

Appendix – Over een eigenschap van een ellips

DICK KLINGENS

februari 2019

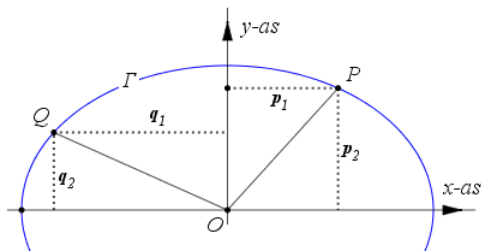
1. Het bewijs van stelling 1

Stelling 1 in het artikel luidt:

Is in een xOy -assenstelsel een ellips Γ gegeven met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ligt het punt $P = (p_1, p_2)$ op Γ en is Q het op Γ liggende eindpunt van de toegevoegde straal OQ van OP , dan geldt voor de coördinaten $(-q_1, q_2)$ van het punt Q (zie figuur a1):

$$\bullet \quad q_1 = \frac{a}{b} \cdot p_2, \quad q_2 = \frac{b}{a} \cdot p_1 \quad \diamond$$

figuur a1



Bewijs. Ik veronderstel hierbij $p_1, p_2 > 0$ en $q_1, q_2 > 0$.^[1]
De richtingscoëfficiënt (rico) van het lijnstuk OP is:

$$\bullet \quad \text{rico}(OP) = \frac{p_2}{p_1}$$

Die van OQ (en Q ligt in het tweede kwadrant) is dan:

$$\bullet \quad \text{rico}(OQ) = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{p_1}{p_2}$$

Immers, het product van de rico's van twee toegevoegde middellijnen (dus ook van twee toegevoegde stralen) is *per definitie* gelijk aan $\frac{-b^2}{a^2}$.

De vergelijking van de 'drager' van het lijnstuk OQ is dan: $y = \frac{-b^2 p_1}{a^2 p_2} x$. Zodat voor de x -coördinaat van het punt Q geldt, met eliminatie van y uit de vergelijking van de ellips en gevolgd door deling door b^2 :

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{-b^2 p_1}{a^2 p_2}x\right)^2 = a^2b^2 \Rightarrow x^2 + \frac{b^2 p_1^2}{a^2 p_2^2}x^2 = a^2 \Rightarrow x^2(a^2 p_2^2 + b^2 p_1^2) = a^4 p_2^2$$

Het punt P ligt op de ellips, zodat: $b^2 p_1^2 + a^2 p_2^2 = a^2b^2$. Dus is: $x^2 = \frac{a^2 p_2^2}{b^2}$ of $x = \frac{\pm a p_2}{b}$.

Daaruit volgt dat $x_Q = \frac{-a p_2}{b}$, en omdat $q_1 > 0$ is, is $q_1 = \frac{a p_2}{b}$ en $q_2 = \left(\frac{-b^2 p_1}{a^2 p_2}\right) \cdot \left(\frac{-a p_2}{b}\right) = \frac{b p_1}{a}$. \diamond

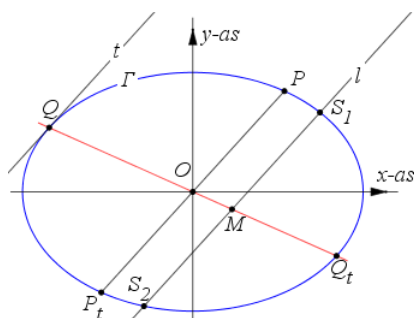
Opmerking. Een gevolg van stelling 1 is een eigenschap van de som van de kwadraten van de lengtes van twee toegevoegde middellijnen. Zie daarvoor paragraaf 3 van deze appendix.

