# EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Wat bedoelen ze toch met ... statistical literacy?

Vouwen in de wiskundeles

Een eerlijke eindstand berekenen bij een afgebroken competitie

Computationeel denken

JAARGANG 96 - DECEMBER 2020

NR.3

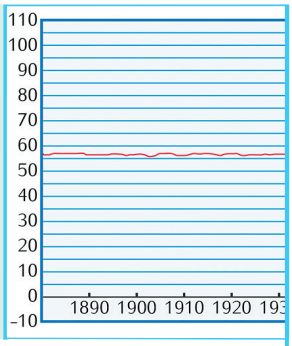
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR3

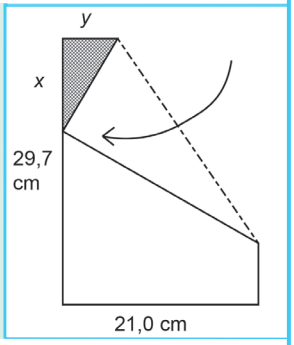
## IN DIT NUMMER


WAT BEDOELEN ZE TOCH MET ... STATISTICAL LITERACY?
Irene van Stiphout
4




DE ECHTE EINDSTAND
Roel Lambers
Frits Spieksma
8

VOUWEN – EN BESCHOUWEN – IN DE WISKUNDELES
Jacoliene van Wijk
10

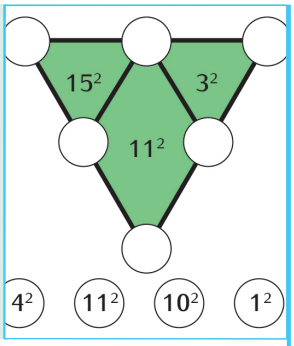



UITDAGENDE PROBLEMEN
'WAT HEB JE NU AAN BREUKEN?'
Jacques Jansen
15

WIS EN WAARACHTIG
18

HET FIZIER GERICHT OP...
COMPUTATIONEEL DENKEN IN DE WISKUNDELES
Sylvia van Borkulo
Paul Drijvers
20

PYTHAGORISCHE RIJTJES
Martin Kindt
22




RIJTJES MET WITTE EN ZWARTE (BINGO)BALLEN V
Rob Bosch
27

BOEKBESPREKING
STRAF IN STATISTIEK
Henk Hietbrink
30

ONDERBOUWWISKUNDEDAG 2020
HITTE IN DE STAD
Dédé de Haan
32

OVER EEN EIGENSCHAP VAN EEN ELLIPS
Dick Klingens
34

Foto: Martini Paviljoen van het Martini Ziekenhuis Groningen.

Foto: Liesbeth Coffeng

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WAARDEVOLLE PRODUCTEN I
Gerard Koolstra 38

MATH BETWEEN US
SO AS NOT TO OUTRUN TRUST
Jana Dean 42

VASTGEROEST
Ab van der Roest 44

PUZZEL
Esther Bod 45

SERVICEPAGINA 46

## Alle Wortels van de wiskunde in één Euclides

Hoe gebruik je de geschiedenis van de wiskunde in de les? In de serie Wortels van de wiskunde bespraken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems concrete lesideeën om historische bronnen te gebruiken in de les. Deze artikelen zijn nu gebundeld tot een speciale uitgave van *Euclides*, met een voorwoord van Desiree en Jeanine.
Deze special is te downloaden op de *Euclides*-site.

*vakbladeuclides.nl/963wortels*

## Kort vooraf

Nog een paar dagen en je kunt van een welverdiende kerstvakantie gaan genieten. Thuis onder de kerstboom waarschijnlijk, zoals het er nu naar uitziet. De laatste maanden zijn we in de media overspoeld met praktische wiskunde en één ding lijken de media op de een of andere manier te hebben geleerd. Zo gaat het zowel in de berichtgeving over het aantal corona-besmettingen als ook in het nieuws over de Amerikaanse verkiezingen steeds vaker over 'procentpunten' in plaats van 'procenten'. Viel je dat ook op, of is hier de wens de vader van de gedachten?
Nu de kerstvakantie wellicht iets anders gaat verlopen dan voorzien, zorgt deze *Euclides* ervoor dat je je zeker niet hoeft te vervelen. Nog nooit waren er bij één nummer zoveel extra pagina's literatuur te downloaden: 1153 in totaal. Jacoliene van Wijk heeft de geschiedenis van het vouwen in de wiskundeles onderzocht aan de hand van artikelen uit *Euclides* (zie p. 10). Alle artikelen zijn te downloaden van de site of in te zien door erop te klikken in de digitale *Euclides*.
Daarnaast kun je ook de twee boeken downloaden die zijn voortgekomen uit de ICME-13 conferentie (2016) over de Nederlandse aanpak van didactiek van de wiskunde (p. 41). Verder zijn er downloads van: *Toekomstgericht reken- en wiskundeonderwijs van de werkgroep Wiskunde voor morgen* (p. 43) en de gebundelde 'Wortels van de Wiskunde' (p. 3).
En we geven het ruiterlijk toe, het was geen test, ook geen cliffhanger, maar gewoon een vergissing: het artikel van Irene van Stiphout 'Wat bedoelen ze toch met... Statistical Literacy' stond al vermeld op de voorkant van het vorige nummer, maar staat in dit nummer. Namens de hele redactie wensen we jullie mooie kerstdagen en een gezond begin van 2021.

Tom Goris

Irene van Stiphout

# Wat bedoelen ze toch met... statistical literacy?

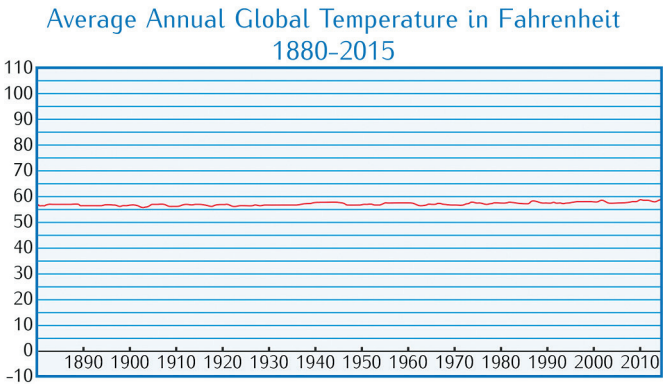
In elke aflevering van de rubriek Wat bedoelen ze toch met...? staat een spraakmakend begrip uit de wiskundedidactiek of de onderwijskunde centraal. Hoe vertaalt zich dit begrip naar de onderwijspraktijk? In deze aflevering schrijft Irene van Stiphout over het begrip statistical literacy.

## Inleiding

Cijfers spelen een belangrijke rol in de maatschappij. Steeds vaker worden steeds meer data verzameld door steeds meer partijen en worden allerlei beslissingen hierop gebaseerd. Van burgers wordt verwacht dat ze een kritische houding hebben ten opzichte van cijfers. In dat verband wordt wel gesproken over statistical literacy. Maar wat wordt hier nu eigenlijk onder verstaan?

## Voorbeeld

In december 2015 plaatste de conservatieve nieuwssite National Review een bericht op twitter met de titel 'The only #climatchange chart you need to see'. Daaronder stond de grafiek uit figuur 1: een overzicht van de gemiddelde temperatuur op aarde vanaf 1880 tot 2010. De boodschap was duidelijk: er is nauwelijks verandering te zien in al die jaren. Dus van opwarming van het klimaat is overduidelijk geen sprake. Of is dat op basis hiervan niet te zeggen? Om hier een uitspraak over te kunnen doen, helpt het om de beschikking te hebben over statistical literacy. Maar wat is dat eigenlijk?




*figuur 1*

## Statistical literacy

Het begrip 'statistical literacy' komt uit de jaren '90. Eén van de eerste definities, uit 1993, is die van Wallman[1], die statistical literacy definieert als 'the ability to understand and critically evaluate statistical results that permeate our daily lives coupled with the ability to appreciate the contribution that statistical thinking can make in public and private, professional and personal decisions.' In de literatuur zijn meerdere definities te vinden die onderling op elkaar lijken. Zo ziet Gal[2] statistical literacy als twee samenhangende onderdelen: het gaat onder meer om het kritisch kunnen interpreteren en evalueren van statistische informatie en argumenten gebaseerd op data. Daarnaast gaat het om de vaardigheid om te discussiëren en te communiceren over opvattingen en meningen gebaseerd op statistische informatie. Gal wijst erop dat deze twee componenten niet op zichzelf staan maar verbonden zijn door onderliggende statistische ideeën. Voor een kritische houding is begrip van deze statistische ideeën van cruciaal belang.

De laatste jaren zijn er veel ontwikkelingen op het gebied van statistiek en met name op het gebied van data. Er wordt zelfs gesproken over een datarevolutie.[3] De enorme beschikbaarheid van data heeft grote gevolgen. Niet alleen worden er grote hoeveelheden data verzameld en geanalyseerd, de data die worden verzameld zijn deels anders van aard, bijvoorbeeld plaatjes en filmpjes. Deze nieuwe typen data vragen om nieuwe manieren om deze te analyseren en te visualiseren. Voorbeelden hiervan zijn interactieve kaarten en tabellen waarin gebruikers keuzes kunnen maken in wat en hoe de informatie wordt getoond. Door het interactieve karakter is de gebruiker niet alleen consument maar ook producent: een deel van de statistische analyse wordt door de gebruiker zelf uitgevoerd.

De grote hoeveelheden data die beschikbaar zijn, veranderen ook de vragen. Zo hoeven data niet meer specifiek verzameld te worden. Vaak zijn er al veel (heel veel) data waarin op zoek kan worden gegaan naar onderliggende structuren en patronen. Deze manieren van omgaan met data passen niet in de klassieke statistische cyclus van een vraag stellen, data verzamelen, data analyseren en conclusies trekken. Verder leidt die enorme beschikbaarheid van data tot de behoefte om op een andere manier naar data te kijken. Een voorbeeld is het klassieke idee dat correlatie nog geen oorzakelijk verband hoeft te betekenen: een toename van het aantal ooievaars en geboortes in Drenthe hoeven niets met elkaar te maken te hebben. Maar met veel data zijn oorzakelijke verbanden niet altijd interessant voor bedrijven; samenhang is voldoende. Denk bijvoorbeeld aan bedrijven die op websites producten aanbieden die veel zijn gekocht in combinatie met het product dat je net hebt besteld: 'Anderen kochten ook... '. Omgekeerd is het zo dat er binnen grote datasets altijd wel variabelen zijn die hoog correleren. Op deze website[4] staan allerlei voorbeelden van openbare datasets die onderling heel hoog correleren. Zo is op de site een correlatie van 0,9926 te vinden tussen het aantal echtscheidingen per 1000 inwoners in de staat Maine en de consumptie van margarine...

> "De rol van statistiek verandert door de veranderende rol van data in de maatschappij."

## Statistiek in de maatschappij

De veranderende rol van data zorgt ervoor dat van burgers andere vaardigheden worden verlangd. Zo wijst Gould[5] erop dat burgers onder andere zouden moeten weten hoe persoonlijke data worden verzameld, door wie en met wat voor doel en dat ze zich bewust zouden moeten zijn van ethische aspecten, zoals privacy. Door data slim te combineren en te koppelen aan inzichten uit de gedragspsychologie, kunnen bedrijven meer te weten komen dan wat in de verzamelde data staat. Een voorbeeld hiervan is het schandaal rond Cambridge Analytica. Een ander punt is de rol van cijfers in de maatschappij. Zo zijn politieke besluiten vaak gebaseerd op statistisch onderzoek. Voor burgers is het belangrijk om een inschatting te kunnen maken van de kwaliteit daarvan. Om hieraan tegemoet te komen hebben verschillende kranten rubrieken waarin de juistheid van (statistische) uitspraken wordt gecheckt. Ook stellen overheden hun data ter beschikking zodat burgers zelf analyses kunnen uitvoeren en checken.[6] Samengevat kunnen we zeggen dat de rol van statistiek verandert door de veranderende rol van data in de maatschappij. Verschillende onderzoekers pleiten er dan ook voor om de omschrijving van statistical literacy aan te passen aan deze nieuwe inzichten.[7], [8]

## Uitdagingen voor het onderwijs

De ontwikkelingen die hierboven zijn beschreven hebben uiteraard gevolgen voor het onderwijs. In het basisonderwijs hebben Van Zanten et al.[9] gekeken of kinderen op jonge leeftijd (vanaf groep 3) al in staat zijn om kritisch naar getallen en statistische gegevens te kijken. Hieruit bleek dat ook jonge leerlingen al zogeheten 'red flags' kunnen ontwikkelen: alarmbellen die afgaan als bijvoorbeeld een meetwaarde extreem precies is, de schaalverdeling op de as van een grafiek opvallend is of er sprake is van een specifieke steekproef, zie het kader. In de nieuwe programma's wiskunde A voor havo en vwo is statistiek met grote datasets opgenomen. In dit onderdeel, dat met een schoolexamen wordt getoetst, gaan leerlingen met behulp van ict aan de slag met grote datasets. Daarnaast wordt in het centraal schriftelijk examen van havo wiskunde A aandacht besteed aan kwalitatief redeneren over statistiek. Deze ontwikkelingen passen in een internationale trend waarin wordt gepleit voor meer aandacht voor het ontwikkelen van statistical literacy. Ridgway[10] beargumenteert dat leerlingen op alle niveaus strategieën moeten leren om na te denken over complexe vragen in de context van veel en rijke data. Dit kan gedaan worden aan de hand van vrij beschikbare datasets.

