

EUCLIDES



WORTELS VAN DE WISKUNDE

Het begin van kansrekening

Toen x nog onbekend was

De driehoek van Pascal

Wortels optellen met Stampioen

Het bamboeprobleem

Een geometrische questie

Rekenen met breuken

Babylonische vergelijkingen

Inhoud van een (afgeknotte) piramide

Derdegraads vergelijkingen

Het duiden van data

Op weg naar $\sqrt{-1}$ als getal

Logaritmen

Een verhaal van π

Metten

De stokjes van Napier

Lockdown wiskunde



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

WORTELS VAN DE WISKUNDE



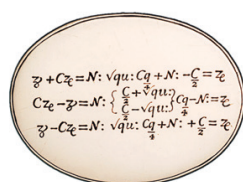
WAAROM GESCHIEDENIS IN DE WISKUNDELES? 3
Jeanine Daems

WORTEL 1: HET BEGIN VAN KANSREKENING 6
Desiree van den Bogaart

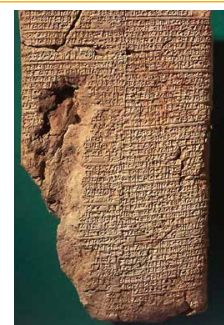
WORTEL 6: EEN GEOMETRISCHE QUESTIE 21
Jeanine Daems

WORTEL 7: REKENEN MET BREUKEN 25
Desiree van den Bogaart

WORTEL 2: TOEN XNOG ONBEKEND WAS 9
Jeanine Daems



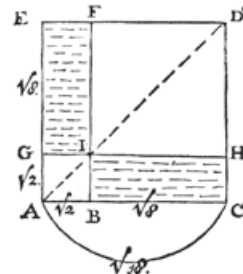
WORTEL 8: BABYLONISCHE VERGELIJKINGEN 28
Jeanine Daems



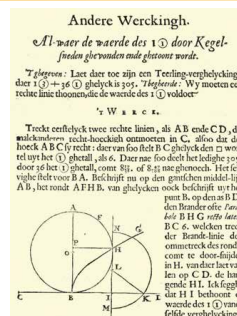
WORTEL 3: DE DRIEHOEK VAN PASCAL 12
Desiree van den Bogaart

WORTEL 9: INHOUD VAN EEN (AFGEKNOTTE) PYRAMIDE 32
Desiree van den Bogaart

WORTEL 4: WORTELS OPTELLEN MET STAMPIOEN 15
Jeanine Daems



WORTEL 10: DERDEGRAADS VERGELIJKINGEN 35
Jeanine Daems



WORTEL 5: HET BAMBOEPROBLEEM 18
Desiree van den Bogaart

WORTEL 11: HET DUIDEN VAN DATA 38
Desiree van den Bogaart

Foto: kleitablet YBC 7289 (ca. 1800–1600 v.Chr.)

Op deze kleitablet is een benadering van $\sqrt{2}$ in vier sexagesimale cijfers te zien.

Foto: © Yale Babylonian Collection

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WORTEL 12: OP WEG NAAR $\sqrt{-1}$ ALS GETAL

Peter Lanser

41

WORTEL 13: LOGARITMEN

Jeanine Daems

44

WORTEL 14: EEN VERHAAL VAN π

Desiree van den Bogaart

48

WORTEL 15: METEN

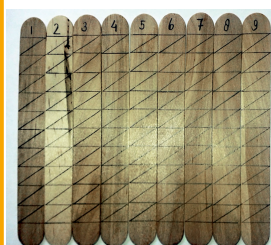
Jeanine Daems

52

WORTEL 16: DE STOKJES VAN NAPIER

Desiree van den Bogaart

56



WORTEL 17: LOCKDOWN WISKUNDE

Viktor Blåsjö en Desiree van den Bogaart

60



foto: Han Ernest

Kort Vooraf

Toen we samen het boek *Wortels van de wiskunde* van William P. Berlinghoff en Fernando Q. Gouvêa aan het vertalen waren, zochten we naar manieren om naast dit overzicht van de historische ontwikkelingen ook aandacht te besteden aan hoe je die geschiedenis nou echt kunt gebruiken in de wiskundeles. Want we kunnen wel roepen dat het inzetten van oude wiskundige teksten leuk en waardevol is, maar het is niet altijd makkelijk om dan ook daadwerkelijk geschikte bronnen te vinden. Daarom besloten we voor *Euclides* een serie artikelen te schrijven, waarin we voor een aantal onderwerpen interessante en bruikbare bronnen uitlichtten en bespraken, met tips en aandachtspunten voor vragen die je daarbij aan je leerlingen zou kunnen stellen. De serie kreeg de informele naam *Worteltjes* en als beeldmerk het beroemde kleitablet YBC 7289, waarop een benadering van wat wij nu wortel twee noemen staat.

De afgelopen jaren hebben we voor deze serie vijftien artikelen geschreven. Verder hebben we eenmaal Peter Lanser als gastauteur gevraagd om een Worteltje te schrijven en het laatst verschenen artikel is wederom een vertaling, ditmaal van een stuk uit het *Nieuw Archief*, van Viktor Blåsjö. Hopelijk kan deze bundel docenten inspireren om zelf met deze (of andere) bronnen aan de slag te gaan en de geschiedenis van de wiskunde af en toe een rol te laten spelen bij het leren van wiskunde. We sluiten zeker niet uit dat er komende jaren nog meer Worteltjes zullen verschijnen, maar voor nu is het een bosje van zeventien stuks. Veel plezier ermee!

Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems

WAAROM GESCHIEDENIS IN DE WISKUNDELES?

Jeanine Daems

Onlangs verscheen de vertaling van het boek *Math through the ages* van William Berlinghoff en Fernando Gouvêa. De vertaling is van de hand van Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems. In het boek ontbreekt de praktische toepassing van de geschiedenis in het wiskundeonderwijs. Dat leidde tot de geboorte van een nieuwe rubriek: 'Wortels van de wiskunde'.



Motiverend

Er zijn goede redenen om iets met de geschiedenis van de wiskunde te doen in de wiskundeles. De meeste mensen denken in eerste instantie vooral aan af en toe een anekdote vertellen voor de motivatie en de afwisseling. Als je rekenkundige reeksen gaat uitleggen, is het bijvoorbeeld leuk om het verhaal over Gauss en zijn strafwerk te vertellen.^[1] De anekdote kan de wiskunde een wat menselijker gezicht geven, en het is leuk dat de leerling in dit verhaal slimmer is dan de docent.

Een nadeel van dergelijke anekdotes is dat het waarheidsgehalte soms ondergeschikt is aan de motiverende rol. Zo heeft het verhaal over Gauss een redelijk betrouwbare oorsprong, maar bewijs voor Archimedes die al 'Eureka!' roepend naakt door de straten rende is er bijvoorbeeld maar weinig. Een ander nadeel is dat wiskundigen in zo'n anekdote toch regelmatig overkomen als wereldvreemde, hyperintelligente, bijzondere genieën. Dat is niet per se de boodschap die we onze leerlingen willen meegeven, en er zijn in de geschiedenis ook genoeg voorbeelden te vinden van mensen die geworsteld hebben met de materie en wiskundigen die door domweg doorzetten resultaten hebben bereikt. Er is natuurlijk niets mis met het af en toe inzetten van een verhaal, maar er zijn meer inspirerende manieren om de geschiedenis te gebruiken. En dat gaat dan echt over de inhoud, over *hoe* en ook *waarom* de wiskunde vroeger werd gedaan.

Verschillende auteurs schrijven over de redenen om geschiedenis van de wiskunde te gebruiken in de wiskundeles, bijvoorbeeld Berlinghoff en Gouvêa in hun inleiding, Tzanakis en Arcavi, Jahnke et al en Jankvist.^[2] Ik bespreek er hieronder een paar, zonder te pretenderen dat dit een compleet overzicht is.

Bouwwerk

Berlinghoff en Gouvêa noemen het gebruiken van de geschiedenis voor een breder blikveld: wiskunde is niet

ontstaan als losse stukjes informatie, wiskunde is ontwikkeld met een reden, vaak een praktische, maar niet altijd.^[3] Het heeft bijvoorbeeld meerwaarde om uit te leggen waarom de complexe getallen zijn bedacht, want voor leerlingen kan dat erg vreemd lijken. En soms is wiskunde ook ontwikkeld om de wiskunde zelf, en ook dat is leuk om te ontdekken. Wiskundige resultaten zijn geen los zand, wiskundigen bouwen voort op werk van eerdere wiskundigen.

Mensenwerk

Ook kan geschiedenis een context geven: wiskunde is een cultureel product dat door mensen gemaakt is op een bepaalde plek en in een bepaalde tijd. Vaak is de wiskunde dan ook beïnvloed door die context. Bovendien kun je laten zien hoe in andere culturen ook hoogstaande wiskunde ontwikkeld is, bijvoorbeeld in de Arabische wereld in de vroege Middeleeuwen, toen er in Europa weinig ontwikkeling was op wiskundig gebied.

Ik vind dit zelf een zeer belangrijke reden. Voor leerlingen kan wiskunde overkomen als een afgerond, gegeven geheel dat nou eenmaal zo is zoals het in het boek

staat. Als je de regeltjes uit het boek kunt toepassen, kun je de opgaven die je krijgt oplossen. Dat is hoe veel mensen wiskunde ervaren hebben, zelfs bij mijn studenten zie ik dat beeld regelmatig terug.

Door oude bronnen,

oude methodes, andere getalsystemen, wiskunde uit allerlei tijden en zeker ook culturen te laten zien, geef je een beeld van wiskunde als een levend vak, door mensen gemaakt, waar je dus ook zelf nog over na kunt denken.

Meer begrip voor leerlingen

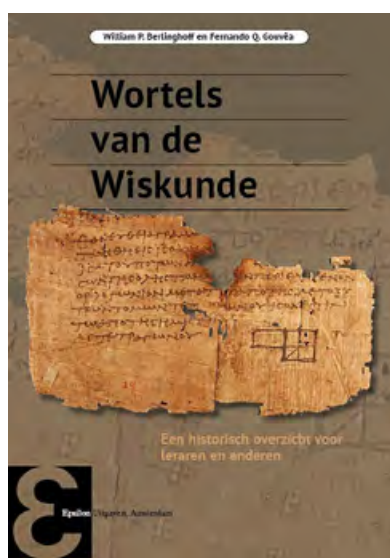
Daarnaast kan kennis van de geschiedenis bij de docent wellicht bewustwording opleveren: als je weet hoe moeizaam de acceptatie van de negatieve getallen verliep, kun je nog meer begrip opbrengen voor leerlingen die met dergelijke nieuwe, toch redelijk abstracte concepten

'DOOR WISKUNDE UIT ALLERLEI TIJDEN EN CULTUREN TE LATEN ZIEN, GEEF JE EEN BEELD VAN WISKUNDE ALS EEN LEVEND VAK, WAAR JE DUS OOK ZELF NOG OVER NA KUNT DENKEN.'

worstelen en inschatten waar dergelijke moeilijkheden zich kunnen voordoen.

Praktische voorbeelden

Onlangs verscheen *Wortels van de wiskunde*, de vertaling die ik met Desiree van den Bogaart maakte van het boek *Math through the ages* van Berlinghoff en Gouvêa. Dit boek geeft een beknopt overzicht van de wiskunde door de tijd heen, en daarnaast bevat het 25 zogeheten 'schetsen': korte, thematische hoofdstukjes. Die opzet is fijn, want je kunt zo per onderwerp een overzichtelijk, kort stukje informatie opzoeken. Bij die onderwerpen kun je denken aan π , kwadratische vergelijkingen, algebraïsche notatie, niet-euclidische meetkunde, noem maar op.



figuur 1 Wortels van de wiskunde

Wat ontbreekt in het boek zijn praktische voorbeelden om als docent mee aan de slag te gaan. Ook laat het boek maar weinig echte oude bronnen zien. Wij denken dat het gebruik van oude bronnen veel kan toevoegen in de wiskundesles. In de komende artikelenreeks gaan we een aantal voorbeelden verder uitdiepen. Per artikel kiezen we één onderwerp uit de schoolwiskunde, met een bijbehorende schets, en daar zoeken we geschikte bronnen bij. Ook gaan we in op hoe je bij zo'n bron goede vragen en opdrachten kunt maken.

Waarom primaire bronnen?

Het toepassen van primaire bronnen is geen doel op zichzelf. Of dat passend is hangt af van de doelen die je hebt als docent. Jahnke et al. noemen drie doelen waarbij juist het inzetten van primaire bronnen goed past: *replacement* (vervangen), *reorientation* (heroriënteren) en *cultural understanding* (begrip van cultuur).^[4]

Met vervangen bedoelen ze: geschiedenis integreren in de wiskunde vervangt het gebruikelijke door iets anders, het stelt je in staat de wiskunde te zien als een intellectuele activiteit in plaats van als een geheel van kennis

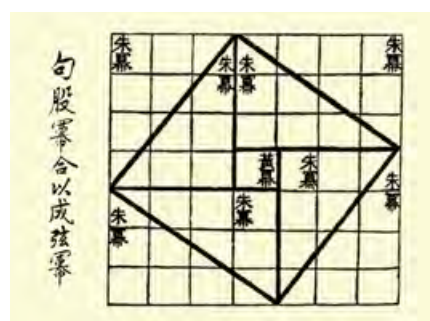
en methodes. Bronnen kunnen voorbeelden laten zien van worstelingen met nieuwe denkbeelden, zoals de twijfels die wiskundigen in de zestiende en zeventiende eeuw hadden over wat irrationale getallen nou eigenlijk zijn.^[5]

De eigen onzekerheden bij leerlingen of docent (bijvoorbeeld over die ongemakkelijke 'oneindige' decimale ontwikkeling) kunnen bespreekbaar gemaakt worden en de wiskunde krijgt een menselijker gezicht. Heroriënteren betekent hier dat het bekende onbekend gemaakt wordt: een historische tekst proberen te vatten kan ervoor zorgen dat je je eigen denkbeelden moet herzien of aanpassen. De geschiedenis laat zien dat wiskundige concepten uitgevonden zijn en niet zomaar uit zichzelf zijn ontstaan. Het lezen van oude bronnen kan ook laten zien dat een wiskundig concept, in tegenstelling tot wat veel mensen denken, soms echt veranderd is in de loop van de tijd. Een mooi voorbeeld is de ontwikkeling van het functiebegrip dat eerst nog over algebraïsche relaties ging, maar uiteindelijk puur verzamelingtheoretisch werd geformuleerd. Ook kun je laten zien dat notatie en methodes veranderlijk zijn.

Met begrip van cultuur wordt bedoeld dat de geschiedenis de ontwikkeling van de wiskunde een plaats geeft in de wetenschappelijke en technologische context van een bepaalde tijd en in de bredere culturele geschiedenis van ideeën. Vroeger waren wiskundigen vaak ook filosoof en de strikte scheiding tussen wis- en natuurkunde is van relatief late datum. Dit kan aanleiding geven tot mooie vakoverstijgende inzichten en opdrachten.

Geschikte bronnen

Maar hoe kom je aan geschikte bronnen? Er zijn mooie bronnenboeken te vinden (verwijzingen daarnaar komen in de artikelen in deze serie) en er staan steeds meer historische boeken integraal op internet. Maar lang niet alle oude bronnen zijn geschikt: de inhoud moet natuurlijk enigszins aansluiten bij de middelbare-schoolstof, en liefst ook leesbaar zijn (dat wil zeggen: in het Nederlands of eventueel Engels geschreven, of vertaald). Maar er zijn ook veel bronnen te vinden waarbij alleen aan de plaatjes al een heleboel moois is te ontdekken, zeker als je als docent meer over de achtergrond weet.



figuur 2 Visueel bewijs van wat wij de stelling van Pythagoras noemen. Uit: *De negen hoofdstukken*, een Chinees boek over wiskunde, vóór 200 v.Chr.

Een voorbeeld is figuur 2: een reconstructie van een figuur uit *De negen hoofdstukken*, een verzameling van wiskundige kennis uit China, samengesteld vóór 200 v. Chr. Dit plaatje gaat over wat wij de stelling van Pythagoras noemen en het geeft een visueel bewijs in het geval van de 3-4-5-driehoek dat werkt via het aangeven van overeenkomstige puzzelstukjes. Als moderne lezer heb ik meteen de neiging om de zijden a , b en c te noemen en met algebra aan de slag te gaan, en op die manier kun je ook snel een algemeen bewijs vinden. Alleen: dat is natuurlijk anachronistisch. Ik vind zo namelijk echt een ander bewijs dan dat van de Chinezen. Je moet als docent bij zo'n bron dus kiezen tussen het gebruiken van oude plaatjes of problemen als inspiratie voor een in feite modern sommetje, of juist wel ingaan op de oude methode en die vergelijken met de moderne methode en daardoor inzichten opdoen over dat het anders kan dan je gewend bent. Daarmee zien leerlingen in dat ook een exact vak als wiskunde stijlverschillen kent op verschillende plekken en in andere tijden.

Het is onvermijdelijk dat wij onze eigen didactische voorkeuren laten meespelen in de keuzes die wij maken, maar we moedigen je aan het materiaal naar eigen inzicht aan te passen. We hopen dat onze artikelen je kunnen motiveren de stap te zetten naar die interessante geschiedenis en mooie wiskundige ideeën uit oude bronnen echt te gebruiken in je onderwijs. We hopen dat je daarmee net zulke mooie ervaringen zult opdoen als wij. De eerste aflevering, waarin Desiree ingaat op het begin van de kansrekening, is te vinden op blz. 7 van deze *Euclides*.

Noten

- [1] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven, p. 2.
- [2] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). Jahnke, H. N. (et al.), The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel, J. & Maanen, J. van (eds.) (2000). *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer. Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. Fauvel, J. & Van Maanen (2000) (pp. 201-240). Jankvist, U.F. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*(71)3, pp 235-261.
- [3] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016).
- [4] Jahnke, H. et. al (2000), p. 292.
- [5] Ibidem, p. 296.

Over de auteur

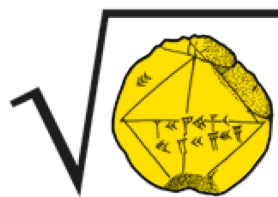
Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, aan de universiteit en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Desiree van den Bogaart

I: HET BEGIN VAN KANSREKENING

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: het begin van kansrekening.



Het zal niemand verbazen dat de kansrekening haar oorsprong vindt in spelletjes en gokken. Er is een klassieke anekdote over het verdelen van de pot bij een onafgemaakt spelletje, die in verschillende gedaantes aan verscheidene wiskundigen wordt toegeschreven. Er wordt gezegd dat de Italiaanse monnik Luca Pacioli (1445 – 1517) zich al met dit probleem bezighield, en ook de naam van de Italiaanse aartsgokker Girolamo Cardano (1501 – 1576) (beter bekend vanwege zijn werk aan de oplossing van derde- en vierdegraads vergelijkingen) valt regelmatig. Zijn *Handboek over kansspelen* (*Liber de ludo alae*) werd echter pas in 1663 gepubliceerd, negen jaar nadat de Fransman Blaise Pascal (1623 – 1662) het volgende probleem had opgelost:

In 1654 legde ridder De Méré, een rijke Franse edelman die wel van gokken hield, een probleem dat voortkwam uit een spelletje voor aan de wiskundige Blaise Pascal. De vraag was hoe de pot van een onafgemaakt spel moest worden verdeeld. De 'pot' bestond uit het geld dat door elke speler aan het begin van het spel was ingezet. Normaal gesproken behoorde de totale hoeveelheid geld na het bepalen van de inzetten aan niemand meer toe, tot het spel voorbij was, waarna de winnaar alles kreeg. De vraag van De Méré, ook wel bekend als het 'puntenprobleem' was hoe de inzet van een onafgemaakt spel moest worden verdeeld, als de tussenstand van de spelers bekend is. (Berlinghoff, blz. 161)

Bovenstaande is voor leerlingen misschien nog wat abstract geformuleerd, maar het kan makkelijk concreet gemaakt worden. Stel je voor dat je aan het tafelvotballen bent. Jij en je broertje hebben allebei vijftig cent ingelegd in de pot. Wie het eerste drie goals heeft gemaakt, wint de pot. Bij een tussenstand van 2-1 in jouw voordeel, worden jullie geroepen voor het eten. Wat doe je dan met de euro die in de pot zit?

Er kan een leuke discussie op gang komen in de klas, na het stellen van een dergelijke vraag. Om te beginnen kan er voorgesteld worden om iedere speler de inzet terug te geven. Dat is een eerlijke oplossing, aangezien er geen winnaar is bepaald. Maar er is al wel een stand van 2-1 neergezet, dus jij zou ook kunnen beargumenteren dat jij de winnaar bent, die de pot verdient. Maar daar gaat je broertje waarschijnlijk niet mee akkoord. Hij zou kunnen voorstellen dat, aangezien jij twee van de drie gescoorde goals hebt gemaakt, jij recht hebt op twee derde deel van de pot en hij toch zeker een derde kan claimen. Afhankelijk van de machtsverhoudingen tussen jou en je broertje ga je hier mogelijk mee akkoord. Pascal zou zeggen dat je jezelf daarmee tekort doet. Maar dat gaan we zo ontdekken aan de hand van een primaire bron. Er zijn nu in ieder geval alvast twee opmerkingen te maken over het gebruik van geschiedenis van de wiskunde in de les. Ten eerste is het hier onmiskenbaar voor leerlingen hoe wiskunde verbonden is met vraagstukken uit het dagelijks leven. Het is dus geen abstract vak dat bedacht is door een stelletje wereldvreemde lui. Ten tweede is er ruimte voor discussie en interpretatie. Het is dus niet altijd een soort absolute waarheid waar je het maar mee eens hebt te zijn. Je kunt soms keuzes maken, mits je die beargumenteert.

Huygens verdeelt de pot

In 1657 schreef de grote Nederlandse wetenschapper Christiaan Huygens (1629 – 1695) zijn *Van rekeningh in spelen van geluck*, een boek waarin kansrekening als theorie wordt opgebouwd aan de hand van steeds complexere spelsituaties (bijvoorbeeld meer spelers). Hierin zijn de ideeën van Pascal en tijdgenoten terug te vinden. We krijgen niet vaak de kans in de wiskundeles om een primaire bron te gebruiken in de oorspronkelijke taal, dus laten we eens kijken naar wat Huygens hier over schreef (zie volgende pagina, figuur 1).

IV Voorstel

Genomen dan dat ick tegens een ander speele ten dryen uyt, en dat ick alreede 2 spelen hebben en hy maer een. Ick wil weeten, ingevale wy het spel niet en wilden voortspeelen, maer het geen ingeset is gerechtelijck wilden deelen, hoeveel my daer van komen soude.

Om nu tot de eerst voorgestelde questien te komen, aengaande de verdeelingh onder verscheyde speelders te maecken, als haere kansen ongelijck zijn, soo is 't noodigh van de lichtste te beginnen. Voor eerst moet acht genomen werden alleen op de spelen, die wederzijds noch ontbreecken. Want het is seecker, dat, of wy ten 20^{gen} uyt speelden, en dat ik 19 hadde, en die tegens my speelt 18, dat ick even het selfde voordeel soude hebben als nu, hebbende van drie spelen 2 gewonnen en hy een: door dien in beyde gevallen my noch maer een spel ontbreeckt en hem twee spelen. Voorts om te vinden, wat deel ons elk toekomt, soo moet aangemerkt werden watter

soude gebeuren indien wy voort speelden. Het is seecker indien ick het eerste spel quam te winnen, dan soude ik uyt wesen en hebben al dat ingeset is, het welck zy genoemd a . Maer indien den anderen het eerste spel won, dan soudent wy gelycke kans hebben, elck noch een spel ontbreecken, en daarom elck gerechtigd zijn tot $\frac{1}{2} a$. Het is nu seecker dat ick gelijkcke kans heb om dat eerste spel te winnen of te verliezen. Soo heb ik dan gelijcke kans om a te hebben of $\frac{1}{2} a$, het welck door het 1^{ste} Voorstel soo veel is als of ick van beyde de helft hadde dat is $\frac{3}{4} a$, en blijft voor die tegens my speelt $\frac{1}{4} a$. Wiens rekening oock van eersten aen op de selve manier hadde konnen gemaect werden. Hier uyt blijkt, dat die mijn spel soude willen overnemen mij $\frac{3}{4} a$ daer voor kan geven; en dat men dienvolgens altyds kan 3 tegen 1 setten, als men neemt 1 spel te winnen, eer dat een ander 2 spelen wint.

figuur 1 Fragment uit Huygens' *Van rekeningh in spelen van geluck*

In het eerste deel van dit 'voorstel' wordt de probleem-situatie geschetst. Laat je niet afschrikken door het oud-Nederlands en neem je leerlingen hier ook in mee: dit is precies het voorbeeld van zo-even. We spelen *ten dryen uyt*, wat wil zeggen dat wie het eerst drie punten heeft, wint. Het spel wordt afgebroken op het moment dat de ik-figuur twee punten heeft en *hy* (de tegenstander) maar één.

Vervolgens merkt Huygens op dat het er eigenlijk niet toe doet hoeveel punten er al door de spelers zijn gehaald, maar dat het er om gaat hoeveel punten de spelers nog *ontbreecken* (nodig hebben) om te winnen. In die zin is de tussenstand van 2-1 bij een spel om wie het eerst drie punten heeft, precies dezelfde als een tussenstand van 19-18 bij een spel waarbij de winnaar als eerste twintig punten nodig heeft: in beide gevallen moet de ik-figuur immers nog één punt halen en *hy* nog twee. Hiermee maakt Huygens dus een keuze voor een bepaalde werkwijze, die volstrekt logisch is, maar nog steeds een keuze. Zeker bij het spel waarbij er twintig punten nodig zijn, zou een verdeling op basis van de al behaalde punten veel gunstiger zijn voor de tegenstander. Daarna onderzoekt Huygens wat de mogelijke gebeurtenissen waren, als het spel wél was uitgespeeld. Daarbij benoemt hij nog even een variabele a voor de totale inzet. Het eerstvolgende spel zou met gelijke kans door beide spelers gewonnen kunnen worden. Dat geeft de ik-figuur al recht op de helft van de pot, aangezien hij dan drie punten zou hebben. Als de ander zou winnen, zou er weer met gelijke kans door een van beiden een punt worden behaald, dus de overgebleven helft van de pot wordt ook

eerlijk verdeeld. Dat maakt dat Huygens $\frac{3}{4}a$ claimt, en er voor *hy die tegens my speelt* slechts $\frac{1}{4}a$ resteert. Je broertje kan dus slechts aanspraak maken op 25 cent. Merk op dat Huygens hier niet over de uiteindelijke winkans spreekt, maar een verdeling van de pot uitrekent. Die verdeling komt uiteraard exact overeen met de kans op de overwinning van beide spelers als we voor a even 100% nemen. Maar ook dit is een interessante nuance die een vraag zou kunnen opleveren richting leerlingen. En dit maakt tevens duidelijk dat dit probleem opgelost kan worden zonder enige voorkennis op het gebied van kansrekening, behalve de basale notie van eerlijk delen (*fifty-fifty*). Ook de slotzin van Huygens' vierde voorstel geeft nog stof tot nadenken voor leerlingen: waarom *kan men altijd 3 tegen 1 setten*? En de uitbreidingsmogelijkheden van dit voorbeeld liggen voor de hand: wat gebeurt er bij een tussenstand van 2-0? En wat als de krachtsverhoudingen niet *fifty-fifty* zijn? Tafelvoetbal is ook eigenlijk niet echt een gokspel met gelijke kansen. Enzovoorts.

Zat de grote Leibniz eraan?

Een tweede voorbeeld van een primaire bron die goed bruikbaar is bij de introductie van het onderwerp kansen, is afkomstig uit een tekst van de Duitser Gottfried-Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Leibniz is vooral bekend als grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening en de binaire getallen waarmee de computer mogelijk werd, maar hij heeft nog veel meer gedaan en heeft zich onder andere met kansrekening beziggehouden. Hier zullen we moeten werken met een vertaling, want Leibniz schreef de oorspronkelijke tekst in 1678 in het Frans.

(...) Laten we een voorbeeld bekijken. Twee mensen spelen met [twee] dobbelstenen: de een wint als hij 8 gooit, de ander als hij 5 gooit. De vraag is om er achter te komen op welke van de twee spelers je het best kunt inzetten. Ik zeg dat het degene moet zijn die 8 moet gooien en zelfs dat zijn voordeel vergeleken met de hoop die de ander moet hebben, drie staat tot twee is.

Dat wil zeggen dat ik drie écus zou kunnen inzetten tegen twee op degene die 8 moet gooien, zonder mezelf te benadelen. En als ik een tegen een zou inzetten, zou ik een groot voordeel hebben. Het is waar dat er altijd een kans is dat ik verlies, zeker aangezien de kans op verlies twee is tegen drie voor kans op winst. Maar na verloop van tijd, uitgaande van deze kansen, en door veel te spelen en in te zetten, is het een gegeven dat ik meer gewonnen zal hebben dan verloren.

Om te laten zien dat er een grotere kans is voor de speler die 8 moet gooien, volgt nu een uitleg. Ik veronderstel dat ze met twee dobbelstenen spelen en dat de dobbelstenen eerlijk zijn. Aangenomen dat dit zo is, is het duidelijk dat er slechts twee manieren zijn om 5 te gooien; de ene is 1 en 4, de andere 2 en 3. Echter er zijn drie manieren om 8 te gooien, namelijk 2 en 6, 3 en 5, en 4 en 4. Elk van deze mogelijkheden heeft van zichzelf een even grote kans, want er is geen enkele reden waarom bijvoorbeeld 1 en 4 vaker zou voorkomen dan 3 en 5. Als gevolg daarvan, zijn er evenveel kansen (onderling gelijk aan elkaar) als mogelijke manieren. Dus als 5 ogen slechts op twee manieren gegooid kan worden, maar 8 ogen kan op drie manieren, dan is het duidelijk dat er twee kansen op 5 zijn en drie op 8. (...)

percentages 55 - 45% lijken te passen bij een verhouding van 5 staat tot 4. Dat zou betekenen dat er vijf manieren zijn om 8 te gooien en vier om 5 te gooien. Voor sommige leerlingen is dat van begin af aan al duidelijk, voor andere zal het werken met twee verschillend gekleurde dobbelstenen uitkomst brengen.

Ook hier geeft een primaire historische bron dus prachtige didactische mogelijkheden voor een les waarin het begrip kansen wordt geïntroduceerd. Een optie is om rechtstreeks op zoek te gaan naar de fout in de redenering van Leibniz. Leren van een (veelgemaakte) fout is een bekende, krachtige didactiek. Je kunt ook meer op meta-niveau met je leerlingen naar zo'n situatie kijken. Hoe ga je om met vermoedens, modelleren, werkelijkheid? Hoe vind je uit wie er gelijk heeft? Hoe ver je ermee wilt gaan, is een keuze van de docent, die afhankelijk is van de doelstelling van de specifieke les. Op basis daarvan ontwerp je bijpassende vragen, opdrachten en werkvormen en bepaal je op welke wijze je ondersteuning wilt bieden.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Chorlay, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. *Proceedings van de History and Pedagogy of Mathematics conferentie in Montpellier*, 5-23.
- Huygens, C. (1998). *Van rekeningh in spelen van geluck*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Mora-Charles, M.S. (1992). Quelques jeux de hazard selon Leibniz. *Historia Mathematica*, 19, 125-127.

figuur 2 Fragment uit Leibniz' *Le jeu du Quinquenove*, zoals geciteerd in Mora-Charles (1992), vertaling D. van den Bogaart

Welke mogelijkheden biedt deze correspondentie ons? De redenering van Leibniz is op zich behoorlijk goed te volgen. De brief geeft voorzetten richting de *wet van de grote aantallen*. Een ambitieus lesontwerp zou ook kunnen leiden tot begrippen als *relatieve frequentie*, *a priori* en *a posteriori* kansen. Maar als we om die laatste soort kansen te bepalen het experiment eens een flink aantal keer gaan uitvoeren (of bijvoorbeeld een simulatie laten maken door onze leerlingen op de computer of de GR), dan ontstaat er iets prachtigs: twijfel. De berekening van Leibniz zou moeten leiden tot een 60 - 40%-verdeling van de kansen op 8 versus 5. Het experiment zal bij een flink aantal uitvoeringen echter stabiliseren rond een verdeling 55% om 45%. Dus ofwel de grote Leibniz zit ernaast, of de wet van de grote aantallen stelt ons teleur...? De

Over de auteur

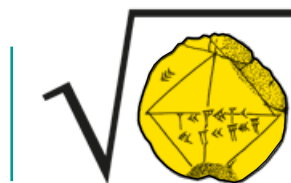
Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Jeanine Daems

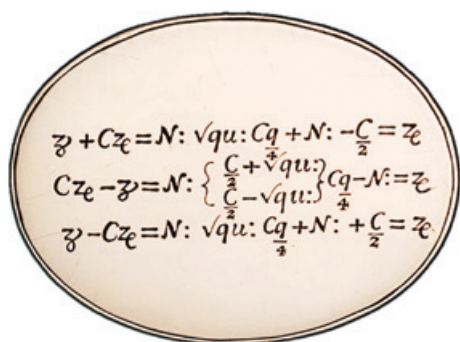
2: TOEN X NOG ONBEKEND WAS

In *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: notaties voor onbekenden.



