\frac{x}{z}$, en y wordt $\frac{y}{z}$.
De kegelsnedevergelijking wordt dan:

$$a\frac{x^2}{z^2}+b\frac{xy}{z^2}+c\frac{y^2}{z^2}+d\frac{x}{z}+e\frac{y}{z}+f=0.$$

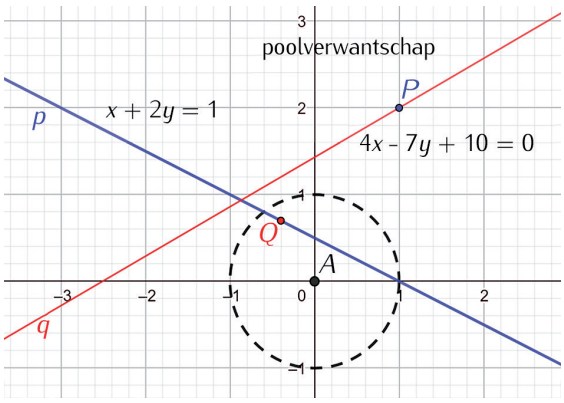
Uitgewerkt: $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$.
Ook het punt $P$ homogeniseren: $P(p, q, r)$.

Partieel differentiëren geeft:
$f_x = 2ax + by + dz$
$f_y = bx + 2cy + ez$
$f_z = dx + ey + 2fz$
Voor $P(p, q, r)$ moeten we invullen $x = p$, $y = q$ en $z = r$.
Dit geeft $f_x = 2ap + bq + dr$, $f_y = bp + 2cq + er$ en $f_z = dp + eq + 2fr$.
De raaklijn (= poollijn) vergelijking is $f_x x + f_y y + f_z z = 0$.
Dit wordt: $(2ap + bq + dr)x + (bp + 2cq + er)y + (dp + eq + 2fr)z = 0$.
Ten slotte naar twee coördinaten terugkeren, neem dus $r = 1$.
$(2ap + bq + d)x + (bp + 2cq + e)y + (dp + eq + 2f) = 0$.
Het eindresultaat is: De vergelijking van de poollijn van $P(p, q)$ ten opzichte van $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ is: $(2ap + bq + d)x + (bp + 2cq + e)y + (dp + eq + 2f) = 0$.

## Poolverwantschap

Wat is poolverwantschap? Onder poolverwantschap verstaat men de volgende eigenschap:
Op de poollijn van een punt $P$ neem je een *willekeurig* punt $Q$. Teken dan de poollijn van $Q$. Het blijkt dat deze poollijn door $P$ gaat. Je noemt de pool en de poollijn verwant.

Ik wil deze poolverwantschap met een getallenvoorbeeld toelichten. Neem de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ en $P(1, 2)$. Ik ga de in het voorafgaande bewezen algemene vergelijking van de poollijn toepassen met a = c = 1,




*figuur 3*

f = - 1 en b = d = e = 0 dus voor $x^2 + y^2 = 1$.
Voor P(p, q) is de vergelijking van de poollijn dus px + qy - 1 = 0. De vergelijking van de poollijn van P wordt nu, met p = 1 en q = 2, dus x + 2y – 1 = 0, zie figuur 3.
Kies op deze poollijn een variabel punt Q(1- 2t , t), t is een willekeurig getal. Ga door invullen na dat Q op de poollijn ligt.
Nu nog de poollijn van Q in vergelijking brengen. Gebruik weer de formule px + qy - 1 = 0 maar nu met p = 1 - 2t en q = t. De poollijnvergelijking van Q is dan (1 - 2t)x + ty - 1 = 0. Ten slotte moet blijken dat P(1,2) op deze lijn ligt. Door invullen blijkt dat dit klopt.
Figuur 3 geeft de toelichting voor t = 0,7. De poollijn is dan 4x - 7y+ 10 = 0. Maar als je in GeoGebra het punt Q laat schuiven - d.w.z. variabele t- langs de poollijn van P dan blijft de poollijn van Q door P gaan!

## Het algemene geval

Ten slotte nog het bewijs dat de eigenschap van de poolverwantschap voor iedere kegelsnede geldt. Ik gebruik nu weer homogene coördinaten. Laat K de kegelsnede $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$ zijn. De poollijn van P(p, q, r) ten opzichte van K heeft de vergelijking ux + vy + wz = 0 met u = 2ap + bq + dr, v = bp + 2cq + er en w = dp + eq +2fr. Kies een punt Q(vt, -ut - w , v) op deze poollijn.
Door x = vt, y = -ut - w en z = v in te vullen in ux + vy + wz is te zien dat Q inderdaad op de poollijn ligt. Om de poollijn van Q(vt, -ut - w , v) te vinden gebruik ik de bovenstaande formules voor u, v en w, maar de waarden van p, q en r zijn nu anders, namelijk p = vt, q = -ut - w en r = v.
De nieuwe waarden noteer ik met u', v' en w'. Invullen in de vergelijkingen voor u, v respectievelijk w geeft:

$u' = 2avt - but - bw + dv$, $v' = bvt - 2cut - 2cw + ev$ en $w' = dvt - eut - ew + 2fv$.
De poollijn van $Q$ heeft nu de vergelijking $u'x + v'y + w'z = 0$. Ik moet bewijzen dat $P(p, q, r)$ op deze lijn ligt. Dus $x = p$, $y = q$ en $z = r$ moeten ingevuld worden in die vergelijking. Dit wordt dus:
$(2avt - but - bw + dv)p + (bvt - 2cut - 2cw + ev)q +$
$(dvt - eut - ew + 2fv)r =$
$(2ap + bq + dr)vt - (bp + 2cq + er)ut -$
$(pb + 2cq + er)w + (dp + eq + 2fr)v =$
$uvt - (bp + 2cq + er)(ut + w) + wv =$
$uvt - vut - vw + wv = 0$.
Conclusie: $P$ ligt op de poollijn van $Q$.