### Reken-wiskundige *red flags*

- Een getal is extreem precies.
- Getallen zijn extreem breed of absoluut geldend.
- Een getal of een verhouding lokt een heftige reactie uit.
- De aangehaalde cijfers zijn oud.
- De schaal van een grafiekas valt op.
- Er is sprake van een opvallende oorzaak-gevolg-relatie.
- Er is sprake van een specifieke steekproef.
- Er is een sprake van specifieke antwoord-alternatieven.

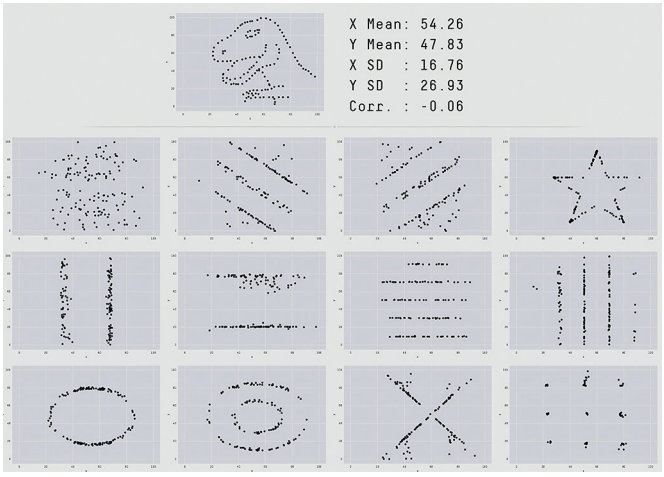
>

## Wat te doen in de klas?

In de huidige curricula zijn onderdelen van statistical literacy terug te vinden in algemene beschrijvingen. Zo staat in de syllabus vmbo dat leerlingen op basis van verwerkte informatie conclusies moeten kunnen trekken en kritisch moeten kunnen beoordelen. Leerlingen kunnen hierop worden voorbereid door in het klein of in het groot na te denken over statistiek. De vergezichten die hierboven zijn geschetst met grote datasets en verantwoord burgerschap kunnen in de klas klein beginnen door bijvoorbeeld een onderzoekje in de klas te doen. Ook, of juist hierin, kunnen belangrijke wiskundige concepten aan de orde komen. Daarnaast zorgt de enorme beschikbaarheid van data ervoor dat er allerlei interessante voorbeelden zijn om te bespreken met leerlingen.
De vraag is dan wel wat het doel is, welk wiskundig inzicht er aan de orde komt. We noemen er hier een paar zonder compleet te willen zijn.

## Meten van complexe constructen

Stel dat een school wil meten hoe gelukkig leerlingen zijn op school. Hoe zou je dat kunnen doen? Welke gegevens zou je hiervoor moeten verzamelen? Voor leerlingen is het belangrijk dat ze leren dat het meten van dit soort constructen ingewikkeld is en dat de manier waarop gemeten wordt gevolgen heeft voor de betrouwbaarheid van de uitkomst. Dit geldt bijvoorbeeld ook voor het in kaart brengen van grote maatschappelijke problemen als honger, droogte, armoede en geluk. Het onderliggend wiskundige idee hier zou kunnen zijn dat er keuzes gemaakt moeten worden in hoe welke data worden verzameld en geanalyseerd en hoe die keuzes invloed hebben op de conclusies die worden getrokken.




*figuur 2*

## Relatie tussen overzicht en detail

Een dataset als geheel biedt meestal geen overzicht. Om dit te krijgen, worden berekeningen uitgevoerd, zoals het berekenen van het gemiddelde en de spreiding. De winst is dat deze getallen overzicht creëren over de dataset. De prijs die hiervoor wordt betaald, is het verlies aan detail. Het besef dat datasets met dezelfde kenmerken als gemiddelde en standaardafwijking enorm van elkaar kunnen verschillen is belangrijk bij het interpreteren van deze kengetallen. In figuur 2[11] staan spreidingsdiagrammen van datasets die allemaal een gelijk gemiddelde, standaardafwijking en correlatie hebben. Dit laat zien dat datasets die zoveel overeenkomsten hebben helemaal niet op elkaar hoeven te lijken.

## Stellen van vragen

Een ander vertrekpunt zou een dataset kunnen zijn waarbij met leerlingen discussie gevoerd kan worden over wat je met die data zou kunnen doen. Zo worden in Nederland op ruim 37.000 meetlocaties gegevens verzameld[12] over het verkeer. Dit gebeurt onder andere via detectielussen in de weg. Deze meetpunten zenden elke minuut hun gegevens naar een centraal punt. Hierbij gaat het onder meer om het aantal voertuigen dat het meetpunt passeert, de gemiddelde snelheid van deze voertuigen en het soort voertuig, afgeleid van de lengte van de passerende voertuigen. Alles bij elkaar genereren al deze meetpunten heel veel data. De vraag is dan: wat voor toepassingen zou deze informatie kunnen hebben?

## Tot slot

Statistical literacy gaat om de vaardigheid om statistische resultaten te begrijpen en er kritisch mee om te kunnen gaan. Juist in een maatschappij waarin getallen een steeds grotere waarde krijgen, is het belangrijk dat burgers kritisch en weerbaar worden om volwaardig deel te kunnen nemen aan de maatschappij. Het onderwijs speelt hierin een cruciale rol. Aandacht voor statistische geletterdheid is dan ook iets wat vaak langs zou moeten komen in elke wiskundeles. Tot slot keren we terug naar het voorbeeld met de grafiek van de temperatuur op aarde. Wat is hier nu aan de hand? Als je goed kijkt, is te zien dat de lijn wel degelijk stijgt. Het punt met klimaatverandering is juist dat kleine stijgingen enorme gevolgen hebben. De verticale schaal waarop deze gegevens zijn afgebeeld is te lang en heeft in deze context geen betekenis. Dit voorbeeld laat zien dat het niet moeilijk is om te misleiden door hiervoor geschikte keuzes te maken in het weergeven van de data. Juist dit aspect maakt statistiek ingewikkeld. Op allerlei momenten zijn er veel keuzes te maken, vanaf het stellen van de vraag, tot het

weergeven van de conclusies. Voor leerlingen is het van belang dat ze hier gevoel voor ontwikkelen en kritisch durven zijn op die keuzes en conclusies die op basis hiervan worden getrokken.

## Noten


[1] Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 1-8.

[2] Gal, I. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, chapter Statistical literacy, meanings, components, responsibilities, (pp. 47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishing.

[3] Kitchin, R. (2014). *The data revolution: Big data, open data, data infrastructures and their consequences*. London: Sage.

[4] *www.tylervigen.com/spurious-correlations*

[5] Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22- 25.

[6] Zie bijvoorbeeld *https://data.overheid.nl*

[7] Gould, R. (2017). Data literacy is statistical literacy. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 22- 25.

[8] Ridgway, J. & Nicholson, J. (2017). The future of statistical literacy is the future of statistics. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 8-14.

[9] Van Zanten, M., Bruin-Muurling, G., & Verschoor, M. (2018). Klopt dit wel? Reken-wiskundige factchecking in het basisonderwijs. *Volgens Bartjens*, 37(5), 23-26.

[10] Ridgway, J. (2016). Implications of the data revolution for statistics education. *International Statistical Review*, 84(3), 528-549.

[11] Zie *https://www.autodeskresearch.com/publications/samestats*

[12] Zie *http://www.ndw.nu/nl/*


## Over de auteur


Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de HAN en als toetsdeskundige bij Cito. Ze vertegenwoordigt de HAN in de Samenwerking Lerarenopleidingen Wiskunde (SLW). Emailadres: *irene.vanstiphout@han.nl.*


# Homo universalis

De schouders van reuzen waar wij op verkeren
verdienen respect. Dat verwoord ik dus in
dit versje waarmee ik graag Simon wil eren.
De één noemt hem Stévin, de ander Stevín.

Hij kon over wis-, schei-, natuurkunde pennen,
als meester van Maurits verdiende hij bij,
deed forten, een zeilwagen, molens ... wij kennen
geen universeler geleerde dan hij.

Ook zou deze kanjer geschiedenis schrijven
doordat hij taalkundig vernieuwend wou zijn.
Hij wilde zijn vak in zijn moerstaal bedrijven
en menig nieuw woordje ontsproot aan zijn brein.

Als *vierkant* en *raaklijn, loodrecht, evenwijdig,*
en *wiskunde, landmeter, evenaar, macht,*
en *middellijn, omtrek, bewijs, gelijkzijdig,*
en sorry, ook *klootkrans* heeft Simon bedacht.

Hij maakte de taal hiermee rijker en beter.
Ik noem deze held op linguïstisch gebied
een v*anzessenklaarwakkersnedigscherpweter.*
Dat is een nieuw woord. Tja, zo'n kunst is dat niet.

Marjolein Kool

*Dit gedicht is geschreven voor het symposium 'In de geest van Stevin', dat gehouden werd op 20 oktober 2020 in het jaar dat Stevin 400 jaar geleden overleed.*
*Afbeelding: De zeilwagen van Simon Stevin (rechterplaat), 1602, Willem Isaacsz. van Swanenburg, naar Jacob de Gheyn (II), 1603. Collectie: Rijksmuseum*

Roel Lambers, Frits Spieksma

# De echte eindstand

Door alle onderlinge resultaten én het aantal gespeelde wedstrijden te beschouwen kan er een eerlijke eindstand van een afgebroken competitie berekend worden. Of een eerlijke tussenstand, zeker als er meer en meer wedstrijden niet door kunnen gaan wegens de coronapandemie...

## Inleiding

Het zal weinigen zijn ontgaan dat de 2019-2020 editie van de eredivisie vroegtijdig is gestopt. Van de 34 wedstrijden die elk team in een seizoen speelt, hadden de meeste teams er slechts 26 gespeeld; Ajax, AZ, Feyenoord en FC Utrecht hadden er zelfs maar 25 gespeeld. Dus 3/4 van de competitie was gespeeld, en daar bleef het bij. Waar normaal teams promoveren, degraderen en zich kwalificeren, was dat nu niet zo evident. De KNVB besloot om de bestaande stand als definitieve ranking te nemen in de verdere besluitvorming.
Hier valt nogal wat tegen in te brengen:

— Teams hebben een verschillend aantal wedstrijden gespeeld. FC Utrecht, bijvoorbeeld, heeft één wedstrijd minder gespeeld dan Willem II, en als het die wedstrijd zou winnen komt het in punten gelijk met Willem II, en op doelsaldo zelfs boven Willem II.
— Teams hebben tegenstanders van verschillende sterkte gehad. Dus bijvoorbeeld: ADO heeft nog acht wedstrijden tegoed waaronder wedstrijden tegen de lagergeklasseerden Fortuna, Emmen, VVV, en PEC, terwijl directe concurrent Fortuna onder andere tegen PSV, AZ, en Ajax moet spelen.

De huidige stand is dus geen eerlijke weergave van de resultaten. Het kan beter en eerlijker. Er is een methode om een ranglijst op te maken die zowel rekening houdt met het aantal gespeelde wedstrijden, als met de sterkte van de tegenstanders waartegen gespeeld is. Deze methode kent een team per wedstrijd niet alleen punten toe op basis van het wedstrijdresultaat, maar houdt ook rekening met de relatieve sterkte van de tegenstander, en daarnaast met het aantal gespeelde wedstrijden. Er is een unieke manier om de sterkte van elk team te bepalen, zodat deze sterkte consistent is met de uitslagen in de competitie. In de volgende sectie gaan we in detail in op de berekening van de teamsterktes.

## De berekening

Neem aan dat er een set van teams $N$ is; ons doel is om een ranking van die $|N|$ teams te vinden, terwijl niet alle wedstrijden gespeeld zijn. We gaan ervan uit dat elk team een bepaalde sterkte heeft; wanneer we die sterktes kennen, dan volgt de ranking door de teams op sterkte te ordenen. We gebruiken de volgende symbolen:

— $r_i$: de sterkte van team $i$, $i \in N$;
— $a_{i,j}$: score afhankelijk van de uitkomsten van de wedstrijden tussen teams $i$ en $j$;
— $n_i$: aantal gespeelde wedstrijden door team $i$, $i \in N$.