In de herfstvakantie was ik in Oxford, en daar bracht ik uiteraard een bezoek aan het History of Science Museum. Het Ashmolean is overigens ook een aanrader: daar zijn enkele wiskundige Babylonische kleitabletten te zien, maar dat is een ander verhaal.

In het museum is veel moois te bekijken, maar een klein object trok met name mijn aandacht: in een vitrine lag een zilveren plaatje, ongeveer 5 bij 4 cm, met wiskunde erin gegraveerd, zie figuur 1. Ik herkende een deel van de notatie uit *Wortels van de wiskunde*, dus ik raakte meteen enthousiast: ik kon ontcijferen wat er stond!



figuur 1 Voorkant zilveren plaatje met wiskundige formules, Engeland 17^e eeuw

De formules die op het plaatje staan zien er zo uit:

$$Z + CZ = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : -\frac{C}{2} = Z$$

$$CZ - Z = N : \left\{ \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \right\} \frac{Cq}{4} - N := Z$$

$$Z - CZ = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : +\frac{C}{2} = Z$$

Op het eerste gezicht kun je dat waarschijnlijk nog niet helemaal lezen, maar toch valt een aantal dingen al snel op:

- er staan allerlei herkenbare wiskundesymbolen op: plussen, minnen, breuken, wortels, getallen;
- een deel van de notatie herkennen we niet uit de wiskunde van nu;
- er komen naast cijfers, wiskundesymbolen en onbekende symbolen ook letters voor (de C en de N , en ook nog kleine q 's en u 's);
- elke regel begint met iets wat een vergelijking zou kunnen zijn. Er staat tenslotte een rijtje symbolen met een $=$ ertussen (maar dat kan ook een berekening zijn, misschien);
- de regel eindigt steeds met een $=$ en dan een van de twee onbekende symbolen van het begin;
- in de tweede regel lijkt een gevalsonderscheiding op te treden;
- er staan nogal veel dubbele punten in de formules. Zou dat een deling voorstellen? Waarschijnlijk niet, er staat tenslotte in regel 2 een dubbele punt vlak voor een '=', dus dat betekent waarschijnlijk iets anders. Misschien gewoon een leesteken?

Dit zijn voor een deel ook zaken die uw leerlingen zouden kunnen herkennen. Ik ben er altijd voorstander van om leerlingen of studenten eerst maar eens rustig zelf naar zo'n bron te laten kijken, zonder meteen uitleg of een interpretatie te geven. Om ze te motiveren goed te kijken en niet op te houden bij: 'het lijkt op wiskunde, maar ik snap er niets van' kunt u de opdracht geven dat ze minstens vijf dingen moeten opschrijven die hen opvallen. En geef dan vooral ook zelf een schot voor de boeg zodat ze weten dat de lat niet te hoog ligt: 'Mij valt bijvoorbeeld op dat er worteltekens voorkomen in deze formules.' Misschien vallen u naast mijn bovenstaande lijstje nog wel meer dingen op, maar dit zijn de eerste dingen waar ik aan dacht, naast: hé, die onbekende symbolen ken ik deels, wat leuk dat ik die nu een keer in levenden lijve in zo'n bijzondere bron tegenkom!

Notatie voor variabelen

De symbolen Z en Z zijn namelijk oude symbolen die vanaf de vroege zestiende eeuw in Duitsland gebruikt werden voor onbekenden. Elke macht van de onbekende had zijn eigen symbool. Het symbool voor de onbekende, dat wij als x zouden noteren, was Z . Dit heette de wortel (*radix*), wat gek lijkt omdat het niet om de wortel van

de onbekende gaat maar om de onbekende zelf. Wortel verwijst hier echter naar de wortel van een vergelijking, oftewel: een oplossing. Het symbool $\sqrt{}$ is een ouderwetse kleine letter *z* (van *zensus*) en staat voor het kwadraat van de onbekende.

Laten we met deze extra kennis nog eens goed naar de beginstukken van deze formules kijken. De drie regels beginnen dus als volgt:

$$x^2 + Cx = N,$$

$$Cx - x^2 = N \text{ en}$$

$$x^2 - Cx = N$$

Nu ziet het er al een stuk behapbaarder uit: dit zilveren plaatje gaat blijkbaar over kwadratische vergelijkingen. En dan rijst meteen een vermoeden: wij lossen kwadratische vergelijkingen op met de *abc*-formule, zou dit ook zoiets zijn?

Voor de eerste vergelijking geeft de *abc*-formule:

$$x = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4N}}{2}$$

Dat is niet direct herkenbaar in het zilveren plaatje, maar we herkennen wel meteen de $-\frac{C}{2}$ aan het eind. Verder zien we in de *abc*-formule natuurlijk de gevalsonderscheiding die we op het zilveren plaatje niet zien. Als we de breuk splitsen en de 2 in de noemer ook onder de wortel

$$\text{brengen, zien we: } x = \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} - \frac{C}{2}$$

Nu herkennen we al een stuk meer van de formule op het plaatje. De *Cq* zal dan wel C^2 betekenen. Die wortel met *qu* erachter betekent blijkbaar gewoon de wortel. Waarom dan de *q* en de *u*? De *q* zou er kunnen staan omdat het om de kwadraatwortel gaat, want de *q* is tenslotte ook voor een kwadraat gebruikt. En de *u*? Dat is speculeren, daar kom ik zo op terug.

Hoe zit het dan met de dubbele punten? De eerste dubbele punt die we zien staat na de vergelijking en voor de oplossing. De tweede staat na het wortelteken, de derde staat waar in onze moderne notatie de wortel ophoudt. En dat is een verschil tussen onze en deze oude notatie: wij zetten de wortelstreep over een rijtje symbolen heen om aan te geven wat binnen de wortel hoort. In deze andere notatie zijn daar blijkbaar die dubbele punten voor gebruikt. Het blijkt dat dat aangegeven wordt door die *u* die voor *universale* staat: alles wat tussen de dubbele punten staat moet worden meegenomen binnen de wortel.

Gevalsonderscheidingen

Nu hebben we een groot deel van de bron al wel begrepen. Voor een bovenbouwklas is het misschien leuk om nog wat dieper op de gevalsonderscheidingen in te gaan.

Een voor de hand liggende vraag is namelijk: waarom staan hier eigenlijk drie vergelijkingen? Ze hebben in feite allemaal dezelfde vorm, wij behandelen alle kwadra-

tische vergelijkingen ook in één keer door ze algemeen te schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$. En in dat plaatje worden tenslotte ook letters gebruikt om algemeenheid uit te drukken, waarom stoppen ze dan niet alle vergelijkingen in dezelfde vorm?

En waarom staat die $\pm$ er niet? Dat is interessant, want het tweede geval lijkt wél een gevalsonderscheiding te hebben.

Laten we daarom dezelfde exercitie uitvoeren voor het tweede en derde geval. In het tweede krijgen we:

$$x = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - N}$$

En die opties zien we wél beide op het plaatje.

De derde vergelijking oplossen geeft $x = \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} + \frac{C}{2}$. Weer zien we dat de $\pm$ is weggelaten.

Voor beide vragen is het antwoord eigenlijk hetzelfde: zowel de coëfficiënten als de oplossingen zijn hier altijd positief. Wat betreft de coëfficiënten zien we dat aan het feit dat de eerste en de derde vergelijking als verschillende gevallen beschouwd worden, terwijl het enige verschil de min voor de *C* is.

De vergelijkingen die onderzocht worden zijn dus eigenlijk, in moderne notatie:

$$x^2 + Cx = N,$$

$$x^2 - Cx = -N \text{ en}$$

$$x^2 - Cx = N, \text{ waarbij } C \text{ en } N \text{ positief zijn.}$$

Het geval $x^2 + Cx = -N$ ontbreekt. Maar als we alleen positieve *x*'en meenemen, is $x^2 + Cx$ natuurlijk altijd positief.

Nog even terug naar de ontbrekende gevalsonderscheidingen bij de eerste en derde vergelijking. Kan het gebeuren dat de $-$ van de $\pm$ een positieve oplossing voor *x* geeft? Even nadenken leert dat dat niet kan.

Achtergronden

Wat is dit zilveren plaatje voor een object, wanneer en waarom is het gemaakt, en door en voor wie? Het plaatje dateert uit ongeveer 1665. Het plaatje heeft ook nog een achterkant, daar staat een tabelletje op dat

F: 6.		D: 6.	
0	1 6 4 3 8 4	1	9 9 5 0 2 4 9
0	3 2 8 7 6 7	2	9 9 0 0 9 9 0
0	4 9 3 1 5 1	3	9 8 5 2 2 1 7
0	6 5 7 5 3 4	4	9 8 0 3 9 2 2
0	8 2 1 9 1 8	5	9 7 5 6 0 9 8
0	9 8 6 3 0 1	6	9 7 0 8 7 3 8
1	1 5 0 6 8 5	7	9 6 6 1 8 3 6
1	3 1 5 0 6 8	8	9 6 1 5 3 8 5
1	4 7 9 4 5 2	9	9 5 6 9 3 7 8
1	6 4 3 8 3 6	10	9 5 2 3 8 1 0
1	8 0 8 2 1 9	11	9 4 7 8 6 7 3
1	9 7 2 6 0 3	12	9 4 3 3 9 6 2
Days		Months	

figuur 2 Achterkant zilveren plaatje met tabellen voor renteberekeningen

een hulpmiddel is bij renteberekeningen bij leningen en andere financiële transacties, zie figuur 2. Het lijkt

dus aan de ene kant een redelijk praktisch object te zijn, een soort geheugensteuntje. Maar het is ook een mooi gemaakt en prestigieus ding. Het is niet zeker wie het gemaakt heeft. Een vermoeden is dat de auteur de Engelse wiskundige en accountant John Collins was, die veel geschreven heeft over renteberekeningen. Het is waarschijnlijk gemaakt door Hilkuah Bedford uit Londen, een maker van wiskundige instrumenten, zoals zonnepijlers, die met Collins in contact stond. Maar voor wie is het gemaakt? Er blijken nog enkele andere dergelijke mooi gemaakte wiskundige geheugensteuntjes te bestaan uit deze periode. Misschien zijn ze door rijke wiskundige amateurs besteld om zelf te gebruiken, of misschien was het een cadeau voor een mogelijke klant?

Conclusie

Wat leert deze bron ons en onze leerlingen nu? Ten eerste dat notatie in de loop van de tijd is veranderd. Daar zijn nog veel meer voorbeelden van te vinden, in schetsen 2 en 8 van *Wortels van de wiskunde* vind je er nog een aantal. Maar het leert ons ook iets over de kracht van onze eigen notatie. Is het handig om een symbool te hebben voor een onbekende, een ander voor zijn kwadraat, nog een ander voor de derde macht? Dat is best handig, tot het moment dat je met twee onbekenden wilt rekenen, dan laat de notatie je in de steek. Ik denk dat het leuk is om dit plaatje in de derde klas te laten zien als een voorloper van de *abc*-formule. In de bovenbouw kan het omschrijven van de bekende naar de hier gegeven onbekende formule gebruikt worden om op een natuurlijke manier de algebraïsche vaardigheden te oefenen. En het is een heel mooi voorbeeld om het verschil tussen parameters en onbekenden uit te leggen. Een leuke laatste vraag aan de leerlingen is ook: als je zelf zo'n geheugensteuntje bij je volgende toets zou mogen houden, wat zou je daar dan het liefst opzetten?

Foto's in dit artikel zijn opgenomen met toestemming van het Museum of the History of Science, University of Oxford, MHS inv. 14977. Met dank aan Mr. Steven Johnston.

Bronnen

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016) *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Johnston, S. (2015-2016). An English mathematical aide-memoire of the 17th century. Te vinden op: <http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/aide-memoire/>

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding, aan de universiteit en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

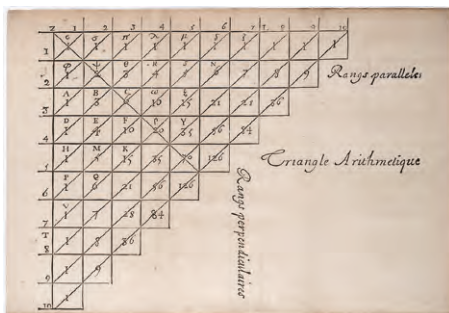
3: DE DRIEHOEK VAN PASCAL

Desiree van den Bogaart



In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de driehoek van Pascal.

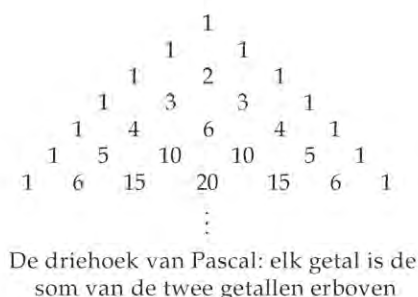
De meeste wiskundedocenten zullen wel weten dat de stelling van Pythagoras al lang bekend was bij de Babyloniërs en Egyptenaren, ver voordat de beroemde Griek geboren werd. En ook tijdens zijn leven schijnt Pythagoras zelf weinig op te hebben gehad met het bewijzen van deze stelling. De driehoek van Pascal is ook zo'n stukje wiskunde dat een naam draagt van een grote Europese denker, terwijl hij feitelijk al eeuwen eerder bekend was in Oosterse culturen. Figuur 1 laat de driehoek van Blaise Pascal zelf zien, het is een fragment uit zijn werk *Traité du triangle arithmétique* uit 1665. De vorm van de driehoek wijkt af van hoe je die tegenwoordig tegenkomt in lesboeken. Figuur 2 komt uit *Getal*



figuur 1



figuur 2



figuur 3

& Ruimte. Daarin ligt de nadruk op de eigenschappen symmetrie en de som van een rij. Figuur 3 komt uit *Wortels van de wiskunde*, met de vermelding dat elk getal de som is van de twee getallen erboven. Hier duikt de driehoek van Pascal op in een sectie over Arabische wiskunde. Daarover straks meer.



figuur 4

Oosterse wiskunde

In figuur 4 herkennen we aan de vorm direct dat we te maken hebben met de driehoek van Pascal, ook al zijn de gebruikte tekens ons op het eerste gezicht volslagen onbekend. Deze combinatie van herkenning en verwondering geeft aanleiding voor mooie wiskundige vragen en interessante denkactiviteiten. Het is een Chinese versie van de driehoek van Pascal, uit ongeveer de elfde eeuw. U kunt dit plaatje laten zien aan leerlingen die de driehoek van Pascal al kennen en daarmee het Chinese getalstelsel laten ontcijferen. Andersom kunt u ook de driehoek ontdekken als u een eenvoudige aanname doet over de betekenis van een enkel streepje. (Deze activiteit is al haalbaar met leerlingen uit groep 6, is mijn ervaring. De klasgenoten van mijn oudste zoon vragen regelmatig of ik nog een keer zo'n leuke les wil komen geven.) Maar de bron waar we nu echt naar willen kijken, ziet u in figuur 5. Gun uzelf (en straks ook uw leerlingen) de kans om eerst eens rustig naar deze afbeelding te kijken, zonder verder te lezen wie de auteur is, wat de datering is en de context. Noteer minimaal vijf dingen die u opvallen. Deze afbeelding laat een pagina zien uit het werk van Ahmad al-Ab'dari ibn Mun'im, een Marokkaanse wiskundige (en arts) die leefde in Marrakech rond het jaar 1200. Het eerste dat opvalt, is dat er een combinatie staat van Arabische tekst en symbolen die iedereen herkent als 'onze' eigen getallen. Daarmee draaien we eigenlijk de geschiedenis om, want wij hebben onze getallen overgenomen van de Arabieren, die ze op hun beurt weer van Indiase geleerden hebben overgenomen. (Meer hierover vindt u in *Wortels van de wiskunde*.) Verder constateren we dat de cijfers 4 en 5 nog een andere vorm hebben dan tegenwoordig. Dat is eenvoudig te zien op de een-na-



figuur 5

onderste rij. Ook dit draagt bij aan het leren van de herkomst van onze symbolen. Ze zijn gaandeweg veranderd totdat ze hun definitieve vorm kregen.

Kwastjes met verschillende kleuren

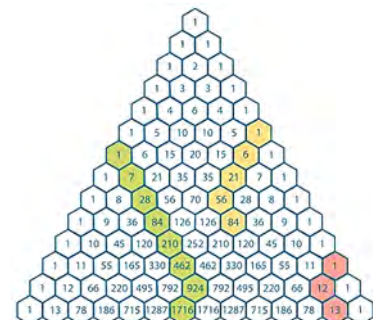
Ibn Mun'im beschrijft hier een probleem waarbij er kwastjes worden samengesteld van verschillende kleuren zijde. In Amerika zijn dit gebruikelijke voorwerpen: bij diploma-uitreikingen worden er speciale kwastjes (*tassels*) gemaakt voor aan de baretten van de leerlingen, in de kleuren van de school en met het jaar van de uitreiking erop. Ibn Mun'im heeft dit echter niet beschreven vanwege de bruikbaarheid in het dagelijks leven rond 1200; het ging hem om het onderzoeken van manieren om het aantal

For a tassel of 10 colors										1	1
For a tassel of 9 colors								1	9	10	
For a tassel of 8 colors						1	8	36	45		
For a tassel of 7 colors					1	7	28	84	120		
For a tassel of 6 colors				1	6	21	56	126	210		
For a tassel of 5 colors			1	5	15	35	70	126	252		
For a tassel of 4 colors		1	4	10	20	35	56	84	210		
tassel of 3 colors		1	3	6	10	15	21	28	36	120	
2 colors	1	2	3	4	5	6	7	8	9	45	
1 color	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	
	using up to color 1	using up to color 2	using up to color 3	using up to color 4	using up to color 5	using up to color 6	using up to color 7	using up to color 8	using up to color 9	using up to color 10	total no. of tassels

figuur 6

mogelijke combinaties te berekenen. Uiteindelijk paste hij de verkregen wiskundekennis toe op het onderwerp taal: hij wilde weten hoeveel woorden er mogelijk waren in zijn taal, gebruikmakend van alle letters uit het (Arabische) alfabet. Ibn Mun'im heeft in figuur 5 een tabel gemaakt waarmee hij kan uitrekenen hoeveel verschillende kwastjes er mogelijk zijn bij tien kleuren zijde. Figuur 6 is een Engelse vertaling ervan door Randy K. Schwartz, om het wat makkelijker te maken. We zien nu ook duidelijk dat de laatste kolom afwijkt van wat we gewend zijn. Dit is niet zoals die in de (gekantelde) driehoek van Pascal staat, of toch? De laatste kolom lijkt een positie te zijn verschoven. Alle getallen staan een rij lager. Is dat een fout?

Als je naar de een-na-bovenste rij kijkt, zie je 1 | 9 | 10. Er geldt $1 + 9 = 10$. Een rij later staat 1 | 8 | 36 | 45. Ook hier geldt: $1 + 8 + 36 = 45$. En dat lukt op alle rijen naar beneden ook. Er is dus, door de verschuiving van de achterste kolom, een nieuw patroon ontstaan: het laatste getal is de som van alle voorgaande getallen in die rij. Blijkbaar is dit geen fout, maar een bewuste weergave, waarbij gebruik wordt gemaakt van deze opteleigenschap. Deze eigenschap is ook zichtbaar in de driehoek van Pascal, maar daar ontstaat een rij met een knik erin, omdat de achterste kolom op de 'juiste' plaats staat. Zie figuur 7. Dit patroon wordt daarom ook wel het hockeysticklemma of het kerstsoklemma genoemd. Deze



figuur 7

schrijfwijze van Ibn Mun'im laat zien dat om te berekenen hoeveel kwastjes van vier kleuren er te maken zijn bij een keuze uit tien kleuren, je het antwoord vindt door bij elkaar op te tellen hoeveel kwastjes van drie kleuren er te maken zijn van respectievelijk 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 10 kleuren. In onze moderne notatie:

$$\binom{10}{4} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} + \binom{9}{3}.$$

Je kunt dit beter begrijpen, door de tien kleuren zijde op een rijtje te leggen. Laten we ze even nummeren van 1 t/m 10. We willen een kwastje van vier kleuren maken. Laten we zeggen dat kleur 4 de kleur met het hoogste nummer is die in ieder geval gebruikt wordt in het kwastje. Dan moeten de drie kleuren met een lager nummer ook allemaal gekozen worden, dat kan op $\binom{3}{3}$ manieren.

Als kleur 5 de kleur met het hoogste nummer is die in ieder geval gebruikt wordt, dan moeten er van de lagere nummers kleuren in ieder geval nog drie gekozen worden, dus dat zijn $\binom{4}{3}$ manieren, enzovoorts tot en met $\binom{9}{3}$.

Als we al deze gevallen bij elkaar optellen, hebben we daarmee alle mogelijkheden om vier kleuren uit tien te kiezen, oftewel $\binom{10}{4}$.



figuur 8

Toepassing in de les

Voor de onderbouw is het begrijpen van bovenstaande natuurlijk geen haalbaar leerdoel. Maar het is hopelijk wel duidelijk geworden dat de tabel van Ibn Mun'im een rijke bron is, die uit zichzelf allerlei vragen oproept bij leerlingen en handreikingen biedt aan de docent om met de klas op zoek te gaan naar patronen. U bepaalt zelf wat voor uw groep passende leerdoelen zijn. Probeer daarbij ook eens af te stappen van wat er in het boek wordt behandeld. Het werken met deze bron kan op elk niveau een interessante wiskundige denkactiviteit opleveren, die bovendien uitnodigt tot gesprekken over wiskunde als menselijke activiteit, die culturen verbindt. In de bovenbouw is deze bron zeer geschikt om het onderwerp combinatoriek mee te introduceren. Eventueel komt u er na een aantal lessen op terug, als de driehoek van Pascal en combinaties bekend zijn, om te kijken of het hockeystick-klemma kan worden ontdekt en begrepen.

Jeanine Daems en ik hebben over deze Arabische oerversie van de driehoek van Pascal een workshop gegeven op de meest recente studiedag van de NVvW in november 2016. Over de Chinese getallendriehoek (en andere primaire bronnen) gaven we in 2014 een workshop bij het NUwiskundecongres van Noordhoff. Het materiaal is opvraagbaar bij ons.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016) *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Schwartz, R.K. (2010). *Combining Strands of Many Colors: Episodes from Medieval Islam for the Mathematics Classroom*. Geraadpleegd op 21 november van http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/46/Schwartz_Modules/combos%2Bsums%2B%28Stats%2BFinite%29.pdf
- Wilson, R. en Watkins J. (eds). (2015). *Ancient combinatorics*. Oxford: Oxford Publishers.

Over de auteur

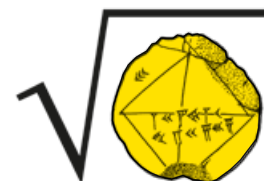
Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Jeanine Daems

4: WORTELS OPTELLEN MET STAMPIOEN

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: wortels optellen.



Gouden Eeuw

In de zeventiende eeuw gebeurde er op wiskundig gebied veel in Nederland. Die eeuw heet niet voor niets de Gouden Eeuw: het was een bloeiperiode in de handel, maar ook in de kunst en de wetenschap. Het is bijzonder dat er ook veel wiskundige literatuur in het Nederlands verscheen. In die tijd werd in de wetenschap vooral in het Latijn geschreven. Simon Stevin (1548 – 1620) vond echter het Nederlands de meest geschikte taal om wetenschap in te bedrijven en begon in het Nederlands te publiceren. Daardoor werd de wiskunde ook toegankelijk voor mensen die geen Latijn kenden. Stevin heeft een heleboel Nederlandse wiskundewoorden verzonnen, zoals het woord wiskunde zelf (*wisconst*), evenwijdig, kegelsnede, loodrecht en raaklijn, maar ook in onbruik geraakte woorden als stelkunst (algebra) en het bijzonder mooie *lanckrondt* voor ellips.

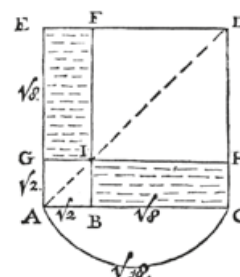
Het leuke aan Nederlandstalige bronnen is natuurlijk dat je ze kunt lezen, het zeventiende-eeuwse Nederlands blijkt na wat oefenen best begrijpelijk te zijn. Ook voor leerlingen! In dit artikel licht ik uit de grote hoeveelheid bronnen die tot onze beschikking staat (er wordt ook steeds meer online beschikbaar gesteld) een stuk dat over wortels gaat. De bron die we bekijken komt uit het boek *Algebra ofte nieuwe stel-regel* (1639) van Johan Stampioen d'Jonge (1610 – 1653). Dat boek gaat onder meer over het oplossen van derdegraads vergelijkingen, maar wij kijken hier naar een deel dat gaat over rekenen met worteluitdrukkingen. Stampioen was een leermeester van Christiaan Huygens en hij raakte verwickeld in een ruzie met Descartes omdat hij Descartes' oplossing van een door hem geponeerd probleem niet volledig vond. In het boek *Wortels van de wiskunde* komt Nederlandse wiskunde in de zeventiende eeuw nauwelijks voor, omdat het van oorsprong een Amerikaans boek is. Als aanvulling zullen wij daarom af en toe juist wel zo'n Nederlandstalige bron kiezen in deze rubriek.

Wortels optellen met Stampioen

Wat komt er uit $\sqrt{2} + \sqrt{8}$? De goed getrainde leerling zal snel zien dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, dus dat de som $3\sqrt{2}$ wordt. Stampioen schrijft de som echter als een enkele wortel, dus als $\sqrt{18}$, en zijn aanpak is ook anders. We kijken zo verder naar zijn uitleg, maar kijk eerst eens goed naar

het plaatje, misschien zie je zelf meteen al wel wat hier gebeurt. Ook in de klas kun je ervoor kiezen om eerst met het plaatje van figuur 1 te beginnen.

figuur 1 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*



Stampioen begint niet met het plaatje, want dat is eigenlijk vooral een illustratie bij zijn 'bewijs'. Hij geeft eerst zijn formulering van de algemene *Regel*, zie figuur 2:

Vergaderinghe in wortel-ghetallen.

R E G E L.

Vergadert hare viercanten, de somme onthoudt, dan soo menich-vuldicht hare viercanten, wyt het product ghetrocken den vier-cant-wortel, die gedubbelt, en ge-voecht tot de voorfz. somme der vier-canten, treckt daer wyt den vier-cant-wortel, comt de begheerde somme.

figuur 2 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

Dat klinkt nog wel wat cryptisch, maar we herkennen vierkanten en de vierkantswortel, product en verdubbelen. *Vergadert* betekent waarschijnlijk iets als 'vergaren' dus dat zal optellen zijn. Direct daarna volgt het *Voor-Beeldt* en dat biedt helderheid, zie figuur 3 op de volgende pagina. Bij deze bron zijn al een heleboel mooie vragen te stellen op allerlei niveaus, bijvoorbeeld:

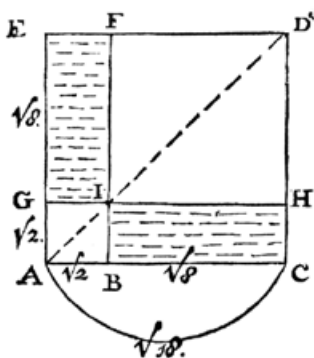
- Snap je aan de hand van het *Voor-Beeldt* van Stampioen hoe je de *Regel* moet toepassen? Kun je de *Regel* in je eigen woorden vertalen?
- Gebeurt er in 't werck inderdaad wat de *Regel* voorschrijft?
- Teken het plaatje dat hoort bij $\sqrt{12} + \sqrt{75}$. Bereken van alle vakjes de oppervlakte, bereken de oppervlakte van het grote vierkant en bereken de zijde. (Als het goed is, komt er $\sqrt{147}$ uit.)
- Teken het plaatje dat hoort bij $\sqrt{50} + \sqrt{32}$ en bereken met behulp daarvan deze som.

V O O R - B E E L D Y.

'T ghegeven: Laet zijn $\sqrt{2}$ en $\sqrt{8}$. 'T begheerde: Wy moeten vinden haer somme.

'T W E R C K.

Haer vier-canten zijn 2 en 8, diens somme 10, den recht-hoeck



op 2 en 8 is 16, diens vier-cant wortel is 4, sijn dub-belt 8, ghedaen tot 10, de somme der vier-canten... comt 18, diens vier-canten wortel is $\sqrt{18}$. voor de somme der ghetallen die wy moeten vinden.

'T B E W I J S.

Laet daer toe de ghetallen met dese neffens gheselde Figure uyt-gebeelt worden aldus, dat AB sy $\sqrt{2}$ ende BC $\sqrt{8}$, beschrijft op AC het vier-

cant ACDE, neemt dan AG, CH, ende EF, ghelijck AB. Het viercant ABIG sal doen 2, ende het viercant IHDF 8, den recht-hoeck ICHD, ofte GIFE $\sqrt{16}$, ofte 4, sijn dub-belt is 8, voor beyde de recht-hoecken; daer by ghedaen de twee viercanten 2, en 8, comt 18, voor 't gantsche viercant ACDE, diens wortel is $\sqrt{18}$, voor de zijde AC, betoonende de somme vande voor-gheselde ghetallen.

figuur 3 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

- Probeer met alleen de *Regel* (dus zonder plaatje) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ uit te rekenen.
- Leg in eigen woorden uit hoe en waarom het recept van Stampioen werkt. Gebruik daarbij het plaatje en eventueel het bewijs dat Stampioen zelf geeft.
- Wat heeft *den recht-hoeck op 2 en 8* te maken met wat er in de *Regel* gebeurt? Die rechthoek staat niet in het plaatje, waarom is hij toch belangrijk?
- Wat betekenen beweringen als *Het viercant ABIG sal doen 2?* Wat zijn de *voor-gheselde ghetallen* in de laatste zin van de tekst?
- Werkt deze *Regel* voor alle getallen? Zo ja, kun je dat laten zien? Zo nee, waarom niet? En voor welke getallen dan wel?

Welke vragen je aan je leerlingen stelt hangt natuurlijk af van wat je leerdoel is en in welk leerjaar je deze bron wilt gebruiken.

'Regel, 't werck, en 't Bewijs'

Merk op dat Stampioen hier onderscheid maakt tussen de *Regel*, 't werck, en 't Bewijs. Kortom: de algemene regel, een voorbeelduitwerking en een bewijs waarom die regel klopt. Hij laat dat alleen zien voor dit specifieke geval, maar hij suggereert wel dat hieruit ook de algemene geldigheid volgt. Een interessante vraag voor leerlingen in de hogere klassen kan dan ook zijn: vind jij het bewijs van Stampioen echt een bewijs? Zo ja, waarom? Zo nee, kun je zijn argument zó aanpassen dat het in jouw ogen wel een echt bewijs wordt? Stampioen merkt zelf op dat zijn *Regel* niet werkt als het product van de twee kwadraten van de *wortel-ghetallen* geen mooi kwadraat is, zoals bij $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, zie figuur 4:

Merck:

Indien in 't mennichvuldighen ofte deelen der viercanten van twee wortel-ghetallen een ghetall voort comt, waer uyt den viercant-wortel niet kan ghetrocken worden. Soo en können oock de selfde wortel-ghetallen niet vergadert worden dan met het teecken +, als $\sqrt{2}$, tot $\sqrt{3}$, comt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

figuur 4 Uit: Johan Stampioen d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel*

Toch geeft Stampioens regel in die gevallen wel een resultaat. Maar dat is duidelijk niet Stampioens bedoeling: hij wil als uitkomst weer een echte wortel, van een geheel getal.

Mogelijke opdrachten hierbij zijn:

- Bedenk zelf twee wortels die je met de methode van Stampioen wel kunt optellen.
- Bedenk ook twee wortels waarbij je niet op een wortel uit een geheel getal uitkomt.
- Teken het plaatje dat bij het geval $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ hoort en leid met Stampioens methode af dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + \sqrt{24}}$.
- Kun je met een kortere berekening controleren dat inderdaad geldt dat $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + \sqrt{24}}$?
- Zie je nu ook wat die berekening met het plaatje te maken heeft?

Daarna gaat Stampioen verder met aftrekken, vermenigvuldigen en delen van 'wortelgetallen', en het wortel-trekken eruit (mits dat kan). Hij geeft soms meerdere methodes.

Rekenvraag als meetkundig probleem

De meerwaarde van deze bron is wat mij betreft dat het wat saaie onderwerp van exact rekenen met wortels nu toch een interessant denkprobleem kan worden. In *Getal & Ruimte* komt het onderwerp in 2 havo/vwo op de volgende manier aan de orde, nadat het vermenigvuldigen van wortels, het optellen van gelijksoortige wortels en een factor voor het wortelteken brengen besproken zijn, zie figuur 5:

V 35 Je kunt $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ herleiden. Dat gaat als volgt.