## Noot

[1] Zie bijvoorbeeld: *https://nl.wikipedia.org/wiki/Poolverwantschap_(kegelsnede)*.

## Over de auteur

Kees Jonkers is oud-docent wis- en natuurkunde aan het Petrus Canisius College te Alkmaar.
E-mailadres: *c.jonkers8@upcmail.nl*

NIEUW

**www.epsilon-uitgaven.nl**

**Giraf 2**

**Cryptografie**
**een doeboek vol codes en geheimtaal**
*Paul Durenkamp*

**Zebra 60**

**Verdwijnpunt Prentententoonstelling van M.C. Escher opgelost**
*Rick Vooys*

Epsilon Uitgaven

**Giraf-reeks:** € 7 per deel (behalve deel 1: € 5 )
**Zebra-reeks:** € 10 per deel
12% korting bij 5 delen of meer

Hellen van der Ree

# Goede resultaten met *Keybooks* in Zuid-Afrika

## Aids

Het Wereldwiskunde Fonds heeft de afgelopen drie jaar scholen in Pietermaritzburg in Zuid-Afrika gesponsord. Het ging hierbij om drie verschillende scholen, met vergelijkbare problemen. In de omgeving van Pietermaritzburg is het aidsprobleem groter dan in de meeste andere delen van het land. Dit betekent dat er in de omgeving van Pietermaritzburg veel kinderen zonder ouders zijn en dat oudere kinderen vaak de zorg voor jongere broertjes en zusjes op zich moeten nemen. In deze omstandigheden zijn scholen een plek waar kinderen in elk geval één maaltijd per dag krijgen en waar regelmaat in het leven wordt geboden.

## Grote verschillen

Om kinderen een kans te geven uit de ellende te komen is een diploma belangrijk, maar de docenten worstelen met voldoende lesmateriaal en de mogelijkheid om de leerlingen adequaat voor te bereiden op de centrale examens. Voor het vak wiskunde zijn er grote verschillen tussen de scholen in deze wijk en scholen elders die de beschikking hebben over geavanceerd lesmateriaal en kwalitatief hoogopgeleide leraren.

*figuur 1 Twee wiskundedocenten, Ms. Andile Dlamine (2e van links) en Mr. Nxuleamalo (3e van links) ontvangen de Key-books voor hun jaar van Jude (links) en de moeder van Andrea (rechts) die voor de logistiek zorgt*

## Nieuwe wiskundeboeken

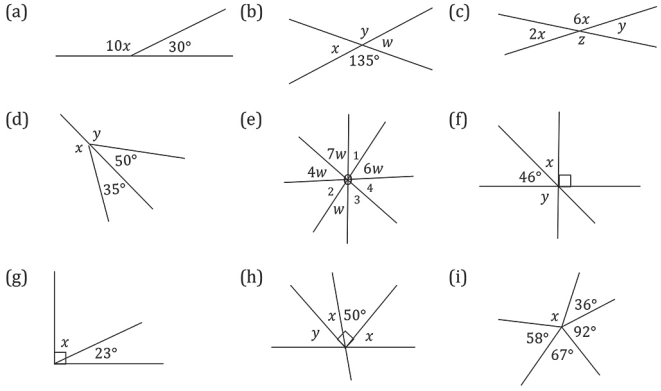
Wiskundedocent Andrea Morgan schreef een nieuwe wiskundemethode om iets aan de ongelijkheid in het onderwijs te doen. Andrea: 'In ons land bestaan grote verschillen in rijkdom en onderwijs. Terwijl ik deze boeken schreef, had ik de leraren in gedachten die onder slechte omstandigheden in overvolle klassen wiskundige concepten moeten uitleggen. De leerlingen van deze docenten missen een thuissituatie waar ze worden geholpen met huiswerk en waar gevraagd wordt naar hun studievoortgang. Mijn boeken zijn erop gericht deze leerlingen een kans te geven zich een hoog niveau van wiskunde eigen te maken en daarmee de kans op een betere toekomst te vergroten. Deze boeken worden nu niet alleen gebruikt op de rijke scholen, maar ook in de scholen waar kinderen iedere kans die er is voor een betere toekomst nodig hebben. Op deze manier is er in elk geval een deel van het grote verschil rechtgetrokken.

> "De leerlingen missen een thuissituatie waar ze worden geholpen met huiswerk en waar gevraagd wordt naar hun studievoortgang."

Een andere reden om deze boeken te schrijven was om leraren te helpen met de ongezonde angst voor wiskunde bij veel leerlingen. De uitleg in de boeken is duidelijk en overzichtelijk en gaat gepaard met veel oefenmateriaal dat langzaam in moeilijkheid stijgt. Op deze manier worden de leerlingen meer bij de hand genomen om de wiskunde te ontdekken dan in de traditionele boeken.'