2. Het bewijs van stelling 3

In het artikel luidt stelling 3:

De meetkundige plaats van de middens van de koorden van een ellips die evenwijdig zijn met een middellijn van die ellips, is de aan die middellijn toegevoegde middellijn. \diamond

figuur a2



Bewijs. De lijn l is evenwijdig met de middellijn PP_t van de ellips Γ . Stel dat de vergelijking van l is:

$$\bullet \quad y = mx + n$$

waarbij $m = \text{rico}(OP)$ is, en dus *vast*. En n is variabel.

Zij nu ^[2] $\Gamma \& l = \{S_1, S_2\}$. Dan wordt de vergelijking van de meetkundige plaats van het midden M van het lijnstuk $S_1 S_2$ gezocht.

Is $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ weer de vergelijking van Γ , dan geldt voor de x -coördinaten van de punten S_1, S_2 (via substitutie van $y = mx + n$):

$$\bullet \quad (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mn + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Voor de x -coördinaat x_M van M is dan, op grond van de (formule van de) som van de wortels (dat zijn x_1 en x_2) van de laatste kwadratische vergelijking in x :

$$\bullet \quad x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a^2mn}{b^2 + a^2m^2} = \frac{-a^2mn}{b^2 + a^2m^2}$$

En dan is, na eliminatie van $n (= y - mx)$ en na het “lopend maken” van de coördinaten:

$$\bullet \quad x = \frac{-a^2m(y - mx)}{b^2 + a^2m^2} = \frac{-a^2my + a^2m^2x}{b^2 + a^2m^2}$$

Dit is dan de vergelijking van de gezochte meetkundige plaats van het punt M . Omgewerkt:

$$x(b^2 + a^2m^2) = -a^2my + a^2m^2x \Rightarrow xb^2 = -a^2my \Rightarrow y = \frac{-b^2}{a^2m}x$$

De laatste relatie is de vergelijking van een rechte lijn door het punt O .

De rico van die lijn, waarvan Q een snijpunt met de ellips is, is $\frac{-b^2}{a^2m} = \text{rico}(OQ)$. En dan is:

$$\bullet \quad \text{rico}(OP) \cdot \text{rico}(OQ) = m \cdot \frac{-b^2}{a^2m} = \frac{-b^2}{a^2}$$

Waaruit blijkt dat de lijnen OP en OQ volgens de definitie toegevoegde middellijnen zijn. En daarmee is stelling 3 uit het artikel bewezen. \diamond

Opmerkingen

1. Uit een en ander blijkt, dat ook indien een stelsel koorden evenwijdig aan OQ gekozen wordt, de middens van die koorden op de lijn OP zullen liggen. Of iets anders geformuleerd: de middellijnen van een ellips zijn in paren te rangschikken; elke middellijn van zo'n paar deelt de koorden middendoor die evenwijdig zijn met de toegevoegde van die middellijn.

2. En dat de raaklijn in een eindpunt van een middellijn evenwijdig is met de toegevoegde middellijn daarvan, kan eenvoudig worden berekend.

Immers – en zie figuur a2 – met $P = (p_1, p_2)$ volgt uit stelling 1, dat $Q = (\frac{-ap_2}{b}, \frac{bp_1}{a})$. De raaklijn t in Q aan de ellips met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ heeft dan de vergelijking:

$$-\frac{ap_2}{b}b^2x + \frac{bp_1}{a}a^2y = a^2b^2 \Rightarrow -abp_2x + abp_1y = a^2b^2 \Rightarrow -p_2x + p_1y = ab$$

Dus is $\text{rico}(t) = \frac{p_2}{p_1}$. En $\text{rico}(OP)$ is ook gelijk aan $\frac{p_2}{p_1}$, zodat de lijn t inderdaad evenwijdig is met OP .