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Herleid op dezelfde manier.

a $\sqrt{34} + \sqrt{24}$	c $\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$	e $3\sqrt{20} - \sqrt{43}$
b $\sqrt{50} + \sqrt{32}$	d $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27}$	f $\sqrt{24} - 8\sqrt{6} + 2\sqrt{54}$

figuur 5 *Getal & Ruimte* 10e editie., 2 havo/vwo deel 2, blz. 21

Stampioens *Regel* op zich is eigenlijk minder verhelderend dan wat hier in de lesmethode gebeurt, maar zijn uitleg in 't *Bewijs* geeft wel meer inzicht. Zijn uitleg laat zien dat je zo'n rekenvraag ook kunt bekijken als een meetkundig vraagstuk, waarbij je echt een vierkant gaat tekenen waarvan de zijde de gevraagde wortel is, mits de oppervlakte van dat vierkant een geheel getal is. Deze bron biedt daarom de gelegenheid verschillende wiskundige concepten aan elkaar te koppelen. Zo ziet de leerling weer even dat bij het berekenen van $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, bijvoorbeeld, de middelste term $2\sqrt{6}$ inderdaad een

logische meetkundige betekenis heeft. En dat wortels en vierkanten met elkaar te maken hebben. Het rekenen met wortels wordt op deze manier verbonden met meetkunde en met het uitwerken van haakjes, met het rechthoeks-model als denkmodel daarbij.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Jan Stampioen, Wikipedia (https://nl.wikipedia.org/wiki/Jan_Stampioen, geraadpleegd op 21-01-2017)
- Johan Stampioen d’Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel (-) Waer door alles ghevonden wordt inde wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt voor desen bekendt*. ‘s-Gravenhage, “Ghedrukt ten Huyse vanden Autheur”, p. 10-24 (online beschikbaar op Google Books of Utrecht University Library Special Collections)

WORTELS VAN DE WISKUNDE



5: HET BAMBOEPROBLEEM

Desiree van den Bogaart

In de rubriek *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: het bamboeprobleem.

We weten niet veel over de vroege Chinese wiskunde. Dat heeft te maken met de vergankelijkheid van het materiaal waar de Chinezen op schreven voordat het papier werd uitgevonden (bamboe, boomschors), maar zeker ook met de grootschalige boekverbranding die werd opgelegd door de eerste keizer aan het begin van de Qin-dynastie (221 v. Chr.). Later werden, naar het schijnt, heel wat van de verloren teksten uit het hoofd weer opgeschreven.

De negen hoofdstukken

De belangrijkste vroege Chinese tekst over wiskunde wordt over het algemeen aangeduid als *De Negen Hoofdstukken van de kunst van de wiskunde*, kortweg *De Negen Hoofdstukken* (in het Chinees: *Chiu Chang*). Er is veel onzekerheid over de datering van dit werk. Net zoals bij *De Elementen* van Euclides is er sprake van verschillende edities die zijn aangevuld of anders gerangschikt door de eeuwen heen. De oerversie gaat mogelijk terug tot maar liefst de elfde eeuw voor Christus, maar de meest gangbare versie lijkt zo rond de eerste eeuw voor Christus te zijn ontstaan.

De invloed van *De Negen Hoofdstukken* was zeer groot (ook hier valt een parallel te zien met *De Elementen*). Maar doordat de inhoud van *De Negen Hoofdstukken* veel minder meetkundig was, heeft de Chinese wiskunde zich op een hele andere manier ontwikkeld. Waar in de Griekse wiskunde de meetkunde een centrale plaats innam, en men zich daar langzamerhand verder van af durfde te bewegen richting bijvoorbeeld algebra, was de inhoud van *De Negen Hoofdstukken* veel gevarieerder en werden er daardoor al eerder andere paden ingeslagen. Ook de aanpak wijkt af: waar de Griekse traditie gericht was op deductie via axioma's, stellingen en bewijzen, zien we in de vroege Chinese traditie uitsluitend aandacht voor algemene methoden en aanpak van problemen.

Figuur 1 laat de negen (vertaalde) hoofdstuktitels zien, en geeft een korte opsomming van de wiskundige inhoud (en de moderne westerse naamgeving van een deel daarvan). Daarbij is het goed om nogmaals de datering te vermelden: een tot meerdere eeuwen vóór Christus.

De negen hoofdstukken zijn:

方田 Fang tian – Rechthoekige velden

Oppervlaktes van percelen van verschillende vormen; manipulatie van gewone breuken.

粟米 Su mi – Gierst en rijst

Uitwisseling van goederen bij verschillende tarieven; prijzen.

衰分 Cui fen – Proportionele distributie

Distributie van goederen en geld tegen proportionele tarieven.

少廣 Shao guang – Kleinere breedtes

Delen door gemengde getallen; worteltrekken en derdemachtswortels; dimensies, oppervlaktes en inhoud van cirkels en bollen.

商功 Shang gong – Overleggen over bepaalde werken

De inhoud van verschillende vormen.

均輸 Jun shu – Eerlijke belastingheffing

Geavanceerde problemen met betrekking tot proporties.

盈不 Ying bu zu – Overcapaciteit en tekorten

Lineaire problemen opgelost door gebruik te maken van regula falsi.

方程 Fang cheng – De rechthoekige tabel

Problemen met meerdere onbekenden, opgelost door een principe dat lijkt op Gauss-eliminatie.

勾股 Gou gu – Basis en hoogte

Problemen met de Stelling van Pythagoras.

figuur 1 Inhoudsopgave van *De Negen Hoofdstukken* (bron: Wikipedia)

Gou gu: stelling van Pythagoras

De primaire bron die ik in dit artikel wil bespreken, komt uit het negende hoofdstuk. De stelling van Pythagoras, in het Chinees *Gou gu* genoemd, wordt in dit hoofdstuk op verschillende manieren toegepast om originele opgaven op te lossen. Het gaat hier dan wel steeds om een oplossingsstrategie, en niet om een bewijs, maar dat kunnen we desgewenst zelf zoeken.

Figuur 2 komt uit *De Negen Hoofdstukken* en laat het beroemde bamboeprobleem zien. Zoals we in deze rubriek altijd doen, vraag ik je eerst om eens rustig te kijken



figuur 2 Het bamboeprobleem uit De Negen Hoofdstukken

naar het plaatje. Welke vragen zou je bij dit plaatje kunnen stellen aan een leerling? Op het plaatje zie je een geknakte bamboestengel. In de Chinese tekst eromheen wordt verteld dat de stengel oorspronkelijk hoogte 10 had, maar nu geknakt is. De top van de stengel is op een afstand van 3 van de voet van de stengel terechtgekomen. De vraag ligt nu voor de hand: op welke hoogte is de stengel geknakt? Als ik dit probleem behandel op de lerarenopleiding, wil ik ook graag een uitstapje maken naar het onderwerp realistische wiskundendidactiek. Het gebruiken van contexten in de wiskunde is van alle tijden. Je kunt je dan gaan afvragen wat deze specifieke context bijdraagt aan het oplossen van het probleem, of dat hij wellicht een andere functie heeft gehad. Maar laten we het dan eerst maar eens oplossen.

Schatten en logisch redeneren

De benodigde voorkennis is uiteraard de stelling van Pythagoras, die we vanaf nu aanduiden met de Chinese naam. Als je met je leerlingen dit probleem bespreekt, probeer dan ook echt ruimte te geven voor oplossingen die niet gelijk variabelen willen invoeren of een exact antwoord kunnen geven. Met schatten en logisch redeneren, bijvoorbeeld, kun je al aardig in de buurt van de oplossing komen. Dat zou de volgende tabel kunnen opleveren.

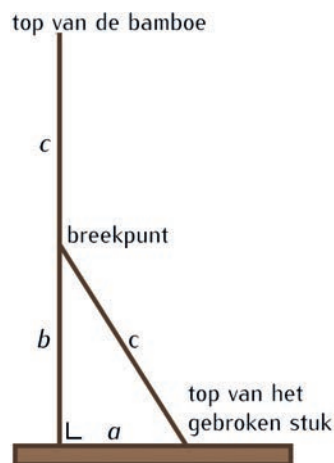
Schatting hoogte breuk	5	4	4,5	4,8
Schuine zijde	5	6	5,5	5,2
Berekening met Gou gu	Kan niet, schuine zijde moet langer zijn dan langste rechthoekszijde	$3^2 + 4^2 = 25$ veel kleiner dan $6^2 = 36$	$3^2 + 4,5^2 = 29,25$ bijna gelijk aan $5,5^2 = 30,25$	$3^2 + 4,8^2 = 32,04$ stuk meer dan 27,04

Nauwkeuriger inklemmen zal leiden tot de juiste oplossing en is een mooie rekenoefening.

Invoeren van een variabele

Leerlingen met iets meer algebraïsche vaardigheden zullen waarschijnlijk willen overgaan tot het invoeren van een variabele. Het werken met letters is in ons onderbouwcurriculum al aan de orde geweest voordat de stelling van Pythagoras wordt geleerd, dus dat is op zich niet nieuw voor leerlingen, maar dit probleem zou daar ook een mooie aanvulling op kunnen vormen. Letterrekenen komt vaak uit de lucht vallen, en heeft, afgezien van korter schrijven van formules, niet direct zichtbare toepassingen. Maar een situatie zoals deze laat zien dat het juist kan helpen om een onbekende lengte met een symbool of letter aan te duiden, om zo op te kunnen schrijven wat je wél weet. We schrijven voor de hoogte van de breuk even een x en gaan daarmee, en met behulp van *Gou gu*, opschrijven wat we dan weten: $3^2 + x^2 = (10 - x)^2$. Dit lijkt een kwadratische vergelijking. Maar na uitwerken van de haakjes blijft slechts een lineaire vergelijking over! Dat maakt dit dus haalbaar voor klassen waarin het oplossen van kwadratische vergelijkingen (nog) niet is behandeld. $20x = 91$ dus $x = \frac{91}{20} = 4,55$. (Merk op dat het antwoord

geen geheel getal is. Kommagetallen waren nog lang niet bekend, breuken/verhoudingen uiteraard wel.)



figuur 3 Het bamboeprobleem

Iets formeler wordt het als we meerdere letters gaan gebruiken. (Merk op: de keuze voor het abstractieniveau ligt dus bij de docent.)

Figuur 3 toont nogmaals het bamboeprobleem, in een modernere weergave. Hierin staan de letters a , b en c voor de zijden van een rechthoekige driehoek. De gegevens in deze situatie zijn dus $a = 3$ en $c + b = 10$. Hiermee kunnen we b uitrekenen, aangezien $a^2 + b^2 = c^2$. Dat hebben we zojuist ook met x gedaan, en dat leidt dus tot $b = 4,55$. In de Chinese tekst staat een rechtstreekse manier om b te berekenen, waarin je niet direct *Gou gu* herkent: *Neem het kwadraat van de afstand van de bamboe tot het punt waar de top de grond raakt en deel dat door de lengte van de bamboe, trek het resultaat af van de lengte van de bamboe en halveer de uitkomst.*

In moderne notatie: $b = \frac{1}{2}(c + b - \frac{a^2}{c + b})$. Als we de ons

bekende gegevens ($a = 3$ en $c + b = 10$) invullen in deze formule, komen we op hetzelfde antwoord voor b uit. Laat je leerlingen dit controleren.

Hogere klassen

Je kunt op dit moment stoppen met de constatering dat de Chinese werkwijze correct is. Maar in hogere klassen zou je ook nog kunnen kijken of we de moderne formule met wat algebraïsch manipuleren kunnen verklaren vanuit de *Gou gu*-stelling:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$$

$$c - b = \frac{a^2}{c + b}$$

$$b = c - \frac{a^2}{c + b}$$

$$2b = c + b - \frac{a^2}{c + b}.$$

Halveren van beide kanten levert de gezochte formule.

Leuk om aan de leerlingen te vragen is: waarom kun je bij de voorlaatste stap niet al stoppen? Antwoord: je weet niet wat c is, maar wel wat $c + b$ is.

Een andere manier om de formule af te leiden, is veralgemeniseren van $3^2 + b^2 = (10 - b)^2$. De totale lengte is $c + b$ en de afstand op de grond is a . Dan heb je $a^2 + b^2 = ((c + b) - b)^2$. Uitwerken geeft $2(c + b)b = (c + b)^2 - a^2$.

Daaruit volgt $b = \frac{1}{2}(c + b - \frac{a^2}{c + b})$. Het is moeilijk voor te stellen dat deze kennis al meer dan 2000 jaar oud is.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Joseph, G.G. (1992). *The crest of the peacock – Non-European Roots of Mathematics*. Londen: Penguin Books.
- Struik, D.J. (2001). *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht: Uitgeverij Het Spectrum. http://www.dbnl.org/tekst/stru008gesc01_01/stru008gesc01_01_0004.php
- https://nl.wikipedia.org/wiki/De_negen_hoofdstukken_van_de_wiskundige_kunst. Geraadpleegd op 29 april 2017.

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

6: EEN GEOMETRISCHE QUESTIE

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: een probleem over oppervlakte en omtrek van een rechthoekige driehoek.



De 'Vriesche Euklides'

Naast beroemde Nederlandse wiskundigen als Huygens en Stevin zijn er ook minder beroemde wiskundigen en rekenmeesters geweest die interessante boeken hebben geschreven, vaak in het Nederlands. Sybrandt Hansz. Cardinael (1578 - 1647) was rekenmeester, eerst in Harlingen en daarna in Amsterdam. In zijn tijd was hij behoorlijk bekend. Hij komt bijvoorbeeld in een gedicht van Vondel voor als 'De Vriesche Euklides'. Ook ging Descartes bij hem langs en gebruikte Huygens zijn boek als studiemateriaal. Meer over zijn leven en de inhoud van zijn boeken is te vinden via de literatuurverwijzingen onderaan dit artikel. Zijn boek uit 1620 waar we een vraagstuk uit gaan bekijken heet *Hondert geometrische questien en hare solutien*. In het boek wordt hij alleen Sybrandt Hansz. van Harlingen genoemd, zonder Cardinael erachter, in *Google books* is zijn boek met zoeken op alleen de titel prima te vinden. Het probleem waar we naar gaan kijken gaat over de omtrek en oppervlakte van een driehoek.

Questie XV

XV.
Dier is een ghegeven triangel A B C, winckelrecht in A, die de 3yden in somma syn 120/ ende den inhoud is 600. **W**aghe naer de 3yden elck besonder ?

figuur 1

Qua taalgebruik is dit al een prachtige vraag natuurlijk, vanwege de mooie woorden: 'triangel' voor driehoek, 'winckelrecht' voor rechthoekig, 'inhout' voor wat wij in twee dimensies een oppervlakte zouden noemen. Het duurt even voor je de letters goed kunt lezen, maar in een workshop voor docenten waarin ik deze bron besprak was men verbaasd over hoe snel je er aan gewend raakte.

De vraag komt dus neer op:

Gegeven is een driehoek ABC met een rechte hoek bij A, de omtrek is 120 en de oppervlakte 600. Hoe lang zijn de drie zijden?

Het is het leukst om het eerst zelf te proberen, zonder verder te lezen. Dat is ook wat ik met leerlingen zou doen, gewoon vragen: hoe los je dit op? Daar kun je als hint nog bij geven dat het tekenen van een plaatje hier wel erg handig is. Door de rechte hoek zullen ze al snel zien dat de oppervlakte van de driehoek te vinden is door de twee rechthoekszijden te vermenigvuldigen en te delen door 2, dus de twee rechthoekszijden zijn keer elkaar 1200.

Leerlingen zullen waarschijnlijk eerst gewoon maar wat gaan proberen, en dat levert inderdaad een oplossing op: als je 30 en 40 kiest klopt de oppervlakte, en dan is de schuine zijde vanwege Pythagoras gelijk aan 50 en de omtrek klopt ook. Dit is nog prima te doen in klas 2 of 3 van havo of vwo: je haalt Pythagoras weer even op en de oppervlakte en omtrek van een driehoek. Voor de onderbouw is dat waarschijnlijk ingewikkeld genoeg.

Dat is echter niet hoe Cardinael het doet, en ook uit zijn manier kun je met je onderbouwleerlingen wel wat leuks halen, dus lees eventueel meteen verder bij het kopje 'Wat doet Cardinael?'

Oplossen met algebra

Maar ja, hoe weet je dan zeker dat dit de enige oplossing is? Mijn eigen neiging is meteen met variabelen gaan rekenen, en dat zullen bovenbouwleerlingen misschien ook wel snel gaan doen. Dat kan natuurlijk ook, we geven de lengtes van de drie zijden namen:

$|AB| = x$, $|AC| = y$ en $|BC| = z$. Dan krijgen we drie vergelijkingen met drie onbekenden die je kunt oplossen.

Probeer het vooral eerst even zelf voor je verder leest.

Omdat hoek A recht is en de oppervlakte gelijk is aan 600 volgt dat $xy = 1200$. Vanwege de gegeven omtrek weten we dat $x + y + z = 120$. En vanwege de rechte hoek geldt de stelling van Pythagoras, dus $x^2 + y^2 = z^2$.

Dat is een ander soort probleem dan je meestal ziet bij stelsels vergelijkingen, omdat de laatste niet lineair is.

De eerste vergelijking geeft een verband tussen twee variabelen, de andere twee tussen drie, dus je kunt als hint bijvoorbeeld geven dat het handig is om y in termen van x te schrijven en die te substitueren in de twee andere vergelijkingen.

Dan krijg je $y = \frac{1200}{x}$ en als je dat substitueert in de twee andere vergelijkingen kun je twee uitdrukkingen vinden voor z^2 die dus aan elkaar gelijk moeten zijn:

$$\left(120 - x - \frac{1200}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1440000}{x^2}. \text{ Als je de haakjes}$$

uitwerkt vallen meteen twee termen weg en we vinden:

$$16800 - 240x - \frac{28800}{x} = 0$$

Met x vermenigvuldigen aan beide kanten levert een kwadratische vergelijking op waar twee mogelijkheden uit rollen: $x = 30$ of $x = 40$. Deze uitkomsten geven inderdaad allebei een oplossing, die op hetzelfde neerkomen omdat de rollen van x en y verwisselbaar zijn in het hele probleem. De oplossing is dus: de rechthoekszijden zijn 30 en 40 en de schuine zijde is 50.

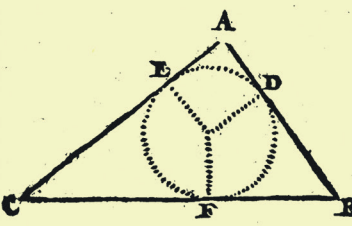
Wat doet Cardinael?

Maar Cardinael pakt dit probleem heel anders aan, en daarmee ontdekken we en passant een leuk meetkundig weetje. Hij tekent (al zegt hij dat niet) de ingeschreven cirkel, zoals we kunnen zien in figuur 2.

Probeer eerst eens zelf verder te lezen. We zullen hieronder voornamelijk ingaan op het eerste stukje, dus je hoeft niet alles te lezen.

DMer is een ghegeven triangel A B C, winckelrecht in A, die de 3yden in somma sijn 120/ ende den inhoud is 600. Vraghe naer de 3yden elck besonder?

Dubbeleert 600/ komt 1200/ dit divideert door 120/ komt booz A D of A E 10/ soo is D A E 20 / die trecket van de 120 / blyben 100 booz D B C E, de helft is 50 booz B C, ende soo veel is oock B D ende E C te samen; dese 50 trecket van 120 / rest 70 booz A B ende A C te samen. Ende om nu A B ende A C elck besonder te vinden; soo doet als in onse veerthiende Exempel gheleert is / multiplicerende de helft van de 70 / sijnde 35 quadzaten/ komt 1225 / hier af de 1200 / rest 25/ de $\sqrt{3}$ daer van is 5 / dit ghetrocken van 35 / rest 30 booz A B; ende by die 35 gheaddeert/ komt 40 booz de 3yde A C, ende alsoo sijn alle dize 3yden bekendt/ soomen begheerte te weten.

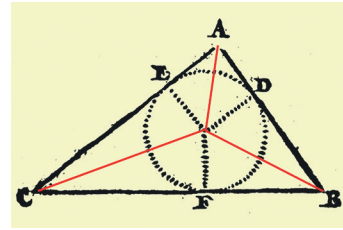


figuur 2

Hij begint dus zo: Dubbeleert 600 / komt 1200 / dit divideert door 120 / komt voor AD of AE 10.

Dat is wel heel anders dan mijn aanpak! Hij verdubbelt 600, dus hij neemt het dubbele van de oppervlakte. En dan deelt hij door de omtrek, en trekt de conclusie dat AD en AE blijkbaar 10 zijn. Omdat hij punten D en E gebruikt, kunnen we wel vermoeden dat die ingeschreven cirkel hier belangrijk is. Maar wat hebben die punten D, E en F met de oppervlakte van de driehoek te maken? Een eerste hint die ik hier zou geven is: trek hulplijnen.

De lijnen die het meest voor de hand liggen, zijn de lijnen van het middelpunt van de ingeschreven cirkel naar de hoekpunten, zie figuur 3 (dat zijn uiteraard de bissectrices, maar dat heb je hier niet per se nodig).



figuur 3

Dan is er een kleine blikwisseling nodig. Die lijnen verdelen de hele driehoek in drie driehoekjes. En wat nou zo bijzonder is: die drie driehoekjes hebben dezelfde hoogte, namelijk de straal van de ingeschreven cirkel. Nu kun je met leerlingen verschillende dingen gaan doen. Ik beschrijf eerst wat je in de bovenbouw zou kunnen doen en daarna een knip-en-plak-aanpak die in de onderbouw zou kunnen. Ik kies voor die volgorde omdat je dan zelf al snapt waarom de knip-en-plak-methode werkt voordat we hem gaan doen.

Bovenbouwaanpak

Laten we de straal van de ingeschreven cirkel r noemen. Kun je de oppervlakte van de hele driehoek nu schrijven in termen van de omtrek en r ?

Dat kan, omdat die drie driehoekjes dezelfde hoogte hebben. De oppervlakte van de hele driehoek is:

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot r + \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot r + \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot r, \text{ wat gelijk is aan}$$

$$r \cdot \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |AC| + |BC|). \text{ Oftewel: de straal van de}$$

ingeschreven cirkel keer de halve omtrek is gelijk aan de oppervlakte van de hele driehoek! Dus r keer de omtrek is 1200, dus als we 1200 delen door de omtrek van 120, vinden we $r = 10$, de straal van de ingeschreven cirkel.

Een mooie vraag om te stellen is nu: geldt dit nou alleen omdat we hier een rechthoekige driehoek hebben?

Nee, we hebben nu nog niet gebruikt dat hoek A recht is. Blijkbaar geldt in elke driehoek dat de straal van de ingeschreven cirkel keer de halve omtrek gelijk is aan de oppervlakte. Dat is een leuk weetje dat meteen bewezen is.

Onderbouwaanpak

Dit weetje kun je op tussenniveau ook ontdekken door te knippen en te plakken. Laat de leerlingen zelf een willekeurige driehoek tekenen met de ingeschreven cirkel erin (zo kun je meteen de bissectriceconstructie óf het nauwkeurig meten met de geodriehoek weer even oefenen). Teken ook de loodlijntjes van het midden naar de zijden netjes. Knip nu over de hulplijntjes zodat de grote driehoek in de drie kleine driehoekjes uit elkaar

valt. Knip de drie kleine driehoekjes nog eens door over de stralen van de ingeschreven cirkel. Je krijgt nu zes driehoekjes, die twee aan twee precies rechthoeken vormen!

Als je die naast elkaar legt, kun je een rechthoek maken die als ene zijde r heeft, de straal van de ingeschreven cirkel, en als andere zijde de halve omtrek van de driehoek! En de oppervlakte is niet veranderd, dus nog steeds de oppervlakte van de hele driehoek.

Een vraag die je daarna jezelf (of wellicht ook je leerlingen) kunt stellen is: waarom passen die driehoekjes eigenlijk precies? En waarom worden het rechthoekjes?

Noem het middelpunt van de ingeschreven cirkel even M . Omdat je de stralen loodrecht op de zijden hebt getekend, zijn die hoeken allemaal recht. Het is ook duidelijk dat

Dat komt overeen met zijn vorige vraagstuk, nummer XIV, waarin hij precies zo'n probleem oplost. Zelf kun je dat doen door weer een stelsel vergelijkingen op te lossen.

Conclusie

Wat mij opvalt is dat ik dit probleem zelf op een meer algebraïsche manier zou aanpakken dan Cardinael doet. De doorbraak van het gebruik van algebra om meetkundige problemen aan te pakken kwam ongeveer in deze tijd met de wiskunde van Descartes, maar Cardinaels boek is net wat ouder en hij doet dit ook bewust niet. Hij schrijft in zijn voorwoord: *'hier hebt ghy hondert Geometrische Vraghen, en daer en by onderrechtinghe hoemen die solveren sal, eenighe met linien, ende sommige met (doch alle sonder Cossische) ghetalen, seer dienstigh*

'DEZE BRON GEEFT AANLEIDING TOT HET GELEID HERONTDEKKEN VAN EEN LEUK WISKUNDIG FEITJE, ZOALS DAT DE OPPERVLAKE VAN EEN DRIEHOEK GELIJK IS AAN DE STRAAL VAN DE INGESCHEVEN CIRKEL KEER DE HALVE OMTREK.'

$|MD| = |ME| = |MF|$ omdat het stralen van dezelfde cirkel zijn. Dus die passen aan elkaar. Maar waarom geldt bijvoorbeeld dat $|CE| = |CF|$?

Voor ons is dat niet zo'n moeilijke vraag: de driehoeken CME en CMF zijn congruent (ZZR), dus $|CE| = |CF|$.

Net zo geldt dat $|BF| = |BD|$ en $|AE| = |AD|$.

Maar die congruentiegevallen zullen vanwege het nieuwe programma niet meer bekend zijn bij de meeste leerlingen. Dit probleem kan dan een natuurlijke manier zijn om toch even over de vraag te praten hoe je weet wanneer twee driehoeken precies gelijk zijn. Maar dat hoeft natuurlijk niet per se, want het past gewoon precies als je het uitknijpt.

Vervolg van het argument

Maar Cardinael is nog niet klaar: in de meeste driehoeken heb je niet zoveel aan de straal van de ingeschreven cirkel als je de zijden wilt weten. Maar dat is hier, vanwege die rechte hoek, anders. Want Cardinael concludeert niet expliciet dat die straal 10 is, maar dat AD en AE gelijk zijn aan 10. Waarom is dat zo? Daar heb je die rechte hoek echt voor nodig.

Nu berekent Cardinael dat $DBCE$ gelijk is aan $120 - 20 = 100$. Dan beweert hij: BC is de helft daarvan, dus 50. Waarom is dat zo? Weer een leuke vraag. De congruente driehoeken van zojuist bieden hier de oplossing. We weten dan dat $|AB|$ en $|AC|$ samen $120 - 50 = 70$ zijn. Hij heeft nu dus een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde bekend is (nl. 50) en de som van de twee rechthoekszijden ook (nl. 70).

allen den ghenen die haer inde conste der Geometrie begheeren te oefenen (...).'

Met cossische getallen bedoelt hij specifieke symbolen voor de onbekende en machten daarvan (lees meer hierover in deel 8 van *Wortels van de wiskunde*). Toch is die grens tussen wat Cardinael cossische getallen vindt en wat hij onder meetkunde schaaft voor ons eigenlijk wat diffuus: het eind van probleem XV komt in onze moderne ogen neer op het oplossen van een kwadratische vergelijking, wat Cardinael ook doet, maar inderdaad wel meetkundig.

We zien in dit voorbeeld een aantal manieren waarop het gebruik van zo'n oud wiskundeboek iets kan toevoegen aan je les. Ten eerste is het oude taalgebruik leuk voor leerlingen die interesse hebben in talen, want je ziet dat veel woorden die hier in het Nederlands gebruikt worden nu ook nog in andere talen voorkomen, maar juist niet meer op deze manier in het Nederlands. Zo zou je eventueel naar interesse kunnen differentiëren als je niet iedereen even diep de wiskunde in wil laten duiken: kies na het proberen en vinden van een oplossing of je verder gaat met het uitpluizen van de wiskunde via de knip-en-plak-methode of verder gaat zoeken naar de betekenis van oude woorden in de tekst.

We hebben nu slechts één van de honderd vraagstukken van Cardinael besproken, maar dit boek is natuurlijk ook gewoon een bron van talrijke meetkundevraagstukken waar je een deel van zo aan je leerlingen zou kunnen voorleggen.

Ook zie je hoe een bron aanleiding kan geven tot het geleid herontdekken van een leuk wiskundig feitje, zoals dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan de straal van de ingeschreven cirkel keer de halve omtrek. Omdat we dat feitje nodig hadden om te snappen wat Cardinael deed, hebben we het zelf bewezen (helemaal met de formules of op tussenniveau met knippen en plakken). Bovendien hebben we het verband zelf eerst gereconstrueerd uit de getallen die Cardinael gebruikte en opnieuw geformuleerd, en we hebben ons afgevraagd of deze stelling alleen in een rechthoekige driehoek geldt of algemeen. Als je dat ook zo met leerlingen doet, zijn ze er actiever mee bezig dan wanneer de stelling geponeerd zou worden en het bewijs meteen gevraagd of gegeven wordt.

Literatuur

- Hoorn, M. van (2008). Boekbespreking: M.H. Sitters, Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 9, nummer 4.
- Maanen, J. van (2003). Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 4, nummer 1.
- Sitters, M.H. (2008). *Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk*. Hilversum: Uitgeverij Verloren.

Over de auteur

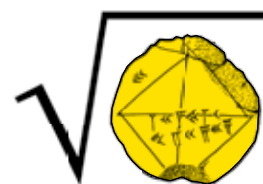
Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl.

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Desiree van den Bogaart

7: REKENEN MET BREUKEN

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: rekenen met breuken.



Zeven broden en tien hongerige dagloners

Hoe verdeel je zeven broden over tien personen? Wij zijn snel geneigd om te zeggen dat iedereen dan $7/10$ brood krijgt. Maar stel je eens even zeven echte broden en tien hongerige dagloners voor, die hun werk in natura uitbetaald krijgen. Ga je dan alle broden in tien stukken snijden en iedereen zeven stukjes geven? Zonde van al het snijwerk, en vooral van het brood, want die kleine stukjes bederven sneller en het levert veel meer kruimels als snijverlies op. Snijd in plaats daarvan eerst vijf broden doormidden. Dan krijgt ieder een half brood. De overgebleven twee broden snijd je beide in vijf stukken. Elke dagloner gaat dan naar huis met een half plus $1/5$ van een brood.

De oude Egyptenaren rekenden zo'n duizend jaar voor Christus vrijwel uitsluitend met breuken met teller 1. We noemen dat stambreuken. Dat lijkt vanuit ons moderne perspectief soms omslachtig en onhandig, maar wanneer je het zoals hierboven in een realistische context uit die tijd plaatst, is het ineens een stuk begrijpelijker. De Babyloniërs, hun tijdgenoten, hadden geen aparte breuknotatie, maar schreven niet-gehele getallen op een manier die lijkt op onze kommagetallen. Dat sluit ook aan bij het feit dat ze een (zestigtallig) positiestelsel hadden. Je zou zelfs kunnen zeggen dat ze daarmee voorliepen op onze (tientallige) Hindoe-Arabische werkwijze, want wij hebben eerst een notatie voor breuken ontwikkeld, voordat Stevin zijn boek over kommagetallen publiceerde in de zestiende eeuw. Meer hierover lees je in Schets 4 van *Wortels van de wiskunde*.

Andere tijden en werelddelen

We gaan in dit artikel kijken naar drie oude opgaven waarin op verschillende manieren gerekend wordt met breuken. De opgaven zijn afkomstig uit de (late) Middeleeuwen en daarna, en komen uit verschillende werelddelen. Je kunt kiezen of je alle opgaven tegelijk wilt gebruiken in een les over breuken, of er een selecteert die past bij het leerdoel dat je op dat moment voor ogen hebt (of als uitsmijter op vrijdagmiddag het laatste uur).

Lotusbloemen

We beginnen met een relatief eenvoudig probleem uit India. Het is oorspronkelijk geschreven door Bhaskara II in 1150 in zijn werk *Lilivati*.

Van een bos lotusbloemen wordt $1/3$ aangeboden aan de god Shiva, $1/5$ aan de god Visnu, $1/6$ aan de zon en $1/4$ aan de godin. De overgebleven zes lotusbloemen worden aangeboden aan de goeroe. Hoeveel lotusbloemen zitten er in de bos?
(eigen vertaling van de auteur van citaat in Sanz & Gómez)

De porties zijn prachtige Egyptische stambreuken, maar toch doet de oplossing meer denken aan het Babylonische rekenen met het getal zestig. Wanneer we de breuken gelijknamig maken, komen we tot de conclusie dat de zes bloemen die de goeroe krijgt $3/60$ deel van het totaal moeten zijn. Dus de hele bos bestond uit 120 lotusbloemen.