Om de parameters $a_{i,j}$ te specificeren volgen we de puntentoekenning van 0 of 1 of 3 punten bij respectievelijk verlies, gelijkspel of winst die in het huidige voetbal gebruikt wordt. Dus om heel expliciet te zijn: aangezien op dit moment elk tweetal teams in de eredivisie 1× of 2× tegen elkaar gespeeld hebben, krijgen we het volgende. Als teams $i$ en $j$ 1× tegen elkaar gespeeld hebben, dan is $a_{i,j}$ gelijk aan 0 wanneer team $i$ verloor van team $j$, 1 wanneer team $i$ en team $j$ gelijk speelden, en 3 wanneer team $i$ won van team $j$. Als teams $i$ en $j$ 2× tegen elkaar gespeeld hebben, dan is $a_{i,j}$ gelijk aan 0 wanneer team $i$ 2× verloor van team $j$, 1 wanneer team $i$ 1× verloor en 1× gelijkspeelde tegen team $j$, 2 wanneer teams $i$ en $j$ 2× gelijkspeelden, 3 wanneer team $i$ 1× won, en 1× verloor van team $j$, 4 wanneer team $i$ 1× won van team $j$, en 1× gelijkspeelde tegen team $j$, en 6 wanneer team $i$ 2× won van team $j$. De totale score van team $i \in N$ noteren we met $s_i$, en schrijven we als volgt:

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{|N|} a_{i,j} \cdot r_j$$

| Stand | | |
|---|---|---|
| 1 | AZ (2) | 0,361 |
| 2 | Ajax (1) | 0,342 |
| 3 | Feyenoord | 0,324 |
| 4 | PSV | 0,292 |
| 5 | Willem II | 0,290 |
| 6 | FC Utrecht | 0,258 |
| 7 | Vitesse | 0,256 |
| 8 | FC Groningen (9) | 0,236 |
| 9 | Heracles (8) | 0,216 |
| 10 | SC Heerenveen | 0,204 |
| 11 | FC Emmen (12) | 0,198 |
| 12 | Sparta (11) | 0,186 |
| 13 | FC Twente (14) | 0,181 |
| 14 | VVV (13) | 0,170 |
| 15 | Fortuna Sittard (16) | 0,155 |
| 16 | PEC Zwolle (15) | 0,144 |
| 17 | ADO Den Haag | 0,107 |
| 18 | RKC | 0,101 |

*figuur 1 De echte eindstand in de eredivisie*

| Stand | | |
|---|---|---|
| 1 | Cambuur | 0,348 |
| 2 | De Graafschap | 0,345 |
| 3 | Volendam | 0,314 |
| 4 | Jong Ajax | 0,290 |
| 5 | Go Ahead Eagles (6) | 0,277 |
| 6 | NAC (5) | 0,259 |
| 7 | NEC (8) | 0,232 |
| 8 | Almere (9) | 0,227 |
| 9 | Excelsior (7) | 0,224 |
| 10 | Telstar | 0,221 |
| 11 | Jong FC Utrecht (12) | 0,206 |
| 12 | Den Bosch (11) | 0,202 |
| 13 | Eindhoven | 0,179 |
| 14 | Jong AZ | 0,161 |
| 15 | Top Oss (16) | 0,146 |
| 16 | MVV (15) | 0,132 |
| 17 | Jong PSV (18) | 0,125 |
| 18 | Roda JC (17) | 0,125 |
| 19 | Dordrecht | 0,100 |
| 20 | Helmond Sport | 0,088 |

*figuur 2 De echte eindstand in de eerste divisie*

Hierbij is de score per team genormaliseerd - dit is gedaan door te delen door het totaal aantal wedstrijden dat een team heeft gespeeld. Aangezien de aanname is dat de totale score van een team proportioneel zal zijn met de sterkte, verwachten we een resultaat in de vorm van: $s_i = \lambda r_i$ voor een $\lambda > 0$. Als we dit voor alle teams bekijken, volgt dat: $Ar = \lambda r$ waarbij de elementen van de matrix $A$ gelijk zijn aan $\frac{a_{i,j}}{n_i}$, $i, j \in N$. Met andere woorden: de vector der sterktes is een eigenvector van de matrix $A$. De Perron-Frobenius stelling geeft precies aan onder welke voorwaarden op $A$ deze eigenvector positieve elementen heeft, en uniek is. We verwijzen naar Keener[1] voor een lezenswaardige beschrijving van deze berekening. Voor hier volstaan we met de mededeling dat er inderdaad een unieke $(r_i)$ bestaat zodat $Ar_i = \lambda r_i$.

## De resultaten

We hebben deze berekening uitgevoerd, en dan is dit de echte eindstand in de eredivisie, zie figuur 1. En in figuur 2 is dan de eindstand in de eerste divisie. Hier maken we de kanttekening dat de strafpunten voor Den Bosch en Roda niet zijn meegenomen.

Op de website staat een Excel-bestand met een aantal rekenvoorbeelden en een actuele versie van matrix $A$ van de eredivisieresultaten tot nu toe.

*vakbladeuclides.nl/963eindstand*

Dit artikel verscheen eerder op *wetenschap.nu* en is hier gepubliceerd met toestemming van de redactie van *wetenschap.nu*

## Noot

[1] Keener, J. (1993). The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams. *SIAM Review, 35*(1), 80-93.

## Over de auteurs

Frits Spieksma is hoogleraar Combinatorisch Optimaliseren aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de TU Eindhoven, Roel Lambers is PhD-student bij diezelfde Faculteit. Hun gezamenlijke onderzoek richt zich op het plannen van (sport)competities, en de eerlijkheid van dergelijke schedules. E-mailadressen: *f.c.r.spieksma@tue.nl* en r.*lambers@tue.nl*

Jacoliene van Wijk

# Vouwen - en beschouwen - in de wiskundeles

Vouwen kan het wiskundeonderwijs verrijken, je kunt er zelfs de trisectie van een hoek mee construeren. Jacoliene van Wijk geeft een overzicht van vrijwel alle bijdragen uit *Euclides* van de afgelopen eeuw. Leg de vouwblaadjes maar vast klaar!

## Inleiding

Het was een korte, bijna terloopse, opmerking die werd gemaakt door Luuk Hoevenaars: 'Als je bezig bent met vouwen in de wiskundelessen, dan is het handig om te kijken wat daar al over in *Euclides* heeft gestaan.' 'Oh ja, goed idee, ga ik doen.'
Na het doorzoeken van 95 jaargangen *Euclides*, kwamen er 91 artikelen naar voren op de zoekterm 'vouwen', en nog eens acht op de extra termen 'vouw', 'fold', en 'origami'. Alle gevonden artikelen zijn op basis van hun inhoud voorzien van codes. Vervolgens zijn alle artikelen in een mindmap geclusterd, waarbij er nieuwe, overkoepelende thema's werden gevonden voor de artikelen. Deze indeling in thema's vind je terug in de paragrafen van dit artikel.

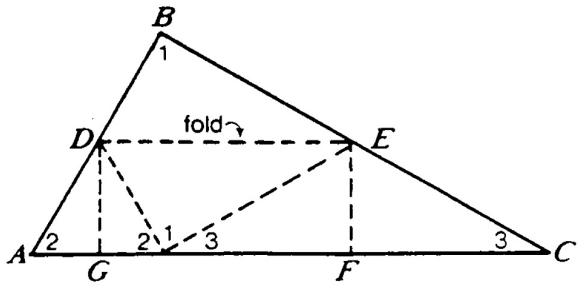
## We beginnen bij meetkunde – de basis

Veel artikelen over vouwen in de wiskundeles, met name uit de oudere jaargangen, gaan over het leren van meetkunde met behulp van vouwen. Er zitten voorbeelden en ideeën bij die ik komend schooljaar direct wil gebruiken in mijn lessen in de eerste klas, bijvoorbeeld als hoeken en geodriehoeken worden behandeld, zie figuur 1.

2 (10 min.)
Neem een vouwblaadje. Het midden van het papier (het snijpunt van de diagonalen) noemen we het hart.
a knip het blaadje langs een diagonaal door en ga verder met één helft. Vouw het papier dubbel langs de deellijn van de hoek waarvan het hart het hoekpunt is (aanw.: markeer het hart).
Herhaal het dubbelvouwen nog drie maal.
U heeft nu een voorloper van de geodriehoek!
b Bespreek in uw groep de didaktische bruikbaarheid van deze 'geodriehoek'.
c Bij het vouwen gaan kinderen dikwijls bij de derde vouw in de fout.

*figuur 1 Gebruik en misbruik van de geodriehoek – Ben Knip & George Schoenmaker [55-9[1], 1980]*

En een andere manier om de hoekensom van een driehoek duidelijk te maken dan met het afscheuren van hoekjes, en daarmee een rechte lijn maken, zie figuur 2.




*Figuur 13. Gegeven is driehoek ABC. Vouw A naar B om het midden van AB te bepalen. Net zo voor het midden E van BC. Trek DE en vouw de top van de driehoek naar beneden, vouw langs DE. Ter controle: B moet precies de basis AC raken. Vouw de loodlijn op AC door D, en vervolgens de loodlijn op AC door E. De hoeken 1, 2 en 3 liggen nu langs een rechte lijn; dus: de som van de drie hoeken is 180° (zie Olson (1975)).*

*figuur 2 Meetkunde in de brugklas – Fernand Prevost [63-7, 1988]*

En natuurlijk het vouwen om eigenschappen van figuren af te leiden, zoals een rechthoek, vierkant, symmetrie, zie figuur 3 en 4.

Vervolgens werd een stukje papier getoond, waarvan de randen onregelmatig waren en gevraagd daarvan een rechte hoek te vouwen. Bij de eerste vouw werd het begrip rechte lijn ter sprake gebracht, bij de tweede kwam de rechte hoek. Er werd gesproken over de benen van een hoek. Opgenoemd werd, dat men gewoonlijk rechte lijnen trekt met behulp van een liniaal en rechte hoeken maakt met behulp van een tekendriehoek. Dat alle rechte hoeken gelijk zijn, wordt door de leerlingen vanzelfsprekend geacht. Vervolgens werd het begrip lijnstuk ingevoerd en gevraagd, hoe men kan constateren, dat twee lijnstukken even lang zijn.

*figuur 3 Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige begrippen - Pierre van Hiele [30-5/6, 1955]*

*Neem je schaar en een stuk papier; knip zo goed mogelijk een rechthoek uit dat papier.*
*Hoe kun je nu weten of wat je geknipt hebt wel precies een rechthoek is?*

De leerlingen gaan opnieuw structureren, en er komen nieuwe beelden aan bod, nu van 'details' in het beeld:

– het moet links en rechts hetzelfde zijn, en onder en boven ook, net als bij een vlinder, dat kun je zien door te vouwen,
– je moet schuin meten van de ene hoek naar de andere; dat moet twee keer hetzelfde zijn,
– het moet goed recht zijn,
– de hoeken moeten haaks zijn.

Die opmerkingen zijn niet allemaal zonder meer bruikbaar. U laat wat er gezegd wordt illustreren aan de hand van verschillende rechthoeken in de klas en in de schriften. Verder vragen de begrippen symmetrie, diagonaal, evenwijdig en rechte hoek nog wel wat werk van de leerlingen en van u. De taal speelt daarbij een belangrijke rol. Namen voor zaken die al wel te zien waren maar nog niet goed benoemd: hoeken, hoekpunt, zijde, gelijke lijnstukken, evenwijdig. Maar ook nieuwe begrippen die een naam moeten hebben, zoals de diagonaal.
Het benoemen en beschrijven maakt het voor de leerlingen gemakkelijker te zeggen wat ze bedoelen.
Het beeld wordt daardoor toegankelijker.

*figuur 4 Leren en helpen leren – Bram Lagerwerf [68-4, 1992]*

## Didactische beschouwingen

Een aantal lezers van dit artikel zal nu misschien denken 'leuk!' of juist 'zo leer je geen wiskunde'. Dit is ongeveer de strekking in diverse artikelen waarin de didactiek van de wiskunde, en dan met name bij meetkunde, aan bod komt. In de jaren '30 en daarvoor wordt vouwen ingezet bij 'materieel denken' [8-5] en om iets visueel duidelijk te maken Ehrenfest [11-6]. In jaargang [30-5/6] beschrijft van Hiele-Geldof een manier om leerlingen meetkunde te leren, onder andere met vouwen, wat later een stap wordt in hun theorie over denkniveaus. In de 50e jaargang weet Ed de Moor alle ontwikkelingen in de didactiek van de wiskunde tot dan toe, met name de meetkunde, samen te vatten in een serie artikelen [50-1, 50-2, 50-3]. Bijvoorbeeld de 'strijd' tussen de stromingen logisch-deductief, empirisch en intuïtief [50-2]. Daarna komen de denknivo's (hun spelling) van de Van Hieles aan bod in *Euclides* [52-5], waarbij vouwen, naast andere manieren van knutselen en bewegen, worden ingezet om nivo 0 aan de leerlingen te leren. Na de 55e editie wordt het, wat betreft vouwen, stiller bij de didactische beschouwingen. Vouwen komt in algemene didactische artikelen alleen nog terug bij de behandeling van leerstijlen [60-3], en bij een bespreking van het onderwijs in de jaren 1960 [78-5] in een uitspraak van Freudenthal, zie figuur 5.

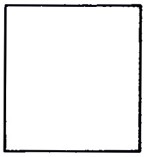
a. *een intuïtieve inleiding wordt vereist, waarbij het kind doende moet leren, door tekenen, vouwen, plaveien, modellen maken.*

*figuur 5 Omzien in verwondering – Edu Wijdeveld [78-5, 2003]*

## Méér dan meetkunde: vouwen voor de begripsvorming van functies

In latere versies van *Euclides* komen er verschillende toepassingen van vouwen aan bod om bijvoorbeeld exponentiële functies, een parabool en verhoudingen duidelijk te maken. Het begint met een mooi voorbeeld van machtsrekenen [54-3]: 'drie keer delen door twee is delen door acht', zie figuur 6.

11 In het bovengenoemde geval kun je na drie keer scheuren inderdaad de 8 stukken tellen. Het zijn evenwel losse stukjes, en de struktuur (2 × 2 × 2) is moeilijk terug te vinden. Vandaar dat men voorstelt: Neem een vouwblaadje.