3. Een stelling van Apollonius

In stelling 1 is aangetoond dat als de punten P en Q (resp. in het eerste en tweede kwadrant) op een ellips (met halve aslengtes a, b) liggen én die punten eindpunten zijn van toegevoegde middellijnen, dat dan:

$$P = (p_1, p_2) \Leftrightarrow Q = (\frac{-ap_2}{b}, \frac{bp_1}{a})$$

Daarvan maak ik gebruik bij het bewijs van een toch wel oude stelling. Uit stelling 1 volgt namelijk:

$$OP^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad OQ^2 = (\frac{-ap_2}{b})^2 + (\frac{bp_1}{a})^2 = \frac{a^2p_2^2}{b^2} + \frac{b^2p_1^2}{a^2}, \quad \text{zodat via optelling:}$$

$$\begin{aligned} OP^2 + OQ^2 &= p_1^2 + \frac{b^2p_1^2}{a^2} + p_2^2 + \frac{a^2p_2^2}{b^2} = p_1^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} + p_2^2 \frac{b^2 + a^2}{b^2} \\ &= (a^2 + b^2) \left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

Omdat het punt P op de ellips ligt, is de tweede factor in de laatste relatie gelijk aan 1.^[3] Dus:

$$\bullet \quad OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$$

Vermenigvuldiging hiervan met 4 geeft dan vervolgens:

$$\bullet (2OP)^2 + (2OQ)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

In woorden:

Stelling 4. De som van de kwadraten (van de lengtes) van twee toegevoegde middellijnen van een ellips is gelijk aan de som van de kwadraten (van de lengtes) van de assen van die ellips. \diamond

Opmerking. Stelling 4 is een van de stellingen die Apollonius van Perga (260–190 v.Chr., Griekenland) bewees in zijn werk over de kegelsneden (Gr. Κωνικά = Konika); de stelling staat bekend als de **eerste stelling van Apollonius**.

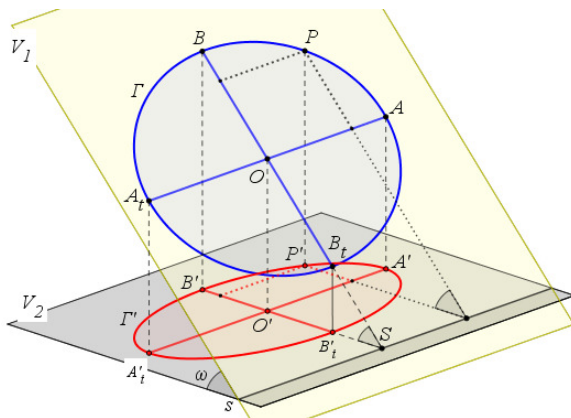
4. Van cirkel naar ellips: orthogonale projectie

Ik bewijs nu, zonder introductie in de 3-dimensionale euclidische meetkunde:

Stelling 5. De orthogonale projectie van een cirkel is een ellips. \diamond

Bewijs. Zie figuur a3-1. De cirkel Γ (middenpunt O , straal a) ligt in een vlak V_1 . Het vlak V_2 snijdt het vlak V_1 volgens de lijn s . De standhoek^[4] tussen beide vlakken op de snijlijn is ω .

figuur a3-1



De middellijn AA_t van Γ die evenwijdig is met s , wordt loodrecht geprojecteerd op V_2 . Dit geeft het lijnstuk $A'A'_t$ met:

$$\bullet AA_t = A'A'_t = 2a$$

De middellijn BB_t van Γ die loodrecht staat op s , wordt ook loodrecht geprojecteerd op V_2 . Het beeld van BB_t is dan $B'B'_t$ waarbij:

$$\bullet B'B'_t = 2a \cdot \cos \omega$$

Worden de lijnen AA_t, BB_t opgevat als assen van een xOy -assenstelsel in V_1 , dan luidt de vergelijking van Γ in dat assenstelsel:

$$\bullet x^2 + y^2 = a^2$$

Van het orthogonale beeld Γ' van Γ in V_2 bepaal ik nu ook de vergelijking.