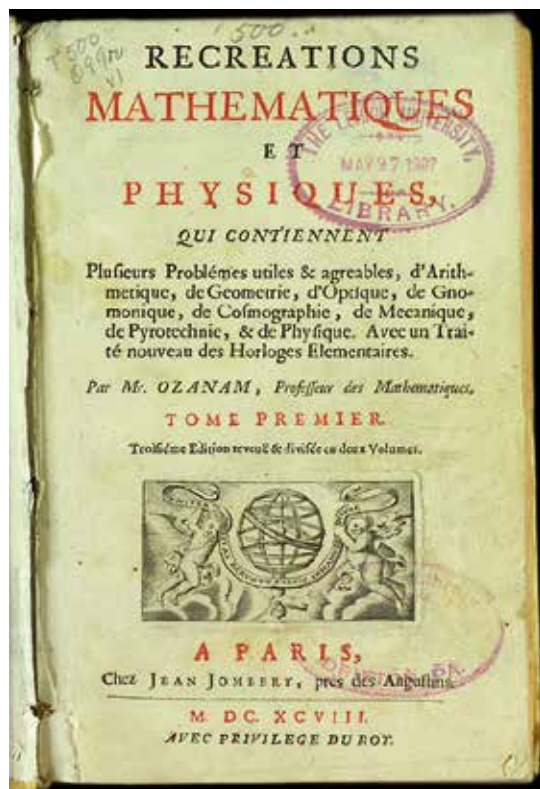
Lappen stof

Het volgende probleem heeft een meer economische context, passend bij de bloeiende handelsgeest in het Italië van de late Middeleeuwen. Het is geschreven door Leonardo van Pisa, ook wel bekend als Fibonacci, in zijn boek *Liber Abaci* uit 1202.

Een man koopt vier lappen stof voor in totaal 80 goudstukken. Hij koopt de eerste voor een bepaalde prijs en de volgende voor $2/3$ van de prijs van de eerste. Dan koopt hij de derde voor $3/4$ van de prijs van de tweede. Ten slotte koopt hij de vierde voor $4/5$ van de prijs van de derde. Gevraagd wordt hoeveel elke lap stof waard is.
(eigen vertaling van de auteur van citaat in Sanz & Gómez)

Probeer de invoer van een variabele te vermijden. Stel je voor dat je dit in een klas doet die nog niet eerder met variabelen heeft gewerkt. Hoe zouden je leerlingen dit aanpakken? We zouden kunnen beginnen met een schatting en die vervolgens bijstellen. Dat wordt de regula falsi methode genoemd. Voor meer hierover, zie Schets 9 van *Wortels van de wiskunde*.

Laten we ook hier weer werken met het getal 60 (de Babyloniërs kozen dit niet voor niks als basis, namelijk vanwege de deelbaarheid). Stel dat de eerste lap 60 goudstukken kost. Dan kosten de andere lappen respectievelijk 40, 30 en 24 goudstukken. De totale waarde van de lappen zou dan 154 goudstukken bedragen. Dat is bijna het dubbele van wat gezocht wordt. We zullen dus $80/154 \times 60$ moeten doen om de prijs van de eerste lap te vinden. Dat geeft helemaal geen mooi antwoord! Het is nog leuker om deze denkvraag aan je leerlingen te stellen: wat zou dan wel een handig totaal aantal goudstukken zijn om de som tot mooie gehele eindantwoorden te brengen? Als je toch de opgave met een variabele aanpakt, zie je een patroon in de breuken. We nemen even x voor de prijs van de eerste lap stof. Dan wordt de vergelijking: $x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}x + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}x = 80$. Bij het uitrekenen van de breuk aan de linkerkant, vallen tellers en noemers mooi tegen elkaar weg. (Kijk of de leerlingen dat patroon opmerken.) Het resultaat wordt: $\frac{77}{30}x = 80$. Hieraan is wat makkelijker te zien dat 77 goudstukken (of een veelvoud daarvan) als totale bedrag voor de lappen stof een mooier antwoord oplevert.



figuur 1 Titelpagina van Jacques Ozanams boek (1694) met wiskundige vraagstukken

Realistisch of niet?

Het is natuurlijk de vraag of deze opgave een realistische rekenopgave was in die tijd. In de rekenboeken uit deze periode zijn wel meer opgaven opgenomen die onpraktisch of onwaarschijnlijk lijken. Marjolein Kool schrijft hierover in haar proefschrift over oude rekenboeken:

‘Men kan zich afvragen waarom in de praktische rekenboeken, die geschreven zijn voor (aankomende) koop- en ambachtslieden en beoefenaars van financiële en administratieve beroepen, onpraktische zaken staan als berekeningen in geometrische vormen, vraagstukken met onrealistische getallen en vraagstukken die een onwaarschijnlijke situatie beschrijven. De fantasievolle vraagstukken zijn kennelijk uit traditie opgenomen. Vraagstukken die al eeuwenlang zijn overgeleverd en in allerlei landen en culturen voorkomen, hebben hun waarde bewezen en verdienen een plaatsje in het rekenboek. Het zijn steeds dezelfde eeuwenoude vraagstukken die, al dan niet met een kleine variatie, in de verschillende rekenboeken terugkeren. Bovendien hebben de onrealistische vraagstukken een recreatieve functie. Ze zijn vaak verpakt in vermakelijke verhaaltjes.’ (Kool, 1999, p. 214)

Eieren

Als laatste kijken we naar een Frans recreatief vraagstuk uit het einde van de zeventiende eeuw, van Ozanam.

Een boerin draagt eieren naar een garnizoen, waarbij ze langs drie wachtposten komt. Aan de eerste wachtpost verkoopt ze de helft van haar eieren, aan de tweede verkoopt ze de helft van wat ze dan nog heeft plus nog een half ei en aan de derde de helft van wat ze dan nog heeft plus een half ei. Wanneer ze op de markt aankomt, heeft ze nog drie dozijn eieren over die ze kan verkopen.

Hoe is dit mogelijk zonder een ei te breken?
(eigen vertaling van de auteur van citaat in Sanz & Gómez)

Bij dit eierenprobleem breek je je hoofd over de halve eieren. Maar wanneer je bedenkt dat de helft van een hoeveelheid wel eens gebroken eieren zou kunnen opleveren en dat je door er een half ei bij te doen juist wel op een heel aantal eieren uitkomt, dan wordt het mogelijk. Dus bijvoorbeeld: je hebt veertien eieren. Daarvan verkoop je de helft aan de eerste wachtpost. Van wat je nog overhebt, verkoop je de helft plus nog een half ei aan de tweede wachtpost. Dan houd je voor de derde wachtpost drie eieren over.^[1]

Nu heb ik hier veertien genomen, maar als ik was begonnen met een willekeurig achtvoud plus zes, zou ik met een heel aantal zijn geëindigd. Ook leuk om dat door je leerlingen te laten onderzoeken.

Terugrekenend vanaf de drie dozijn overgebleven eieren van onze boerin, oftewel 36 eieren, blijkt dat zij moet zijn begonnen met 294 stuks. Dat kan een flinke uitsmijter worden.

Noten

- [1] Het eierenprobleem doet mogelijk een beetje denken aan het Arabische raadsel met de 17 kamelen. Wie dit niet kent, Google even op 'erfenis 17 kamelen'

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Joseph, G.G. (1992). *The crest of the peacock – Non-European Roots of Mathematics*. Londen en New York: Penguin Books.
- Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen*. Hilversum: Verloren.
Online te vinden op http://www.dbnl.org/tekst/kool006cons01_01/kool006cons01_01_0008.php

- Sanz Garcia, M.T. & Gómez, B. (2017). *Classification and resolution of the descriptive historical fraction problems*. In: Proceedings of the Congress of European Research in Mathematics Education, Dublin 2017.
Online te vinden op https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0478.pdf

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE



8: BABYLONISCHE VERGELIJKINGEN

Jeanine Daems

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: Babylonische vergelijkingen.

De Babyloniërs

De term 'Babyloniërs' gooit eigenlijk meerdere volkeren in een lange tijd op één hoop. De bloeitijd van de wiskunde in het gebied rond de Eufraat en de Tigris (het huidige Irak en Syrië) begon rond 3000 v. Chr. en duurde een paar duizend jaar. De cultuur die daar toen heerste en de mensen die daar woonden noemen we voor het gemak allemaal 'Babylonisch', al is dat dus niet helemaal terecht. In dit artikel ga ik niet in op het Babylonische getsysteem. Wie meer wil weten over de Babylonische wiskunde kan verder lezen in bijvoorbeeld *Wortels van de wiskunde*^[1] en in het Zebra-boekje *Babylonische wiskunde*.^[2] Leerlingen kunnen prima de werking van het Babylonische getsysteem ontcijferen aan de hand van (transcripties van) kleitabletten zoals die in dit boekje te vinden zijn, als je dat goed begeleidt. Voor wie meer over de geschiedenis van vergelijkingen wil weten, is ook *Het avontuur dat algebra heet*^[3] een aanrader.

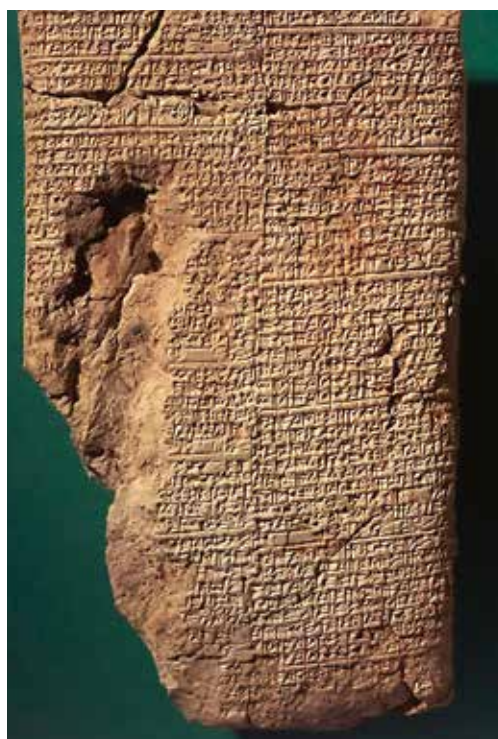
Vergelijkingen

Vergelijkingen spelen al lang een rol in de geschiedenis, en bij de Babyloniërs kwamen ze veelvuldig voor. Dat de Arabische wiskundigen rond het jaar 800 dergelijke vergelijkingen oplossen weten veel mensen wel, dat de Babyloniërs dat al veel eerder deden lijkt minder bekend te zijn.

Als je bij de introductie van kwadratische vergelijkingen bronnen wilt gebruiken, zou ik voor Al-Khwarizmi kiezen, of voor voorbeelden die daarop lijken. Maar in hogere klassen zijn juist ook de bronnen van de Babyloniërs interessant: je moet net iets meer je best doen om te zien dat het om kwadratische vergelijkingen gaat, en de problemen hebben minder mooie getallen (voor ons dan,

in het Babylonische getalstelsel komen de problemen vaak juist wel 'mooi' uit). Die vergelijkingen zagen er wel echt anders uit dan die van ons: de Babyloniërs, en ook de Arabische wiskundigen rond het jaar 800, hadden nog geen algebraïsche notatie om vergelijkingen in uit te drukken. Ze hadden ook geen manier om over een algemene vorm van een vergelijking, zoals onze $ax^2 + bx + c = 0$, of een algemene oplossing, zoals onze *abc*-formule, te praten.

Veel vergelijkingen op Babylonische kleitabletten zijn geformuleerd als meetkundige problemen met één of twee onbekenden (vaak: de zijde van een vierkant, of de lengte en breedte van een rechthoek). Ik bespreek in dit artikel drie voorbeelden die van één kleitablet afkomstig zijn: een verzameling van 24 modelproblemen die op kwadratische vergelijkingen neerkomen. Grappig detail: in het 24^e probleem worden allerlei rekenfouten gemaakt die elkaar uiteindelijk weer opheffen, om zo toch op het juiste antwoord te komen. De problemen komen namelijk vaak mooi uit en de oplossingen zijn snel te zien, en dan weet je eigenlijk vooraf al waar je op uit moet komen.



figuur 1 Dit kleitablet wordt bewaard in het British Museum in Londen en heeft nummer 13901

Probleem 1

Ik heb de oppervlakte en zijde van mijn vierkant opgeteld en dat werd 0,75. Je schrijft 1 op, de projectie. Je breekt de helft van 1 af. Je combineert 0,5 en 0,5. Je telt 0,25 op bij 0,75. 1 is het kwadraat van 1. Je haalt de 0,5 die je gecombineerd had weg vanuit de 1 zodat de vierkantszijde 0,5 is.^[4]

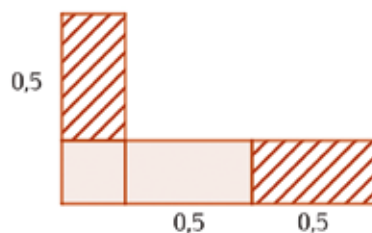
De eerste vraag die je kunt stellen is, zoals eigenlijk altijd: wat valt je op? Het lijkt of hier een probleem wordt opgelost, maar wordt er eigenlijk wel een vraag gesteld? Welke vraag dan? Hoe zou je dat in moderne wiskundeterminotatie uitdrukken en oplossen? Waarom staat er eigenlijk geen plaatje bij? Want het gaat over oppervlaktes en zijden, maar we zien helemaal geen plaatje.

Dat geldt eigenlijk voor alle vergelijkingen die zijn gevonden: er staan alleen berekeningen en geen plaatjes. Dat duidt erop dat het standaardmethodes waren, en dat men misschien nog wel aan meetkundige plaatjes gedacht heeft, maar dat de rekenalgoritmes om tot een oplossing te komen daar los van waren gekomen. Maar om te snappen wat er gebeurt helpt een plaatje wel. In het probleem wordt de zijde van een vierkant gezocht. Omdat de oppervlakte van het vierkant samen met die zijde 0,75 is, weet je meteen wel dat die zijde in ieder geval kleiner dan 1 zal zijn. Wat voor plaatje kun je hierbij tekenen? De eerste vraag die opkomt, is dan: hoe tel je meetkundig nou een vierkant en een zijde bij elkaar op? Dat zijn dingen van verschillende dimensies! In de westerse wiskunde wordt dat soort termen van verschillende dimensies bij elkaar optellen pas sinds Descartes geaccepteerd. Daar kun je de leerlingen zelf over laten nadenken: hoe kun je een oppervlakte en een zijde bij elkaar optellen zodat een zinnige betekenis ontstaat? Wat de Babyloniërs doen wordt uitgedrukt met een woord dat in Katz^[5] als *projectie* vertaald is: ze maken een rechthoek met als ene zijde 1 en als andere de gezochte zijde. Die rechthoek heeft een oppervlakte van die zijde keer één. En die kan zonder problemen bij het vierkant worden opgeteld, zie figuur 2.



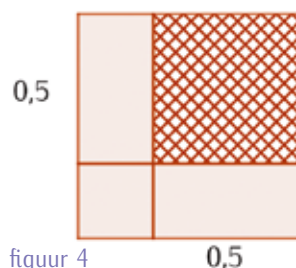
figuur 2

Deze totale rechthoek heeft volgens de eerste zin van de bron dus een oppervlakte die gelijk is aan 0,75. Je kunt al aan de bron zien dat het antwoord 0,5 gaat worden. Klopt dat? Ja, als je 0,5 kwadrateert en dat bij $0,5 \times 1$ optelt, vind je inderdaad 0,75. Het is natuurlijk interessant om de leerlingen uit te laten zoeken hoe de Babyloniërs hebben geredeneerd. In de tekst staat: 'je breekt de helft van 1 af'. Er is maar één 1 waar over gepraat is tot nu toe, en hoe kun je daar de helft van afbreken? Je kunt de rechthoek van breedte 1 doormidden breken. En wat doe je dan met het afgebroken deel? De volgende berekening helpt misschien: 0,5 wordt 'gecombineerd' met 0,5 en dan gebeurt er iets met 0,25. Dat klinkt als een kwadraat en dat klinkt weer alsof er een vierkant ontstaan is. In een plaatje kun je het zo voor je zien, zie figuur 3.



figuur 3

De gearceerde rechthoek wordt rechtsonder weggehaald en linksboven aangepast (dat past natuurlijk precies omdat linksonder een vierkantje zit). De ruimte die rechtsboven ontstaat is een vierkant, en daar weten we de afmetingen van: 0,5 bij 0,5, dus oppervlakte 0,25. Dat voegen we toe, zie figuur 4.



figuur 4

Al met al vinden we dus een vierkant met oppervlakte $0,75 + 0,25 = 1$. De zijde is dus gelijk aan 1, en de zijde van het kleine vierkantje is dus $1 - 0,5 = 0,5$. Zo zie je precies hoe de berekening van de Babyloniërs meetkundig verklaard kan worden. Je kunt de berekening natuurlijk ook algebraïsch verklaren: $x^2 + x = 0,75$ geeft $(x + 0,5)^2 = 0,75 + 0,25 = 1$, dus $x + 0,5 = 1$, dus $x = 0,5$. Als je niet meetkundig blijft denken, vind je nu ook de negatieve oplossing: $x + 0,5 = -1$, dus $x = -1,5$. En dan zie je dat we meetkundig precies gedaan hebben wat we ook wel kennen als kwadraat afsplitsen. Wanneer je de algebra in dit probleem introduceert is natuurlijk aan jezelf.

Probleem 2

De volgende opgave op hetzelfde kleitablet:

Ik heb mijn vierkantszijde van het binnenste van de oppervlakte afgehaald zodat het 870 werd. Je schrijft 1 op, de projectie. Je breekt de helft van 1 af. Je combineert 0,5 en 0,5. Je telt 0,25 op bij 870. 870,25 is het kwadraat van 29,5. Je telt de 0,5 die je gecombineerd hebt op bij 29,5 zodat de vierkantszijde gelijk is aan 30.

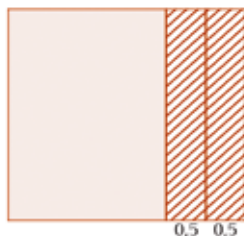
Als je dit probleem na het volgende voorlegt, kun je vragen: welke verschillen en overeenkomsten zie je met het vorige probleem? Leerlingen zullen dingen zeggen als: 'nu wordt er iets afgehaald in plaats van erbij gedaan, er staan veel grotere getallen in, je breekt weer de helft van 1 af'. En kun je hier nu ook een meetkundige voorstelling bij maken zodat het klopt en logisch is? Dat kan, alleen

moet je nu even bedenken dat het vierkant een oppervlakte heeft die groter is dan 870, dus dat de zijde die we zoeken nu groter dan 1 zal zijn, zie figuur 5.



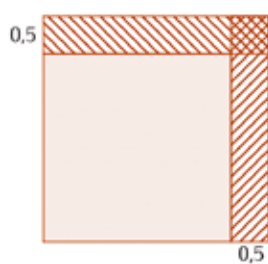
figuur 5

We hebben dus deze situatie en de oppervlakte van het gekleurde stuk is 870, het witte stuk is het deel dat er afgehaald is. Ook nu wordt weer de helft van 1 afgebroken, dat is vast weer de helft van de witte rechthoek. De vraag is nu: waar leggen we die helft van de witte rechthoek, die er dus juist is afgehaald, neer? En welke helft gaan we nu verplaatsen? Houd in je achterhoofd dat het doel zojuist was om een vierkant te maken en dat er in de tekst ook weer gesproken wordt over de 0,25, zie figuur 6.



figuur 6

Die laatste hints leiden er wellicht toe dat leerlingen dit gaan proberen, zie figuur 7.



figuur 7

Wat is nu de oppervlakte van het gekleurde vierkant linksonder? Zojuist was de oppervlakte van het gekleurde deel (dus het grote vierkant min de twee rechthoekjes) gelijk aan 870. Nu hebben we diezelfde oppervlakte, behalve dat er een klein stukje bijgekomen is omdat de rechthoeken die we eraf hebben gehaald nu overlappen. Hoeveel is er dan bijgekomen? Nou, de overlap van de twee rechthoeken is een vierkantje van 0,5 bij 0,5 met oppervlakte 0,25. De oppervlakte van het gekleurde vierkant is dus 870,25, de zijde is dus de wortel daarvan en dat komt mooi uit op 29,5. Van het oorspronkelijke grote vierkant was de zijde dus

$29,5 + 0,5 = 30$. Je ziet dat we weer precies het recept van de bron hebben gevolgd. Kan dit ook weer algebraïsch met kwadraatsplitsen? Ja, dat kan. En het plaatje maakt inzichtelijk waarom die $-0,5$ keer $-0,5$ inderdaad een $+0,25$ oplevert. Het lijkt gek dat ze bij deze tweede vraag opeens met getallen van een heel andere orde van grootte rekenen. Toch komt ook hier een mooi antwoord uit. Waarschijnlijk zijn de problemen andersom geconstrueerd: wat is een mooi voorbeeld om dit recept mee te laten zien?

Probleem 3

Soms gebeurt het dat een probleem niet direct met een standaardrecept zoals kwadraatsplitsen kan worden aangepakt. Je ziet vaak dat er dan een poging gewaagd wordt om het probleem te vertalen in iets dat wel een standaardprobleem is. Dat zien we bijvoorbeeld in dit probleem van hetzelfde kleitablet:

Ik heb mijn vierkantszijde zeven keer opgeteld en de oppervlakte elf keer, zodat het 6,25 werd. Schrijf op 7 en 11. Je vermenigvuldigt 11 met 6,25 zodat het 68,75 wordt. Je breekt de helft van 7 af. Je combineert 3,5 en 3,5. Je telt 12,25 op bij 68,75 en 81 is het kwadraat van 9. Je haalt er 3,5 die je gecombineerd had van het midden, af van 9 en je schrijft op 5,5. De reciproke van 11 kan niet worden opgelost. Wat moet ik opschrijven bij 11 dat me 5,5 geeft? Het quotiënt is 0,5. De vierkantszijde is 0,5.

Dit probleem lijkt erg op de vorige, alleen zijn er nu elf vierkanten en zeven zijden. Die meetkundig samenvoegen op een bruikbare manier is lastig. (Je ziet aan de tekst ook dat dat niet gebeurt). En zelfs al zou dat kunnen, dan zou je aan de methode die hier wordt behandeld niets hebben bij een ander probleem waarbij er niet elf maar tien of twaalf vierkanten zijn. Om te begrijpen wat hier gebeurt helpt het om meteen naar de algebra te gaan kijken. Welke vergelijking wordt hier opgelost?

Als je de vergelijking in onze termen schrijft krijg je $11x^2 + 7x = 6,25$. In onze *abc*-formule is de 11 geen probleem, dus je kunt je leerlingen meteen vragen de oplossing uit te rekenen, en kwadraatsplitsen kan natuurlijk ook als je de vergelijking even door 11 deelt. Of je vult die 0,5 die er uitkomt in om te checken of het klopt. Maar dat is niet wat in de bron gebeurt: we zien dat de 6,25 hier met 11 vermenigvuldigd wordt. Dat suggereert dat de hele vergelijking met 11 vermenigvuldigd wordt (terwijl wij eerder zouden delen). Waarom helpt dat? Algebraïsch zie je dan het volgende: $11 \cdot 11x^2 + 11 \cdot 7x = 68,75$. Ofwel: $(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 68,75$. Wat je dus krijgt is een 'gewone' vergelijking die je kunt oplossen voor $11x$, wij zouden zeggen: als je $y = 11x$ substitueert, vind je: $y^2 + 7y = 68,75$. Het is een goede oefening om leerlingen deze vergelijking Babylonisch op te laten lossen op de manier van probleem 1. Dan zie je namelijk precies

gebeuren wat de bron ook zegt. De uitkomst is $y = 11x = 5,5$. Maar hoe moeten we dan x bepalen? Het tablet zegt dan: 'de reciproke van 11 kan niet worden opgelost'. Dat is een interessant punt: waarom is delen door 11 lastig voor Babyloniërs? Dat komt door hun getalsysteem. Dit kan dus een mooie aanleiding zijn om meer over het Babylonische getalstelsel uit te gaan zoeken. Gelukkig is in dit geval het antwoord ook meteen te zien en dat deden de Babyloniërs ook: $5,5$ gedeeld door 11 is gewoon $0,5$. Dus ook hier zien we een mooi uitkomend probleem.

In de les

Waarom zou je deze Babylonische opgaven willen gebruiken in de les? Voor mij ligt de meerwaarde voornamelijk in een mooie en logische koppeling tussen algebra en meetkunde, in het verrijken van het cognitieve schema van de leerlingen wat betreft vergelijkingen oplossen, kwadraatafsplitsen, meetkunde. Kwadraatafsplitsen lijkt een algebraïsch trucje te zijn, maar meetkundig krijgt het een echte betekenis. De Babylonische opgaven zijn extra uitdagend, omdat er niet zo voor de hand liggende getallen in voorkomen: breuken, of juist best grote getallen in combinatie met breuken. Ook zijn die opgaven in oplopende moeilijkheid te vinden. Het vinden van een meetkundige interpretatie bij een gegeven Babylonisch probleem is soms een behoorlijke wiskundige denkactiviteit waar je tot ver in de bovenbouw mee zoet bent. Het bronnenboek van Katz ^[5] bevat nog veel meer van dergelijke bronnen, dat kan een mooi startpunt zijn voor bijvoorbeeld een profielwerkstuk.

Noten

- [1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [2] Kindt, M. & Roest, A. van der (2012). *Babylonische wiskunde*. Zebra-boekje 20. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [3] Kindt, M. & Hietbrink, H. (2017). *Het avontuur dat algebra heet*. Zebra-boekje 48. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [4] Deze vertaling is gebaseerd op de Engelse vertaling in Katz ^[5]. Ik heb de getallen meteen naar moderne getallen vertaald, en ik heb voor kommagetallen gekozen, omdat de niet-gehele getallen van de Babyloniërs meer lijken op onze kommagetallen dan op onze breuken.
- [5] Katz, V. (Ed.) (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A sourcebook*. Princeton: Princeton University Press.

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE:

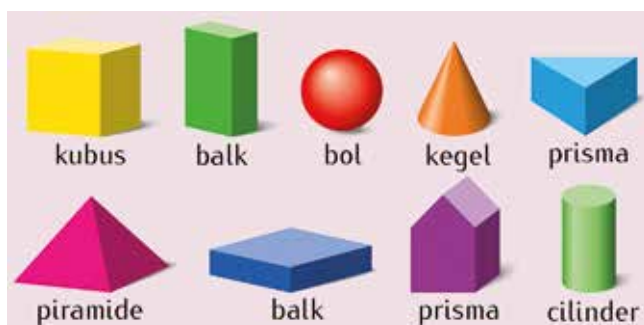
Desiree van den Bogaart

9: INHOUD VAN EEN (AFGEKNOTTE) PIRAMIDE

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de inhoud van een (afgeknotte) piramide.



Het eerste hoofdstuk van het brugklasboek van de meeste wiskundemethodes gaat over ruimtemeetkunde. Leerlingen leren namen en eigenschappen van kubus, balk, bol, kegel, prisma, piramide en cilinder, zie figuur 1. Het doen van berekeningen aan deze ruimtefiguren komt meestal later, of blijft beperkt tot kubus en balk.



figuur 1

Michel Roelens, collega-lerarenopleider uit België, heeft een aantal mooie artikelen, die ook deels online te vinden zijn, gepubliceerd over het berekenen van de inhoud van een piramide in de loop van de geschiedenis. Een citaat uit zijn artikel in de *Nieuwe Wiskrant* (2009):

Het begrip 'volume' lijkt er altijd geweest te zijn, net zoals de begrippen 'getal', 'functie', 'oppervlakte'... Toch is dit niet het geval, althans niet in de vorm die wij nu kennen. Deze begrippen hebben een hele evolutie gekend. Wijzelf, en zeker onze leerlingen, bekijken oppervlakten en volumes als maatgetallen die je kunt uitrekenen door de afmetingen van de figuur in te vullen in bepaalde formules. Zo bekeken de oude Grieken het niet. Zij vergeleken altijd twee oppervlakten of twee volumes. Bovendien bekeken ze de figuren zelf als grootheden: ze schreven 'de oppervlakte van' of het 'volume van' er nooit bij. Ze zeiden bijvoorbeeld: 'Twee piramides met gelijke grondvlakken verhouden zich tot elkaar zoals hun hoogtes.'

Verhoudingen

Het kan mooie gesprekken met leerlingen opleveren om eens op deze manier naar de inhoud van de ruimtefiguren te kijken. Welke inhoud is groter? Hoe verhouden ze zich tot elkaar? Vergelijk bijvoorbeeld de inhoud van een balk met die van een driehoekig prisma met gelijke hoogte, waarvan het grondvlak de helft is van het grondvlak van de balk. Hoe zit dat met een piramide en een balk met gelijk grondvlak en gelijke hoogte? Het feit dat de inhoud van een piramide berekend wordt met de formule

$$I = \frac{1}{3} \times G \times h$$

(met G = oppervlakte grondvlak en h = hoogte) kan voor enkele speciale gevallen worden aangetoond met concrete materialen. Bijvoorbeeld een piramide met vierkant grondvlak, hoogte gelijk aan de zijde van het grondvlak en top boven een van de hoekpunten. Drie exemplaren van deze piramide bij elkaar vormen precies een kubus, zie figuur 2.



figuur 2 Drie piramides vormen een kubus



figuur 3 Zes piramides vormen een kubus

Iets dergelijks werkt ook voor een piramide met een vierkant grondvlak, waarvan de hoogte gelijk is aan de halve zijde van het grondvlak en de top midden boven het grondvlak ligt, zie figuur 3. Het feit dat je hier zes

exemplaren nodig hebt om een complete kubus te maken, komt doordat de hoogte de halve zijde is. Zes keer een piramide met halve hoogte is gelijk aan drie keer een piramide met dezelfde hoogte.
 In de categorie bewijzen op tussenniveau kan ook een piramide drie keer gevuld worden met water of zand en vervolgens leeg gegoten worden in een prisma met grondvlak en hoogte gelijk aan die van de piramide. Het feit dat het prisma dan precies tot de rand gevuld is, ondersteunt de onderlinge verhouding 1 : 3 tussen de inhoud van beide ruimtefiguren.

De oude Egyptenaren

Het is niet verwonderlijk dat in de wiskundige geschriften van de oude Egyptenaren juist wel concrete berekeningen zijn gevonden voor de inhoud van de piramide. Het praktische nut hiervan lijkt voor de hand te liggen: het berekenen van de hoeveelheid materiaal die nodig is om hun beroemde piramides te bouwen. De zogenaamde *Moskou Papyrus*, die samen met de *Papyrus Rhind* de belangrijkste bron vormt voor onze kennis over de Egyptische wiskunde uit de periode rond 1800 voor Christus, bevat 25 problemen, waarvan nummer 14 over de inhoud van een afgeknotte piramide gaat.



figuur 4 Moskou Papyrus, opgave 14

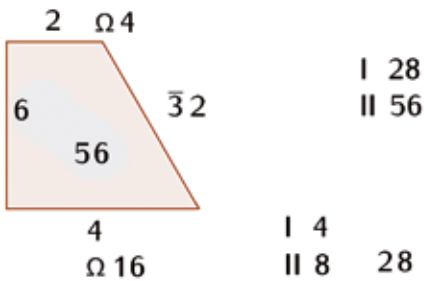
Figuur 4 toont een stuk van de originele Moskou Papyrus, in het hiëratistische schrift, met daaronder een vertaling in hiërogliefen. Het Egyptische getalsysteem met hiërogliefen is niet heel ingewikkeld, het is een tientallig stelsel. In figuur 5 staat de betekenis van dit schrift.

Als je leerlingen met de Moskou Papyrus laat puzzelen, zullen ze de meeste tekens linksonder kunnen vertalen naar getallen en daarin berekeningen ontdekken, zoals de Egyptische werkwijze met verdubbelen. Een andere ontdekking zou kunnen zijn dat de Egyptenaren van rechts naar links lezen. (Dat deden ze overigens niet consequent, er zijn ook bronnen gevonden waarbij van

Symbol	Betekenis	Getal
	streepje	1
∩	hielbeen	10
⊗	opgerold touw	100
🌸	lotusbloem	1000
👉	wijzende vinger	10.000
🐸	kikkervisje	100.000
👤	verbaasde man	1.000.000

figuur 5 Betekenis van de Egyptische hiëroglifische getalsymbolen

links naar rechts gelezen moet worden.) En wat is de betekenis van het ovaaltje boven een aantal streepjes? Antwoord: dat geeft aan dat hier een breuk staat. (Voor meer over het Egyptische rekenen, zie schets 1 van *Wortels van de wiskunde*.) Mocht je deze stap willen overslaan in je les, dan kun je na de originele afbeelding ook meteen figuur 6 tonen, waarin het zijaanzicht in een moderne notatie wordt weergegeven.



figuur 6 Moderne weergave zijaanzicht

We zien dus het zijaanzicht van een afgeknotte piramide met zijdes 4 en 2 en hoogte 6. Leerlingen die basale kennis hebben van gelijkvormigheid, moeten in staat zijn om de inhoud van de afgeknotte piramide met bovenstaande gegevens uit te rekenen. De hoogte van de onafgeknotte piramide zou 12 zijn geweest. Dat geeft als inhoud $\frac{1}{3} \times 16 \times 12 = 64$. Hier moet dan de bovenste kleine piramide vanaf, die als inhoud $\frac{1}{3} \times 4 \times 6 = 8$ heeft, waarmee voor de afgeknotte piramide 56 overblijft. Dit getal zien we ook terug in figuur 6. Maar daar zijn de Egyptenaren op een andere manier aan gekomen.