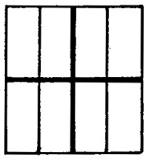


Vouw het in tweeën:

Herhaal dit:

En nog eens: (in tweeën delen)

Als je dit nu openvouwt, dan *zie* je de 8 delen!



*figuur 6 Vakdidactische notities – Fred Goffree [53-3, 1978]*

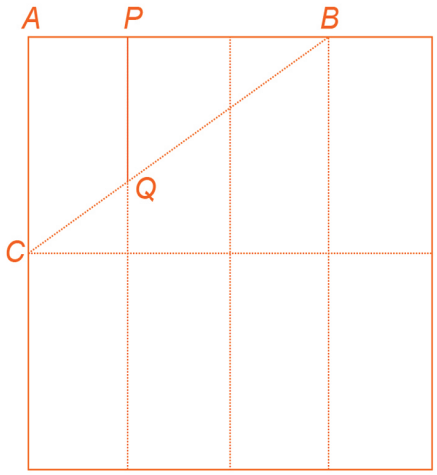
>

Het vouwen van een parabool komt drie keer voor [79-5, 91-5], als toepassing in de les, zie figuur 7, maar ook als examenopgave [84-1].

Dat gaat zo: de onderkant van je vouwblaadje (of A4), is je richtlijn. In het midden van je vouwblaadje, een paar centimeter boven de onderkant, zet je een stip. Dit wordt je brandpunt. Neem nu een willekeurig punt op de richtlijn en vouw dit punt precies op je brandpunt. Dit herhaal je met verschillende punten op de richtlijn en zo ontstaat de parabool uit de verzameling van raaklijnen.

*figuur 7 Kleintje Didactiek - Lonneke Boels [91-5, 2016]*

Ook bij exponentiële functies wordt gevouwen voor begripsvorming, waarbij het dubbelvouwen van papier wordt gebruikt om de afstand naar de maan vol te maken [84-4, 87-2]. Probeer het zelf eens in te schatten: stel dat je een strip papier van oneindige lengte, oneindig vaak kunt dubbelvouwen, hoe vaak moet je vouwen tot je een dikte hebt die genoeg is om bij de maan te komen? Relatief recent is de bespreking van de lezing van Katie Steckles[2] [93-7], in de video van haar presentatie op de NWD in 2018 laat zij zien hoe je met A4 papier leerlingen kunt laten nadenken over verhoudingen.




*Kun je in een vierkant stuk papier, zonder een hulpmiddel te gebruiken, een lijnstuk vouwen waarvan de lengte een derde deel is van de zijde van het vierkant?*

Ik moet eerlijk toegeven dat ik na enig proberen niet tot een sluitende oplossing kwam. De helft bepalen is simpel, maar een derde deel? En inderdaad, het is een vraagstuk dat uitnodigt tot nadenken en uitproberen.

Kim kwam al wel vrij snel zélf tot een aardige oplossing; zie de figuur.
Vouw het vierkant volgens de aangegeven lijnen.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken *ABC* en *PBQ* volgt: de lengte van *PQ* is $\frac{1}{3}$ van de lengte van de zijde.

*figuur 8 Vouwbare verhouding - Willem Maas [79-8, 2004]*

## Symmetrie en verhoudingen

Katie Steckles had het al over verhoudingen, ook Carla Feijen geeft voorbeelden met vouwen over de gulden snede en $\sqrt{2}$ [87-2]. Een link in *Euclides* [94-3] geeft een *Bridges*-artikel van vader en zoon Verhoeff met daarin een pleidooi voor het vouwen van de 1 : $\sqrt{2}$ verhouding. Naast verhoudingen komt ook het vouwen van breuken aan bod [79-8], zie figuur 8.

## Vouwen met overtuigingskracht

Of je vouwen kunt accepteren als bewijs, bijvoorbeeld van symmetrie, of het aannemelijk maken van axioma's, is een discussie die thuishoort bij de didactische beschouwingen. Door de jaren heen zijn er diverse voorbeelden gegeven in *Euclides* waarbij vouwen in ieder geval wordt ingezet om leerlingen inzicht, of alternatieven te geven bij een axioma of bewijs. De eerste vinden we in jaargang 39, maar ook in [50-4/5] en [50-1], zie figuur 9.

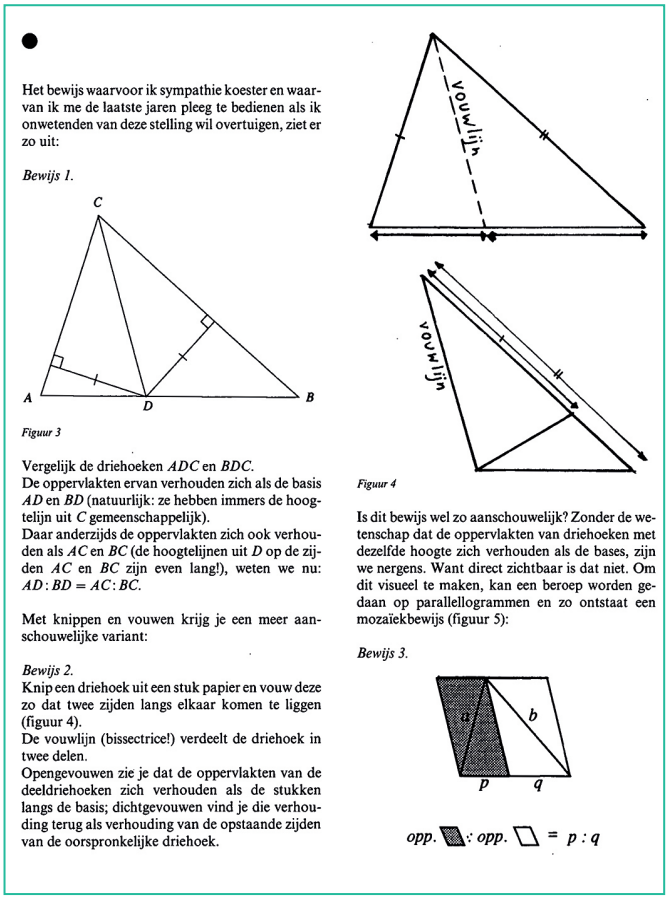
Hierna volgt de loodrechte stand, waarvan de betekenis alleen aanschouwelijk vastgelegd wordt door een papier twee keer dubbel te vouwen. Nu wordt geconstateerd: met elke richting $a$ correspondeert één richting $a'$, waarvoor geldt $a \perp a'$; elke lijn $A \in a$ staat loodrecht op elke lijn $A' \in a'$. Waarna gemakkelijk bewijsbaar zijn de stellingen:

bij elk punt $p$ en elke lijn $D$ is er één lijn $P$, waarvoor $p \in P \perp D$,
$A' \parallel A \perp B \parallel B' \Rightarrow A' \perp B'$,
$A \perp B \parallel B' \Rightarrow A \perp B'$,
$A \perp B \perp C \Rightarrow A \parallel C$,
$A \perp B \perp C \perp D \Rightarrow A \perp D$ (d.w.z. als drie hoeken van een vierhoek recht zijn, is de vierde het ook).

*figuur 9 Een opzienbarend boek - Piet Vredenduin [39-8, 1964]*

Martin Kindt geeft een alternatief bewijs voor de bissectricestelling met vouwen [68-2], zie figuur 10.

Een opgave uit de oude doos, met oproep voor bewijzen, leidt tot een bewijs van Just Bent waarbij vouwen de hoofdrol speelt [87-5]. En een klassiek voorbeeld van vouwen en bewijzen, de trisectie van de hoek [90-6], één van de meerdere bijdragen aan de NVvW-dagen van Rob van Oord over origami en wiskunde, zie figuur 11. Een clip[3] over de origami-trisectie, met een concrete



Het bewijs waarvoor ik sympathie koester en waarvan ik me de laatste jaren pleeg te bedienen als ik onwetenden van deze stelling wil overtuigen, ziet er zo uit:

*Bewijs 1.*



*Figuur 3*

Vergelijk de driehoeken *ADC* en *BDC*.
De oppervlakten ervan verhouden zich als de basis *AD* en *BD* (natuurlijk: ze hebben immers de hoogtelijn uit *C* gemeenschappelijk).
Daar anderzijds de oppervlakten zich ook verhouden als *AC* en *BC* (de hoogtelijnen uit *D* op de zijden *AC* en *BC* zijn even lang!), weten we nu: $AD : BD = AC : BC$.

Met knippen en vouwen krijg je een meer aanschouwelijke variant:

*Bewijs 2.*
Knip een driehoek uit een stuk papier en vouw deze zo dat twee zijden langs elkaar komen te liggen (figuur 4).
De vouwlijn (bissectrice!) verdeelt de driehoek in twee delen.
Opengevouwen zie je dat de oppervlakten van de deeldriehoeken zich verhouden als de stukken langs de basis; dichtgevouwen vind je die verhouding terug als verhouding van de opstaande zijden van de oorspronkelijke driehoek.



*Figuur 4*

Is dit bewijs wel zo aanschouwelijk? Zonder de wetenschap dat de oppervlakten van driehoeken met dezelfde hoogte zich verhouden als de bases, zijn we nergens. Want direct zichtbaar is dat niet. Om dit visueel te maken, kan een beroep worden gedaan op parallellogrammen en zo ontstaat een mozaïekbewijs (figuur 5):

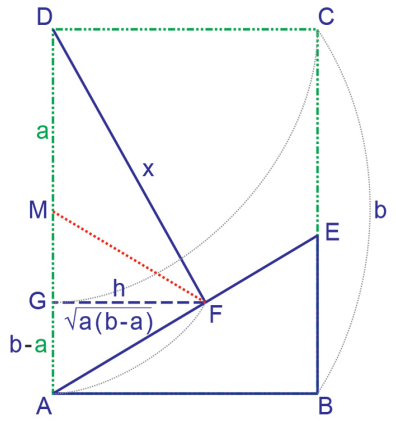
*Bewijs 3.*



$\text{opp.} \blacksquare : \text{opp.} \square = p : q$

*figuur 10 De bissectricestelling - Martin Kindt [68-2, 1992]*

Wel waagde een aantal deelnemers zich aan de trisectie door origami. In bewijs daarvan wordt




figuur 5 Rechthoek verdelen

veelvuldig gebruikgemaakt van het feit dat een vouw eigenlijk een spiegeling is. Daarmee ontdek je allerlei eigenschappen van driehoeken, zoals gelijkbenigheid en bissectrices. Uiteindelijk kun je daarmee de trisectie bewijzen.

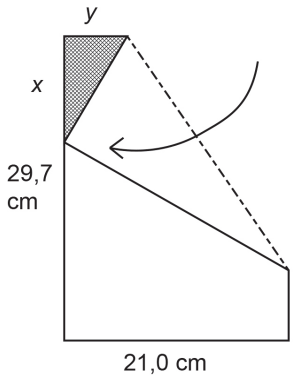
*figuur 11 Een π-shirt, beter laat dan nooit - Rob van Oord [90-6, 2015]*

toepassing op boterkoek, was één van de winnaars van de Animath-lustrumwedstrijd van de NVvW in 2015, waarover geschreven werd in [93-2].

## Optimalisatieproblemen

Hoewel onder anderen Jacques Jansen [89-6] en Rob van Oord [92-7] aangeven dat het vouwen voordeel biedt bij het werken aan hun gegeven optimalisatieproblemen, komt dit niet in alle artikelen naar voren. Bij de meeste optimalisatieopgaven gaat het maar om één, of een paar vouwen, waarna zich al zeer interessante wiskundevraagstukken ontrollen. In de figuren 12, 13 en 14 zie je voorbeelden van respectievelijk één (zie ook [89-6] en [92-7]), twee en meerdere vouwen (zie ook [79-5], [73-3], [63-8] en [65-2]). De open vraag naar de grootste inhoud die je kunt maken van een A4-vel leidt tot oplossingen als kloostergewelven en patatzakken (de kromme van Agnes) [92-2].

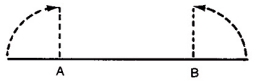
Als compromis tussen de optimisten en de sceptici stel ik een gedeeltelijke omwenteling voor. Eenvoudiger gezegd: een vouw. Men neme een vel papier van A4-formaat. Op het pak waar het vel uitkomt, staat dat de afmetingen daarvan 21.0 bij 29.7 cm zijn. Vouw het vel om zoals hierna is aangegeven. De vraag is nu: hoe groot is de oppervlakte van



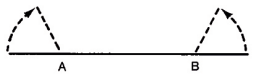

de gearceerde driehoek maximaal?
Als oriëntatie kunt u zelf met behulp van ruitjespapier een schatting maken. In een klassesituatie is het denkbaar dat de schattingen van leerlingen verzameld worden. Als u de maximale oppervlakte al weet, kunt u meteen nagaan hoeveel leerlingen vergeten zijn om door 2 te delen.

*figuur 12 Een pagina omslaan - Paul Drijvers [69-8, 1994]*

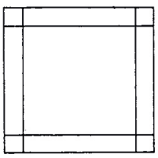
In HAVO- en VWO-boeken komt het probleem voor van de rechthoekige goot die uit een plaat van een meter breed gebogen moet worden.