***Task 1***

1. Determine the sizes of the angles marked with letters. Give reasons to support your answers and, where applicable, answer in alphabetical order:




*figuur 2 Opgave uit de methode Keys van Andrea Morgan*

## Begeleiding voor docenten

Het Wereldwiskunde Fonds heeft voor drie verschillende scholen voor een aantal leerjaren deze boeken aangeschaft. De wiskundeleraren in deze scholen worden ondersteund door Jude Miller, een gepensioneerde wiskundelerares en lerarenopleider. Jude woont lessen bij en leert de docenten hoe ze de boeken kunnen gebruiken en welke wiskundedidactiek erachter zit.
Door deze gezamenlijke inspanning zijn de examenresultaten voor wiskunde bij deze scholen enorm gestegen.
Een van de dingen waar Jude op focust, is dat wiskundeonderwijs niet gaat over het oplossen van dat ene sommetje. Wiskundeonderwijs ontwikkelt het vermogen om logisch na te denken en ideeën op een gestructureerde manier uit te drukken. Het leert leerlingen om patronen te vinden, te anticiperen op problemen, ze te analyseren en een oplossing te vinden. Het is een enorme boost voor leerlingen als ze merken dat ze hier voortgang in boeken.

Het Wereldwiskunde Fonds is blij op deze wijze bij te kunnen dragen aan het werk van Jude in de scholen en we gaan ervan uit dat veel leerlingen baat hebben bij het gebruik van deze boeken en de scholing van hun leraren in het gebruik ervan.

### Over de auteur

Heleen van der Ree is beleidsmedewerker bij de NVvW en lid van de werkgroep Wereldwiskunde Fonds.
E-mailadres: *h.vanderree@nvvw.nl*

Lerarenopleidingen | Hogeschool van Amsterdam

# Kennis in het kwadraat

Soms is het tijd voor iets nieuws. Een masteropleiding Leraar Wiskunde volgen aan de Hogeschool van Amsterdam biedt je de uitgelezen kans om meer uit jezelf en je carrière te halen. Je ontwikkelt je tot eerstegraadsleraar wiskunde. Het onderwijs wordt verzorgd door hooggekwalificeerde docenten die de praktijk kennen. Je vakkennis komt op academisch niveau en wordt breder, dieper en up-to-date. We bieden een flexibel deeltijdprogramma en wat je leert kun je direct in je werk toepassen.

hva.nl/opendag

**Wil je meer weten?**
**Meld je online aan voor onze online open dag op 13 februari a.s.**

Creating Tomorrow

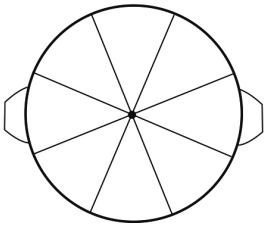
# Puzzel 96-4

# Eerlijk delen van ronde versnaperingen

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

We gaan in deze puzzel een alternatief bewijs en tevens uitbreiding van de zogenaamde 'pizzastelling' geven. Het idee om iets met die pizzastelling te doen kregen we van Fred Muijrers. En met π-dag (14 maart) in het vooruitzicht is het ook toepasselijk.

Een banketbakker beschikt over een taartverdeler die een taart, pizza, quiche, vlaai, pannenkoek, tulband of ander rond gebak in $n$ gelijke punten kan snijden. We zullen dat hier een $n$-mes noemen. Zie figuur 1 voor zo'n 8-mes. Daarbij is het de bedoeling dat je de middens van gebak ($M$) en $n$-mes ($P$) samen laat vallen. Maar dat blijkt niet altijd nodig.

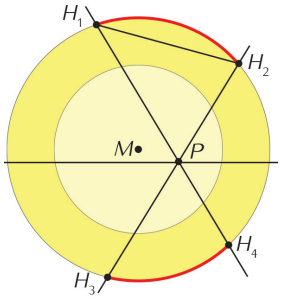


*figuur 1*

De oorspronkelijke 'pizzastelling' luidt:
*Met een 8-mes (dus voor acht punten) hoef je de middens M en P niet samen te laten vallen en kun je de verkregen ongelijke stukken eerlijk onder twee mensen verdelen door ze om en om uit te delen, ook als er geen enkele snede door het midden M van het gebak gaat.*
Deze stelling werd al snel uitgebreid tot elk $4n$-mes met $n > 1$ en ook voor een eerlijke verdeling onder meer dan twee mensen, maar steeds met een $4n$-mes. Er zijn op internet allerlei bewijzen te vinden, onder andere een bewijs zonder woorden voor een 8-mes, hoewel dat voor grotere $n$ lastiger wordt. Maar er zijn ook verschillende algebraïsche en goniometrische bewijzen[1]. Een niet al te ingewikkeld bijna puur meetkundig bewijs hebben we echter niet gevonden en dat is wat we in deze puzzel gaan doen. We kijken daarbij ook naar mogelijkheden voor meer dan twee mensen, niet per se met een $4n$-mes.
We beginnen met het snijden van een simpele gladde, maar niet platte, tulband of ander rond gebak met een gat in het midden, gebakken met een vorm zoals in figuur 2.
We plaatsen $P$ ergens in het gat.

**Opgave 1a:** We snijden met een $2n$-mes. Bewijs voor elke $n$ dat de som van de lengtes van elk paar overstaande boogjes (zoals bijvoorbeeld de twee rode stukjes in figuur 3) voor elk paar gelijk is.