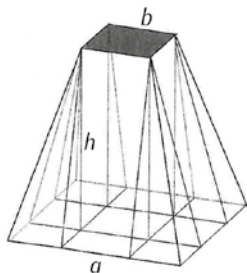
Formules

De formule voor de inhoud van een afgeknotte piramide met vierkant boven- en ondervlak luidt:

$$I = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$$

Hierin is a = de zijde van het grondvlak, b = zijde van het bovenvlak en h = hoogte. Als je leerlingen met behulp van deze formule de inhoud van de gegeven piramide laat uitrekenen, zullen ze ontdekken dat in de tussenstappen

van hun berekeningen dezelfde getallen voorkomen als in figuur 6 (of figuur 4). Dat maakt dan wellicht ook duidelijk waarom sommige getallen rondom het zijaanzicht staan waar ze staan, door de rol ervan in de berekening van de inhoud. De Egyptenaren zelf beschikten uiteraard niet over de formule in deze expliciete vorm, want het noteren van formules op deze wijze is van veel later datum, maar hun rekenrecept komt wel op dezelfde kennis neer.



figuur 7 Afgeknotte piramide verdeeld in negen stukken

Liu Hui, een Chinese wiskundige die in de derde eeuw na Christus leefde, beschikte over dezelfde kennis als de Egyptenaren. Hij gaf er ook een bewijs voor, door de afgeknotte piramide te verdelen in negen stukken, zoals in figuur 7. Het is een mooie oefening in algebra voor je leerlingen uit een derde klas om aan te tonen dat dit inderdaad precies neerkomt op $I = \frac{1}{3}h(a^2 + b^2 + ab)$.

Literatuur

- Berlinghoff, W. en Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Moor, E. de & Kindt, M. (2012). *Wiskunde dat kun je begrijpen*. Amsterdam: Bert Bakker.
- Roelens, M. (2009). Het volume van een piramide. *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 28, nummer 3, p. 4-10 (Online te vinden op: http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/283/283maart_roelens.pdf)

Bronvermelding

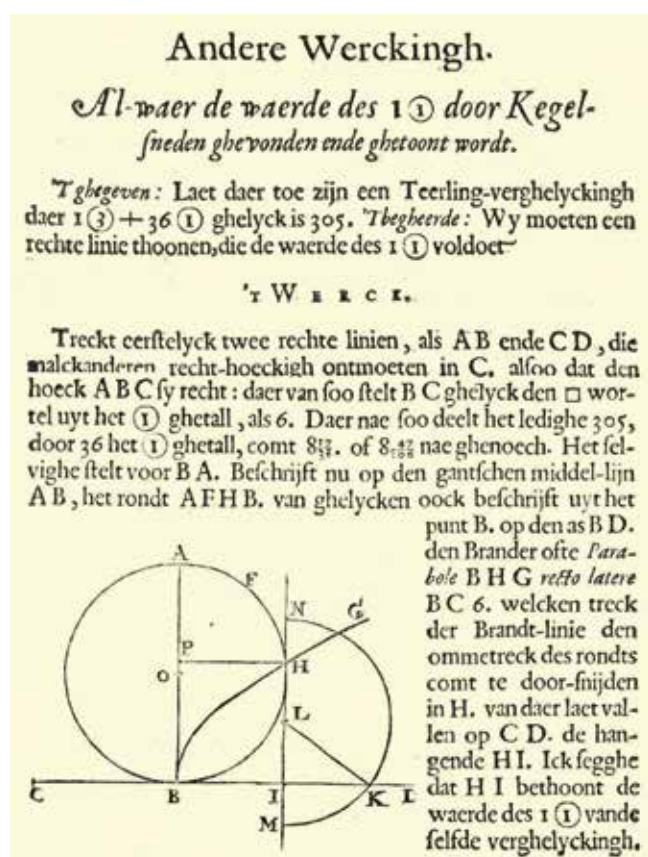
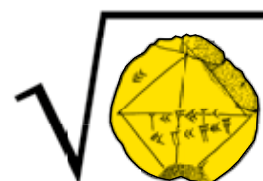
- Figuur 1: *Getal & Ruimte*, deel 1 havo/vwo, 10e editie
- Figuur 2 en 3: http://www.korthalsaltes.com/es/model.php?name_en=six%20pyramids%20that%20form%20a%20cube
- Figuur 5: *Wortels van de wiskunde*
- Figuur 7: *Wiskunde dat kun je begrijpen*

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

10: DERDEGRAADS VERGELIJKINGEN

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: derdegraads vergelijkingen oplossen op de manier van Omar Khayyam.



figuur 1 Uit *Algebra* (1639)

Derdegraads vergelijkingen

Het verhaal van de algemene oplossing van de derdegraads vergelijking, de formule van Cardano, is tamelijk bekend: vol van ruzie tussen onder anderen Cardano en Tartaglia in het zestiende-eeuwse Italië. Als je daar meer over wilt lezen, kun je dat bijvoorbeeld doen in schets 11 van *Wortels van de wiskunde*.^[1]

Maar voor die algemene, algebraïsche formule gevonden was, waren er ook andere wiskundigen die werkten aan het oplossen van derdegraads vergelijkingen. Een aanpak vinden we bijvoorbeeld in het boek *Algebra*^[2] uit 1639, van de Nederlandse wiskundige Stampioen. Hij geeft

deze methode naast de meer gebruikelijke aanpak van Cardano. De ondertitel van zijn boek zegt overigens: *Waer door alles ghevonden wordt in de wis-konst, wat vindtbaer is. Noyt vor desen bekendt*. Hij claimt hier dus dat zijn methodes nieuw zijn!

Laten we eens kijken wat er gebeurt, het is voor het vervolg niet nodig de bron in detail te bekijken. Kijk wel even naar de vraagstelling en naar het plaatje in figuur 1. Deze bron is alleen al leuk vanwege de taal en de notatie. Stampioen gebruikt hier notatie met rondjes om onbekenden aan te geven: met

$$1\textcircled{3} + 36\textcircled{1} \text{ ghelyck is } 305$$

bedoelt hij de vergelijking $x^3 + 36x = 305$. Dus een 3 in een rondje betekent de derde macht van de onbekende, een 1 in een rondje de eerste macht. Je ziet al wel dat deze notatie vooral geschikt is als we met slechts één variabele van doen hebben.

Ook het woord *Teerling-verghelyckigh* is mooi: een teerling is een derde macht. (Denk ook maar aan de uitdrukking 'de teerling is geworpen!' Dat gaat gewoon over een dobbelsteen, een kubus dus.)

Maar goed, wat doet Stampioen hier? Aan het plaatje zien we dat hij een bepaalde cirkel snijdt met een parabool, en zo een lijnstuk vindt waarvan hij beweert dat die aan de vergelijking voldoet.

Omar Khayyam

De bewering van Stampioen dat hij deze methode zelf heeft bedacht, is echter niet waar: deze methode komt uit het werk van de Perzische wiskundige, sterrenkundige en dichter Omar Khayyam (1048 – 1131).

Hij gebruikt inderdaad snijpunten van kegelsneden om oplossingen te bepalen van derdegraads vergelijkingen. Wat bijzonder is, is dus dat zijn oplossing puur meetkundig is: hij vindt inderdaad een lijnstukje met de juiste lengte, maar niet een exacte uitdrukking voor de lengte van dat lijnstukje. Dat was voor hem wel een soort

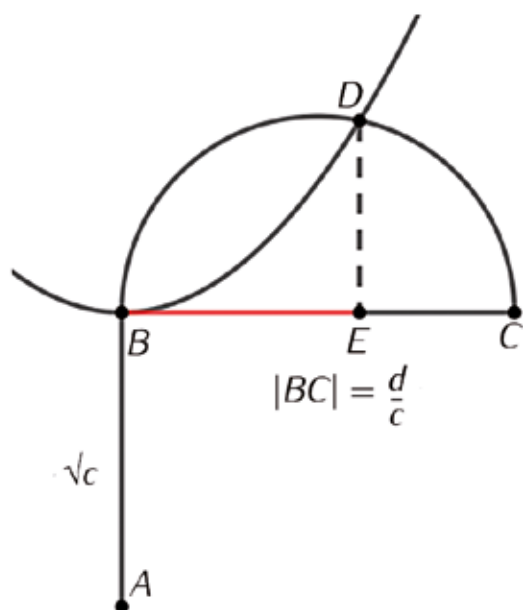
minderwaardige oplossing, hij had liever een algebraïsche oplossing gehad die ook daadwerkelijk een getal oplevert. Hij zegt dan ook: 'Als, echter, het doel van het probleem een echt getal is, dan zijn wij, noch alle anderen die zich met algebra bezighouden, in staat geweest om deze vergelijking op te lossen – misschien zullen anderen die na ons komen deze lacune kunnen vullen.^[3]

Het leuke voor in de klas is dat dit een

bron is die zeer geschikt is om met analytische meetkunde aan te pakken, al deed Khayyam dat zelf natuurlijk nog niet echt. Omar Khayyam kende nog geen negatieve getallen, wat ertoe leidde dat er voor hem een heleboel verschillende derdegraads vergelijkingen bestonden, want hij gebruikte tenslotte alleen positieve coëfficiënten. Hij probeerde een systematische aanpak te geven: per type vergelijking beschreef hij de kegelsneden waarvan de snijpunten tot een oplossing leidden, en ook wanneer er geen, één of twee oplossingen uit zouden komen. We bekijken hieronder het eenvoudigste geval, waarbij de oplossing het snijpunt is van een cirkel en een parabool.

Vergelijking $x^3 + cx = d$

We bekijken de vergelijking die wij zouden noteren als: $x^3 + cx = d$, waarbij c en d dus positieve getallen zijn. Khayyam zou deze vergelijking omschrijven als: 'een kubus en zijden zijn gelijk aan een getal'. Hieruit blijkt al dat hij wel probeerde een algemene oplossing te geven en niet alleen een voorbeeld bedoelde.



figuur 2

'DE TEERLING IS GEWORPEN! EEN TEERLING IS EEN DERDE MACHT. DAT GAAT GEWOON OVER EEN DOBBELSTEEN, EEN KUBUS DUS.'

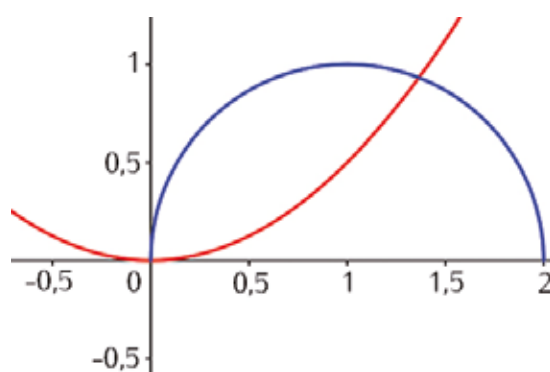
Wat Khayyam doet is het volgende: hij neemt een lijnstuk AB met als lengte de zijde van een vierkant met oppervlakte c , oftewel: de lengte van AB is $\sqrt{c}$. Hij tekende vervolgens lijnstuk BC loodrecht op AB zodanig dat $BC \cdot AB^2 = d$, wat neerkomt op $BC = d/c$. Daarna

verlengt hij AB en construeert hij een parabool met het verlengde van AB als symmetrieas, waarvan zijn beschrijving in moderne termen

neerkomt op de vergelijking $x^2 = \sqrt{c} \cdot y$. (Hierbij hebben we de oorsprong in B gekozen en de x -as langs BC .) Vervolgens construeerde hij een halve cirkel met middellijn BC . Die halve cirkel en de parabool snijden naast de oorsprong ook in een punt D , en de x -coördinaat van dat punt blijkt de oplossing van de vergelijking te zijn. De lengte van BE is dus de oplossing.

Khayyam had nog geen coördinatenstelsel of vergelijkingen, dus zijn beschrijvingen waren wat anders van aard. Zijn beschrijvingen van de parabool (en bij de andere gevallen ook andere kegelsneden) sluiten aan bij de manier waarop zijn voorgangers, zoals de Griek Apollonius erover schreven. (Wie meer wil weten over kegelsneden in de Griekse oudheid, zie een artikel op de site van Jan Hogendijk.^[4])

In figuur 3 zijn $c = 4$ en $d = 8$ genomen, dus dat hoort bij de vergelijking $x^3 + 4x = 8$.



figuur 3

Hier kun je natuurlijk allerlei interessante vragen bij stellen. Klopt dit wel? Waarom klopt dit eigenlijk? Hoe komt hij aan dit idee? Een eerste stap om in te zien dat wat Khayyam doet inderdaad wel klopt, is de hele boel te vertalen naar

moderne beschrijvingen in een coördinatenstelsel (omdat de oude beschrijving begrijpen volgens mij niet zo nuttig is voor de moderne leerling). Die van de parabool is hier al gegeven, die van de cirkel zouden de leerlingen zelf kunnen opstellen. De straal moet $\frac{d}{2c}$ zijn en het middelpunt $(\frac{d}{2c}, 0)$, dus de vergelijking van de hele cirkel wordt dan:

$$(x - \frac{d}{2c})^2 + y^2 = \frac{d^2}{4c^2}.$$

Andersom kan ook, je geeft bijvoorbeeld de vergelijking

$$x(\frac{d}{c} - x) = y^2, \text{ en de leerling moeten dan uitvogelen}$$

waarom dat de vergelijking van een cirkel is met het juiste middelpunt $(\frac{d}{2c}, 0)$ en de juiste straal $\frac{d}{2c}$. Dat kan met

kwadraat afsplitsen en geeft wat oefening in algebraïsche vaardigheden.

Als dat wat veel van het abstractievermogen vraagt, kun je er natuurlijk ook voor kiezen met de vaste c en d aan de slag te gaan en het eerst maar eens voor dat concrete geval uit te laten zoeken.

Als we bijvoorbeeld $c = 4$ en $d = 8$ kiezen, worden de

vergelijkingen in kwestie: $y = \frac{1}{2}x^2$ en $y = \sqrt{x(2-x)}$.

Deze functies kun je gewoon tekenen op de GR, het snijpunt bepalen geeft $x \approx 1,3646556$. Dat invullen in $x^3 + 4x$ geeft inderdaad 8.

Om algebraïsch te controleren of dit snijpunt inderdaad een oplossing geeft, moet je dus controleren dat voor deze x inderdaad geldt dat $x^3 + 4x = 8$. De x die we gevonden hebben voldoet aan twee vergelijkingen:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ en } y = \sqrt{x(2-x)}.$$
 Deze aan elkaar gelijkstellen

levert: $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{x(2-x)}$. Kwadrateren aan beide kanten

geeft $\frac{1}{4}x^4 = x(2-x)$. Het lijkt alsof we nu verder van

huis zijn, want dit is een vierdegraads vergelijking. Maar elke term heeft een factor x , zien we na uitschrijven: $\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 2x = 0$. We kunnen x buiten haakjes halen, en omdat x sowieso ongelijk aan 0 is (dan vinden we het verkeerde snijpunt, namelijk dat in de oorsprong) kunnen we concluderen dat voor onze x geldt: $\frac{1}{4}x^3 + x - 2 = 0$, oftewel: $x^3 + 4x = 8$.

Dit hele verhaal kan ook algemeen: het snijpunt van

$$x^2 = \sqrt{c} \cdot y \text{ en } y^2 = x(\frac{d}{c} - x) \text{ geeft op dezelfde manier}$$

$$\frac{x^4}{c} = x(\frac{d}{c} - x), \text{ oftewel: } x^4 + cx^2 - dx = 0 \text{ en omdat}$$

$x = 0$ niet de oplossing is waar het hier over gaat kunnen we x wegdelen en volgt inderdaad dat $x^3 + cx = d$.

Andere gevallen

In andere gevallen heeft Omar Khayyam soortgelijke aanpakken. De vergelijking $x^3 + c = bx$ lost hij bijvoorbeeld op door het snijpunt te bepalen van de parabool

$$x^2 = \sqrt{b} \cdot y \text{ en de hyperbool } y^2 = x^2 - \frac{c}{b}x.$$

Hier kun je dezelfde vragen bij stellen als bij het eerste voorbeeld, je kunt op dezelfde manier laten zien dat dat inderdaad klopt. Maar je kunt ook ingaan op vragen als: hoe zie je nou aan de vergelijking in het eerste voorbeeld dat het om een cirkel gaat, en in het tweede voorbeeld om een hyperbool?

Bronnen

De bronnen zelf zijn in dit geval wat lastig te lezen voor leerlingen, vooral omdat Khayyams beschrijvingen van de kegelsneden niet de manier zijn waarop de moderne lezer daarnaar kijkt. Wie daar wel in geïnteresseerd is, kan een Engelse vertaling vinden in Katz.^[3] We kijken nog even terug naar het voorbeeld van Stampioen, de vergelijking $x^3 + 36x = 305$. Een leuke vraag kan nu zijn: zie je in het plaatje van Stampioen dezelfde figuren als in de aanpak van Khayyam? Hoe ziet jouw plaatje eruit als je het op de manier van hierboven tekent op je GR? Waar zit in Stampioens plaatje het lijnstuk dat de oplossing is? Wat ik leuk vind aan deze methode is dat je ziet dat oude wiskundigen creatief omgingen met hun problemen. Algebraïsch lukte het nog niet, maar meetkundig kwam Khayyam er met de theorieën van de kegelsneden wel uit, al was dat niet het soort oplossing dat hij graag wilde.

Literatuur

- [1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.O. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon.
- [2] Stampioen, Johan d'Jonghe (1639). *Algebra ofte nieuwe stel-regel waer door alles gevonden wordt in de wis-kunst, wat vindtbaer is*. Den Haag: 'ghedruckt ten huysse van de Autheur in sphaera mundi'.
- [3] Vertaald uit: Katz, V. (Ed.) (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A sourcebook*. Princeton: Princeton University Press, blz. 556 e.v.
- [4] Hogendijk, J. (1995). Kegelsneden in de Griekse oudheid. In: A. Grootendorst (Ed.) *Vakantiecursus kegelsneden en kwadratische vormen*, CWI Syllabus no. 40. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica. Artikel is te downloaden op <http://www.jphogendijk.nl/publ.html>

Over de auteur

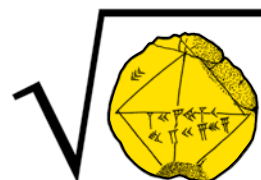
Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

WORTELS VAN DE WISKUNDE

11: HET DUIDEN VAN DATA

Desiree van den Bogaart

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: statistiek aan de hand van oude gegevens.



Inleiding

In het meest recente examenprogramma havo/vwo dat een paar jaar geleden is ingevoerd, heeft een duidelijke verschuiving plaatsgevonden in het domein statistiek. Waar eerst de kansrekening een prominente plaats had, is het nu de interpretatie van datasets die een centrale plaats inneemt. Dit is een weerspiegeling van ontwikkelingen in de maatschappij, waarbij het belang van big data steeds groter wordt.

In de onderbouw havo/vwo en de bovenbouw van het vmbo is het werken met datasets ook niet onbekend. Het is een geliefd onderwerp voor bijvoorbeeld praktische opdrachten. Leerlingen kunnen zelf data verzamelen, bijvoorbeeld via een enquête of online, over een onderwerp dat hun interesse heeft, en die data grafisch weergeven en liefst ook een beetje interpreteren. Een klassieker in dit genre is de Nationale Doorsnee, een onderbouwproject uit 2000 dat door het Freudenthal Instituut is ontwikkeld en uitgevoerd in samenwerking met het CBS, waarmee de gemiddelde leerling in kaart werd gebracht. Een andere populaire context voor het bedrijven van statistiek is sport, en sinds een aantal jaar levert ook de Top 2000 (met dank aan Tom Goris) een schat aan data voor gebruik in de wiskundeles.

Sterftecijfers

Historisch gezien waren de data waarmee het vakgebied statistiek is ontwikkeld een stukje grimmiger van aard. De eerste publicatie op het gebied van statistiek dateert uit de zeventiende eeuw en had betrekking op de sterftecijfers van de stad Londen. John Graunt schreef (in samenwerking met William Petty) *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*^[1]. De eerste versie van dit boek is uit 1622, maar daarna zijn nog vele versies gepubliceerd, steeds aangevuld met de meeste recente cijfers. *De Bills of Mortality* waren lijsten die wekelijks en jaarlijks werden gepubliceerd in Londen (en later ook in andere grote steden), waarin de sterftecijfers en bijbehorende doodsoorzaken werden weergegeven op basis van de begrafenis die in

die periode hadden plaatsgevonden. In figuur 1 is een fragment van zo'n lijst te zien. Graunt vatte de lijsten samen in tabellen, zie als voorbeeld figuur 2, formuleerde patronen die hij waarnam en gebruikte de cijfers om een schatting te maken van het aantal inwoners van de stad Londen. Hij gebruikte daarbij ook geboortecijfers en een stadsplattegrond.

figuur 1 *Bills of Mortality*, 17e eeuw

Gemiddelde mens

Het woord statistiek komt overigens van het woord staat: het was de wetenschap waarmee vanaf de achttiende eeuw de staat werd bestudeerd. In de negentiende eeuw vonden statistische methodes hun weg in de sociale wetenschappen. De Belg Adolphe Quetelet was een

(181)

An.Dom.	Buried		Christened	
	Males	Females	Males	Females
1649	5454	5112	3079	2746
1650	4548	4216	2860	2722
1651	5680	5147	3231	2840
1652	6543	6026	3220	2908
1653	5416	4671	3196	2959
1654	6972	6275	3441	3179
1655	6037	5330	3653	3349
1656	7365	6556	3668	3382
	44005	41333	26380	24085
1657	6578	5856	3396	3289
1658	7936	7057	3157	3013
1659	7451	7395	3209	2781
1660	7960	7158	3724	3247
1661	10448	9287	4748	4107
1662	8623	7931	5216	4803
1663	8035	7321	5411	4881
1664	9369	8928	6041	5681
	66400	60843	34902	31802
Total	235427	214658	150750	146231

figuur 2 Graunts *Observations*, vijfde editie uit 1676

pionier van deze activiteiten. Voor wie meer hierover wil lezen, zie onder andere Schets 22 van Wortels van de wiskunde^[2]. Quetelet gebruikte de Gaussische verdeling, die ontwikkeld was om de verdeling van meetfouten weer te geven, om uitspraken te doen over de gemiddelde mens. Daarmee kreeg de naamgeving normale verdeling meteen een ongewenste lading, die het tot op de dag van vandaag nog steeds met zich meedraagt: als je te ver afwijkt van het gemiddelde, ben je niet normaal. Rekenen met lengte en gewicht van kinderen uit je eigen klas is altijd een beetje linke soep, hoewel het natuurlijk ook weer aanleiding kan geven tot interessante discussies over gezonde voeding en schoonheidsidealen. In plaats daarvan is het gebruiken van een oude tabel zoals in figuur 3 misschien veiliger.

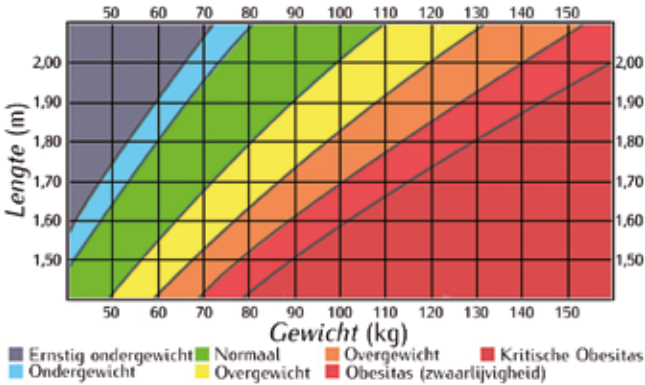
Zaken die je leerlingen bijvoorbeeld zouden kunnen opvallen aan deze tabel: de tabel begint bij de lengte en het gewicht bij geboorte; de lengte is in millimeters nauwkeurig en het gewicht in tientallen grammen; er zijn minima en maxima gegeven bij elke leeftijdscategorie. Ze kunnen ook zelf berekeningen uitvoeren met deze data, zoals centrum- en spreidingsmaten berekenen, en diagrammen maken.

In de vierde kolom *verhouding tussen gewicht en lengte* is simpelweg de deling van de eerste door de tweede uitgevoerd. Quetelet is ook de bedenker van de zogenaamde *Body Mass Index* (BMI), waarbij het gewicht wordt gedeeld door het kwadraat van de lengte, maar die berekening heeft hij hier dus nog niet toegepast. Je zou je leerlingen de BMI van de mannen uit de negentiende eeuw kunnen laten berekenen, en vergelijken met de (moderne) grafiek in figuur 4. Ook hier zie je weer een

Hebersicht des Wachses und des Gewichts beim männlichen Geschlecht in dem verschiedenen Lebensaltern.

Alter.	Wuchs.	Gewicht.	Verhältn. des Gewichts zu dem Wuchse.	Beobachteter Wuchs.		Beobachtetes Gewicht.	
				Maxim.	Minim.	Maxim.	Minim.
	Meter.	Kilogr.		Meter.	Meter.	Kilogr.	Kilogr.
Geburt.	0,496	3,20	6,19	0,532	0,438	4,50	2,34
1 Jahr	0,696	10,00	14,20	0,750	0,682	11,00	9,00
2 Jahre	0,797	12,00	15,00	0,824	0,730	13,50	10,50
3 „	0,860	13,21	15,36	0,875	0,840	13,60	12,10
4 „	0,932	15,07	16,32	0,965	0,840	18,20	12,50
5 „	0,990	16,70	16,98	1,080	0,915	18,50	14,00
6 „	1,046	18,04	17,44	1,115	0,960	20,40	15,80
7 „	1,112	20,16	18,31	1,162	1,109	24,50	17,20
8 „	1,170	22,26	18,92	1,260	1,120	28,50	19,00
9 „	1,227	24,09	19,68	1,325	1,150	29,00	22,20
10 „	1,282	26,12	20,37	1,325 ^{*)}	1,163	32,00	22,70
11 „	1,327	27,85	21,58	1,405	1,215	33,80	25,00
12 „	1,359	31,00	22,80	1,450	1,270	36,30	25,00
13 „	1,403	35,32	25,30	1,490	1,300	39,50	34,60
14 „	1,487	40,50	27,49	1,630	1,330	45,00	37,00
15 „	1,550	46,41	29,88	1,658	1,380	61,50	37,00
16 „	1,610	53,39	33,00	1,730	1,430	61,50	40,00
17 „	1,670	57,40	34,25	1,790	1,467	65,50	45,00
18 „	1,700	61,26	35,67	1,790	„	67,00	45,00
19 „	1,706	63,32	37,00	1,800	„	70,00	48,20
20 „	1,711	65,00	37,99	1,838	„	72,70	„
25 „	1,722	68,29	39,66	1,890	„	98,50	„
30 „	1,722	68,90	40,02	„	„	„	„
40 „	1,713	68,81	40,03	„	„	„	„
50 „	1,674	67,45	40,14	„	„	„	„
60 „	1,639	65,50	40,01	„	„	„	„
70 „	1,623	63,03	38,83	„	„	„	49,1
80 „	1,613	61,22	37,96	1,820	1,467	83,0	49,7

figuur 3 Lengte en gewicht van mannen uit de negentiende eeuw^[3]

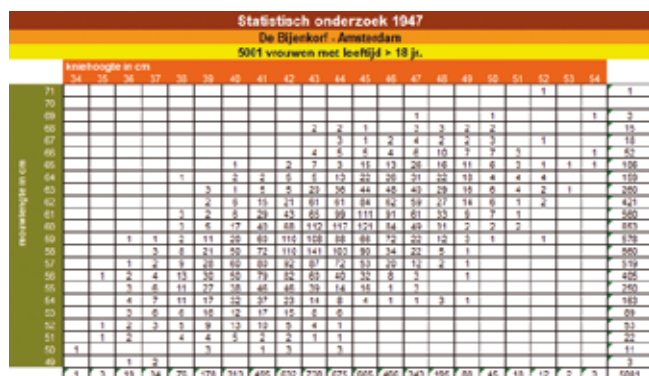


figuur 4 Grafiek met indeling van BMI

voorbeeld van hoe het gebruik van data de interpretatie ervan kan veranderen. Quetelet introduceerde zijn BMI als *beschrijvende* statistiek, maar door er nu categorieën met labels als ‘ondergewicht’ en ‘ernstig overgewicht’ aan te hangen, krijgt het meer een *voorschrijvend* karakter.

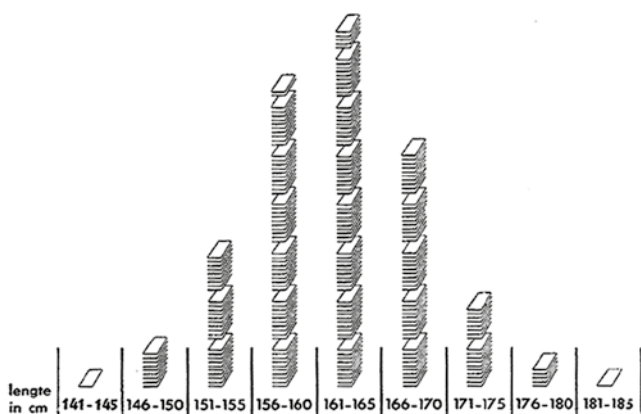
Lichaamsmaten

De tweede bron die ik wil bespreken, is afkomstig van het beroemde onderzoek dat Freudenthal en Sittig uitvoerden in 1947 in opdracht van winkelketen De Bijenkorf. Er was behoefte aan een nieuw uniform maatsysteem voor de kleding. Bij een groep van 5001 vrouwen werden vijftien



figuur 5 Kruistabel van mouwlengte en kniehoogte van de vrouwen. Gegevens uit 1947

lichaamsmaten opgemeten (zoals gewicht, lengte en taille) en deze gegevens zijn statistisch geïnterpreteerd. Het ontworpen maatsysteem is helaas nooit gebruikt, maar de datacollectie is fantastisch. Waar in de tijd van Freudenthal werd gewerkt met ponskaarten, zijn nu Excelbestanden met gedeelten van de data beschikbaar. Zie figuur 5 afkomstig uit lesmateriaal van de Leergang Wiskunde^[4].



figuur 6 Beelddiagram van de lengte van de vrouwen. Elk (pons)kaartje stelt 20 gemeten vrouwen voor

Niet alleen met Excel zijn er mooie plaatjes te genereren bij deze data, zoals figuur 6 laat zien. Dit is een beelddiagram, waarin de frequentieverdeling van de lengte van de vrouwen is weergegeven. Het is afkomstig uit het artikel *De juiste maat* van Heleen Verhage in de *Nieuwe Wiskrant* van 2005^[5]. Voor wie meer wil weten over het onderzoek van Freudenthal en Sittig en de mogelijkheden voor in de klas, raad ik dit artikel van harte aan.

Ook hier kan het leuk zijn om je leerlingen een vergelijking te laten maken met moderne diagrammen. Figuur 7 laat de indeling van panty's van een bepaald merk zien. Gebaseerd op de data uit 1947, hoe zou de verdeling van de maten panty's in een winkel optimaal zijn? Zou dat in



figuur 7 Maattabel voor panty

de tegenwoordige tijd nog steeds goed inkoopbeleid zijn? (De nylonpanty kwam overigens in 1967 pas op de markt, dus twintig jaar na het onderzoek van Freudenthal.)

Noten

- [1] Graunt, J. (1662). *Natural and political observations made upon the bills of mortality*. London.
- [2] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- [3] Bron: de Duitse vertaling uit 1838 (door Rieck) van Quetelets boek *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale: Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten*.
- [4] Te downloaden van de *Euclides* site.
- [5] Verhage, H. (2005) De juiste maat. *Nieuwe Wiskrant*, jaargang 25, nummer 1, p. 76-81. Te downloaden van de *Euclides* site.

Bronnen

Vlis, J. H. van der (1989). *Geschiedenis van kansrekening en statistiek*. Rijswijk: Pandata Uitgeverij.
Op de site opendata.cbs.nl zijn nog meer datasets te vinden met historische gegevens, denk bijvoorbeeld aan de weergegevens van weerstation De Bilt van 1800.
Een mooie bron voor sportstatistiek is <https://miriamenstatistiek.wordpress.com>

 vakbladeuclides.nl/942bogaart

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

12: OP WEG NAAR $\sqrt{-1}$ ALS GETAL

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Voor deze aflevering is Peter Lanser gastschrijver. Zijn bijdrage gaat over de acceptatie van $\sqrt{-1}$.



Inleiding

In de derde klas havo/vwo wordt bij het onderdeel oplossen van kwadratische vergelijkingen, als blijkt dat de product-som-methode of het ontbinden van factoren niet altijd lukt, het kwadraat afsplitsen geïntroduceerd. De *abc*-formule, die ook wel de wortelformule wordt genoemd – in vroegere tijden werden oplossingen van vergelijkingen wortels genoemd – is een veralgemening van het kwadraat afsplitsen. In de *abc*-formule is een essentiële rol weggelegd voor de discriminant, oftewel hetgeen discrimineert (Latijn: *discriminare*, onderscheiden). Aan de hand van de waarde van de discriminant kunnen leerlingen bepalen hoeveel oplossingen, hoeveel snijpunten met een gegeven horizontale lijn, een kwadratische formule heeft. *Moderne Wiskunde 3A vwo* (2014, p. 108) concludeert bij de discriminant: 'Je kunt niet de wortel van een negatief getal trekken. Daarom vind je alleen oplossingen als $D \geq 0$.'

Het is begrijpelijk, maar tegelijkertijd jammer dat de kous hiermee af lijkt te zijn. Zou het oplichten van een tipje van de sluier dat er in een

bepaalde tak van de wiskunde een $D < 0$ wel degelijk tot oplossingen leidt, (sommige) leerlingen niet nieuwsgierig kunnen maken? En zou je de conceptuele worsteling met de wortel uit een negatief getal kunnen belichten aan de hand van primaire bronnen?