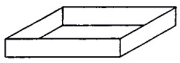

De vraag is waar je de vouwen A en B moet aanbrengen, zó, dat er zo veel mogelijk water door de goot kan stromen. Erge lage randen geven een goot van bijna een meter breed waar maar een dun laagje water in kan. Erg hoge randen geven een zeer smalle goot van bijna een halve meter hoog. Beide uitersten lijken niet aantrekkelijk.
Het probleem wordt ingewikkelder als de goot niet persé rechthoekig hoeft te zijn. Het kostte mij niet veel moeite aan te tonen dat buigen onder een stompe hoek betere resultaten zou kunnen opleveren.

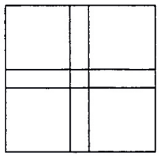



*figuur 13 Wiskunde 'doen' – Bram Lagerwerf [54-4, 1978]*



Neem een vierkant stuk papier, zoals hieronder is getekend, en maak een doosje door kleine vierkantjes uit de hoeken weg te knippen.





Hoe verandert de inhoud van het bakje als je de vierkantjes die je uit de hoeken wegknipt groter maakt?

Wanneer past er het meeste in het bakje? Wat is de grootste inhoud die je kunt krijgen?

*figuur 14 Wiskunde moet je doen – Truus Dekker & Sylvia van der Werf [63-8, 1988]*

## Logisch vouwen

Opgaven waarbij vouwen meer wordt ingezet om logisch na te denken zijn een puzzel om een landkaart logisch op te vouwen [48-6, 64-2], zie figuur 15, en de fold-and-one-cut van Katie Steckles [93-7].

**290** Vouw de hier getekende papieren kaart zo, dat de bladen op volgorde komen, 1 voorop, 8 achteraan. Er wordt geen verschil gemaakt tussen de voorkant en de achterkant van de bladen. (S.M.P. Book D)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 | 4 |
| 2 | 3 | 6 | 5 |

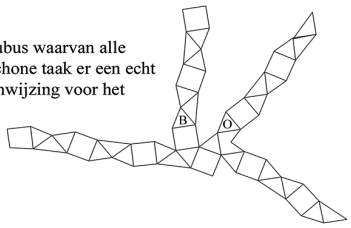
*figuur 15 Recreatie – Piet Vredenduin [48-6, 1973]*

## En alle, alle, andere voorbeelden...

Bij alle andere 'hits' op vouwen gaat het bijvoorbeeld over een tussenstap bij het maken van een model dat in dienst staat van een andere beschouwing, bijvoorbeeld een doosje voor projectieve meetkunde [89-4] of een werkblad over piramides [67-3], waar aan de inhoud wordt gerekend. Of vouwen aan een enveloppe [72-5]. Of een hoek vouwen, afknippen en voorspellen welk figuur dit wordt [80-3]. Of wordt er 'gewoon' lekker geknutseld, zoals een Valentijnskaart [79-5] of een jaarkalender [75-5]. Er worden ook hele mooie meetkundige figuren gemaakt, met nog móóiere namen zoals de dodecaëder [89-7], waarbij ook nog grafentheorie wordt gebruikt om de kleuren op de juiste volgorde te krijgen, de cubeoctahedron [74-5], zie figuur 16, en natuurlijk de tetraëder [92-6], of zoiets intrigerends als een flexagon [84-4].

**Cubeoctahedron**

Dit is het vlechtpatroon van een kubus waarvan alle hoeken zijn afgehaald. Aan u de schone taak er een echt twintigvlak van te vouwen. Als aanwijzing voor het begin: B dient op O te komen.




*figuur 16 Puzzels uit het programmaboekje van de jaarvergadering 1988 [74-5, 1999]*

Samenvattend kun je stellen dat er door de jaren heen op diverse momenten aandacht werd besteed aan vouwen in *Euclides*, van het knutselen met bouwplaten tot optimalisatieproblemen. Van 'materieel denken' naar de workshop van Katie Steckles. Van W.F. de Groot in 1931 naar Rob van Oord in 2019, het is nog steeds springlevend én inspirerend! Op de site staat een chronologisch overzicht van alle artikelen uit *Euclides* over vouwen in de wiskundeles. De artikelen zijn direct te downloaden.

*vakbladeuclides.nl/963vouwen*

## Noten

[1] De nummers in het artikel verwijzen als volgt naar de desbetreffende *Euclides*: [jaargang - nummer]

[2] Katie Steckles op de NWD: *https://youtu.be/JtN2FgcsCII*

[3] zie *https://vimeopro.com/user38504697/animath-lustrumfilms-publieksprijs/video/122960339*

## Over de auteur

Jacoliene van Wijk is eerstegraads docent wiskunde aan het Goois Lyceum en heeft het afgelopen jaar actieonderzoek gedaan naar wiskundig vouwen in de wiskundeles. Dit actieonderzoek werd mogelijk gemaakt door de GSF (Gooise Scholen Federatie) en wordt begeleid door Michiel Doorman (Freudenthal Instituut). In het schooljaar 2020-2021 gaat dit actieonderzoek verder. E-mailadres: *jvwijk@gsf.nl*

Jacques Jansen

# Uitdagende problemen

## 'Wat heb je nu aan breuken'

Een bijles inspireerde Jacques Jansen op zoek te gaan naar breuken en percentages in de medische wereld en tijdens dat proces kwamen er weer nieuwe inspiratiebronnen voorbij.

### Inleiding

Bij een eerste bijles, waar moeder op haar verzoek aanwezig blijft, vraag ik aan Jenna[1] – ze zit voor de tweede keer in havo-4 en volgt wiskunde A – 'welk hoofdstuk vind je nu lastig?' Het blijkt al het eerste hoofdstuk te zijn van een veelgebruikte wiskundemethode. Een hoofdstuk dat gaat over breuken en verhoudingen, over procenten en maatsystemen en diverse rekenregels. Ik begin eerst met een voor de docent bekende trigger.

### Afgeprijsde jurk

Ik laat moeder eerst een afgeprijsde jurk kopen voor haar dochter. Moeder had gezien in een bekende winkel dat ze 50% korting kon krijgen, maar wachtte nog even af. Een paar dagen later kwam er nog een korting van 20% op de nieuwe prijs. Moeder slaat nu toe en koopt die jurk. Hoeveel korting heeft ze in totaal gekregen voor die jurk? Jenna zegt niks maar haar moeder voelt nattigheid. 'Het zal wel geen 70% zijn', zegt ze behoedzaam. Door als voorbeeld een jurk te kopen van €100,- komen we er met z'n drieën wel uit. De uiteindelijk prijs blijkt €40,- te zijn, er is dus een totale korting van 60%. Daarna beginnen we met het voor Jenna lastige probleem uit het boek.
Het wordt de volgende opgave uit hoofdstuk 1.
Uit ervaring weet ik dat vooral vmbo-leerlingen er veel moeite mee hebben.

### De opgave

Schrijf $\dfrac{a^4 \cdot a^6}{\left(\frac{1}{a}\right)}$ als macht van $a$.

Hier kwam Jenna echt niet uit. Wat wordt bedoeld met een macht van $a$? Wat is dat, een macht van $a$? Kun je de teller als een macht van $a$ schrijven? Kun je de noemer als een macht van $a$ schrijven? Enzovoorts...
De rekenregels, je kent het wel. Ik begin eerst maar eens met machten van twee.....en ben nog een tijdje bezig met uitleggen. En dan reageert moeder met een zucht: 'Wat moet je met die breuken in de praktijk?' Het eerste wat me te binnen schoot, was iets doen met taarten. Ik heb het eerst over twee dezelfde taarten die moeder op haar werk heeft aangeboden vanwege een verjaardag. Na afloop is van de ene taart nog een kwart over en van de andere taart ongeveer een derde deel. Leg je de twee overgebleven stukken bij elkaar, het hoeveelste deel van de taart is dan nog over? Heb je meer dan de helft? Een derde deel is meer dan een kwart. En twee kwarten is al een halve taart. Dus moet je wel meer hebben dan een halve taart. Wil je het preciezer weten dan kun je een optelsommetje maken van twee breuken: 1/4 + 1/3. 'Gelijknamig maken', wist moeder zich nog te herinneren. Wat moeizaam kwamen we tot de conclusie dat 3/12 + 4/12 = 7/12.

### Praktijkondersteuner

Dan vraag ik aan moeder wat voor werk ze doet. Ze blijkt praktijkondersteuner te zijn bij een medisch centrum. 'Heeft u het wel eens over cholesterol(verlaging)?' 'Ja, dat gaat de hele dag door.' 'We kijken eerst naar de totale cholesterol en naar de cholesterolratio.' Ratio? 'Ratio is toch gewoon een duur woord voor een breuk.' Moeder kan er uitgebreid over vertellen. Ik geef het nu op een wat andere manier weer.

### Cholesterolratio

Men kijkt eerst naar het totale cholesterol. Daar is in verwerkt het goede cholesterol *HDL*, de beginletter *H* wordt als geheugensteuntje gebruikt dat die waarde omhoog mag. Daarnaast heb je het slechte cholesterol *LHD* waarbij beginletter *L* gebruikt wordt om eraan >

*figuur 1*[2]

te denken dat het meestal wenselijk is dat die waarde omlaag gaat. Ook de waarde van de triglyceriden is van belang. Triglyceriden zijn een type vet, of lipiden, die worden gebruikt als bron en opslagplaats van energie in het lichaam. Ze worden aangemaakt door de lever, maar komen ook binnen via bepaalde voedingsmiddelen. Net als *LHD* en *HDL* wordt de hoeveelheid uitgedrukt in mmol/l. (mmol is natuurlijk een duizendste mol). Meer dan 2,1 mmol/l is te hoog.

Sinds 1972 hanteert men de *Friedewald-formule* [3]:
*totaalcholesterol* = *LDLcholesterol* + *HDLcholesterol* + 0,45 × *triglyceriden*
waarbij de waarde van de triglyceriden onder 8 moet blijven. Anders is de formule niet meer van betekenis.
De hoeveelheden van de drie vetachtige stoffen worden in mmol/l uitgedrukt. De constante 0,45 heeft ook een betekenis maar daar gaan we nu niet op in.
De *LDL*-meting is niet gestandaardiseerd en dus ongeschikt als bepaling. De *LDL* wordt dan ook niet meer gemeten maar met de Friedewaldformule berekend. Het is dus handig om de formule te herschrijven:
*LDLcholesterol* = *totaalcholesterol* – *HDLcholesterol* – 0,45 × *triglyceriden*. De variabelen rechts van het gelijkteken worden gevonden door metingen.

Nog korter: $LDL = T_C - HDL - \frac{T_g}{2{,}2}$.

De woordformule is omgezet in een letterformule. De cholesterolratio, ik duid deze aan met $R_C$ wordt berekend door het totaal cholesterolgehalte te delen door het *HDL*:

$R_C = \frac{LDL}{HDL} + 1 + \frac{0{,}45Tg}{HDL}$, ga maar na!

Als het *HDL* omhooggaat, bijvoorbeeld door veel te gaan sporten, zie je meteen dat de cholesterolratio omlaaggaat. Als het *LDL* omlaaggaat, bijvoorbeeld door goed op je voeding te letten, zie je meteen dat de ratio omlaag gaat. Herschrijven van een formule kan dus nuttig zijn.
Belangrijke grenswaarden hierbij zijn:

*LDL-cholesterol*: minder dan 2,5 mmol/l is optimaal, meer dan 3,5 mmol/l is te hoog.
*HDL-cholesterol*: minder dan 0,9 mmol/l is te laag.
ratio *totaalcholesterol* / *HDL-cholesterol*: minder dan 5 is goed. Met deze grenswaarden, ik daag je uit, zijn allerlei vragen voor de leerlingen te bedenken.

## Albumine/creatinine-ratio

Een praktijkondersteuner is ook vaak bezig met de data van urineonderzoek. Het gaat om mogelijke (tijdelijke) nierschade. Er wordt berekend de *Albumine* / *creatinine-ratio*. Albumine is een klein eiwitje dat meestal als eerste eiwit door de nierfilters heen lekt. Creatinine is een afvalstof, die ook in de urine zit. In het laboratorium wordt gekeken naar de verhouding tussen deze stoffen. Het lab deelt de hoeveelheid albumine in een portie urine door de hoeveelheid creatinine. De uitkomst geeft aan hoe hoog de concentratie van albumine is. De uitslag wordt uitgedrukt in milligram per millimol (mg per mmol). Dit soort eenheden past ook nog mooi bij de paragraaf maatsystemen van genoemd hoofdstuk 1.
Wat bleek? Moeder was zonder dat ze zich dat bewust was de hele dag bezig met ratio's, breuken dus.

## Korting op handzeep

We hadden het verder over verpleegkundigen en apothekers die met doseringen toch heel goed moeten opletten. Ondertussen kwam mijn vrouw binnen en had wat inkopen gedaan. Ik had een uur daarvoor voor handzeep, bij een supermarkt die op de kleintjes let, € 2,49 betaald. Bij een winkel van een drogistketen betaalde zij € 1,- . Ze kocht er twee. Nu hebben we er in totaal drie, zie figuur 2. Een gesprek met Jenna over de prijs van handzeep is nu wel op zijn plaats. Hoe groot is de korting bij de drogist ten opzichte van de supermarkt? Wat is voor ons de gemiddelde prijs van de handzeep? Ik was zelf nog even bij de slager. Sorry, we moeten natuurlijk minder vlees eten. Wat zou het eindbedrag geweest zijn – ik betaalde nu bij de keurslager, zie bonnetje in figuur 3, €10,70 - als de BTW geen 9% was maar zoals in 2018 nog 6%? Scheelt het veel?