Is P' het orthogonale beeld van het op Γ gelegen punt $P = (x_P, y_P)$, dan geldt voor de coördinaten van het punt P' op Γ' , bij een assenstelsel in Γ' met $A'A'_t$ en $B'B'_t$ als assen:

$$\bullet x_{P'} = x_P, y_{P'} = y_P \cdot \cos \omega$$

Zodat:

$$x_P^2 + y_P^2 = a^2 \Rightarrow (x_{P'})^2 + \left(\frac{y_{P'}}{\cos \omega}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \left(\frac{x_{P'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_{P'}}{a \cos \omega}\right)^2 = 1$$

De coördinaten van P' voldoen blijkens de laatste relatie aan de vergelijking van een ellips waarvan de lengtes van de assen opvolgend gelijk zijn aan a en $a \cos \omega$. De vergelijking van Γ' is:

$$\bullet \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a \cos \omega}\right)^2 = 1 \quad \text{of} \quad \cos^2 \omega \cdot x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \omega$$

De lijnstukken $O'A'$ en $O'B'$ zijn dus de (positieve) halve assen van die ellips. \diamond

In paragraaf 5 zal ik twee (eenvoudig te bewijzen) eigenschappen van de orthogonale projectie gebruiken. Bedoelde eigenschappen zijn hierna geformuleerd in stelling 6.

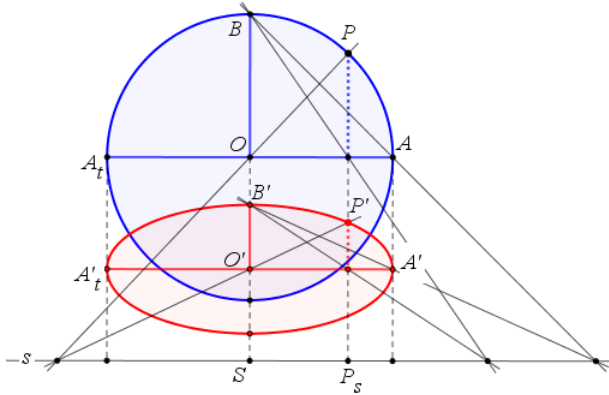
Stelling 6. Bij een orthogonale afbeelding geldt:

1. de beelden van evenwijdige lijnen zijn evenwijdig;
2. de verhouding van de lengtes van collineaire lijnstukken is invariant. \diamond

Opmerking. Door het vlak V_1 (met de hele “inhoud”) om de lijn s te roteren over de (scherpe) hoek ω wordt een afbeelding van het vlak V_2 op zichzelf geïnduceerd. Dit is een **loodrechte lijnvermenigvuldiging** ten opzichte van de lijn s : elk punt P van V_2 wordt zó afgebeeld op een punt P' van V_2 dat, en zie figuur a3-2:

- $PP' \perp s$ én $P_s P' = k \cdot P_s P$ (waarbij $P_s = PP' \cap s$ en $k = \cos \omega$)

figuur a3-2



Merk op dat de verbindinglijnen van overeenkomstige punten elkaar ook bij deze afbeelding op de lijn s snijden, zoals BA , $B'A'$ en OP , $O'P'$.

De lijn s wordt in dit geval *collineatie-as* (ook wel *affiniteitsas*) genoemd.

De afbeelding kan ook worden gedefinieerd als $k < 0$. De punten P en P' liggen in dit geval aan verschillende kanten van de lijn s , waarbij:

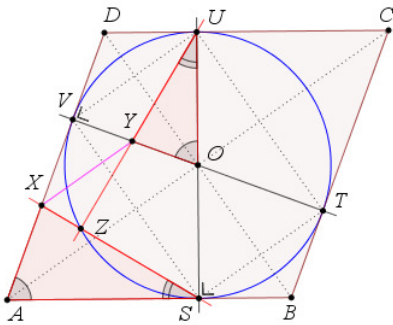
- $P_s P' = |k| \cdot P_s P$.

5. Een ingeschreven ellips in parallellogram

Ik ga eerst uit van een *cirkel* die beschreven is binnen een *ruit* $ABCD$. De raakpunten van de cirkel aan de zijden van de ruit zijn opvolgend S, T, U, V ; zie figuur a4.