Derdegraads vergelijkingen

In de 15^e en 16^e eeuw was het oplossen van specifieke derde- en vierdegraads vergelijkingen in Italië een kunst op zich, waar flinke sommen geld maar zelfs ook dertig (!) banketten mee verdiend konden worden.^[1]

Scipione del Ferro (1456 – 1526) zocht en vond een algemene oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px = q$.

Niccolò Fontana (1499 – 1557) is de ontdekker van een oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 = px + q$. Over Fontana, die een groot deel van zijn leven Tartaglia, stotteraar, werd genoemd, is een mooie roman geschreven.^[2]

In 1545 publiceerde Girolamo Cardano in zijn beroemde *Artis Magnæ, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus*, beter bekend als *Ars Magna*, zonder enige verwijzing de oplossingsmethode van Tartaglia, die Cardano onder belofte van geheimhouding van hem had gekregen:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Over deze fascinerende Italiaanse intrige kun je meer lezen in schets 11 van *Wortels van de wiskunde*. Op bovenstaande oplossingsmethode kom ik later terug.

Naast algemene algebraïsche oplossingen voor kubische/derdegraads en vierdegraads vergelijkingen bevat het boek vraagstukken

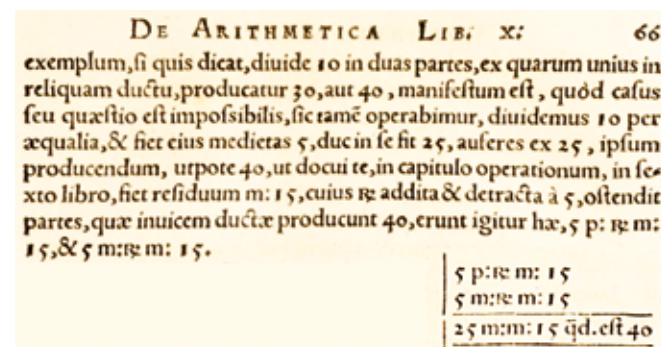
over kwadratische vergelijkingen, opgaven die leerlingen in 3 havo/vwo goed kunnen begrijpen.

Een van de vraagstukken in *Ars Magna* is: 'Vind twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40.' Je kunt leerlingen bijvoorbeeld een tabel laten maken van positieve getallen die opgeteld 10 opleveren. De conclusie zal uiteindelijk zijn dat het product nooit meer dan 25 kan zijn. Met het merkwaardig product $p(x) = (5 + x)(5 - x)$ met $0 < x < 5$ kunnen leerlingen dit ook daadwerkelijk aantonen. De grafiek van $p(x)$ maakt het mooi inzichtelijk.

'KUN JE DE CONCEPTUELE WORSTELING MET DE WORTEL UIT EEN NEGATIEF GETAL BELICHTEN AAN DE HAND VAN PRIMAIRE BRONNEN?'

Cardano schrijft over dit vraagstuk in *Ars Magna* zelf het volgende:

Als gezegd wordt, deel 10 in twee delen, waarvan het product 40 is, dan is het duidelijk dat dit onmogelijk is. Desondanks doen we het als volgt: we delen 10 in twee gelijke delen, wat elk 5 maakt. Dit kwadrateren we, en dat wordt 25. Trek daar 40 van af en dat geeft een rest van -15, waarvan de vierkantswortel opgeteld of afgetrokken bij 5 de delen geeft waarvan 40 het product is. Dat zijn $5 + \sqrt{-15}$ en $5 - \sqrt{-15}$. De mentale marteling die dit geeft opzij gezet hebbende, het vermenigvuldigen van $5 + \sqrt{-15}$ en $5 - \sqrt{-15}$ geeft $25 - (-15)$. Zie hier het product 40. Dit is werkelijk een intellectueel spelletje dat betekenisloos is. (eigen bewerking uit het Engels)^[3]

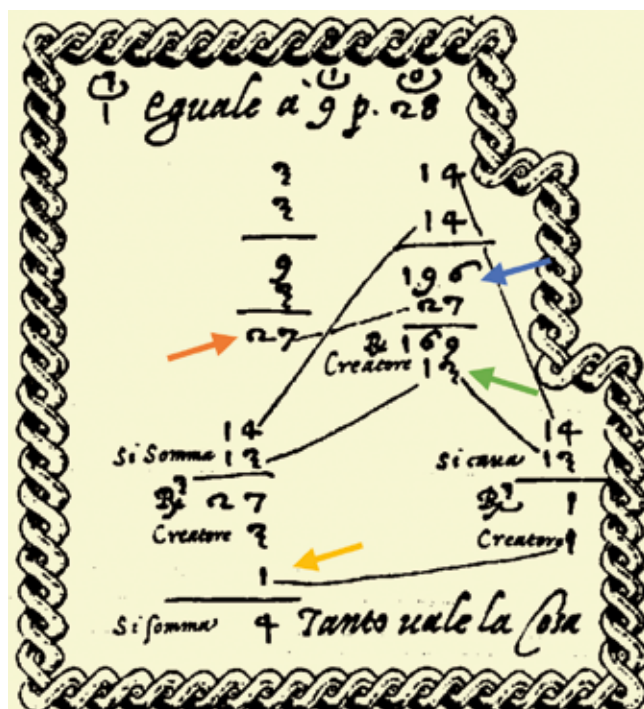


figuur 1 Oplossing van vraagstuk 'Vind twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Uit: G. Cardano, *Ars Magna* (1545)

In de kolom onder de originele tekst uit *Ars Magna*, zie figuur 1, gebruikt Cardano 'p' voor più (plus), 'm' voor meno (min) en 'R' voor wortel, voor de optelling van $5 p: R m: 15$ en $5 m: R m: 15$, oftewel $5 + \sqrt{-15}$ en $5 - \sqrt{-15}$, dat $25 m: m: 15$ qd. est. 40 oplevert, oftewel $20 - (-15) = 40$.

Bombelli

Rafaël Bombelli (1526 - 1572) gaat in zijn enige werk *L'Algebra*, dat pas in 1572 gepubliceerd werd, verder met de algemene oplossingsmethode van Cardano (lees: Tartaglia). Over Bombelli is niet veel meer bekend dan dat hij een ingenieur en architect was en zich bezighield met het droogleggen van moerassen en het bouwen van bruggen. Bombelli werd door latere wiskundigen als Leibniz en Huygens hogelijk gewaardeerd. *L'Algebra* is de eerste publicatie waarin wortels uit negatieve getallen gebruikt worden en waarmee gerekend wordt om tot een reële oplossing te komen van bijvoorbeeld derdegraads vergelijkingen.^[4]



figuur 2 De oplossing van $x^3 = 9x + 28$. Uit: R. Bombelli, *L'Algebra* (1572)

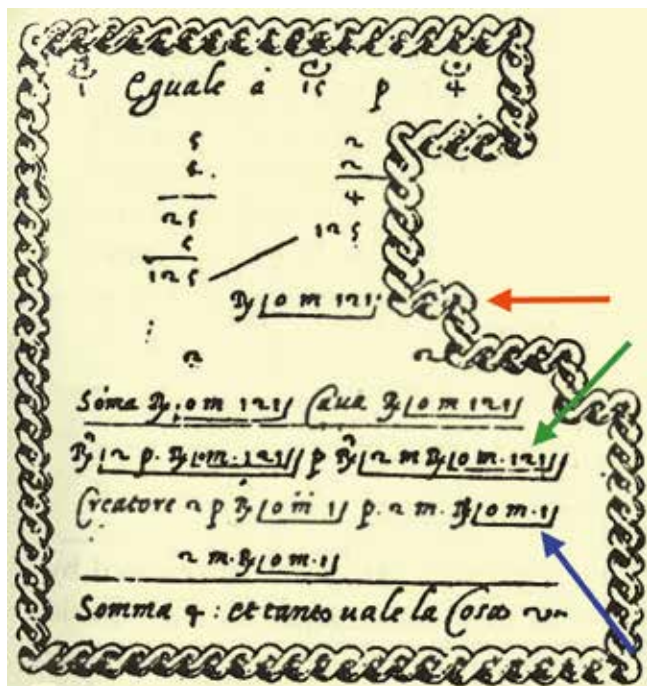
In figuur 2 zie je hoe Bombelli, met gebruikmaking van de oplossingsmethode van Tartaglia/Cardano, de vergelijking $x^3 = 9x + 28$ oplost. (Let ook op de versiering van de oplossing!) Deze methode is voor een geïnteresseerde 3 havo/vwo- leerling prima te volgen.

De notatie van genoemde vergelijking is zonder variabelen maar met de exponenten in 'kommetjes' boven de coëfficiënten, wat later bijvoorbeeld ook terug te zien is bij Johan d'Jonghe Stampioen.^[5] Net als Stampioen beschouwde Bombelli de vergelijking meetkundig: een kubus is gelijk aan 9 zijdes van de kubus plus 28. Het is eigenlijk jammer dat deze interpretatie door de opkomst van de analytische meetkunde zo in de vergetelheid is geraakt.

In de prachtig gestructureerde oplossingsmethode werkt Bombelli in de rechterkolom bovenaan voor $q = 28$ het kwadraat van $q : 2$ uit (zie ) , en in de linkerkolom voor $p = 9$ de derdemacht van $p : 3$ (). Vervolgens gaat hij in de rechterkolom verder met het verschil van het kwadraat en de derdemacht, waar dan de wortel van getrokken wordt (). Links gaat Bombelli verder met de optelling van 14 en 13, rechts met het verschil van 14 en 13. De derdemachtswortels van 27 en -1 worden opgeteld (si somma), wat de reële oplossing 4 () oplevert (tanto uale la cosa = zoveel is gelijk aan het ding).

Een leerling zou kunnen denken: 'Omslachtig, met wat proberen kun je er sneller uitkomen. Maar het werkt blijkbaar...'

In het fragment in figuur 3 kun je zien dat Bombelli met de oplossingsmethode van Cardano/Tartaglia in de vergelijking $x^3 = 15x + 16$ echt aan de slag gaat met (vierkants)wortels uit negatieve getallen.



figuur 3 De oplossing van $x^3 = 15x + 16$ met (vierkants) wortels uit negatieve getallen. Uit: *L'Algebra*

Hij volgt hier dezelfde procedure als bij de vergelijking $x^3 = 9x + 28$.

In $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ komt hij dan uit op de wortel uit

0 min 121 (zie ). Bombelli schrikt hier in zijn geheel niet van en gaat verder met

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (\text{creatore})$$

$(2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$ () wat leidt tot Somma 4: et tanto uale la cosa, de waarde voor wat onbekend was, namelijk de zijde van de kubus.

Bombelli formuleerde in *L'Algebra* ook rekenregels voor het rekenen met wortels uit negatieve getallen. Hij combineerde de woorden 'più' (plus) en 'meno' (min) tot 'più di meno' voor de 'plus van een wortel uit een negatief getal', en tot 'meno di meno' voor een 'min van een negatieve wortel'.^[6]

In de vijfde regel van het fragment in figuur 4 uit *L'Algebra* kun je bijvoorbeeld lezen dat een positieve wortel uit een negatief getal vermenigvuldigd met zichzelf een negatief getal wordt. Leerlingen kunnen vervolgens de overige zinnen 'vertalen'.

Over de wortels uit negatieve getallen schrijft Bombelli zelf: '(...) en hoewel dit voor velen buitenissig lijkt – ook ik

**Più via più di meno, fa più di meno.
Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno fa meno.**

figuur 4 Rekenen met wortels uit negatieve getallen. Uit: *L'Algebra*

deelde een tijd lang deze mening, de indruk hebbende dat het meer denkbeeldig was dan waar – bleef ik niettemin proberen totdat ik kon aantonen (...) dat het zonder problemen werkt, en men vaak genoeg de waarde van de *Tanto* als getal kan vinden'.^[7]

Noten

- [1] Katz, V. (1993). *A history of mathematics*. New York: Harper Collins, p. 329.
- [2] Jörgensen, D. (2000). *De rekenmeester*. Den Haag: BZZT&H
- [3] Fauvel, J. et al (2000). *History in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, p. 305.
- [4] Wagner, R. (2010). The geometry of the unknown. In Heeffer, A. & Van Dyck, M. *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern mathematics* (pp. 229-269). London: College Publications. Artikel is te downloaden op <http://www2.mta.ac.il/~rwagner/publications/geometry%20of%20the%20unknown.pdf>.
- [5] Daems, J. (2018). Wortels van de wiskunde. 10: Derdegraads vergelijkingen, *Euclides*, 93(7), pp. 14-16.
- [6] Schets 17 in: Berlinghoff, W. & Gouvêa, F.O. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon, p. 141.
- [7] Wagner, R. The geometry of the unknown. In Heeffer, A. & Van Dyck, M. (2010) *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern mathematics*, College Publications (2010), 229-269.

Over de auteur

Peter Lanser is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Hij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bacheloropleiding en in de vorm van workshops. Hij is tevens auteur van het zevende Zebra-boekje *De laatste stelling van Fermat* (2000). E-mailadres: p.t.lanser@hva.nl

13: LOGARITMEN

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek^[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de logaritme.



Logaritme nu

De logaritme is een lastig onderwerp voor veel leerlingen. Ze wordt op een nogal abstracte manier geïntroduceerd: als het getal wat je bij een gegeven grondtal in de exponent moet zetten om een bepaalde uitkomst te krijgen. In functietermen: een logaritme is de inverse van een exponentiële functie. In figuur 1 zie je hoe de logaritme gedefinieerd wordt in *Getal & Ruimte*.



De exacte oplossing van de vergelijking $2^x = 6$ noemen we ${}^2\log(6)$ en die van $5^x = 10$ noemen we ${}^5\log(10)$.

fi guur 2 *Wageningse Methode*, 4V wiskunde B (2015)

9.1 Logaritmen

9.1 Vul in.

a $2^x = 8$	c $2^x = \sqrt{2}$	e $3^x = \frac{1}{27}$
b $2^x = \frac{1}{4}$	d $3^x = 9$	f $3^x = \sqrt[3]{3}$

Theorie A De logaritme

In opgave 1a heb je in moeten vullen tot welke macht je 2 moet verheffen om 8 te krijgen. Voor deze opdracht bestaat de notatie ${}^2\log(8)$.

- De notatie log komt van **logaritme**.
- In ${}^2\log(8)$ is 2 het **grondtal van de logaritme**.
- ${}^2\log(8)$ spreek je uit als de tweede logaritme van 8 of kortweg 2 log 8.

${}^2\log(8)$ is de exponent van het grondtal 2 waarmee de macht gelijk is aan 8. Deze exponent is 3, dus ${}^2\log(8) = 3$. En zo is ${}^2\log(\frac{1}{4})$ gelijk aan -2, want $\frac{1}{4}$ is 2^{-2} .

${}^3\log(\frac{1}{27})$ is de exponent van het grondtal 3 waarmee de macht gelijk is aan $\frac{1}{27}$.

${}^g\log(x)$ is de exponent van het grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x .
In ${}^g\log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

Zoek je de uitkomst van ${}^3\log(3^4)$ dan is het antwoord natuurlijk 4. Dus zoek je de uitkomst van ${}^3\log(81)$, dan bedenkt je dat $81 = 3^4$, dus ${}^3\log(81) = {}^3\log(3^4) = 4$. En zo is ${}^3\log(9\sqrt{3}) = {}^3\log(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}) = {}^3\log(3^{\frac{5}{2}}) = 2\frac{1}{2}$.

${}^g\log(g^x) = x$

figuur 1 *Getal & Ruimte*, vwo B deel 3 (11^e editie)

Wat mij opvalt is dat de logaritme hier een 'opdracht' wordt genoemd, en niet een functie. In *Moderne Wiskunde* lijkt de aanpak hierop, al is het daar de 'oplossing' van de vergelijking $g^x = a$. De *Wageningse Methode* doet dat ook en formuleert het als volgt, zie figuur 2.

Tegenwoordig is de logaritme een bijzonder soort functie, vooral nuttig bij het primitiveren, en exponentiële functies zijn belangrijk in allerlei modellen dus is de inverse functie ook best handig.

Toch is mijn ervaring dat veel leerlingen het nut van de logaritme niet ervaren. Ze is abstract, je moet goed onthouden wat er nou precies wordt omgedraaid, de rekenregels voelen voor leerlingen niet logisch en geven geen houvast. Het is een omgekeerde bewerking bij exponentiële berekeningen, net zoals breuken bij vermenigvuldigen en wortels bij machtsverheffen, en net als bij die onderwerpen speelt ook hier de proces-objectdualiteit een rol: een logaritme heeft aan de ene kant een proceskarakter, het is een opdracht (letterlijk zelfs, in *Getal & Ruimte*), maar tegelijkertijd is het ook een object op zich waar je weer mee kunt werken en waar rekenregels voor gelden. En dan is het ook nog een functie waar je een grafiek bij kunt tekenen.

Wat meer kennis van de geschiedenis kan het nut van de logaritme wat voelbaarder maken, waardoor de leerling ook de belangrijkste rekenregel misschien wat beter kan onthouden.

Logaritme toen

De logaritme is helemaal niet bedacht als inverse van een exponentiële functie. Logaritmen werden uitgevonden door o.a. de Schot John Napier aan het begin van de zeventiende eeuw. In die tijd bestonden het functiebegrip en de grafiek nog niet eens, laat staan het begrip inverse functie; ook e en e^x waren er nog niet. Waardoor kwam hij dan toch met die logaritme?

Een van de grootste problemen in de wetenschap in die tijd was de grote hoeveelheid rekenwerk die verzet moest worden. In onze tijd van computers kun je het je nauwelijks meer voorstellen, maar al die berekeningen, vaak met grote getallen, moesten met de hand. In de sterrenkunde werden de metingen steeds nauwkeuriger,

dus de berekeningen moesten met steeds grotere getallen. Die berekeningen gingen ook vaak over sinussen, en de sinussen in de sinustabellen bestonden uit wel negen cijfers (de sinus was toen nog de lengte van een lijnstuk en niet een getal tussen 0 en 1, dus voor zo'n sinustabel nam men een cirkel met een zeer grote straal om breuken te vermijden). Denk maar eens aan het cijferend rekenen: optellen en aftrekken gaat nog wel, maar bij grote getallen, van negen cijfers, is vermenigvuldigen wel erg veel werk en is de kans op fouten groot. Napier zelf schrijft daarover in het voorwoord van zijn boek *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614):

Since nothing is more tedious, fellow mathematicians, in the practice of the mathematical arts, than the great delays suffered in the tedium of lengthy multiplications and divisions, the finding of ratios, and in the extraction of square and cube roots - and in which not only is there the time delay to be considered, but also the annoyance of the many slippery errors that can arise: I had therefore been turning over in my mind, by what sure and expeditious art, I might be able to improve upon these said difficulties. In the end after much thought, finally I have found an amazing way of shortening the proceedings,^[2]

En dat is de reden voor het ontstaan van de logaritme. Napier werd waarschijnlijk geïnspireerd door het rijtje in Michael Stifels *Arithmetica Integra* uit 1544, zie figuur 3.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

figuur 3 Uit: Michael Stifels (1544). *Arithmetica Integra*

Stifel legde daarbij uit dat vermenigvuldigen in het onderste rijtje correspondeerde met optellen in het bovenste rijtje, en delen in het onderste met aftrekken in het bovenste. Om $1/8$ en 64 te vermenigvuldigen aan de onderkant, wat natuurlijk 8 gaat worden, tel je aan de bovenkant het aantal factoren twee op: $-3 + 6 = 3$, en dat staat inderdaad boven 8.

Op dat principe berustte Napiers logaritmeconcept. In 1614 verscheen zijn eerste boek hierover. Henry Briggs^[3] zag dat boek en samen met Napier heeft hij het logaritmeconcept verbeterd. Ze werden het er over eens dat het beter zou zijn om de logaritme van 1 gelijk aan 0 te kiezen. Briggs stelde de logaritme van 10 gelijk aan 10^{14} , want hij rekende met gehele getallen en wilde een tabel op 14 cijfers nauwkeurig. Toen men eenmaal gewend was aan kommagetallen werd het gebruikelijk

om $\log(10) = 1$ te gebruiken. Briggs besteedde veel tijd aan het berekenen van de nieuwe tabellen. Onafhankelijk ontdekte ook de Zwitserse Joost Bürgi het principe van de logaritme toen hij assistent was bij Kepler.

Napiers ideeën zijn wat ingewikkeld, maar uiteindelijk is het principe tamelijk eenvoudig: als je nou een zeer uitgebreide tabel hebt zoals hierboven, dan kun je vermenigvuldigingen veel sneller uitvoeren door een optelling te doen. Zie voorbeeld 1 verderop. Eigenlijk is de bekendste rekenregel voor de logaritme dus de reden dat hij uitgevonden is: $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Je kunt ervoor kiezen de logaritme zo te introduceren bij leerlingen. Dus niet eerst de logaritme behandelen en dan de bronnen erbij halen om te laten zien waarom die logaritme bedacht is, maar andersom: beginnen bij de bronnen en deze rekenregel, en daarna de moderne benadering. Bijna alle andere rekenregels voor de logaritme kun je bewijzen uit deze ene, alleen is $r \cdot \log(a) = \log(a^r)$ voor irrationale getallen r wat lastig.^[4]

Tabellen van De Decker

In Nederland gingen Ezechiël de Decker en Adriaen Vlacq met het onderwerp aan de slag. Samen publiceerden zij in 1626 het *Eerste deel van de nieuwe telkonst*^[5], wat nog niet over de logaritmen gaat. Dat is een vertaling van een werk van Napier over zijn rekenstokjes, aangevuld met voorbeelden uit de handel van De Decker. Volgens de titelpagina kwam de wiskundige inhoud van De Decker, die rekenmeester was in Gouda, en is de vertaling gemaakt door Vlacq. Hun *Tweede deel van de nieuwe telkonst* ging wel over de logaritme en verscheen in 1627, maar daar is slechts één exemplaar van bewaard gebleven. De logaritmetabel is in 1628 wel opnieuw uitgegeven zoals we hierna zullen zien. Tussendoor publiceerde De Decker zonder Vlacq nog een mooie bron die leuk is om te bekijken, omdat deze in het Nederlands is geschreven: *Nieuwe telkonst, inhoudende de logarithmi voor de ghetallen beginnende van 1 tot 10000, ghemaect van Henrico Briggio professor van de geometrie tot Oxfort*.^[6] Dat boek bestaat voor het grootste deel uit een logaritmetabel, voortbouwend op het werk van Briggs. Het is niet de complete tabel: Briggs was bezig met logaritmen tot 100.000. Bovendien hebben deze logaritmen minder cijfers dan die van Briggs, tien in plaats van veertien. Uit dit boek bekijken we enkele voorbeelden.

In figuur 4 zie je het begin van de logaritmetabel. Merk op dat er soms twee komma's in een getal staan. Dat zijn dus niet onze decimale komma's, die waren toen ook niet gebruikelijk. De komma's zijn voor het overzicht, net zoals wij soms puntjes in grote getallen plaatsen. De kolom met 'Differ.' erboven bevat, zoals je wel kunt zien, de verschillen tussen twee opeenvolgende logaritmen. Die verschillen werden gebruikt bij het (lineair) interpoleren:

N	Logarithmi	Differ.	N	Logarithmi	Differ.
1	0,00000,00000		31	1,49136,16938	1378,82845
2	0,30102,99957	17609, 12590	32	1,50514,99783	1336,39616
3	0,47712,12547	12493, 87366	33	1,51851,39399	1296,49771
4	0,60205,99913	9691,00130	34	1,53147,89170	1258,91274
5	0,69897,00043	7918,12461	35	1,54406,80444	1223,44564
6	0,77815,12504	6694,67896	36	1,55630,25008	1189,92333
7	0,84509,80400	5799,19470	37	1,56820,17241	1158,18725
8	0,90308,99870	5115,25224	38	1,57978,35966	1128,10104
9	0,95424,25094	4575,74906	39	1,59106,46070	1099,53843
10	1,00000,00000	4139,26852	40	1,60205,99913	1072,38654
11	1,04139,26852	3778,85608	41	1,61278,38567	1046,54337
12	1,07918,12460	3476,21063	42	1,62324,92904	1021,91653
13	1,11394,33523	3218,46834	43	1,63346,84556	998,42209
14	1,14612,80357	2996,32234	44	1,64345,26765	975,98373
15	1,17609,12591	2802,87236	45	1,65321,25135	954,53179
16	1,20411,99827	2632,89387	46	1,66275,78317	934,00262
17	1,23044,89214	2482,35837	47	1,67209,78579	914,33795
18	1,25527,25051	2348,10959	48	1,68124,12374	895,48426
19	1,27875,36010	2227,63947	49	1,69019,60800	877,39243
20	1,30102,99957	2118,92990	50	1,69897,00043	860,01718
21	1,32221,92947	2020,33861	51	1,70757,01761	843,31675
22	1,34242,26808	1930,51552	52	1,71600,33436	827,25260
23	1,36172,78360	1848,34057	53	1,72427,58696	811,78903
24	1,38021,12417	1772,87670	54	1,73239,37598	796,89297
25	1,39794,00087	1703,33393	55	1,74036,26895	782,53375
26	1,41497,33480	1639,04162	56	1,74818,80270	768,68287
27	1,43136,37642	1579,42671	57	1,75587,48557	755,31379
28	1,44715,80313	1523,99666	58	1,76342,79936	742,40180
29	1,46239,79979	1472,32568	59	1,77085,20116	729,92388
30	1,47712,12547	1424,04391	60	1,77815,12504	717,85840

figuur 4 Logaritmetabel van De Decker

als je de logaritme van 5,3 wilde uitrekenen, nam je als benadering de logaritme van 5 plus 0,3 keer het verschil tussen de log van 5 en die van 6.

Voorbeeld 1: vermenigvuldigen

Dit voorbeeld, zie figuur 5, kun je eventueel zelfs voorleggen ter introductie aan een leerling die nog niet weet wat een logaritme is. Dat zou ik dan wel doen met de tabel erbij, zodat de leerling ook kan zien dat die getallen er echt staan. Want wat gebeurt hier? Hier wordt 43 met 76 vermenigvuldigd via de tabel. De logaritmen van 76 en 43 worden opgezocht, bij elkaar opgeteld, daar komt 3,51428 uit, en terugzoeken vanuit dat getal levert als uitkomst 3268 op.

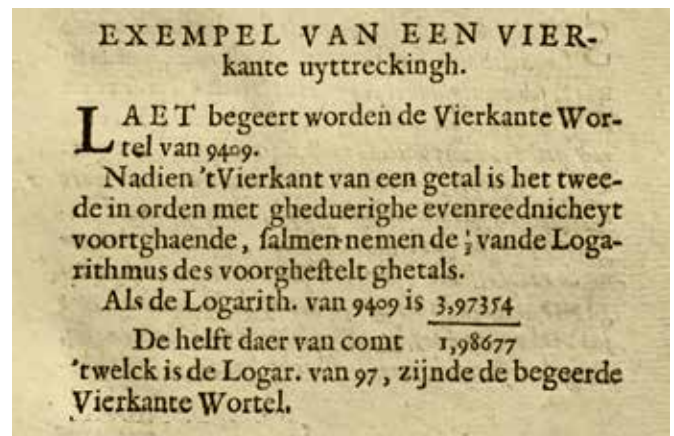
Is dat echt sneller dan 43 keer 76 uitrekenen? Niet echt. Maar bij grote getallen van veel cijfers scheelt het wel veel.



figuur 5 Vermenigvuldigen met de logaritmetabel

Voorbeeld 2: worteltrekken

Bij deze bron kun je vragen: wat gebeurt hier? Uit 'Laet begeert worden de Vierkante Wortel van 9409' blijkt dat wel: we gaan worteltrekken. Volgens de tekst moeten we de helft van de logaritme nemen en dat gebeurt hier ook: de logaritme van 9409 wordt opgezocht in de tabel, dat is 3,97354. Daarvan wordt de helft genomen: 1,98677 en dat wordt weer teruggezocht in de tabel, dat blijkt de logaritme van 97 te zijn, zie figuur 6.



figuur 6 Worteltrekken met de logaritmetabel

Je kunt laten narekenen dat het klopt, en een goede vraag is natuurlijk: waarom klopt dit dan? Waarom levert de helft van de logaritme de logaritme van de wortel op? Die vraag kun je op verschillende manieren benaderen: als je de rekenregels voor de logaritme al behandeld hebt, is het gewoon toepassen van $\log(\sqrt{n}) = \log(n^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log(n)$. Je kunt het ook afleiden vanuit de rekenregel $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ door voor a en b de uitdrukking $\sqrt{n}$ in te vullen: $\log(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}) = \log(\sqrt{n}) + \log(\sqrt{n})$, oftewel: $\log(n) = 2\log(\sqrt{n})$.

Maar het meest inzichtelijk is misschien wel terugkeren naar het rijtje dat de kern van de logaritmetabel vormt:

-2	-1	0	1	2	3	4	5
1/100	1/10	1	10	100	1000	10000	100000

Een goede vraag is dan: welk getal zou er onder het getal $1/2$ in het bovenste rijtje moeten staan?

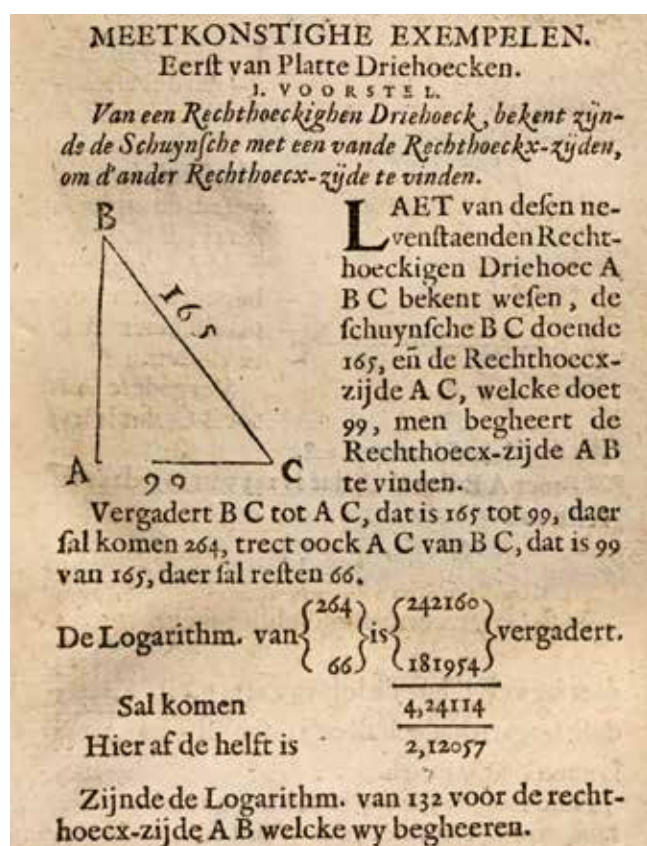
Of: hoe kun je nou met je rekenmachine heen en weer rekenen tussen de getallen in zo'n logaritmetabel? Als je dan eenmaal gezien hebt dat het getal x in de bovenste rij bij 10^x in de onderste rij hoort, kun je de rekenregels voor de machten gebruiken: $\log(9409) = 3,97354$, oftewel

$$9409 = 10^{3,97354}. \text{ Dan geldt dus dat } \sqrt{9409} =$$

$$\sqrt{10^{3,97354}} = (10^{3,97354})^{1/2} = 10^{1/2 \cdot 3,97354}.$$

Voorbeeld 3: Pythagoras

In figuur 7 zie je in één voorbeeld drie onderwerpen uit de schoolstof terugkomen.



figuur 7

Je kunt hierbij aan je leerlingen vragen: wat gebeurt hier eigenlijk? Waar komen die 264 en die 66 vandaan en waarom klopt het? Wat hier berekend wordt is in onze moderne notatie: $\frac{1}{2}(\log(165 + 99) + \log(165 - 99))$, oftewel: $\log(\sqrt{(165 + 99)(165 - 99)}) = \log(\sqrt{165^2 - 99^2})$. Een oefening voor Pythagoras, reken-

regels voor de logaritme en een merkwaardig product in één, dus.

Conclusie

In de bronnen die ik hierboven bekijk staat behoorlijk wat materiaal dat voor de leerlingen van nu herkenbare wiskunde is. Als je de logaritme introduceert als rekenhulpmiddel om een vermenigvuldiging om te zetten in een optelling, wordt duidelijk waarom de logaritme is ontwikkeld. En dan zal die rekenregel waarschijnlijk beter blijven hangen. Uit het laatste voorbeeld zie je ook hoe je dan toch de link met de exponentiële uitdrukkingen kunt leggen, zodat je daarna gewoon met de logaritme kunt gaan oefenen met behulp van de lesmethode.