## Kassabonnetjes

Misschien is het wel aardig om hoofdstuk 1 van de veelgebruikte wiskundemethode, dat gaat over werken met breuken, verhoudingen en over maatsystemen, eens heel anders te beginnen. Laat de leerlingen eens kassabonnetjes van thuis meenemen en de keer daarop wat kookrecepten (noem de les *heel de school bakt*) bijvoorbeeld uit de krant of van internet. Stel je bakt voor de klas van dertig leerlingen vier appeltaarten. De vragen liggen voor

*figuur 2*

*figuur 3*

de hand. Zie op de verpakking de benodigde ingrediënten. De les zal beklijven als de taarten ook echt gebakken worden. Wat doen ouders met bonnetjes? Controleren of het allemaal klopt. Heb je ook alle producten die erop staan? Je zou zelfs nog kunnen gaan kijken naar de water-foodprint. De les met de bonnetjes begint natuurlijk met de vraag: 'Wat zou je willen weten?'

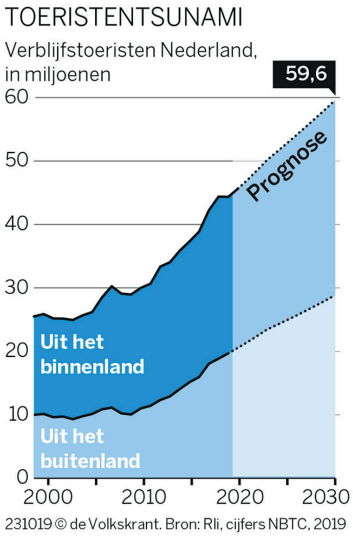
## Data in de krant

In *de Volkskrant* van 11 september 2019 stond een artikel over stikstof in Nederland. We zoomen in op de bijdrage van de landbouw, zie figuur 4.
70%? Ik kom toch op iets anders. Jij ook? En valt er nog meer te controleren in de afbeelding? Maakt het uit of we een ring gebruiken of het gehele (binnen)gebied van een cirkel? Is de grootte van de deelring bestemd voor landbouw juist? Hoe ga je dat na?

*figuur 4*

## Tot slot

Ik pleit ervoor om in de klas geregeld gebruik te maken van de actualiteit. Kloppen die data in de krant of in het nieuws wel allemaal? Is kennis over rekenen met procenten nuttig? Kijk eens op je smartphone naar de actualiteit. Digitale krant, nos.nl enz. Lees je 's morgens op 23 oktober dat de internationale iconische reisgids *Lonely Planet* Nederland tipt als vakantieland en zie je op internet dat de grafieken over toenemend toerisme over elkaar heen duikelen, dan heb je het op die dag er toch met je leerlingen over? De media leveren contexten aan met toeristenaantallen die geschikt zijn voor lineaire en exponentiële verbanden inclusief prognoses, zie figuur 5. En wat wordt er gesuggereerd met *tsunami*? Is dat ook juist? Kijkvoer voor in de klas...




*figuur 5*

## Noten

[1] Jenna is een gefingeerde naam.
[2] Tekening gemaakt door Marie José Klavers Jansen
[3] Zie *https://cvgk.nl/2016/01/11/het-principe-achter-de-friedewald-formule/*

## Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

# Wis en Waarachtig

## Tweemaal Nederlands goud bij Internationale Wiskunde Olympiade

*Nederlands Olympiade-team. vlnr: Jesse, Rafaël, Jippe, Hanne en Tjeerd. (Jovan was in het VK)*

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade 2020 hebben Jippe Hoogeveen en Jovan Gerbscheid beiden een gouden medaille gewonnen. Ook de andere vier teamleden gingen met eremetaal naar huis: voor Jesse Fitié was er een zilveren medaille, terwijl Rafaël Houkes, Tjeerd Morsch en Hanne Snijders allen een bronzen medaille bemachtigden. De Olympiade had in juli in Sint-Petersburg, Rusland, moeten worden georganiseerd, maar werd in plaats hiervan eind september als wedstrijd-op-afstand in alle deelnemende landen gehouden.

Jippe Hoogeveen verdiende in totaal 31 punten: 'Uiteindelijk heb ik vier van de zes opgaven volledig opgelost en daarnaast nog wat resultaten ontdekt bij de andere twee opgaven. Ik ben erg blij dat ik daarmee nu een gouden medaille heb weten te behalen!' Jippe maakte de wedstrijd met vier van zijn teamgenoten in hotel Zuiderduin in Egmond aan Zee. Jovan Gerbscheid studeert inmiddels in Cambridge en maakte de wedstrijd in Birmingham. Hij wist de moeilijkste opgave, opgave 6, volledig op te lossen. Dit lukte in totaal slechts vier van de 616 deelnemers.

De resultaten van de individuele leerlingen zijn als volgt:
**31 punten – goud:** Jippe Hoogeveen (18 jaar, Odijk, Openbaar Lyceum Zeist; studeert nu wiskunde en informatica aan de Universiteit Utrecht)
**31 punten – goud:** Jovan Gerbscheid (17 jaar, Amsterdam, St. Ignatiusgymnasium Amsterdam; studeert nu wiskunde aan het Trinity College Cambridge)
**24 punten – zilver:** Jesse Fitié (18 jaar, Rijswijk, Maerlant-Lyceum Den Haag; studeert nu wiskunde en computer science aan de Technische Universiteit Eindhoven)
**18 punten – brons:** Rafaël Houkes (18 jaar, Leiden, Stedelijk Gymnasium Leiden; studeert nu wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Leiden)
**16 punten – brons:** Tjeerd Morsch (18 jaar, Amersfoort, Corderius College Amersfoort; studeert nu wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen)
**15 punten – brons:** Hanne Snijders (18 jaar, Rotterdam, Marnix Gymnasium Rotterdam; studeert nu wiskunde en natuurkunde aan de Technische Universiteit Delft)
In het landenklassement eindigde Nederland op de 29e plaats van de 105 deelnemende landen. China voerde het landenklassement aan, met een voorsprong van 30 punten op Rusland, dat tweede werd.
*Bron: Wiskunde PersDienst en wiskundeolympiade.nl*

## Winst wiskundetoernooi Nijmegen weer naar Den Bosch

Stedelijk Gymnasium 's Hertogenbosch heeft, evenals vorig jaar, het wiskundetoernooi van Nijmegen gewonnen. Het eerste team van deze school behaalde de winst vooral dankzij een sterke *Sum of Us*, het middagdeel van de wedstrijd. Hierin scoorde het team, evenals het eerste team van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen 440 punten, meer dan elk ander deelnemend team. In het ochtendgedeelte, de *Estafette*, eindigde het team uit Den Bosch als tweede, vlak achter het team van het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt (JVO) uit Amersfoort. JVO scoorde bij *Sum of Us* wat minder, waardoor de teams uit Den Bosch en Nijmegen de Amersfoorters nog konden passeren.
Vanwege het coronavirus vond het toernooi dit jaar digitaal plaats met behulp van Discord.
*Bron: https://www.ru.nl/math/wiskundetoernooi/editie-2020/uitslag/*

## Nobelprijs natuurkunde onder meer voor Roger Penrose

*Roger Penrose. foto: Cirone-Musi, CC BY-SA 2.0 op plus.maths.org*

De Nobelprijs voor natuurkunde is begin oktober toegekend aan drie wetenschappers die onderzoek hebben gedaan naar zwarte gaten. De helft van de prijs gaat naar Roger Penrose en de andere helft gaat naar Reinhard Genzel en Andrea Ghez. Het drietal krijgt de prestigieuze prijs, die gekoppeld is aan een bedrag van bijna 1 miljoen euro, vanwege hun ontdekking van 'geheimen in de donkerste hoeken van de Melkweg'. Penrose krijgt de prijs vanwege zijn wiskundige methoden om de relativiteitstheorie van Albert Einstein verder te onderzoeken. De Britse natuurkundige heeft aangetoond dat de theorie daadwerkelijk verklaart hoe zwarte gaten tot stand komen. Genzel en Ghez ontdekten de invloed van zwarte gaten op de banen van sterren. 'Hun pionierswerk heeft ons het tot nu toe overtuigendste bewijs van een superzwaar zwart gat in het midden van de Melkweg opgeleverd', aldus het comité.
*Bron: www.nu.nl*

## A Hitchhiker's Guide naar het getal 42

In 1979 schreef Douglas Adams het populaire sciencefictionboek *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. Aan het eind van het boek openbaart de supercomputer Deep Thought het antwoord op 'The Great Question of Life, the Universe and Everything': 42. Het inspireerde Jean-Paul Delahaye tot een artikel waarin hij een aantal eigenschappen van 42 aan de orde laat komen:

42 is de som van de eerste drie oneven machten van 2:
$2^1 + 2^3 + 2^5 = 42$;
42 is de macht van de eerste twee niet-nul machten van 6:
$6^1 + 6^2 = 42$;
42 is een Catalangetal – Catalangetallen zijn zeer zeldzaam, veel zeldzamer dan priemgetallen, er zijn er slechts 14 kleiner dan een miljard;
42 was het laatste getal kleiner dan 100 waarvan beslist werd of het getal kan worden geschreven als som van drie derde machten – het bevestigend antwoord kwam in 2020.
Maar was het getal 42 nu in een of ander opzicht speciaal voor Douglas Adams? In de online discussiegroep alt.fan.douglas-adams gaf Adams een kort maar krachtig antwoord: 'Het was een grap. Ik zocht een gewoon, niet al te groot getal. Ik zat achter mijn bureau, keek in de tuin en dacht dat 42 volstond. Ik tikte het getal. Klaar.'
*Bron: www.scientificamerican.com*

## Miranda Cheng in Grote vragen

In de VPRO-serie *Grote vragen* maakt wetenschapsjournalist Rob van Hattum een reis door de wetenschap met acht Nederlandse onderzoekers die aan de top van hun vakgebied staan. Centraal staan hun 'grote vragen'.
Ze vertellen over hun helden, bezoeken bijzondere plekken en spreken over de doorbraken in hun vakgebied.
Op donderdag 1 oktober jl. was in de vierde aflevering de in Taipei geboren en getogen Miranda Cheng te zien. Achttien jaar geleden verhuisde zij naar Nederland, waar ze theoretische natuurkunde studeerde bij Nobelprijswinnaar Gerard van 't Hooft. Cheng promoveerde in 2008 op de snaartheorie en zwarte gaten aan de Universiteit van Amsterdam. Ze heeft inmiddels naam gemaakt binnen de wiskunde, die ze diep induikt om dichter bij een theorie van alles te komen.
De aflevering is terug te zien via onderstaande bron.
*Bron: www.vpro.nl*

Sylvia van Borkulo, Paul Drijvers

Het Flzier gericht op...

# Computationeel denken in de wiskundeles

Digitale geletterdheid krijgt steeds meer aandacht in het onderwijs. De daaraan gerelateerde term computationeel denken duikt vaak op in onderwijsbeleidsplannen. Wat is computationeel denken en kun je dat ook gebruiken in de wiskundeles?

## Inleiding

Om digitale technologie goed te kunnen gebruiken is het van belang dat je ermee kunt omgaan, dat je weet wat je ervan kunt verwachten en hoe je ermee kunt communiceren. Computationeel denken is een paraplubegrip voor deze vaardigheden. Onder deze paraplu vallen bijvoorbeeld probleemoplossen, data (digitaal) representeren, algoritmisch denken en abstraheren. We zien hier duidelijk raakvlakken met wiskundig denken. De vraag die we ons stellen is daarom: hoe kan computationeel denken in de wiskundeles aan de orde komen? Het antwoord op deze vraag willen we illustreren met twee lesvoorbeelden.

## Lessenseries

In de wiskundeles zijn leerlingen inmiddels gewend om digitale technologie te gebruiken om een wiskundig probleem op te lossen. Een grafische rekenmachine kan je helpen om nulpunten van een grafiek te vinden. Een spreadsheetprogramma kan je een overzicht geven van een lijst gegevens. Maar je kunt ook een stap verder gaan en in bredere zin nadenken hoe je technologie kunt inzetten om je probleem op te lossen. Hoe deel je eigenlijk een groter probleem op, zodat je het geschikt maakt om met een computer aan te pakken? Welk programma kun je gebruiken? Heb je wel de juiste gegevens om het probleem op te lossen? Hoe kun je een probleem zodanig formuleren dat een computer je kan helpen om antwoord op je vraag te vinden? Om deze vragen te onderzoeken hebben we vanuit het Freudenthal Instituut samen met een groep van zes scholen, Radboud universiteit en SLO twee lessenseries ontwikkeld voor vwo-5 wiskunde A en wiskunde B. We blijven daarbij dicht bij het reguliere wiskundeprogramma en hebben gekozen voor tools die bij veel wiskundedocenten bekend zijn. Voor wiskunde A gaat de lessenserie over statistiek met Excel en voor wiskunde B over het opstellen van algoritmes rond grafieken en raaklijnen in GeoGebra.