*figuur 2*

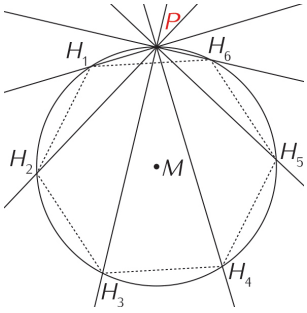



*figuur 3*

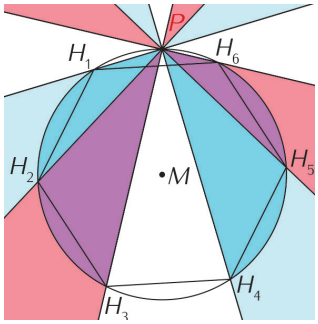
**Opgave 1b:** Laat daarmee zien dat je de stukjes van de tulband, gesneden met ee $2n$-mes eerlijk kunt verdelen onder $k$ mensen als $k = n$ of $k$ is een deler van $n$.

Nu gaan we naar plat rond gebak zonder gat, versieringen of afwijkende rand. We zullen het hebben over een pannenkoek, in het bijzondere geval dat we het midden van het mes (P) op de rand van de pannenkoek plaatsen.

**Opgave 2a:** Toon aan dat voor elke $n$ de snijpunten van de messen van een $2n$-mes, met de cirkel door $P$, de hoekpunten zijn van een regelmatige $n$-hoek. $P$ ligt ergens op een cirkelboogje van de omgeschreven cirkel van die $n$-hoek, zie figuur 4 voor $n = 5$.
Merk op dat met een $2n$-mes met $P$ op de rand van de pannenkoek, die pannenkoek wordt verdeeld in $n + 1$ stukjes: $n$ - 1 driehoeken plus bijbehorend cirkelsegment (= oppervlak begrensd door een deel van de cirkelomtrek en een koorde) en twee kleine cirkelsegmentjes aan weerszijden van $P$. (Tenzij er twee messen raken aan de cirkel, dan zijn er $n$ stukken, maar we bekijken het algemene geval waarin dat niet zo is).
**Opgave 2b:** We beperken ons even tot een even veelhoek, dus gebruiken we een $4n$-mes en verdelen de pannenkoek onder $n$ mensen. Voor $n = 3$ kleuren we de stukken zoals in figuur 5, waarbij de twee kleine cirkelsegmentjes naast $P$ wit zijn gekleurd.



*figuur 4*



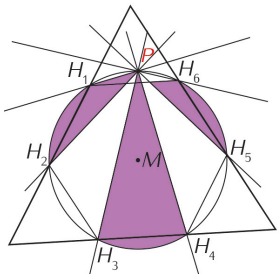
*figuur 5*

Toon aan:

1 Met $n = 3$ is de som van gelijk gekleurde oppervlakten binnen de cirkel voor elk van de drie kleuren gelijk aan ⅓ van het oppervlak van de cirkel.

2 We kunnen voor elke $n > 1$ (met een $4n$-mes) de pannenkoek eerlijk verdelen onder $n$ of $k$ mensen, waarbij $k$ een deler is van $n$.

De 'pizzastelling' gaat echter over het geval dat het gebak met een $4n$-mes over twee personen wordt verdeeld en wel door de gesneden punten om en om uit te delen. Dat zou dus ook moeten lukken met bijvoorbeeld het 12-mes van figuur 5. Daartoe tekenen we behalve de in de cirkel ingeschreven $2n$-hoek nog een $n$-hoek. Dat doen we door de zijden van de $2n$-hoek om en om te verlengen, zodanig dat daarbij $P$ binnen die $2n$-hoek ligt. Zie figuur 6 voor $n = 3$. We kleuren zoals in de figuur de gebieden om en om roze. De rest binnen de cirkel is wit, dus inclusief de twee kleine cirkelsegmentjes links en rechts van $P$.



*figuur 6*

**Opgave 2c:** Laat zien dat de oppervlakte van het roze gekleurde deel gelijk is aan de helft van de oppervlakte van de cirkel en dus dat de pizzastelling bewezen is voor $n = 3$ als $P$ op de rand van de pizza of pannenkoek ligt.

**Opgave 2d:** En wat is er mogelijk als we met een 18-mes snijden?
En nu de pizzastelling zelf, als $P$ ergens in het binnengebied van het gebak ligt, gebruik makend van een $4n$-mes.

**Opgave 3:** Bewijs de pizzastelling voor elk $4n$-mes, (dus voor twee personen om en om verdelen) aan de hand van de gegevens verkregen uit opgaven 1 en 2.

**Opgave 4:** Maar we hebben ook uitbreidingen van de pizzastelling waarbij we het gebak verdelen over meer dan twee personen. Bedenk of het dan noodzakelijk is dat we met een $4n$-mes snijden. Leg uit met welke $n$-messen dat kan voor een tulband of een pannenkoek en voor hoeveel personen?

## Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op π-dag 2021 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 96-2:
*vakbladeuclides.nl/964puzzel*
Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Hans Linders van harte met de ladderprijs.

| Tot en met puzzel 95-7 | | |
|---|---|---|
| 1 | H. Linders | 137 |
| 2 | B. Groot | 133 |
| 3 | J. Remijn | 126 |
| 4 | H. Huisman | 117 |
| 5 | F. Göbel | 114 |
| 6 | M. Woldinga | 95 |
| 7 | G. Bouwhuis | 79 |
| 8 | S. Zondervan | 73 |
| 9 | J. Meerhof | 64 |
| 10 | D. Dopheide | 62 |

**Noot**

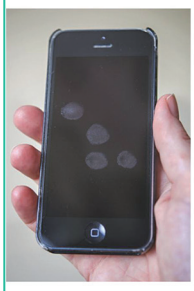
[1] zie *https://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem*

# Vastgeroest

# Fouten maken

Ab van der Roest

Je doet het niet graag, maar het overkomt me nogal eens. En jou misschien ook wel: fouten maken. In de 'Vastgeroest' van *Euclides* 96-2 maakte ik zo'n fout. Een Möbiusband, schreef ik, maar dat klopte helemaal niet. Er zitten twee slagen in de band. Te snel, en niet zorgvuldig genoeg gekeken.
In de klas overkomt me dat ook wel eens. Een voorbeeld hiervan is een opgave in vwo-4 bij wiskunde-A, zie figuur 1. Je kent de opgave misschien wel.