Noten

- [1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q. (2015). *Math through the ages, expanded 2nd edition*. Washington: MAA en Farmington: Oxtan HousePublishers. Halverwege 2019 zal deze uitgebreide tweede editie verschijnen in Nederlandse vertaling bij Epsilon als de tweede, uitgebreide editie van *Wortels van de wiskunde*.
- [2] Napier schreef dit boek in het Latijn, deze Engelse vertaling is uit Havil, J. (2014). *John Napier: Life, Logarithms, and Legacy*. Princeton: Princeton University Press, blz. 65
- [3] Vertaling van Ian Bruce van het boek van Briggs: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html>
- [4] Wepster, S. (2017). Logarithmen: hoe en waarom. *Pythagoras, jaargang*(57), nr. 1, pp. 12-15.
- [5] Vlacq, A. (1628). *Arithmetica Logarithmica*. Gouda. Te vinden op: <https://books.google.nl/books?id=-XR-2oDEb9oC>
- [6] Decker, E. de. (1626). *Nieuwe telkunst*. Gouda. Te vinden op: https://play.google.com/books/reader?id=fqi_nclcw8gC&hl=en&pg=GBS.RA1-PA4

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

14: EEN VERHAAL VAN π

In de rubriek *Wortels van de Wiskunde* bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: π .



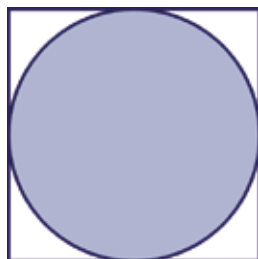
Inleiding

Het getal dat wij π noemen, heeft een lange en afwisselende geschiedenis.^[1] In deze aflevering van 'Wortels van de wiskunde' kijken we naar de vroege oorsprong ervan, aan de hand van Egyptische, Babylonische en Griekse bronnen van meer dan tweeduizend jaar geleden. Deze bronnen bieden prachtige kansen om de betekenis en waarde te introduceren in een brugklas, zelfs zonder dat er een decimaal aan te pas hoeft te komen (maar als je dat per se wilt, dan kan de rekenmachine er natuurlijk bij worden gebruikt). We gaan de uitdaging aan om in eerste instantie met vouwblaadjes zo dicht mogelijk bij π te komen. Het laatste stuk van dit artikel is niet meer geschikt voor in een brugklas, maar kan beter bewaard worden tot een iets hoger leerjaar.

De cirkel



figuur 1



figuur 2

Een cirkel is een van de eenvoudigste vlakke figuren, net als het vierkant. Het zijn basisvormen die je al vindt tussen het speelgoed van zeer jonge kinderen, zoals een vormenstoof (figuur 1). De cirkel is een vorm die ook vertrouwd is vanuit de zichtbaarheid in het dagelijks leven: wielen, klokken, de vorm van de maan, etcetera. Ook in de geschiedenis van de wiskunde kom je cirkels veelvuldig tegen en al in de oudste bronnen. Als je vierkanten onderzoekt en verschillende vierkanten tekent, kun je eigenschappen ontdekken. Je kunt constateren dat de omtrek altijd precies vier keer zo groot is als de zijde. Wanneer je het concept oppervlakte kent,

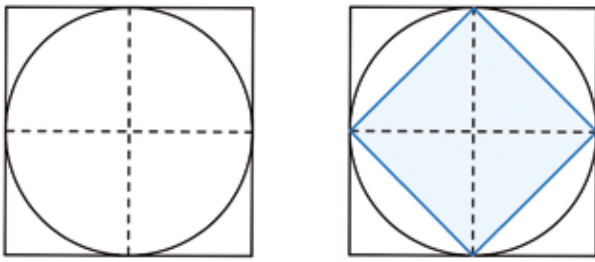
begrijp je snel dat de oppervlakte van het vierkant gelijk is aan *zijde keer zijde*, misschien al geformuleerd als *zijde kwadraat*. Zouden er ook dergelijke regels bestaan voor omtrek en oppervlakte van cirkels? Merk op dat het concept π zelf hier bewust nog niet expliciet genoemd wordt als doel. We zijn gewoon eigenschappen van de cirkel aan het onderzoeken.

Bij het onderzoeken van cirkels ligt het voor de hand om de diameter / middellijn als referentiewaarde te nemen, net als de zijde van een vierkant. De cirkel laat zich ook mooi omlijsten door een vierkant waarvan de zijde gelijk is aan de middellijn van de cirkel, zie figuur 2. Aansluitend bij de intuïtie die bij het vierkant gebruikt is, zou de omtrek van de cirkel wel eens kunnen samenhangen met de lengte van de diameter. Dan is de vraag: hoeveel keer past de middellijn om een cirkel heen? En is dat voor alle cirkels ongeveer hetzelfde?

Met touwtjes is dit goed uit te zoeken door kinderen zelf en komen ze al snel tot ongeveer drie keer. Met nauwkeuriger werken blijkt dat het iets meer dan drie is. Deze aanpak met touwtjes, om via de omtrek bij het concept π te komen, wordt al regelmatig in de (brug)klas toegepast. Laten we eens kijken of we ook voor de oppervlakte een dergelijke hands-on-benadering kunnen vinden, met hulp van een aantal ideeën uit de geschiedenis.

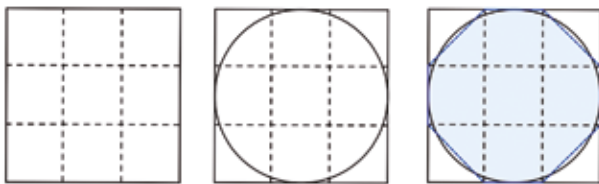
Vouwblaadje

Neem een cirkel en een vierkant dat daar precies omheen past, zoals in figuur 2. De oppervlakte van de cirkel is in ieder geval minder dan *diameter keer diameter*. Als je het vierkant beschouwt als een vouwblaadje, en dit twee keer doormidden vouwt, ontstaan er vier kleinere vierkanten, zie figuur 3 (links). Als je vervolgens alle hoekpunten naar het midden vouwt, zie figuur 3 (rechts), dan blijft de helft van de oppervlakte over. De cirkel is groter dan deze overgebleven helft. Dus de oppervlakte van de cirkel zit tussen de helft en de hele oppervlakte van het vierkant in.



figuur 3

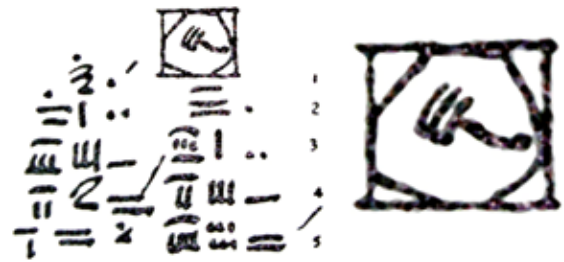
Dit kan als docent al het moment zijn om over te schakelen op het begrip straal, en dan (met wat sturing) leerlingen te laten constateren dat de oppervlakte van de cirkel dus meer is dan *twee keer straal kwadraat* en minder dan *vier keer straal kwadraat*, richting de formule van de oppervlakte van de cirkel zoals die in de schoolboeken staat. Als we straks gaan kijken naar het werk van de Egyptenaren, bleven ze echter bij de middellijn als referentie, dus dat blijven wij nu ook nog even doen. We nemen een nieuw vouwblaadje met ingeschreven cirkel en vouwen dit zo goed mogelijk in negen gelijke vierkantjes, door de zijden in drieën te delen, zie figuur 4.



figuur 4

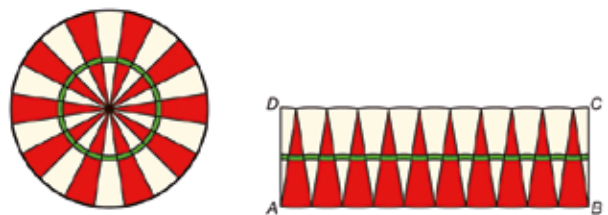
Het grote vierkant is nu verdeeld in negen kleine vierkantjes, waarvan de oppervlakte dus $1/9^{\text{e}}$ deel van het grote vierkant is. We vouwen de hoekjes nu niet naar het midden, maar we halveren de vier vierkantjes in de hoeken, zodat er een achthoek ontstaat. Het is zichtbaar dat er bij benadering vijf hele kleine vierkantjes binnen de cirkel passen, en ook nog vier halve kleine vierkantjes. Oftewel de oppervlakte van de cirkel komt dicht in de buurt van $7/9^{\text{e}}$ deel van de oppervlakte van het grote vierkant. De oppervlakte van de cirkel is dus ongeveer $7/9^{\text{e}}$ deel van diameter keer diameter. Stel voor het gemak even dat de diameter van de cirkel 1 is, dan is de oppervlakte van de cirkel dus bij benadering $7/9 \times 1 \times 1 = 7/9$. In de *Papyrus Rhind*, een verzameling rekenproblemen daterend uit ongeveer 1650 voor Christus, staat een opgave over het berekenen van de oppervlakte van een cirkel, zie figuur 5 (links). Een fragment van de opgave staat ernaast vergroot afgebeeld: het lijkt veel op onze vouwblaadjes uit figuur 4. Op de papyrus wordt een soort rekenrecept gegeven, wat op het volgende neerkomt:

De oppervlakte van een cirkel met een bepaalde middellijn, is gelijk aan de oppervlakte van een vierkant, waarvan de zijde $8/9$ van de middellijn van de cirkel is.



figuur 5

Laten we weer even uitgaan van een middellijn van 1, dan is volgens dit Egyptische recept de oppervlakte van de cirkel dus bij benadering gelijk aan $(8/9 \times 1) \times (8/9 \times 1) = 64/81$.^[2] Ons vouwblaadje leverde daarnet $7/9$ als benadering. Als we $7/9$ anders schrijven is het gelijk aan $63/81$, wat nauwelijks verschilt van de Egyptische $64/81$. Dat de oppervlakte van een cirkel samenhangt met de diameter, lijkt even intuïtief als bij de omtrek. Maar dat er sprake is van dezelfde constante voor omtrek en oppervlakte is eigenlijk helemaal niet vanzelfsprekend. Dit is wel met een plaatje aannemelijk te maken, en sommige lesmethoden doen dit ook al, zoals te zien is in figuur 6. Dit zou ook nog concreet uitgevoerd kunnen worden door je leerlingen het vouwblaadje in stukken te laten knippen. Je ziet dan dat de oppervlakte van de cirkel gelijk is aan de oppervlakte van een rechthoek, met als lengte de halve omtrek en als breedte de straal van de cirkel.



figuur 6 Fragment uit hoofdstuk 9 van *Getal & Ruimte* (2012), 1 vwo deel 2

Archimedes (derde eeuw voor Christus) stelt in zijn werk *Het meten van de cirkel*:^[3]

De oppervlakte van een cirkel is gelijk aan die van een rechthoekige driehoek, waarvan de ene rechthoekszijde gelijk is aan de straal en de andere rechthoekszijde gelijk is aan de omtrek van de cirkel.

Het is een leuke opgave om ook dit te vergelijken met het plaatje uit *Getal & Ruimte* hierboven, om uiteindelijk in te zien dat dit inderdaad hetzelfde is.

Babylonische benadering

We laten voor het vervolg van dit artikel het vouwblaadje liggen en kijken naar enkele andere fragmenten uit de historie van π . Dit geeft niet zozeer handvatten om de relatie tussen middellijn/straal en oppervlakte/omtrek zelf te laten ontdekken, maar het is wel leuk materiaal voor

het verwerken van de kennis op een afwisselende manier. Op het Babylonische kleitablet YBC 7302 (uit de periode 1800 tot 1600 voor Christus) staat dat er een kwadratisch verband bestaat tussen de omtrek van de cirkel en zijn oppervlakte:^[4]

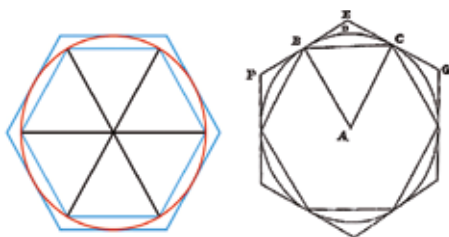
De omtrek in het kwadraat gedeeld door twaalf staat gelijk aan de oppervlakte.

Je kunt je leerlingen laten controleren dat dit overeenkomt met $\pi = 3$. Andere Babylonische kleitabletten geven een waarde van 3; 7, 30 voor π . Met wat kennis van het zestigtallig positiestelsel waarmee zij destijds werkten, geeft dit dus $3 + 7/60 + 30/3600 = 3 \frac{1}{8}$ voor π . Een groot kleitablet BM 15285 bevat een hele reeks meetkundeopgaven, waar geen antwoorden bij staan. Een fragment van het kleitablet zie je in figuur 7. Het doet denken aan plaatjes uit een hoofdstuk uit een middelbare schoolboek van nu. Onder het plaatje staat een opdracht. Laat je leerlingen eerst maar eens goed kijken naar hoe de cirkels door elkaar heen getekend zijn. Misschien kunnen ze met een kleurpotlood een paar kopieën inkleuren, om te ontdekken wat wiggen, boten en koeienneuzen zijn. Het berekenen van de exacte oppervlaktes van deze stukjes, zal nog niet meevallen.



figuur 7 De zijde van het vierkant is 1 kabel. <Daarbinnen zijn> 4 wiggen, 16 boten, 5 koeienneuzen. Wat zijn hun oppervlaktes? ^[5]

We zijn nu de oppervlakte van de cirkel steeds aan het benaderen met behulp van breuken, maar ook wortels kunnen nog helpen in deze zoektocht. Dit laatste stukje vraagt dan wel wat kennis van rekenen met wortels en verhoudingen in bijzondere rechthoekige driehoeken, dus dat leent zich wat beter voor een activiteit in hogere klassen.



figuur 8

Archimedes

We keren weer even terug naar Archimedes. Hij benaderde de omtrek van de cirkel, maar niet met een vierkant, of stukjes vierkant, maar eerst met een ingeschreven en een omgeschreven regelmatige zeshoek, die elk weer worden opgedeeld in zes gelijke driehoeken. We nemen als referentie een straal van 1. Deze straal fungeert dan tevens als zijde van elk van de zes driehoeken (bij de ingeschreven zeshoek) respectievelijk de hoogte van alle zes driehoeken (bij de omgeschreven zeshoek). De omtrek van de ingeschreven zeshoek, zie figuur 8 (links) is precies 6, en (gebruikmakend van de vaste verhouding $1 : \sqrt{3} : 2$ in een $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ driehoek) kom je met de omgeschreven zeshoek tot een omtrek van $4\sqrt{3}$. Daarmee is π ingeklemd tussen 3 en $2\sqrt{3}$. Dat is nog niet zo nauwkeurig als we met het vouwen al waren. Maar Archimedes verdubbelde vervolgens het aantal zijden van de zeshoek en ging rekenen aan de ingeschreven en omgeschreven twaalfhoek. En daarna de 24-hoek, enzovoorts. Hij eindigde bij een afschatting van meer dan $3\frac{10}{71}$ en minder dan $3\frac{1}{7}$ (afgerond 3,14).^[6] In de eeuwen na Archimedes volgden nog enkele andere rekenmeesters zijn voorbeeld, van wie we er tot besluit een paar noemen. Rond het jaar 640 kwam de Indiase wiskundige Brahmagupta op basis van vergelijkbare berekeningen tot de conclusie dat π gelijk moest zijn aan $\sqrt{10}$ (ongeveer 3,16). Daarmee zette hij eigenlijk een stap terug in de benadering van π , want zijn landgenoot Aryabhata was rond 500 al tot een benadering van $62832/20000$ ($= 3,1416$) gekomen. De beroemde Perzische wiskundige Al-Khwarizmi vatte rond 800 alle benaderingen mooi samen, door te zeggen:^[7]

een praktisch ingestelde man gebruikt $22/7$ (naar Archimedes),

een landmeter gebruikt $\sqrt{10}$ (naar Brahmagupta)

en een sterrenkundige gebruikt $62832/20000$ (naar Aryabhata).

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl

Noten

- [1] Berlinghoff, W. & Gouvêa, F. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Epsilon uitgaven: Amsterdam, p. 89.
- [2] Als we refereren aan de straal, dan is het $4 \times 64/81 = 256/81$ dus iets meer dan *drie* (ongeveer 3,16) keer straal kwadraat.
- [3] Daems, J. (2017). Archimedes en de cirkel. *Pythagoras* (56), p. 11
- [4] Roest, A. van der & Kindt, M. (2012). *Babylonische wiskunde – Een verkenning aan de hand van kleitabletten*. Epsilon uitgaven: Amsterdam, p. 33
- [5] Zie Katz, V. (ed). (2007). *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*. Princeton University Press: Princeton, p. 97-99.
- [6] Lees meer hierover in Boon, B. (2018). De cirkelmeting van Archimedes. *Pythagoras* (57), p.18.
- [7] Uit: Blatner, D. (1997). *The joy of pi*. Penguin Books: Londen.

Wortels van de wiskunde

15: Meten

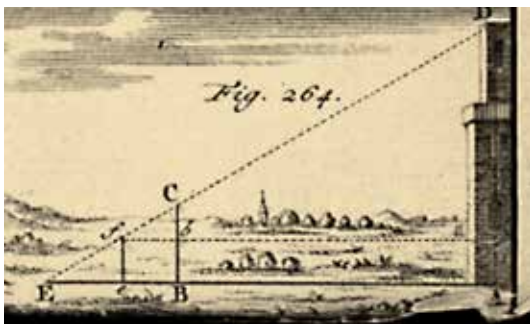
In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek^[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: hoogtes en afstanden meten met behulp van gelijkvormigheid.

Meten

Een van de oudste toepassingen van de wiskunde is het meten. In alle oude culturen vinden we meetinstrumenten en methodes. Van Thales van Milete (rond 600 v. Chr.), een grote naam uit de Griekse beschaving, wordt bijvoorbeeld gezegd dat hij in Egypte de hoogtes van de piramides heeft bepaald door hun schaduw te meten op het moment dat zijn eigen schaduw even lang was als hijzelf.

In de zeventiende eeuw ontstond er in Nederland meer behoefte aan wiskundige rekenmethodes, aan betere instrumenten en aan betrouwbare kaarten, bijvoorbeeld vanwege troepenverplaatsingen in de Tachtigjarige Oorlog. Vanaf 1600 verschenen er dan ook diverse landmeetboeken in het Nederlands^[5]. Hieronder bespreken we kleine stukjes uit twee boeken uit de zeventiende en achttiende eeuw.

De hoogte van een hoog gebouw



figuur 1

Hoe meet je de hoogte van een hoog gebouw? Dat kan tamelijk eenvoudig met een stok en een meetlint, mits je naar het gebouw kunt toelopen. Je zet de stok rechtop in de grond. Daarna zoek je het punt op de grond waar je je oog moet leggen om op één lijn het bovenpunt van de stok en het hoogste punt van het gebouw te kunnen

zien. Vervolgens meet je de afstand van het oog naar de onderkant van de stok en de afstand van het oog naar het gebouw. Met gelijkvormige driehoeken kun je dan de hoogte van het gebouw bepalen. In figuur 1 zie je het gebeuren, waarbij de stok in BC staat en het oog in E .

Deze afbeelding staat in een herdruk uit 1744 van een boek van Johannes Morgenster uit het begin van de achttiende eeuw: *Werkdadige meetkonst, tonende klaar en beknopt hoe dat al 't gene een ingenieur en landmeter te meten voorvallen kan, wiskonstig met en zonder hoekmeting*^[2]. Morgenster legt in figuur 2 precies uit wat er gebeurt.



figuur 2

Ook in de tekst staan interessante dingen waar je het met leerlingen over zou kunnen hebben: wat zijn voeten? (Over oude maten kun je meer lezen in schets 6 van *Wortels van de wiskunde*^[1]). Wat betekent waterpas? Waarom moet de stok loodrecht in de grond staan? Hoe komt hij aan die 100 voeten als eindantwoord?

Deze afbeelding (waarbij de punten e en f dus nog niet nodig zijn) en deze aanpak geven een echte toepassing van gelijkvormige driehoeken, zeer geschikt voor in de onderbouw. Je kunt met dit idee leerlingen het schoolplein op sturen met een stok en een meetlint en ze vragen te bepalen hoe hoog het schoolgebouw is. Dat is leuk, haalbaar, buiten en actief, en het geeft echt betekenis aan het begrip gelijkvormigheid.

In de afbeelding van Morgenster zie je wel meteen al een complicerende factor: je moet de afstand tot het punt recht onder het hoogste punt kunnen bepalen, in het plaatje is dat punt A , en soms zal dat punt binnen het gebouw liggen. Soms ook kun je er helemaal niet naartoe lopen, bijvoorbeeld omdat er een moeras of gracht in de weg ligt. Op dat probleem komen we verderop terug. Bij een modern schoolgebouw zul je dat probleem meestal niet tegenkomen.

Waarom staan de punten e en f nog in dit plaatje? Dat blijkt uit de tekst een klein stukje verderop, zie figuur 3.

Fig. 264. Na dien't wat ongemakkelyk en onzeker valt, om't stip E. op de grond te bepalen, vermits men 't Hooft op de grond en zo lang heen en weer leggen moet, tot dat men 't bovenste van de Stok C. en de top van de Toren D. in een gezigtstraal vind; zo kan men 't werk wat gemaklyker met 2 Stokken volbrengen, aldus: Zie de vorige Figuren.

figuur 3

Oftewel: als je het wat onhandig vindt om net zo lang met je hoofd over de grond te bewegen tot je punt E gevonden hebt, kun je ook een tweede, kortere stok erbij gebruiken. Die plaats je dan zoals in de afbeelding te zien is bij ef : de kijklijn CD moet door f gaan, je kunt bc en $fb = eb$ meten en eA ook, en dan gebruik je dat driehoeken fbC en faD gelijkvormig zijn, waardoor Da en dus ook DA te berekenen zijn.

De jakobsstaf

Een beroemd instrument om hoeken mee te meten is de jakobsstaf, het stamt uit de veertiende eeuw. De jakobsstaf werd vooral veel gebruikt om de hoogte van een ster te meten ten opzichte van de horizon, dan meet je dus de hoek. De jakobsstaf bestaat uit een langere stok die je voor je oog houdt, en een dwarslat (de vaan) die daar loodrecht op staat en die je over de langere stok op en neer kunt schuiven. Door de vaan zo te houden dat je

langs de onderkant precies de horizon ziet en langs de bovenkant de ster in kwestie, kun je de hoogte van de ster op de schaalverdeling van de meetlat aflezen. Tot ver in de achttiende eeuw werd de jakobsstaf gebruikt.

De jakobsstaf kan ook gebruikt worden om de hoogte van een gebouw te meten als je weet hoe ver je er vandaan bent: als je de hoek weet en de afstand tot het gebouw, dan is die hoogte eenvoudig uit te rekenen. Dan werkt de jakobsstaf dus ongeveer hetzelfde als die stok van zojuist: via gelijkvormigheid.

"The Figure of the Crofs staff, and the manner of the Observation."



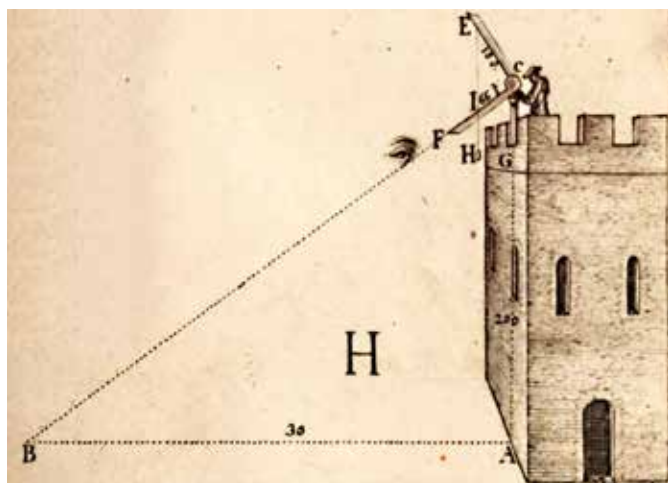
figuur 4^[3]

In een van de cursussen 'Geschiedenis van de wiskunde' waar ik bij betrokken ben laten we studenten zelf een jakobsstaf bouwen en daarmee de hoogte van de Domtoren bepalen. Dat is een opdracht die de praktische kant van de wiskunde laat ervaren en die studenten vaak noemen als een van de leukste onderdelen van de cursus. Een van de deelnemers vertelde laatst dat je er wel rekening mee moet houden dat je op zo'n locatie de helft van de tijd aan omstanders moet uitleggen wat je aan het doen bent...

De afstand tot een hoog gebouw

Soms wil je niet weten hoe hoog een gebouw is, maar bijvoorbeeld hoe ver weg iets is wat je kunt zien als je op een hoog gebouw staat. Liefst zonder er eerst heen te moeten gaan, denk aan een naderende vijand.

Een mooi voorbeeld van hoe gelijkvormige driehoeken gebruikt kunnen worden om dergelijke afstanden te meten zien we in een boek van Samuel Marolois (1572 – 1627). Hij was een Nederlandse wiskundige en ingenieur. Hij publiceerde rond 1613 een Franstalig boek over meetkunde en fortificatie, dat later gebundeld werd met een ander werk. In 1628 verscheen een versie in het Nederlands: *Opera mathematica ofte wis-konstige wercken: handelende van de geometrie, perspective, architecture en fortificatie*^[4]. >



Bovenop de toren staat een mannetje met een meetinstrument. Er staan ook getallen bij de figuur en in de figuur staat een oog getekend. De tekst die bij deze figuur hoort is deze, zie figuur 6.

H.

MEn sal het selfde kunnen doen staende op een Toezen / om te meten
 AB: want een arm van de Winckelhaeck als CE is gestekt in B: den
 dyast EH (want gemaecte in E met een kleyn bysonder gaetie) sijnt de ge-
 elicke deelen in B, alsoan gelijk IC tot CE, also CA tot AB, oft gemeten heb-
 bende de hoorijde CA, met een kooijde: AB sal dan bekent gemaect syn.

Ook in deze tekst kun je al genoeg vinden om het over te hebben: wat is een ‘winckelhaeck’? Wat moet er blijkbaar bepaald worden? Wat kunnen we meten en wat wil het mannetje op de toren graag weten, denk je? Op welk principe is dit meetinstrument gebaseerd?

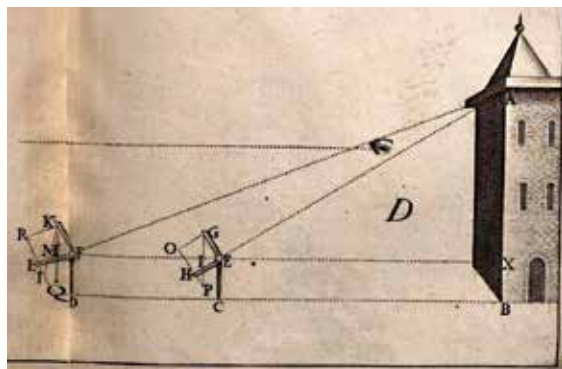
Als je naar het plaatje kijkt, zie je dat de genoemde winkelhaak het instrument is dat bovenaan de toren staat. Hoek FCE is dus recht. Vanuit E hangt een touwtje recht omlaag (letterlijk loodrecht, door het gewichtje dat er aanhangt). Hierdoor ontstaan er gelijkvormige driehoeken: driehoeken ECI en BAC hebben de overstaande en de

rechte hoek gemeen. In de winkelhaak zijn de lengtes CE en CI uiteraard te meten, als je dan ook de hoogte van de toren al weet (en hoe je die kunt meten hebben we net gezien), dan kun je afstand AB bepalen. De afmetingen die in de afbeelding van Marolois gebruikt zijn, zijn $CI = 66\frac{2}{3}$ deelen, $CE = 100$ deelen, $AC = 20$ voeten en $AB = 30$ voeten. (Let op: in de afbeelding staat er naast de 20 nog een rondje, maar dat is geen nul.) Je kunt controleren dat in dit geval de vijand in punt B de toren inderdaad op een afstand van 30 voeten genaderd is! Merk ook op dat de eenheid die voor de zijden van driehoek ECI gebruikt wordt niet dezelfde hoeft te zijn als die in driehoek BAC , omdat het alleen over de verhoudingen gaat.

“Deze twee bronnen laten het nut van gelijkvormige driehoeken goed zien”

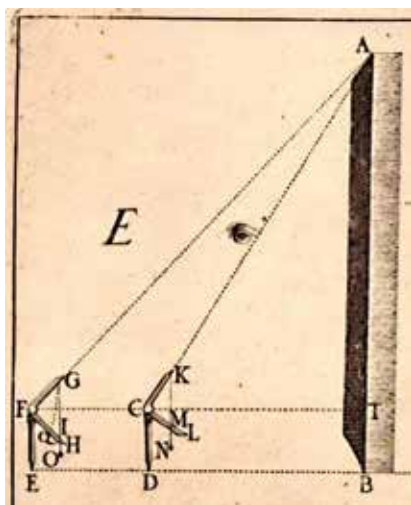
Een hoog gebouw waar je niet bij kunt komen

Een stukje verderop bespreekt Marolois het volgende probleem: het bepalen van de hoogte van een gebouw waar je niet bij kunt komen. Of, zoals hij zelf schrijft: '*Soo B onbeganckelijck ende onzichtbaer is*'. Deze bron is meer geschikt voor de bovenbouw, voornamelijk omdat het net wat meer algebraïsch rekenen met verhoudingen vergt. Bij die situatie horen de volgende afbeeldingen. De instrumenten die je ziet in figuur 7 en figuur 8, zijn dezelfde winkelhaak als uit het vorige probleem.

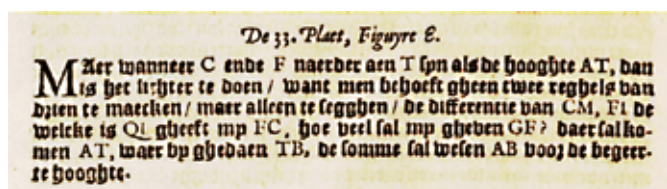


De eerste interessante vraag is natuurlijk: waarom zijn er twee afbeeldingen nodig? En waarom staan de instrumenten in figuur 7 andersom ten opzichte van die in figuur 8? Als je goed kijkt kun je daar wel achter komen: van die winkelhaak zijn de benen even lang, dus als het

instrument te ver van de toren af staat, valt het koordje met het gewichtje eraan niet meer langs het been van de winkelhaak maar daarbuiten. Dan kun je de lengte dus niet meer meten.



figuur 8



figuur 9

De tekst van figuur 9 zegt:

'Maer wanneer C ende F naerder aen T syn alsde hoogte AT, dan is het lichter te doen / want men behoef gheen twee reghels van dyen te maecken / maer alleen te segghen / de differentie van CM, FI de welke is QI gheeft my FC, hoe veel sal my gheven GF? daersal komen AT, waer by ghedaen TB, de somme sal wesen AB voor de begeerte hoogte.'

De regel van drie is een oude manier om als twee paren van grootheden een bepaalde verhouding hebben en er zijn drie gegevens bekend, het vierde uit te rekenen. Bijvoorbeeld: 300 gram kaas kost 4,50 euro, hoeveel kost 500 gram? Nu zouden we een dergelijke berekening bijvoorbeeld met een verhoudingstabel doen.

We gaan nu onderzoeken waarom de bewering van Marolois hier klopt. Zijn bewering zegt iets over een verband tussen de 'differentie van CM, FI' en FC, en iets over FG, waarna AT blijkbaar bepaald kan worden.

Een mogelijke opdracht voor leerlingen zou hier kunnen

zijn: leg uit waarom CM, FI, FC en FG allemaal bekend zijn. Probeer met gelijkvormigheid een relatie te vinden tussen CM en AT en ook tussen FI en AT. Leg met behulp van berekeningen uit wat het verschil van CM en FI te maken heeft met FC en waarom je hiermee inderdaad de hoogte van AT kunt bepalen.

Hier krijgen we het algebraïsche werk met verhoudingen. De gelijkvormige driehoeken zijn nog wel eenvoudig te vinden, als je F-hoeken kent tenminste: $\angle CKM = \angle CAT$ omdat het touwtje evenwijdig loopt aan AT. Bovendien hebben de driehoeken ook weer een rechte hoek gemeen, dus $\triangle CKM$ is gelijkvormig met $\triangle TAC$.

Dus geldt dat $CM/CK = TC/TA$. Uit het analoge argument bij de linker winkelhaak volgt dat $FI/FG = TF/TA$. Merk op dat ook geldt dat $CK = FG$, dat is namelijk de lengte van het been van de winkelhaak. Kortom:

$$CM/FG - FI/FG = TC/TA - TF/TA, \text{ dus } (CM - FI)/FG = FC/TA.$$

In deze uitdrukking is alles te meten, behalve TA, dus TA kan nu inderdaad berekend worden. En de hoogte TB is hetzelfde als de hoogte van de stok waar het instrument op staat, dus als we die bij TA optellen is TB bepaald.

Conclusie

Deze bronnen over praktische wiskunde geven mooie voorbeelden van hoe wiskunde in het landmeten gebruikt kan worden. Wat ik persoonlijk heel leuk vind aan juist deze twee bronnen is dat ze het nut van gelijkvormige driehoeken zo goed laten zien. Ook overstaande hoeken en F-hoeken komen langs. De bronnen zijn eigenlijk direct geschikt als basis van een praktische opdracht. En het is ook best verrassend dat je met zulke eenvoudige middelen de hoogte kunt bepalen van een gebouw, zelfs als je daar niet eens bij kunt komen!

Voor wie meer wil lezen: in het proefschrift van Iris van Gulik-Gulikers^[5] wordt uitgebreid een onderzoek beschreven naar het gebruiken van het 17e-eeuwse landmeten in de onderwijspraktijk. Ook is daarin een overzicht te vinden van de literatuur over het gebruik en de waarde van het inzetten van geschiedenis bij het leren van meetkunde. >

Over de auteur

Jeanine Daems is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding op de HU, op de Universiteit Utrecht en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl



Wortels van de wiskunde

16 De Stokjes van Napier

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek^[1], de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Deze keer: de stokjes van Napier.