## Wiskunde A

Centraal in de lessenserie voor wiskunde A staat hoe leerlingen bij een gegeven dataset een vraag kunnen opstellen die ze met behulp van Excel kunnen onderzoeken en beantwoorden. Zaken die daarbij aan de orde komen zijn: bevat de dataset de juiste gegevens om je vraag te beantwoorden, wat moet je doen om de gegevens in de goede vorm te krijgen, welke wiskunde kun je gebruiken, en welke mogelijkheden van Excel kun je hiervoor benutten? Voor de eerste opdracht in de lessenserie voor wiskunde A krijgen leerlingen een dataset met gegevens over de passagiers van de Titanic, zie figuur 1.

| pclass | survived | name | sex | age | sibsp |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | Allen, Miss. Elisabeth Walton | female | 29 | 0 |
| 1 | 1 | Allison, Master. Hudson Trevor | male | 0,92 | 1 |
| 1 | 0 | Allison, Miss. Helen Loraine | female | 2 | 1 |
| 1 | 0 | Allison, Mr. Hudson Joshua Creighton | male | 30 | 1 |
| 1 | 0 | Allison, Mrs. Hudson J C (Bessie Waldo Daniels) | female | 25 | 1 |
| 1 | 1 | Anderson, Mr. Harry | male | 48 | 0 |
| 1 | 1 | Andrews, Miss. Kornelia Theodosia | female | 63 | 1 |
| 1 | 0 | Andrews, Mr. Thomas Jr | male | 39 | 0 |
| 1 | 1 | Appleton, Mrs. Edward Dale (Charlotte Lamson) | female | 53 | 2 |

Logische-test E2<age_child = ONWAAR
Waarde-als-waar 1 = 1
Waarde-als-onwaar 0 = 0

| isChild | parameter | |
|---|---|---|
| 0 | age child | 13 |

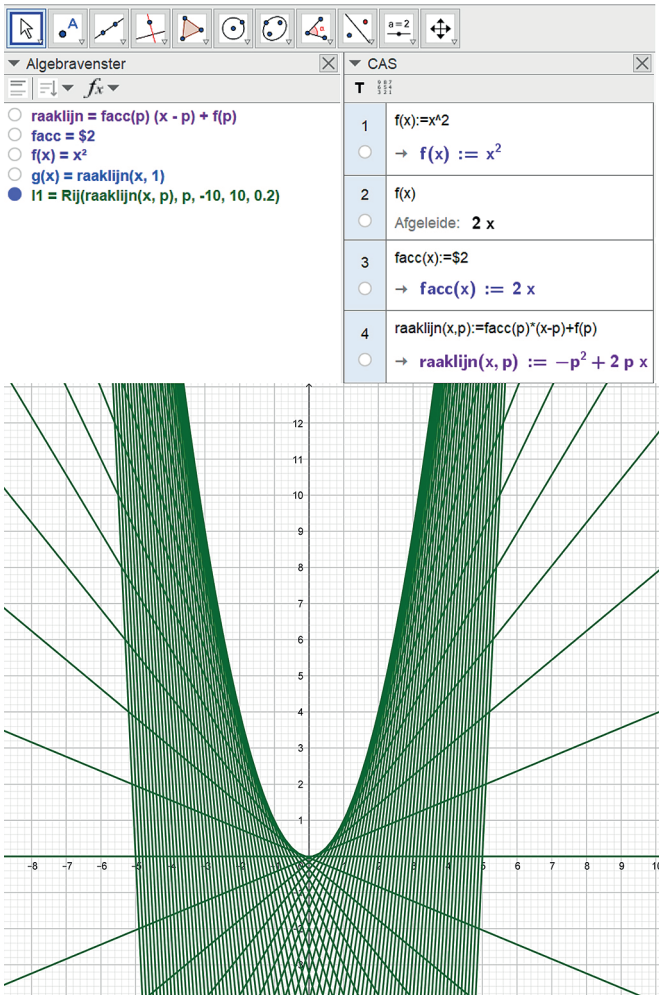
*figuur 1 Dataset Titanic: Vrouwen en kinderen eerst?*

Om de vraag te kunnen beantwoorden of de richtlijn 'vrouwen en kinderen eerst' is gevolgd bij het verlaten van het schip, onderzoeken de leerlingen de aantallen overlevenden onder de verschillende groepen. Daarbij moeten ze uit de data afleiden of een passagier een kind is, en dus beslissen vanaf welke leeftijd ze iemand als volwassene beschouwen.

In de tweede opdracht krijgen de leerlingen een nieuwe dataset over schoolcijfers van leerlingen op een school. Nu moeten ze zelf een vraag bedenken bij de gegevens en deze vraag onderzoeken en beantwoorden. Ze volgen daarbij de aanpak en de stappen die ze in de eerste opdracht hebben geleerd. De lessenserie wordt afgesloten met een verslag waarin ze hun bevindingen vastleggen.

## Wiskunde B

Voor de lessenserie voor wiskunde B gaan leerlingen aan de slag met het opstellen van algoritmes voor middelloodlijnen, raaklijnen en nulpunten. In GeoGebra kun je natuurlijk een knop gebruiken voor het opstellen van een middelloodlijn, maar welke stappen zitten daar eigenlijk achter? Leerlingen definiëren stapsgewijs procedures in het Algebra-venster die bijvoorbeeld bundels raaklijnen aan een parabool genereren, zie figuur 2.




*figuur 2 Definitie van een bundel raaklijnen aan een parabool in GeoGebra*

In de opdrachten gebruiken leerlingen verschillende commando's in GeoGebra bij het opstellen van algoritmes, zoals Als, Lijnstuk, Veelhoek, Rij en Iteratielijst. Hierbij moeten ze problemen opdelen in kleinere stukken, patronen herkennen, informatie filteren en stapsgewijs oplossingen bedenken. Het resultaat is zichtbaar in het meetkundevenster. Naast algoritmisch denken oefenen de leerlingen hiermee ook om het geheel van stappen te zien als één object.

## Lessenserie uitvoeren?

Deze lessenseries zijn ontwikkeld in het kader van het project 'Computationeel denken en wiskundig denken: digitale geletterdheid in wiskundecurricula', gefinancierd door NRO (projectnummer 00517751). Het komend schooljaar worden ze op verschillende scholen uitgevoerd om te onderzoeken hoe leerlingen met dit materiaal leren.
Wilt u een van de lessenseries ook gebruiken in uw klas? Neem dan contact op met Sylvia van Borkulo.

## Noten


[1] Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35.

[2] Borkulo, S. P. van, Kallia, M., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2019). Computational thinking and mathematical thinking: Digital literacy in mathematics curricula. *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14*, 384–386. *https://doi.org/https://doi.org/10.17185/duepublico/70781*


## Over de auteurs


Sylvia van Borkulo is universitair docent bij het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *s.vanborkulo@uu.nl*. Paul Drijvers is hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en wetenschappelijk directeur van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *p.drijvers@uu.nl*

Martin Kindt

# Pythagorische rijtjes

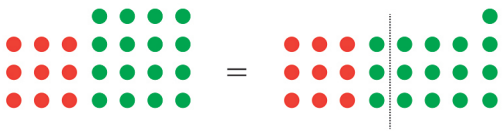
Een rijtje van $n$ positieve gehele getallen wordt een pythagorisch rijtje ($P_n$-rijtje) genoemd als het kwadraat van het grootste getal gelijk is aan de som van de kwadraten van de kleinere getallen. Over $P_3$-rijtjes is sinds de Oudheid alles bekend. In dit artikel worden ook $P_n$-rijtjes met $n$ =.4 of 5 bekeken.

## Aanleiding

Een poos geleden ontving ik een bericht van Rolf Doets[1], die mij vertelde dat hij een leuke manier had ontdekt om $P_4$-rijtjes te maken:

— kies twee opeenvolgende getallen;
— bereken het product daarvan;
— tel 1 bij dit product op.

Kortom, maak een rijtje $(a, b, c, d)$ van de vorm: $a = n$ , $b = n + 1$, $c = n(n + 1)$, $d = n(n + 1) + 1$. Een beetje algebra leert dat er dan inderdaad sprake is van een $P_4$-rijtje. Hij vroeg mij of ik ook een 'plaatjesbewijs' voor dit feit wist. Mijn antwoord was dat $c$ en $d$ van een hogere dimensie zijn dan $a$ en $b$ en dat het me daarom moeilijk (zo niet onmogelijk) lijkt om de complete identiteit met één plaatje aan te tonen, maar dat er wel een paradigmatisch plaatje is bij $a^2 + b^2 = 2c + 1$, zie figuur 1, en dat het dan nog een kwestie is van bij beide leden $c^2$ optellen.




*figuur 1*

Nu eerst een tabelletje om te zien wat het recept van Rolf oplevert:

| $n$ | $(a, b, c, d)$ | |
|---|---|---|
| 1 | (1, 2, 2, 3) | $1^2 + 2^2 + 2^2 = \mathbf{3^2}$ |
| 2 | (2, 3, 6, 7) | $2^2 + 3^2 + 6^2 = \mathbf{7^2}$ |
| 3 | (3, 4, 12, 13) | $3^2 + 4^2 + 12^2 = \mathbf{13^2}$ |
| 4 | (4, 5, 20, 21) | $4^2 + 5^2 + 20^2 = \mathbf{21^2}$ |
| 5 | (5, 6, 30, 31) | $5^2 + 6^2 + 30^2 = \mathbf{31^2}$ |

*tabel 1*

Dit noem ik speciale $P_4$-rijtjes, speciaal omdat ze bestaan uit twee paren van opeenvolgende getallen.
Voor ik hiermee verder ga, wil ik eerst kijken naar speciale $P_3$-rijtjes. Het beroemdste daarvan is ongetwijfeld (3, 4, 5) dat uit drie opeenvolgende getallen bestaat. Dat dit het enige $P_3$-rijtje is met drie opeenvolgende getallen is een leuk sommetje voor de leerling: *de vierkantsvergelijking $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$ heeft de oplossingen $x = 3$ en $x = -1$, klaar.*
Maar met twee opeenvolgende getallen, zoals het op één na bekendste $P_3$-rijtje (5, 12, 13), dat verstopt zit in tabel 1, zijn er oneindig veel. Voorbeelden: (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85).
Er is een recept zoals dat van Rolf Doets om die te maken, daar kom ik later op terug. Er zijn ook $P_3$-rijtjes waarvan de kleinste twee getallen elkaar opvolgen. Voorbeeld: (20, 21, 29).
En een befaamd Babylonisch kleitablet[2] bevat, zij het impliciet, het rijtje (119, 120, 169). Ook voor zulke trio's bestaat een recept zoals zal blijken.

## Algemene recepten

In de Oudheid werden diverse recepten ontdekt om $P_3$-rijtjes te genereren. Het meest algemene recept kan worden gevonden uit de identiteit:

$(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2$

Als je voor $x$ en $y$ kwadraten invult krijg je zeker een $P_3$-rijtje. Kortom, kies natuurlijke getallen $m$, $n$ en neem $a = |m^2 - n^2|$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Dat je zo alle mogelijke trio's (dat wil zeggen op een constante factor na!) vindt, kan op allerlei manieren worden bewezen, ook daar kom ik op terug.

Het recept om Pythagorische viertallen ($a$, $b$, $c$, $d$) te maken is analoog. De identiteit

$(x - y - z)^2 + 4xy + 4xz = (x + y + z)^2$

zegt dat bij elke keuze van de natuurlijke getallen $k$, $m$, $n$ het kwartet $a = |k^2 - m^2 - n^2|$, $b = 2km$, $c = 2kn$ en $d = k^2 + m^2 + n^2$ een $P_4$-rijtje vormt. Tabel 2 toont het begin van een oneindig voort te zetten tabel:

| $k$ | $m$ | $n$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | **3** |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | **6** |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 8 | 4 | **9** |
| 3 | 1 | 1 | 7 | 6 | 6 | **11** |
| 3 | 2 | 1 | 4 | 12 | 6 | **14** |
| 3 | 2 | 2 | 1 | 12 | 12 | **17** |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 18 | 6 | **19** |
| 3 | 3 | 2 | 4 | 18 | 12 | **22** |
| 4 | 1 | 1 | 14 | 8 | 8 | **18** |
| 4 | 2 | 1 | 11 | 16 | 8 | **21** |
| 4 | 3 | 1 | 6 | 24 | 8 | **26** |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 24 | 16 | **29** |
| 4 | 3 | 3 | 2 | 24 | 24 | **34** |
| 4 | 4 | 1 | 1 | 32 | 8 | **33** |
| 4 | 4 | 3 | 9 | 32 | 24 | **41** |

*tabel 2*

Het eerste rijtje uit deze tabel is ook het eerste rijtje van tabel 1. Het tweede rijtje is niet echt nieuw, want het is evenredig met het eerste. De rijtjes (2,3, 6, 7) en (3, 4, 12, 13) van tabel 2 zijn hier respectievelijk terug te vinden in vermomming: (4, 12, 6, 14) en (6, 24, 8, 26). De vraag die je kunt stellen is nu of bijvoorbeeld het rijtje (5, 6, 30, 31) van tabel 1 ook te vinden is via het $k$, $m$, $n$-recept.