Eva ontgrendelt vaak haar smartphone en zet hem direct daarna weer op stand-by. Op de foto hiernaast zie je de telefoon van Eva waarop zij net haar pincode heeft ingevoerd. Er zijn duidelijk vier vingerafdrukken zichtbaar.

**b** Hoeveel pincodes zijn er mogelijk?

**c** Volgens Luuk is het voor Eva beter om slechts drie verschillende cijfers te gebruiken in haar pincode, want bij drie vingerafdrukken zijn er meer pincodes mogelijk.
Laat met een berekening zien dat Luuk gelijk heeft.

*figuur 1*

Bij het bespreken van deze opgave wilde ik het totaal aantal codes berekenen in plaats van het aantal mogelijkheden bij vier of drie vette vingerafdrukken, en maakte het mezelf en de klas erg lastig. Beter lezen hield ik mezelf voor en gaf een complement aan de leerling die de opgave wel beter gelezen had.

Maar nu de fout van de Möbiusband. Eén van mijn docenten, ik mag tegenwoordig Dirk tegen hem zeggen, wees me erop en daagde me uit om terug te komen op de Möbiusband. Die uitdaging pak ik graag aan, omdat de Möbiusband weleens in de klas gebruik om de leerlingen 'vreemde' dingen te laten zien. Het is een band met één zijde en één rand. Ik gebruik hiervoor meestal een kassastrook, zie figuur 2.

*figuur 2*

Toen ik een keer over die mooie band praatte in een klas, vroeg ik hun wat er gebeurt als je de band in de lengterichting doorknipt. Menige leerling dacht dat het twee banden zouden worden en de verbazing was best groot toen het er maar één bleek te zijn. Maar nu nog een keer knippen, is dan de volgende vraag. Verrassing is compleet als dat wel twee banden blijken te zijn. Voor jou misschien bekend, maar weet je ook wat er gebeurt als we drie slagen in de band maken en dan ongeveer 1 cm uit de kant knippen? Volg het pad en je komt bij het beginpunt uit. Knip de rest van de band door, zodat je alleen de rand overhoudt en bekijk die afgeknipte rand en je ziet dat we dan weer bij *Euclides* 96-2 terecht zijn gekomen.

## Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

## Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is in volle gang. Verspreid over heel Nederland laten ruim 300 scholen hun leerlingen meedoen aan deze wedstrijd met verrassende en uitdagende wiskundeopgaven, waar nauwelijks voorkennis voor vereist is. De opgaven en uitwerkingen van de eerste ronde verschijnen begin februari op de website *www.wiskundeolympiade.nl*. Uiterlijk 8 februari wordt bekend welke ca.1000 leerlingen verder mogen naar de tweede ronde. Daarnaast maken we rond die tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school overall, de school met de beste onderbouwleerlingen, de school met de beste vrouwelijke deelnemers en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt uw school dit jaar in de prijzen!

# Jaarrede 2020

Ebrina Smallegange

## Niet helemaal gewoon

Mijn school, in het midden van het land, ligt in de regio die het laatst nog zomervakantie had. Pas in september zag ik mijn leerlingen weer. Voor het eerst sinds maart gaf ik weer 'gewoon' les. Niet helemaal gewoon: het zijn lessen op anderhalve meter: ik loop de klas niet in. Het online lesgeven, en nu de anderhalve meter afstand, laten toch zien dat wiskundeles geven een interactieve bezigheid is; wat is dat lastig online en wat is dat lastig op anderhalve meter.In maart zijn we heel snel naar online gegaan. Een megaprestatie. Sommige scholen gaven ondersteuning, op andere scholen moesten docenten het zelf maar uitzoeken.

## Inspiratie en hulp

Binnen één weekend, toen de coronamaatregelen net waren ingegaan, is de NVvW een forum gestart, voor alle wiskundeleraren, leden en niet-leden, om te kunnen uitwisselen hoe lessen op afstand toch nog zo goed mogelijk verzorgd konden worden. We hebben een *Handreiking online wiskundeonderwijs* geschreven. Die is nog steeds te downloaden via onze site. En we hebben twee online meetups georganiseerd. Aan het eind van het schooljaar bleek dat de eindexamens niet door zouden gaan. Dat was een totaal nieuwe situatie! Leerlingen kregen de mogelijkheid resultaatverbetertoetsen te maken om hun schoolexamencijfer te verbeteren. De NVvW heeft via de superbeveiligde site van Wisbase de mogelijkheid gegeven resultaatverbetertoetsen uit te wisselen. Dat is echt een voorbeeld van waar de vereniging voor bedoeld is: samen, in vereniging, elkaar inspireren, elkaar ondersteunen, om hulp vragen en elkaar hulp bieden.
Nu geven we les in een situatie die niet door iedereen als veilig wordt beschouwd. Docenten vrezen besmet te worden door leerlingen en collega's, in lokalen die slecht geventileerd zijn en op gangen waar het te druk is. Zij geven dat aan bij de NVvW. In gezamenlijkheid met andere vakverenigingen, binnen het Platform VVVO en de FvOv kaarten we dit aan bij scholen en politiek. We hopen door deze gezamenlijke aanpak sterker te staan en gehoord te worden. Het was een nare, rare tijd. Dat is nog steeds zo. We zullen ermee moeten dealen.