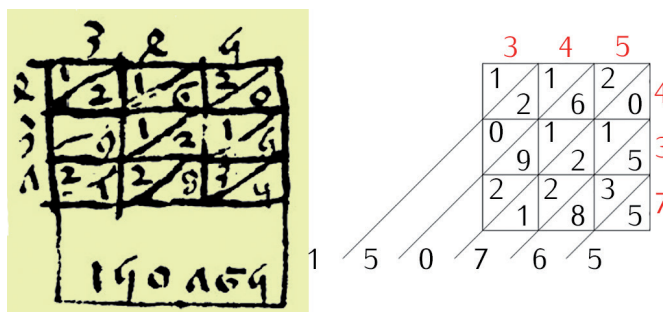
Inleiding

De Schotse wiskundige John Napier is vooral bekend vanwege het uitvinden van de logaritme, waarover al eerder een Wortel verscheen. Hij heeft echter in zijn pogingen om vermenigvuldigen te vergemakkelijken nog iets bijzonders nagelaten: de zogenaamde rekenstokjes. Deze stokjes zijn gebaseerd op een oude rekentechniek die *gelosia* wordt genoemd. Deze techniek kan prima met alleen papier en pen worden aangeleerd, maar het is nog leuker om met je leerlingen zelf de stokjes na te maken en ermee te rekenen.

Gelosia-vermenigvuldiging

Het Pamiers-manuscript^[2] dateert uit de eerste helft van de 15^e eeuw. Het is genoemd naar de vindplaats: de Zuid-Franse stad Pamiers. Het manuscript bevat reken-technieken en handelspraktijken, voornamelijk uitgewerkt in voorbeelden en verhaaltjessommen, met nauwelijks uitleg of bewijsvoering. De oorspronkelijke taal is een oud-Frans dialect uit de Languedoc. Het manuscript bestaat uit drie delen. Deel één behandelt de Arabisch-Indische cijfers en het positionele getalstelsel, vervolgens de basale rekenoperaties, meetkundige reeksen, vierkantswortels en derdemachtswortels. Deel twee bevat dezelfde onderwerpen maar dan met breuken en deel drie gaat over toepassingen van dit alles in ongeveer honderd verhaaltjessommen. Een van de bijzonderheden van dit manuscript is dat het negatieve getallen toelaat als antwoord op een probleem, uit strikt wiskundig oogpunt.

Figuur 1 (links) toont een rekenoperatie volgens de zogenaamde gelosia-techniek. Gelosia betekent rooster of traliewerk. In het Engels wordt dit ook wel *lattice multiplication* genoemd. Er zijn veel filmpjes te vinden op YouTube waarin deze techniek wordt uitgelegd.



figuur 1

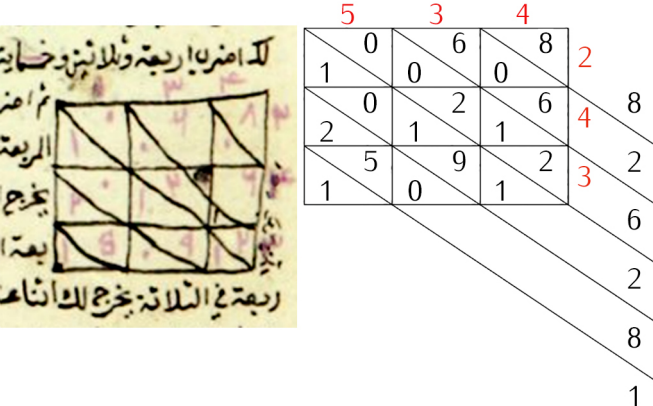
In bovenstaand voorbeeld worden 345 (horizontaal) en 437 (verticaal) met elkaar vermenigvuldigd. De notatie van de getallen wijkt nog enigszins af van de onze, zie bijvoorbeeld de 4. Daarnaast staat een vertaling in de Arabisch-Indische cijfers waar wij veel meer mee vertrouwd zijn. Afhankelijk van het doel van je les of het niveau van je groep, kun je ervoor kiezen om met de primaire bron met de onbekende symbolen te beginnen, of de vertaling er meteen bij te geven.

In elk vierkantje wordt een vermenigvuldiging uitgevoerd. We beginnen helemaal rechtsonder. In dat vierkantje wordt $7 \times 5 = 35$ uitgerekend. De diagonaal in het vierkant scheidt de tientallen (3) van de eenheden (5). In het vierkantje ernaast zien we $7 \times 4 = 28$. Hier worden feitelijk niet tientallen en eenheden gescheiden, maar honderdtallen (2) en tientallen (8), omdat de 4 hier staat voor 40. Linksonder zien we dan $7 \times 3 = 21$, gescheiden in duizendtallen (2) en honderdtallen (1). Zo worden alle vierkantjes gevuld en het antwoord gescheiden door een diagonaal. Het voordeel van deze werkwijze is dat gelijke machten van tien nu in dezelfde diagonale rij terecht zijn gekomen en dus bij elkaar opgeteld kunnen worden. We beginnen weer rechtsonder. Hier staat de 5, dus het antwoord van 345×437 eindigt op een 5. Dan volgt een

diagonale rij met drie cijfers (5 + 3 + 8), de som daarvan is 16. Dat betekent dat we een 6 opschrijven op de plek van de tientallen en één 1 (honderd) onthouden voor bij de volgende diagonale rij cijfers. Daar zien we 0 + 1 + 2 + 2 + 1 plus de 1 die we onthouden hebben geeft 7. Nog drie diagonale rijen cijfers netjes afwerken geeft als eindantwoord 150765. Dat is het getal dat helemaal onderaan geschreven staat.

Oosterse bronnen

Het Pamiers-manuscript is zeker niet de enige of de oudste bron waarin de gelosia-techniek wordt gebruikt. Er zijn bronnen uit het Midden-Oosten en China waarin dit ook al gebeurt. Figuur 2 (links) toont een fragment uit *Hadha al-kitab kashf al-asrar fi'ilm al-ghubar (Onthulling van de geheimen van de rekenkunst)*, geschreven door Al-Qalasadi in 1486. Het fragment gaat over de vermenigvuldiging van 534 met 342. In figuur 2 rechts staat de vertaling in moderne notatie.

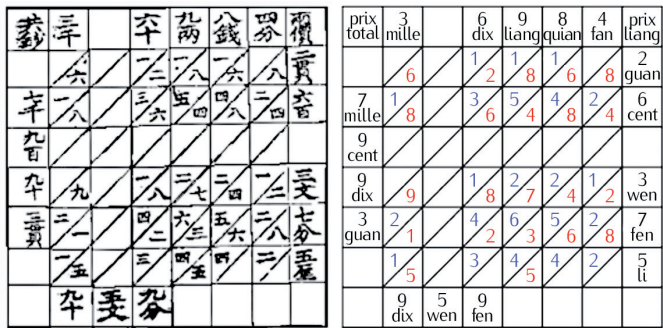


figuur 2

De diagonalen zijn hier anders getekend dan bij het eerste voorbeeld. Dat komt doordat er van rechts naar links gelezen wordt. De notatie van de getallen is echter wel gelijk aan hoe wij dat doen: rechts de eenheden, links daarvan de tientallen, en zo verder. Het getal dat verticaal (rechts) bij het rooster is geschreven, staat anders genoteerd dan bij het Pamiers-manuscript. Het bovenste cijfer is de 2, dan bij de middelste rij de 4 en onderaan de 3. Dat maakt dat als de getallen volgens de diagonalen worden opgeteld, de eenheden bovenaan komen te staan, daaronder de tientallen, de honderdtallen en zo verder. Het antwoord moet dan van onderen naar boven worden gelezen: 182628.

In China werd in dezelfde periode ook de vermenigvuldiging met het rooster gebruikt en genoteerd. Figuur 3 (links) geeft een financiële berekening voor de gouverneur

van de provincie Zhejiang in 1450. In de (Franse) vertaling ernaast^[3] zijn ook de benamingen van de verschillende munteenheden gebruikt.



figuur 3

Het kan een hele mooie activiteit zijn om je leerlingen een aantal verschillende versies van de gelosia-techniek te laten zien, al dan niet in vertaling en de leerlingen zelf te laten achterhalen wat er gebeurt. Ze kunnen de gevonden procedure aan elkaar uitleggen, of vergelijken met hun eigen bekende manier van vermenigvuldigen, voor- en nadelen benoemen, etc. Ook hier kunnen eventueel YouTube-filmpjes bij gebruikt worden. Renaud Chorlay heeft dit gedaan met leerlingen uit de bovenbouw van de basisschool^[4]. Dat maakt het zeker haalbaar voor leerlingen uit onze onderbouwklassen.

Rekenstokjes van Napier

Het rekenen met de gelosia-techniek werd door Napier opgepakt in het begin van de zeventiende eeuw. Hij koos voor houten rekenstokjes als concreet gebruiksvoorwerp. In zijn boek *Rabdologiae* uit 1617 legt hij dit uit. In de appendix zet hij de inscripties in de stokjes systematisch op een rijtje. De stokjes zijn oorspronkelijk balkvormig, aan elk van de vier zijden beschreven. Om dit zelf te kunnen toepassen, zie je in figuur 4 een getekende versie. Elke kolom bevat in principe een tafel. De meest linker kolom is de tafel van 0, daarna de tafel van 1, 2 tot en met 9. De diagonalen geven de scheiding tussen tientallen en eenheden weer.

Er zijn dus tien verschillende kolommen nodig, voor de getallen 0 t/m 9. Omdat sommige cijfers meer dan eens voorkomen in hetzelfde getal, is het handig om elke tafel meerdere keren op een stokje weer te geven. In de oorspronkelijke set van Napier zitten tien stokjes die aan vier kanten bedrukt zijn. Alle tafels komen precies vier keer voor.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

figuur 4

Met gebruik van rekenstokjes ziet de vermenigvuldiging van 365 met 4 respectievelijk 9 eruit zoals in figuur 5. Je legt de stokjes met de tafel van 3, 6 en 5 naast elkaar neer en leest dan de vierde rij af (groen gemaakt). Hier tel je weer van rechts naar links de eenheden (0), tientallen (4 + 2), honderdtallen (2 + 2) en duizendtallen (1) op, tot het eindantwoord $365 \times 4 = 1460$ gevonden is. De onderste groene rij geeft op vergelijkbare wijze $365 \times 9 = 3285$

3	6	5
6	12	10
9	18	15
12	24	20
15	30	25
18	36	30
21	42	35
24	48	40
27	54	45

figuur 5

Een voorbeeld van het vermenigvuldigen van grotere getallen, zie je in figuur 6. Hier wordt 365 vermenigvuldigd met 1615. Het is nu handiger om van het getal dat uit de meeste cijfers bestaat (1615) de stokjes met de tafel neer te leggen, dan hoeven er straks minder getallen opgeteld te worden voor het eindantwoord. De tussenstappen van de vermenigvuldiging met respectievelijk 3,

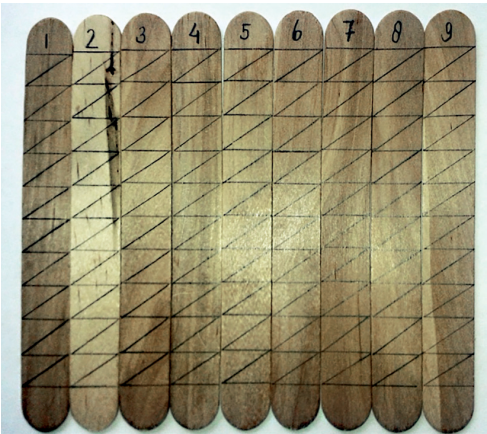
5 en 6 staan rechts. Bij het berekenen van het eindantwoord moeten er nog wat nullen worden toegevoegd: $484500 + 96900 + 8075 = 589475$. Merk op dat het diagonaal doortellen van de rijen, zoals bij het eerste voorbeeld uit het Pamiers-manuscript, hier niet werkt. Je gebruikt de stokjes alleen voor het berekenen van tussenstappen, maar voor het eindantwoord is nog wel een aparte optelling van de deelresultaten nodig. Als je houdt van een uitleg in de vorm van een video: Jeanine Daems legt uit hoe rekenstokjes werken in een kort filmpje op YouTube.^[5] Ze maakt daarbij gebruik van replica's van de stokjes die in het bezit zijn van Museum Boerhaave in Leiden.

1	6	1	5
2	12	2	10
3	18	3	15
4	24	4	20
5	30	5	25
6	36	6	30
7	42	7	35
8	48	8	40
9	54	9	45

figuur 6

Gebruik in de klas

De stokjes van Napier zijn goed na te maken met ijslolly-stokjes, zie figuur 7. Dat is een precisiewerkje met geodriehoek en fineliner, maar met wat sturing kunnen je leerlingen dit prima zelf en vinden ze dat ook leuk om te doen.



figuur 7

Studenten van de Driestar Hogeschool in Gouda hebben tijdens hun opleiding een lespakket ontwikkeld voor klas vmbo-BK-2. Het maken en gebruiken van de stokjes wordt in dit lespakket stap voor stap uitgelegd.

In de eerste les worden de stokjes gemaakt, daarna worden er in les 2 eenvoudige vermenigvuldigingen mee uitgevoerd en ten slotte worden in een afsluitende les ook vermenigvuldigingen met getallen die uit meerdere cijfers bestaan geleerd. Een voorbeeld van een opdracht uit het lesmateriaal zie je in figuur 8.

Activiteit 4

Maak de som 8×34 met behulp van de staafjes van Napier. Volg de stappen.

Stap 1 - Pak staafjes 3 en 4.

Stap 2 - Leg ze langs de getallen aan de rechterkant van deze bladzijde. Leg ze zo naast elkaar dat er 34 te lezen is.

Stap 3 - Kijk naar rij 8. Zet de getallen in de onderstaande tabel. Doe dat net zoals Jeroen dat deed.

Stap 4 - Tel de getallen diagonaal op.

	3	4	
			8

.....

Stap 5 - Vul in: $8 \times 34 = \dots\dots\dots$

figuur 8

Het materiaal kan worden opgevraagd bij de auteurs.^[6]

Noten

[1] Berlinghoff, W.P. & Gouvêa, F.Q (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon.

[2] Schwartz, R.K. (2012). The Pamiers Manuscript, Convergence, DOI:10.4169/loci003888

[3] Daval, N. (2014) Les abaques, outils de numération et de calcul, <http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article753>

[4] Chorlay, R, (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In Radford, L. Furinghetti, F. & Hausberger, T. (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM 2016, 18-22 July 2016)* (pp. 5-23). Montpellier, France: IREM de Montpellier. <https://hal.inria.fr/HPM2016/>

[5] <https://www.youtube.com/watch?v=oujdFKX1Kn8>

[6] Het lesmateriaal dat in dit artikel besproken wordt, kan worden opgevraagd bij Marijke Hassefras-Zuidbroek (marijkehassefras@hotmail.com) en Elwina Klippel (kli@calvincollege.nl).

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen. E-mailadres: d.a.van.den.bogaart@hva.nl



Wortels van de wiskunde

17: Lockdown wiskunde

In zijn artikel *Lockdown mathematics: a historical perspective* dat onlangs verscheen in *Nieuw Archief voor Wiskunde* kijkt Viktor Blåsjö naar historische episodes waarin wiskundigen in lockdown condities werkten. Desiree van den Bogaart maakte een Nederlandstalige bewerking van dit toepasselijke artikel.

Verdacht van spionage

'Een wiskundige is relatief goed geschikt voor gevangenschap.' Dat was de mening van Sophus Lie, die in 1870 een maand lang in de gevangenis zat. Hij was toen 27. Het feit dat hij opgesloten zat, belemmerde hem niet in zijn onderzoek naar wat Lie-groepen zouden worden. 'Terwijl ik een maand in de gevangenis zat... had ik daar de beste geestelijke rust om mijn ideeën te ontwikkelen.'^[1] Zeventig jaar later zou André Weil een zeer vergelijkbare ervaring hebben. De omstandigheden van hun gevangenschap zijn nauw met elkaar verbonden. Nadat ze op reis waren om wiskundige collega's te bezoeken, raakten ze beiden gedwongen hun werkzaamheden in het buitenland voort te zetten toen er een oorlog uitbrak: Lie in Frankrijk bij het uitbreken van de Frans-Pruisische oorlog, en Weil in Finland bij het begin van de Tweede Wereldoorlog. Ze werden beiden snel verdacht van spionage, vanwege hun vreemde gewoontes als excentrieke mathematici die onophoudelijk een soort onbegrijpelijke notities neerkrabbelden en buiten rondzwierven zonder een voor niet-vakgenoten begrijpelijk doel. Beiden werden uiteindelijk van de verdenking ontheven door de tussenkomst van wiskundige collega's die konden aantonen dat hun gedrag passend was voor een wiskundige en dat hun mysterieuze notitieboekjes geen geheime cijfers waren.^{[1], [2]}

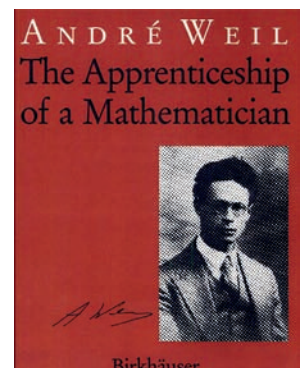
“Sophus Lie: 'Een wiskundige is relatief goed geschikt voor gevangenschap.'”

Productieve tijd

Weil werd teruggestuurd naar Frankrijk, waar hij nog een paar maanden gevangen werd gezet voor het ontlopen van zijn militaire taken. Net als Lie had hij een productieve



Sophus Lie (1842 – 1899)



Autobiografie uit 1992 van André Weil (1906 – 1998)

tijd in de gevangenis. 'Mijn wiskundewerk gaat door... en ik ben zelfs een beetje bezorgd... als het alleen in de gevangenis is dat ik zo goed werk, moet ik dan regelen dat ik elk jaar twee of drie maanden opgesloten zit?' 'Ik hoop hier wat meer tijd te hebben om in alle rust af te maken waar ik aan begonnen ben. Ik begin te denken dat niets zo bevorderlijk is voor de abstracte wetenschappen als de gevangenis.' 'Mijn zus zegt dat als ik hier wegga, ik een monnik moet worden, omdat dit regime zo bevorderlijk is voor mijn werk.' Weil vertelt hoe collega's zelfs aangaven jaloers te zijn op zijn gevangenisonderzoek. 'In het begin van mijn tijd in de gevangenis waren de brieven vooral variaties op het volgende thema: "Ik ken je goed genoeg om er vertrouwen in te hebben dat je deze beproeving waardig zult doorstaan". ... Maar al snel veranderde de toon. Twee maanden later schreef Cartan: 'We hebben niet allemaal het geluk om net als jij ongestoord te kunnen zitten en werken.' En Cartan was niet de enige: 'Mijn hindoeïstische vriend Vijayaraghavan zei vaak dat als hij zes maanden of een jaar in de gevangenis zat, hij zeker de hypothese van Riemann zou kunnen bewijzen. Dat was misschien waar, maar hij kreeg de kans niet.'

Moe van het isolement

Echter, Weil werd moe van het isolement. Hij probeerde vreugde te vinden in de kleine dingen: 'Als ik m'n nek omhoog optil, kan ik de bovenste takken van een paar bomen zien. Toen hun bladeren in het voorjaar begonnen uit te komen, droeg ik vaak de zinnen van de *Gita* voor. Patram puspam phalam toyam...' ('Een blad, een bloem, een vrucht, water, voor een zuiver hart kan alles een offer zijn'). Al snel meldde hij dat in zijn brieven: 'Mijn wiskundige koorts is afgenomen; mijn geweten zegt me dat ik, voordat ik verder kan gaan, de details van mijn bewijzen moet uitwerken, iets wat ik zo dodelijk saai vind dat ik, hoewel ik er elke dag enkele uren aan besteed, nauwelijks vordert.'^[2]

Aan de hand van deze voorbeelden lijkt het erop dat eenzame opsluiting en het opschorten van de afleidingen en verplichtingen van het dagelijks leven een maand of twee lang zeer bevorderlijk zouden kunnen zijn voor de wiskundige productiviteit, maar dat het ook heel goed mogelijk is om een minimaal rendement te krijgen als het langer duurt. Natuurlijk is het discutabel of de opsluiting vanwege het coronavirus überhaupt analoog is aan deze milde vorm van gevangenisstraf. Toen Bertrand Russell in 1918 voor een paar maanden gevangen werd gezet wegens pacifistische politieke acties, vond ook hij 'de gevangenis in vele opzichten heel aangenaam'. '... Ik heb enorm veel gelezen; ik heb een boek geschreven, *Inleiding tot de Wiskundige Filosofie*.' Maar zijn diagnose van de oorzaak van deze productiviteit is minder vergelijkbaar. Ik heb tenminste nog geen collega's horen roepen over de huidige omstandigheden: 'de vakantie van de verantwoordelijkheid is echt heerlijk'.^[3]

Tweede Wereldoorlog

'Tijdens de Tweede Wereldoorlog mocht Hans Freudenthal als Jood niet op de universiteit werken; zijn interesse in het wiskundeonderwijs op de basisschool werd toen



Hans Freudenthal (1905 – 1990)

aangewakkerd door 'speelschool' met zijn kinderen – een interesse die verder werd aangewakkerd door gesprekken met zijn vrouw.^[4] De lockdown als gevolg van het coronavirus heeft veel wiskundigen in een vergelijkbare positie gebracht. Misschien moeten we een nieuwe stijging van de belangstelling voor schoolwiskunde onder professionele wiskundigen verwachten. Freudenthals tijdgenoot Jakow Trachtenberg, een Joodse ingenieur, werd veel erger vervolgd, maar paste ook zijn wiskundige interesses aan zijn omstandigheden aan. Gevangen in een concentratiekamp zonder toegang tot zelfs maar pen en papier, ontwikkelde hij een systeem van mentale rekenkunde. Trachtenberg overleefde het concentratiekamp en publiceerde zijn rekenmethodes in een succesvol boek dat vele drukken heeft doorstaan en tot op de dag van vandaag zijn aanhangers heeft.^[5] Een ander nazi-kamp was de geboorteplaats van abstracte wiskunde door een luitenant artillerie, genaamd Jean Leray, tijdens een interneringsperiode van juli 1940 tot mei 1945. De omstandigheden van de opsluiting hebben de richting van dit onderzoek sterk beïnvloed: Leray slaagde erin voor de Duitsers te verbergen dat hij een toonaangevende expert was in vloeistofdynamica en mechanica. In plaats daarvan richtte hij zich op de algebraïsche topologie, een gebied waarvan hij het onwaarschijnlijk achtte dat het oorlogsachtige toepassingen zou voortbrengen.

Wiskunde zonder boeken

Een eerder geval van gevangenisstraf die het verloop van de wiskunde beïnvloedde, is Jean-Victor Poncelet anderhalf jaar als krijgsgevangene in Rusland. Poncelet maakte deel uit van Napoleons mislukte militaire campagne van 1812, en was pas in staat om terug te keren naar Frankrijk in 1814. In zijn tijd als gevangene werkte hij aan meetkunde. Poncelet had een eersteklas opleiding in de wiskunde aan de École Polytechnique gekregen, en zijn rol in het leger was luitenant in het ingenieurskorps. In zijn Russische gevangenis had hij geen toegang tot boeken, dus hij moest alle wiskunde die hij kende uit het geheugen uitwerken. Wellicht is het alleen maar omdat de wiskunde zich zo goed leent om op deze manier te worden gereconstrueerd dat Poncelet uiteindelijk een wiskundige werd; andere technische interesses zouden moeilijker zijn geweest om in afzondering na te streven zonder boeken. De afwezigheid van naslagwerken zou Poncelet er op natuur-



Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867) >

lijke wijze toe leiden om de meetkundige theorie samen te brengen en veel resultaten af te leiden uit een paar belangrijke principes. Tegelijkertijd is dit een prominent thema in de meetkunde aan het begin van de negentiende eeuw. Niet alleen de gevangene Poncelet had dit idee. Poncelet kon van de nood een deugd maken met een stijl van wiskunde waartoe hij tijdens zijn gevangenschap werd beperkt. Men is geneigd om zich voor te stellen dat Poncelet werd gedwongen om zich te wenden tot deze intuïtieve stijl van meetkunde als gevolg van het ontbreken van pen en papier, net zoals Trachtenberg zijn toevlucht moest nemen tot mentale rekenkunde. Maar dit is op zijn best een halve waarheid, want Poncelet had blijkbaar wel ruwe schrijfbestedingen tot zijn beschikking: de gevangenen kregen een minimale toelage, waarvoor hij enkele vellen papier kon krijgen, en hij slaagde er ook in zijn eigen inkt voor het schrijven te maken.^[6]



Ibn al-Haytham (965 – 1040)

Van ingenieur naar wiskundige

Ibn al-Haytham is een ander voorbeeld van een wiskundige die begint als ingenieur en zich vervolgens in gevangenschap in toenemende mate richt op de wiskunde. In het begin van zijn carrière bedacht hij een irrigatieschema waarmee de Nijl zou kunnen worden gebruikt om de nabijgelegen velden te besproeien. Toen zijn plannen onuitvoerbaar bleken, 'veinsde hij waanzin om te ontsnappen aan de toorn van de kalief en werd hij lange jaren opgesloten in een privé-huis tot de dood van de tirannieke en wrede heerser. Hij verdiende zijn broodwinning door de werken van Euclides en Ptolemaeus in geheime vertalingen te kopiëren.'^[7] De euclidische meetkunde en ptolemeïsche sterrenkundige berekeningen zijn zeker beter geschikt voor huisarreststudies dan technische projecten. Men kan zich verder afvragen of het toeval is dat Ibn al-Haytham, die zoveel zonnige dagen binnenshuis moest doorbrengen, ook de camera obscura ontdekte en deze een centrale rol gaf in zijn optica. Uit deze voorbeelden kunnen we concluderen dat als coronavirusmaatregelen een indirecte invloed hebben op de richting van het wiskundig onderzoek, het niet de eerste keer zou zijn dat de condities waarin de lockdown plaats-

vinden, bepaalde gebieden of stijlen van de wiskunde meer uitvoerbaar maken dan andere.

Newton en de pest

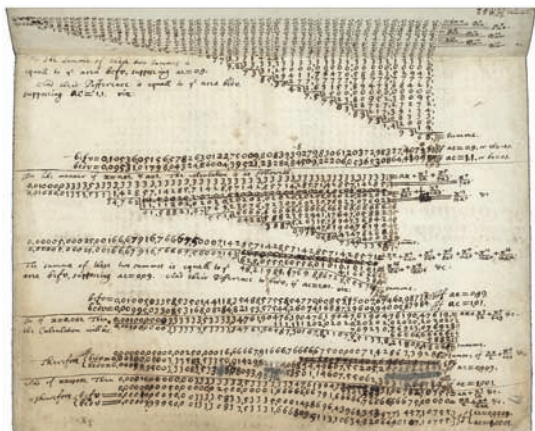
Isaac Newton ging in 1665 naar huis in isolatie, toen de Universiteit van Cambridge 'alle Fellows & Scholars' adviseerde om 'het land in te gaan ter gelegenheid van de pest', omdat het 'de Almachtige God in zijn rechtvaardige strengheid had behaagd om de stad Cambridge te bezoeken met de pest'. Newton was toen tweeëntwintig en had net zijn bachelordiploma behaald. Zijn productiviteit tijdens de pestisolatie is legendarisch: dit was zijn *annus mirabilis*, een prachtig jaar, waarin hij een aantal baanbrekende ontdekkingen deed. De tijdlijn is voor ons niet al te bemoedigend: de universiteit bleef bijna twee jaar effectief gesloten, met een afgebroken poging tot heropening halverwege, waardoor 'de plaag' alleen maar weer opkwam. Het is waar dat Newton grote dingen heeft bereikt tijdens de pestjaren, maar het is hoogst twijfelachtig of het isolement er veel mee te maken had en of die jaren echt allemaal uitzonderlijke jaren waren. Newton boekte al enorme vooruitgang voordat de pest uitbrak, en was op weg naar grote ontdekkingen, ongeacht de situatie omtrent de volksgezondheid. Inderdaad, Newtons eigen verslag van hoeveel hij bereikt heeft 'in de twee pestjaren van 1665 en 1666' schrijft zijn doorbraken niet toe aan externe omstandigheden, maar aan zijn eigen intellectuele ontwikkeling: 'Want in die tijd was ik in de bloei van mijn leven voor het doen van uitvindingen op het gebied van Wiskunde & Filosofie.'^[8] 'Filosofie' betekent hier fysica. En inderdaad heeft Newton over dit onderwerp veel voorbereidend werk verricht voor zijn latere succes tijdens de pestjaren, maar de fundamentele visie en synthese die we vandaag de dag associëren met 'newtoniaanse mechanica' ontbrak nog steeds. Zijn uiteindelijke doorbraak in de fysica hing af van de interactie met collega's en niet van het isolement.



Isaac Newton (1643-1727)

Rol van collega's

Newton deed later alle moeite om de betekenis van collega's te minimaliseren. Dit is nog een reden waarom Newtons pestervaring een dubieus model is om te volgen.



Newton's berekeningen

Newton zou een misantropische kluizenaar kunnen zijn, zelfs in normale tijden. Toen Cambridge weer in volle gang was, verliet Newton nog steeds 'zelden zijn kamer', herinnerden tijdgenoten zich, behalve wanneer hij verplicht was een lezing te geven – en zelfs dat had hij net zo goed in zijn kamer kunnen doen, want 'vaak leek het of hij aan de muren voorlas, bij gebrek aan toehoorders.'^[9] Hij publiceerde met tegenzin, en toen hij dat deed was Newton 'niet voorbereid op iets anders dan de onmiddellijke aanvaarding van zijn theorie': 'een beetje kritiek volstond, om hem eerst aan te zetten tot woede, en dan om hem in een isolement te drijven.' Het is goed mogelijk dat Newton alleen maar met collega's omging om zijn eigen superioriteit te bewijzen. Maar dat is toch ook een sociale invloed. Het feit blijft dat Newtons Principia niet werd geboren toen hij in quarantaine verbleef. In de wiskunde is het nauwkeurig genoeg om te zeggen dat Newton 'calculus' heeft uitgevonden tijdens de jaren van de pest. Maar hij was voor die tijd al goed op weg, inclusief de ontdekking van het binomium. Newton zei zelf dat de pest een onderbreking van twee jaar veroorzaakte in zijn experimenten over kleur, die hij was begonnen toen hij nog in Cambridge zat.^[10] Misschien is dit een ander voorbeeld van zuivere wiskunde die in afzondering wordt begunstigd ten koste van andere onderwerpen die meer afhankelijk zijn van boeken en hulpmiddelen. Thuisisolatie biedt ook tijd voor uitgebreide handmatige berekeningen: een zelfredzame wiskunde die zonder bibliotheek en laboratorium kan worden nagestreefd. Newton heeft deze kans niet gemist tijdens zijn isolatie. Zoals hij zich later herinnerde, '[voor het verlaten van Cambridge] vond ik de methode van de Oneindige reeks. En in de zomer van 1665, toen ik door de pest uit Cambridge werd gedwongen, berekende ik de oppervlakte onder de Hyperbool ... tot twee-en-vijftig cijfers met dezelfde methode.'^[11] Newtons notitieboekje met deze vervelende berekening is te bekijken op de website van de Universiteitsbibliotheek van Cambridge.^[12]

Noten

- [1] Stubhaug, A. (2002). *The Mathematician Sophus Lie: It was the Audacity of My Thinking*. Berlin: Springer.
- [2] Weil, A. (1992). *The Apprenticeship of a Mathematician*. Bazel: Birkhäuser.
- [3] Russell, B. (1968). *The autobiography of Bertrand Russell: 1914–1944*. New York: Little Brown and Company.
- [4] Bakker, A. & Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3>
- [5] Trachtenberg, J. (1960). *The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics*. New York: Doubleday and Company.
- [6] Didion, I. (1869). Notice sur la vie et les ouvrages du Général J.-V Poncelet. Paris: Gauthiers-Villars, p. 20.
- [7] Meyerhof, M. (1948). Ali al-Bayhaqi's Tatimmat Siwan al-Hikma: A biographical work on learned men of the Islam. *Osiris*, 8, 122-217.
- [8] Whiteside, D.T. (1966). Newton's Marvellous Year: 1666 and All That. *Notes and Records of the Royal Society of London* 21(1), 32-41.
- [9] Cohen, I.B. (1974). Newton, Isaac. Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10. New York: Charles Scribner's Sons.
- [10] Rupert Hall, A. (1992). *Isaac Newton: Adventurer in Thought*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Westfall, R.S. (1983). *Never at rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] Isaac Newton, MS Add.3958, 79r ff., <https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/151>

Over de auteurs

Viktor Blåsjö is universitair docent en onderzoeker geschiedenis van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Hij is gespecialiseerd in meetkunde en analyse. Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. E-mailadressen: V.N.E.Blasjo@uu.nl en d.a.van.den.bogaart@hva.nl
Het oorspronkelijke artikel van Viktor Blåsjö is te vinden op: <http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2020-21-2-095.pdf>