Ik merk daarbij op dat er bij een gegeven ruit precies één ingeschreven cirkel is, waarvan het middelpunt samenvalt met het snijpunt O van de diagonalen van de ruit.

figuur a4



Het punt Z is een willekeurig punt van $bg(SV)$. Ook is $ZS \cap AV = X$ en $ZU \cap OV = Y$.

Vierhoek $OVAS$ is een koordenvierhoek, zodat $\angle A = \angle VOU$ (binnen- en buitenhoek). Ook is $\angle ASX = \frac{1}{2}bg(SZ) = \angle SUZ$ (‘raaklijnhoek’, omtrekshoek).

Daaruit volgt dat de driehoeken ASX en OUY gelijkvormig zijn (*hh*), zodat:

- $AX : OY = AS : OU$

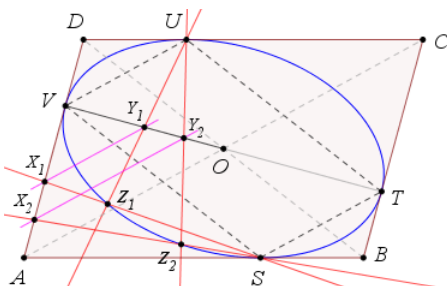
En omdat $AS = AV$ (raaklijnstukken uit A) en $OU = OV$ (straal van de cirkel) kan hiervoor ook geschreven worden:

- $AX : OY = AV : OV$

Het lijnstuk XY (dat evenwijdig is met AO) snijdt dus op de lijnstukken VA en VO dezelfde verhouding in. Verder is het zo dat:

- voor de koorden ST, UV geldt: $ST \parallel AC \parallel UV$;
- voor de koorden TU, SV geldt: $TU \parallel BD \parallel SV$.

figuur a5



Een orthogonale afbeelding (of zo men wil, een lijnvermenigvuldiging) beeldt nu de ruit af op een parallellogram (stelling 6.1) en de cirkel op een in dat parallellogram ingeschreven ellips (stelling 5).

Het snijpunt van de diagonalen valt dan samen met het middelpunt van de ellips (stelling 6.2).

Is het punt S , dat gelegen is op een zijde van het parallellogram (zie figuur a5), het raakpunt van een ingeschreven ellips aan die zijde, dan kunnen daarna ook raakpunten (aangegeven met T, U, V) op de andere zijden worden gevonden (met de koorden ST, TU, UV).

Het blijkt dat er bij een parallellogram meer vrijheden zijn dan bij een ruit. Het (eerste) raakpunt S kan namelijk *willekeurig* op een zijde worden gekozen. Een parallellogram heeft daarom oneindig veel ingeschreven ellipsen.

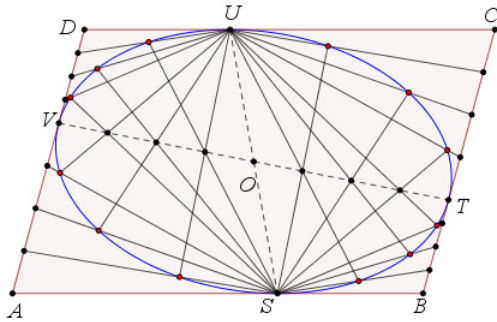
De constructie. Zie weer figuur a5. Op VA kies ik de punten X_1, X_2 en – via met AO evenwijdige lijnen door X_1, X_2 – construeer ik op VO de punten Y_1, Y_2 .

En dan wordt op VA en op VO *dezelfde* verhouding tussen de (lengtes van de) in dit geval drie deellijnstukken ingesneden.

Nu kunnen ook de punten $Z_1 = SX_1 \ \& \ UY_1$ en $Z_2 = SX_2 \ \& \ UY_2$ worden gevonden. Dit verloopt geheel conform stelling 6.2.