## Nieuwe website

Maar we moeten ons ook afvragen: hoe gaan we in de toekomst verder? Wat leren we hiervan? Ik heb je vorig jaar verteld dat we als vereniging op zoek zouden gaan naar hoe we leden met elkaar in contact kunnen brengen, meer dan nu gebeurt. We konden tijdens de lockdown wel het een en ander organiseren, maar dat willen we nog beter maken en ook kunnen blijven inzetten als de tijden weer wat normaler worden. Daarom: we gaan de website van de vereniging veranderen. In de nieuwe website, die ook als app te gebruiken zal zijn, komen meer mogelijkheden voor leden om contact te hebben met andere leden. Er komen blogs over allerlei onderwerpen en er komt een mogelijkheid om met andere leden, online of fysiek, af te spreken om met elkaar over diverse onderwerpen te discussiëren. Er is zoveel kennis bij al onze leden aanwezig! Wij willen een platform bieden om uitwisseling van deze kennis makkelijker te maken. Uiteraard blijft ook onze Facebookgroep 'Leraar Wiskunde' bestaan, want we zien dat daar ook veelvuldig van elkaar geleerd wordt en kennis wordt uitgewisseld.
Er komen dus gewoon mogelijkheden bij.

## Rekenen

Niet alleen door corona maar ook op andere gebieden was het een heftig jaar. Er zijn een paar belangrijke zaken afgerond, die gevolgen hebben voor de toekomst. Bijvoorbeeld rekenen. Net voor de zomervakantie werd het eindelijk officieel: er moest voor dit schooljaar een pta-rekenen komen voor havo- en vmboleerlingen die geen wiskunde-eindexamen doen. Sommige scholen zijn daar eind september nog heel druk mee bezig geweest. Bij veel scholen werd de verantwoordelijkheid voor een pta-rekenen voor de leerlingen zonder wiskunde zomaar opeens bij de wiskundedocenten gelegd. Veel wiskundedocenten hebben die taak dan ook maar opgepakt. Ik hoop dat die scholen wel beseffen dat die leerlingen hun rekenvaardigheden vaak nog verder moeten ontwikkelen en moeten onderhouden. Dat er lessen gegeven moeten worden en uren voor moeten worden vrijgemaakt.

## Kerncurriculum

Dit jaar hebben de ontwikkelgroepen van curriculum. nu hun eindproducten, de bouwstenen voor een nieuw kerncurriculum, opgeleverd. We hebben steeds kritisch en constructief meegedacht met het ontwikkelteam 'Rekenen en wiskunde'. We blijven onszelf aanbieden als meedenker voor het ontwikkelen van een nieuw curriculum, zowel voor havo en vwo, als voor het vmbo. Wij zullen ons er sterk voor maken dat de stem van de leraren wordt gehoord.

# Jaarrede 2020

## Nieuw examen vmbo

Voor het vmbo geldt: er is een vakvernieuwingscommissie gestart in januari 2020, meteen na het beëindigen van curriculum.nu. Deze commissie heeft als opdracht gekregen een examenprogramma wiskunde te ontwerpen voor de vier leerwegen van het vmbo, met wiskunde voor alle leerlingen. Dat wordt een lang en intensief project dat een nieuw examenprogramma zal opleveren dat, na examen-pilots, uiteindelijk in 2028 zal worden ingevoerd.
De NVvW is nauw betrokken geweest bij het zoeken van docenten die in deze vakvernieuwingscommissie konden plaatsnemen. Ook het bestuur is vertegenwoordigd in deze vakvernieuwingscommissie. Ook de leden van de klankbordgroep, die de commissie gaat bijstaan, zijn mede door de NVvW aangedragen. Op die manier, en door te blijven benadrukken dat de wijzigingen echt uitgeprobeerd moeten worden op scholen, zorgen we ervoor dat deze langverwachte vakvernieuwing door wiskundedocenten gedragen zal worden!

## Havo en vwo

Of, en hoe, het curriculum voor havo en vwo herzien gaat worden is nog afhankelijk van de politiek. Er is nu eerst een wetenschappelijke curriculumcommissie aangesteld. Die commissie beoordeelt de bruikbaarheid van de bouwstenen voor de onderbouw havo en vwo en formuleert een werkopdracht voor het ontwikkelen van nieuwe kerndoelen. Het plan is dat daarna die nieuwe kerndoelen ontworpen worden en op scholen worden uitgeprobeerd. Bijna tegelijkertijd zouden ook nieuwe eindtermen voor de bovenbouw ontwikkeld worden. Hoe dat precies gaat gebeuren is nog afhankelijk van de politiek. Deze processen zullen wij blijven volgen. Wij zullen gevraagd, maar zeker ook ongevraagd, advies geven! Wij zijn degenen die staan voor goed wiskundeonderwijs!

## Positie wiskunde

Zowel voor havo en vwo, als voor het vmbo, wordt een kerncurriculum ontworpen dat 70% omvat van wat er nu gegeven wordt. De overige 30% kunnen scholen vrij invullen. Die 30% biedt kansen voor vakoverstijgende projecten waar wiskunde een zichtbare rol kan hebben. Maar we maken ons zorgen: die 30% kan ook voor een totaal ander vak ingezet worden. Voor een belangrijk vak als wiskunde, een vak met een hoofdrol in onze kennis-economie, maar met een groot lerarentekort, wordt het

> "We leiden leerlingen op voor een maatschappij waarin kwantitatieve informatie een belangrijke rol speelt."

een hele uitdaging. We leiden leerlingen op voor een maatschappij waarin kwantitatieve informatie een belangrijke rol speelt. Kunnen we dat voldoende doen als we maar 70% aanbieden? Wat zijn de gevolgen hiervan voor de bèta- en techniekstudies? En zal onze positie ten opzichte van het buitenland niet verzwakken? Zorgelijke punten! Wij zullen onze uiterste best doen voor een sterke positie van wiskunde binnen het onderwijs.

## Positie wiskundedocenten

De NVvW ondersteunt ook de positie van wiskundedocenten binnen de school. We zijn aangesloten bij de FvOv, de Federatie van Onderwijsvakorganisaties. Daardoor kunnen we onze leden rechtspositionele ondersteuning bieden. De FvOv vraagt ons regelmatig naar onze standpunten op allerlei gebied. Soms kunnen we via een *poll* onze leden bevragen, soms heeft een onderwerp daarvoor te veel haast. Daarom hebben we een bestuurscommissie Vakbondszaken in het leven geroepen, die bestaat uit leden en bestuursleden van de NVvW. Deze commissie verdiept zich in deze vakbondszaken en adviseert het bestuur. We hopen op die manier snel en adequaat te kunnen reageren op vragen en voorstellen vanuit de FvOv. Om de nieuwe ontwikkelingen rondom het bevoegdhedenstelsel goed te kunnen volgen, en daarop te anticiperen, hebben we bovendien de bestuurscommissie 'Bevoegd' ingesteld. Ook die bestaat uit leden en bestuursleden. Deze commissie verdiept zich in het nieuwe bevoegdhedenvoorstel en adviseert het bestuur als hierin om het standpunt van de NVvW wordt gevraagd. Daarbij blijft ons uitgangspunt dat wiskundelessen verzorgd moeten worden door goed opgeleide professionals!

## Projectenfonds

We hebben ook een bestuurscommissie die het bestuur over het toekennen van projecten aan leden adviseert. Ik kondigde dit initiatief vorig jaar al aan: het projectenfonds.

Als je een project wilt starten dat van waarde is voor het wiskundeonderwijs, maar je hebt daar ondersteuning bij nodig, kun je die ondersteuning via ons projectenfonds aanvragen. Als tegenprestatie houd je dan de overige leden van de opbrengsten op de hoogte via ons vakblad *Euclides* en je verzorgt een workshop op de studiedag. Er zijn al twee aanvragen gehonoreerd. Deze mensen zijn al met hun project bezig en verzorgen vanmiddag een workshop. Ook op deze manier willen we bevorderen dat leden van elkaar kunnen leren! We blijven aanvragen honoreren. Op onze website lees je de voorwaarden.

## Uitwisseling

Er is nog een bestuurscommissie, de commissie 'Transparantie en Toekomst'. Hun eerste advies was: als je leden wilt samenbrengen heb je daar een 'tool' voor nodig. We hebben even afgewacht of het ministerie van onderwijs hierin een initiatief nam. Het Lerarenportfolio... zou die functie namelijk ook kunnen vervullen. Maar we hebben uiteindelijk besloten om dat zelf te doen. De nieuwe website wordt gebouwd! Je ziet, we willen als NVvW niet alleen belangenbehartiger zijn, maar we willen ons er ook op richten dat de leden met elkaar in contact komen. Om elkaar te inspireren en om elkaar sterker te maken.
Ook in deze coronatijd.
En daarmee kom ik aan het einde van deze jaarrede. Ik verzeker je dat de NVvW ook volgend jaar pal zal staan voor het wiskundeonderwijs en voor de wiskundedocenten. Laat ons weten als wij iets voor je kunnen doen!
Ik wens je een goed jaar toe!

## Claudia Konert: nieuw bestuurslid

Tijdens een bijeenkomst van het CvTE, nu twee en een half jaar geleden, werd ik aangesproken door een lid van de werkgroep vmbo van de NVvW met de vraag of ik eens een vergadering zou willen bijwonen. Na die eerste keer ben ik gebleven. Ik vind het heerlijk om actief mee te denken over de ontwikkelingen van het wiskundeonderwijs en daar mijn steentje aan bij te dragen. Dit doe ik niet alleen door les te geven, maar deel te nemen aan de vernieuwingscommissie wiskunde vmbo. Op het moment dat er een plek vacant kwam in het bestuur hoefde ik er daarom geen twee keer over na te denken.