De punten Z_1, Z_2 zijn punten van de gezochte ingeschreven ellips van de parabool. \diamond

figuur a6

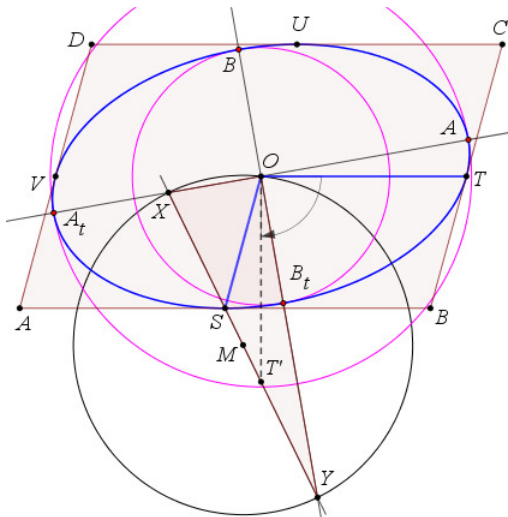


Andere punten van die ellips kunnen, indien gewenst, geheel analoog worden geconstrueerd; zie figuur a6, waarin elk van de zes “deelnemende” lijnstukken in vier gelijke stukken is verdeeld.

Ik merk tot slot op, dat een kegelsnede in principe door vijf punten is bepaald. Door de keuze van S (en de eenvoudige constructie van de punten T, U, V) is alleen nog een vijfde punt (zoals het punt Z_1) nodig om de ingeschreven ellips met een dynamisch meetkundeprogramma^[5] te kunnen tekenen.

Rytz’ constructie. De voor de hand liggende constructie van Rytz waarmee het probleem kan worden opgelost, volgt hierna. Daarbij maak ik gebruik van opmerking 2 bij het bewijs van stelling 3, dat in paragraaf 2 hierboven staat.

figuur a7



De vrijheid voor het kiezen van een raakpunt op een zijde is reeds ter sprake gebracht. Daarom is het punt S (hier) zó gekozen dat het samenvalt met het midden van de zijde AB .

De overige drie raakpunten T, U, V kunnen dan op dezelfde manier als hierboven worden gevonden.

De lijnstukken OS, OT zijn in dit geval *toegevoegde stralen* van de ellips (zie stelling 3).

Het punt T' is het rotatiebeeld van het punt T over -90° . Het midden van het lijnstuk ST' is punt M , dat ook het middelpunt is van de Thales-cirkel door O .

De punten X en Y , die de snijpunten zijn van de lijn ST' met de cirkel door O , bepalen dan de assen AA_t, BB_t van de ellips. Daarbij is $OA = XT' (= a)$ en $OB = YT' (= b)$.

6. Noten

- [1] De algemene geldigheid van het bewijs wordt door deze veronderstelling geen geweld aangedaan.
- [2] Met $u \ \& \ v = \{X, Y\}$ wordt in hetgeen volgt bedoeld: X en Y zijn (de) snijpunten van de meetkundige objecten u en v ; $u \ \& \ v = X$ betekent: X is het/een snijpunt van u en v .
- [3] Tot nu toe werd steeds als vergelijking van de ellips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ gebruikt. Deze vergelijking is, zoals eenvoudig is in te zien, equivalent met de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- [4] De **standhoek** tussen twee elkaar volgens de lijn s snijdende vlakken V en W is de hoek die gevormd wordt door twee door een willekeurig punt S van s gaande loodlijnen op s , die opvolgend gelegen zijn in V en W .
- [5] De figuren in deze appendix en in het artikel zijn alle gemaakt met het computerprogramma *GeoGebra*.
Zie: <https://www.geogebra.org/?lang=nl-NL>

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van het wiskundetijdschrift *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuariel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamenprogramma vanaf 2018).

E-mailadres: dklingens@gmail.com -- website: <http://www.pandd.nl>