In 2001 ben ik tijdens mijn studie begonnen als vmbo-docent biologie en in de loop der jaren overgestapt naar wiskunde en rekenen. Ik zie het elk schooljaar weer als uitdaging om leerlingen in een klas mee te krijgen, ze boven zichzelf uit te laten stijgen en hun rekenangsten te laten overwinnen. Het geeft veel voldoening om die glunderende gezichten te zien wanneer ze meer hebben gepresteerd dan ze zelf hadden kunnen denken. Bij deze uitdaging zag ik telkens dezelfde hiaten tussen het po en het vo waar leerlingen hinder van ondervonden. 'Daar moet iets aan te doen zijn,' dacht ik. Vanuit mijn rol als rekencoördinator ben ik andere scholen gaan benaderen met de vraag of zij zouden willen aansluiten bij een werkgroep rekenen met als doel het vormgeven van een doorlopende leerlijn. Met een steeds groter wordend team zijn wij enthousiast aan de slag gegaan om het rekenonderwijs te versterken. Ons enthousiasme is overgeslagen op anderen. Met steeds meer scholen in de regio delen we kennis zodat ook andere netwerken ontstaan die met dit onderwerp aan het werk gaan. Het zoeken en vinden van deze samenwerking in een regio waar sprake is van krimp is opgevallen en heeft ertoe geleid dat ik ook ons Sterk Techniek Onderwijs programma mag leiden en met een ontzettend leuk team het techniek onderwijs in Noord-Groningen verder mag ontwikkelen.
Ondanks dat ik met veel uitdagingen bezig ben, maak ik altijd tijd vrij voor thuis. Samen lachen, dingen ondernemen en de kinderen helpen bij het huiswerk. Ze gaan alleen liever niet mee op de lange fietstochten. Wanneer ik ga fietsen stappen zij liever in de auto en rijden achter mij aan naar de eindbestemming.
De komende jaren wil ik mij bij de NVvW inzetten voor wiskunde in het vmbo. Binnen de NVvW zijn veel interessante initiatieven en wordt er veel ruimte gegeven voor eigen inbreng. Ik ga mij daar de komende periode in verdiepen en kijken waar ik vanuit mijn kennis en expertise een mooie bijdrage kan leveren.

# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

**Redactie**
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter

**Inzenden bijdragen**
Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

**Richtlijnen voor artikelen**
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

**Realisatie**
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
Website: www.nvvw.nl

**Voorzitter**
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

**Secretaris**
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

**Ledenadministratie**
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

**Helpdesk rechtspositie**
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

**Lidmaatschap**
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Abonnementen *Euclides* niet-leden**
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Advertenties en bijsluiters**
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

## 2021

Vr 29/01

### ONLINE
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Wo 12/02

### LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

Vr 12/03

### NEDERLANDSE UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Do 18/03

### LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

**JAARGANG 96**

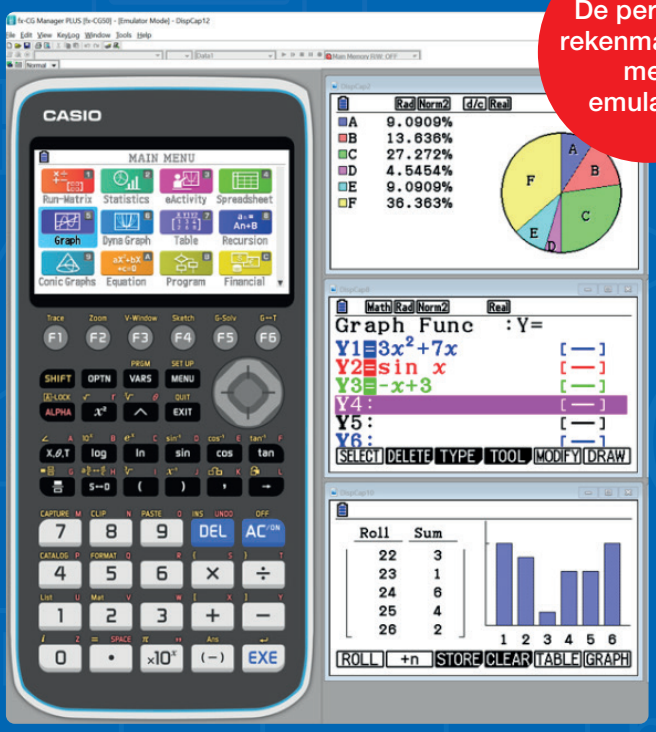
| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 5 | 17 maart 2021 | 04 januari 2021 |
| 6 | 05 mei 2021 | 01 maart 2021 |
| 7 | 23 juni 2021 | 26 april 2021 |

CASIO

# Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken




## fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

## ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

# Wat past bij jou?

| | MODERNE WISKUNDE | GETAL & RUIMTE |
|---|---|---|
| **Didactiek** | - Ontdek wiskunde vanuit de praktijk<br>- Oriënterende opdrachten<br>- Kernachtige theorie | - Uitvoerige theorie en instructie<br>- Veel en gericht oefenen |
| **Leerlinggericht** | Accent op ontwikkeling van wiskundig inzicht en begrip. | Accent op ontwikkeling van wiskundige kennis en vaardigheden. |
| **Structuur paragraaf** | 1 les = 1 paragraaf | Paragraaf in lessen indelen naar eigen inzicht. |
| **Prijs (FLEX)** | € 32,50 per deel | € 38 per deel |

## Digitale omgeving

| | | |
|---|---|---|
| Opdrachten met feedback | V | V |
| Oefentoetsen met studieadvies | V | V |
| E-books en uitwerkingen | V | V |
| Online statistiekprogramma | V | |
| Excelaanpak van statistiek | | V |

+

## FLEX

| | | |
|---|---|---|
| Eigen boek waarin je mag schrijven | V | V |
| Digitale licentie | V | V |
| Hulpboek geïntegreerd | V | |
| Werkbladen geïntegreerd | | V |

*Zelf beoordelen? Scan de code!*

Meer informatie vind je op **noordhoff.nl/voortgezet-onderwijs/methoden/wiskunde**

Noordhoff

Brengt je verder