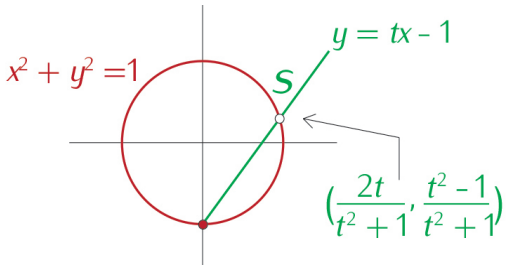
Even kijken: stel $k^2 - m^2 - n^2 = 5$, $km = 3$, $kn = 15$ en $k^2 + m^2 + n^2 = 31$. Uit de eerste en de laatste betrekking volgt $k^2 = 18$. Ik neem $k = 3\sqrt{2}$ zodat $m$ en $n$ achtereenvolgens gelijk zijn aan $1 / \sqrt{2}$ en $5 / \sqrt{2}$. Substitutie levert dan het gewenste rijtje op. Zoiets lukt voor élk 'Rolf-Doets-rijtje', het bewijs daarvan is een goede oefening in algebra. Bij toepassing van het $k$, $m$, $n$-recept moet je blijkbaar ook irrationale waarden voor $k$, $m$, $n$ toelaten om alle denkbare $P_4$-rijtjes te genereren.

## Rationale punten op eenheidscirkel en -bol

Dat het $m$, $n$-recept voor $P_3$-rijtjes en net zo het $k$, $m$, $n$-recept voor $P_4$-rijtjes 'volledig' zijn, kan bijvoorbeeld worden aangetoond met analytische meetkunde. Met 'volledig' bedoel ik dan dat deze recepten een (of meer) representant(en) leveren van élke equivalentieklasse van evenredige rijtjes.

Eerst de $P_3$-rijtjes. Daartoe kijk ik naar de cirkel in het $Oxy$-vlak met de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Op die cirkel liggen oneindig veel punten met rationale coördinaten, zoals $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$, $(\frac{8}{17},\frac{15}{17})$.

Zulke punten corresponderen met $P_3$-rijtjes en omgekeerd levert elk $P_3$-rijtje een punt op van de eenheidscirkel (in het eerste kwadrant) met rationale coördinaten. De clou is nu om een algebraïsche parametervoorstelling van de eenheidscirkel op te stellen, zie figuur 2.




*figuur 2*

Ik laat de rechte lijn met richtingscoëfficiënt $t$ draaien om het punt (0, -1) van de eenheidscirkel. De $x$-coördinaat van het tweede snijpunt $S$ met de cirkel voldoet aan $x^2 + (tx - 1)^2 = 1$ en is daarom gelijk aan $\frac{2t}{t^2+1}$; de $y$-coördinaat is dan: $\frac{t^2-1}{t^2+1}$.

>

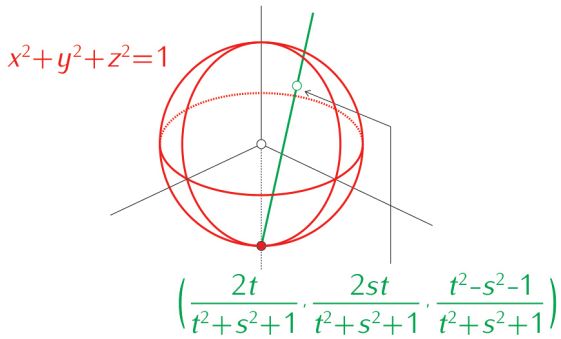
Daarmee is een rationale parametervoorstelling gevonden van de eenheidscirkel. Stel $t$ gelijk aan de breuk met noemer $m$ en teller $n$, waarbij $m > n$. De coördinaten van $S$ uitgedrukt in $m$ en $n$ zijn dan:

$$x=\frac{2mn}{m^2+n^2} \text{ en } y=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

en nu is het duidelijk dat elk $P_3$-rijtje evenredig is met een rijtje van de vorm $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ waarbij $m$ en $n$ natuurlijke getallen zijn.
Op analoge wijze kunnen de $P_4$-rijtjes worden behandeld. Ik ga dan uit van de bol met middelpunt (0, 0, 0) en straal 1, in een orthonormaal assenstelsel $Oxyz$ en kies een variabele lijn door de 'zuidpool' met richtingsvector $(1, s, t)$.
Door $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ te combineren met de vectorvoorstelling $(x, y, z) = (0, 0, -1) + \lambda(1, s, t)$ vind ik de coördinaten van het tweede snijpunt $S$:

$$x=\frac{2t}{t^2+s^2+1},\ y=\frac{2st}{t^2+s^2+1} \text{ en } z=\frac{t^2-s^2-1}{t^2+s^2+1}.$$

Zo is er een rationale parametervoorstelling van de eenheidsbol gevonden, zie figuur 3.




*figuur 3*

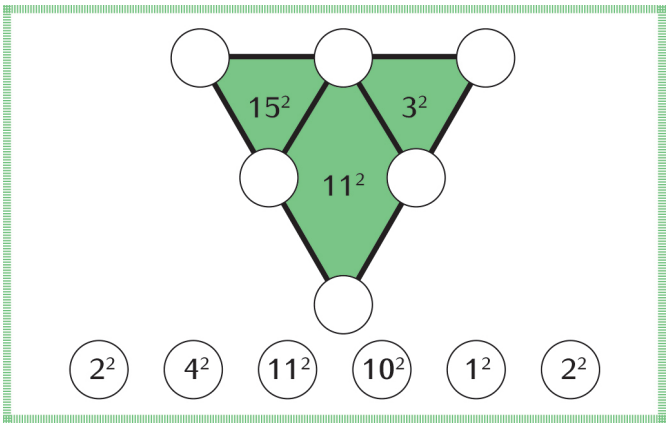
Door voor $s$ en $t$ rationale getallen te substitueren, krijg ik rationale punten op de eenheidsbol die op hun beurt $P_4$-rijtjes voortbrengen. Laat nu $k$, $m$ en $n$ natuurlijke getallen ($\neq 0$) zijn en stel $s = m / n$ en $t = k / n$.
Substitutie in de parametervoorstelling levert op:

$$x=\frac{2kn}{k^2+m^2+n^2},\ y=\frac{2km}{k^2+m^2+n^2},\ z=\frac{k^2-m^2-n^2}{k^2+m^2+n^2}.$$

Dus elk $P_4$-rijtje is evenredig met een rijtje $(|k^2 - m^2 - n^2|, 2km, 2kn, k^2 + m^2 + n^2)$.
Dat dit verhaal niet ophoudt bij drie dimensies zal geen verwondering wekken. Door in een 4D-stelsel de 'eenheids-hypersfeer' te snijden met een lijn door (0, 0, 0, -1) krijg ik een algebraïsche parametervoorstelling van $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, waaruit dan een algemeen recept voor $P_5$-rijtjes kan worden gevonden, en zo verder, en zo voort.

## P-rijtjes met buren

Rolf Doets ontdekte zijn recept bij het ontwerpen van Resolf-puzzels met kwadraten, als in figuur 4.




*figuur 4*

De opdracht bij deze puzzel is:
*Plaats de zes (ronde) speelgetallen in de knopen, zodat de som van de omringende knopen gelijk is aan de waarde in elk veld.*

Een mooi type opgave, waarmee de leerling – en in dit geval de lezer - kan worden uitgedaagd. Met een combinatie van proberen, corrigeren en redeneren moet het lukken. De oplossing levert twee $P_4$-rijtjes en één $P_5$-rijtje op. De lezer heeft inmiddels waarschijnlijk al wel gevonden dat die rijtjes zijn: (1, 2, 2, 3) , (2, 10, 11, 15) en (1, 2, 4, 10, 11). Ze zijn speciaal in de zin dat ze ten minste één paar natuurlijke buurgetallen bevatten.

In het begin van dit artikel heb ik enkele $P_3$-rijtjes met buren genoemd, en daar kom ik nu op terug. Om een bouwschema voor zulke trio's te vinden ga ik uit van het algemene recept met $m > n$, dus:
$(m^2 - n^2 , 2mn, m^2 + n^2)$.
Stel dat $2mn$ en $m^2 + n^2$ buurgetallen zijn. Dan geldt: $(m - n)^2 = 1$, dus $m = n + 1$. Dit gesubstitueerd in de algemene formule, geeft het rijtje: $(2n + 1, 2n(n + 1), 2n(n + 1) + 1)$. Een recept à la dat van Rolf Doets, maar dan voor speciale $P_3$-rijtjes!

Iets lastiger is het om een recept te vinden voor $P_3$-rijtjes waarbij de kleinste twee getallen buren zijn. Er moet dan gelden:
$(m^2 - n^2) - 2mn = \pm 1$
ofwel
$(m - n)^2 - 2n^2 = \pm 1$. $\quad (*)$
Dit roept bij mij herinneringen op aan wat in de getaltheorie de *Pell-vergelijking* heet:
$x^2 - 2y^2 = \pm 1$.
Als $(x, y)$ een positief geheeltallig oplossingspaar is van een van beide vergelijkingen dan geldt dat ook voor het paar $(x + 2y, x + y)$, een mooie oefening in algebra op school!
De kleinste oplossing is (1, 1) en van daaruit vind je dan $(x, y) = (3, 2), (7, 5), (17, 12)$, enzovoort.
Merk op dat deze getallenparen bij voortzetting teller en noemer zijn van steeds beter wordende breukbenaderingen van $\sqrt{2}$.
Dit geeft mij oplossingsparen van vergelijking $(*)$, namelijk $(m, n) = (2, 1), (3, 2), (12, 5), (29, 12)$, ... die op hun beurt de $P_3$-rijtjes (3, 4, 5), (21, 20, 29), (119, 120, 169), (697, 696, 985), ... genereren.
Die rijtjes passen bij geheelzijdige rechthoekige driehoeken die steeds betere look-a-likes zijn van - zeg maar - de geodriehoek!

## Nog iets over speciale $P_4$- en $P_5$-rijtjes

Er is geen enkel pythagorisch kwartet met vier opeenvolgende getallen, omdat de vergelijking
$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2$
gelijkwaardig is met $x^2 = 2$.
Het onderzoek naar het bestaan van $P_4$-rijtjes met drie opeenvolgende getallen heeft wat meer voeten in de aarde. Ik bekijk achtereenvolgens de rijtjes
$(x - 1, x, x + 1, y)$ en $(x, y - 1, y, y + 1)$.
In het eerste geval leidt dit tot $y^2 - 3x^2 = 2$. Eventuele geheeltallige oplossingsparen $(x, y)$ moeten bestaan uit twee getallen met dezelfde pariteit.
(1) Stel $x$ en $y$ beide even.
$y^2 - 3x^2$ is dan een 4-voud en kan dus onmogelijk gelijk zijn aan 2.
(2) Stel $x$ en $y$ beide oneven.
Hun kwadraten zijn dan gelijk aan een 8-voud + 1 en $y^2 - 3x^2$ is dan gelijk aan een 8-voud – 2 en dat kan niet gelijk aan 2 zijn.
Het tweede rijtje $(x, y - 1, y, y + 1)$ leidt tot de vergelijking $x^2 + y^2 - 4y = 0$ met als geheeltallige oplossingsparen (0, 0), (2, 2), (0, 4) en (-2, 2). Het paar (2, 2) levert op (2, 1, 2, 3) het enige $P_4$-rijtje met drie opeenvolgende getallen.
Dit artikel opende met $P_4$-rijtjes met twee paar buren. En inderdaad, als je wilt dat $(x, x + 1, y, y + 1)$ een $P_4$-rijtje is, komt er $x^2 + x = y$, juist het recept van Rolf! $P_4$-rijtjes met één paar buren zijn er talloze.
Ten slotte kijk ik nog even naar $P_5$-rijtjes. De Resolf-puzzel in figuur 4 leverde een rijtje met twee paar buren: (1, 2, 4, 10, 11). Dat er van zulke rijtjes oneindig veel zijn is snel te zien. Laat $(k, k + 1, m, n, n + 1)$ zo'n rijtje zijn. Er volgt dan $2k^2 + 2k + m^2 = 2n$ , zodat $m$ een even getal moet zijn.
Neem bijvoorbeeld $m = 6$. Voor elke waarde van $k$ kleiner dan 6, vind ik uit bovenstaande vergelijking een $P_5$-rijtje met paren buren. Die rijtjes zijn dan: (1, 2, 6, 20, 21), (2, 3, 6, 24, 25), (3, 4, 6, 30, 31), (4, 5, 6, 38, 39), (5, 6, 6, 48, 49).
Het vierde rijtje bestaat zelfs uit een trio en een duo van opvolgende getallen, en ook van zulke rijtjes zijn er oneindig veel.

## Noten

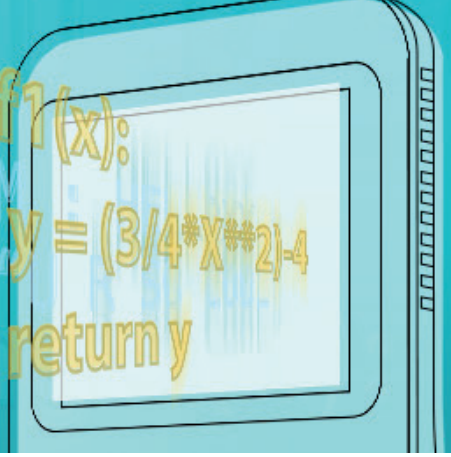
[1] Rolf Doets is de bedenker van het spel RESOLF dat eindeloos veel mogelijkheden biedt om leerlingen spelenderwijs te laten oefenen in rekenen / algebra.

[2] Bedoeld is het beroemde kleitablet Plimpton 322 waarop vijftien getallenparen staan die elk deel uitmaken van een pythagorische trio. Zie Zebraboekje 20 met de titel *Babylonische Wiskunde* (auteurs A. van der Roest en M. Kindt).

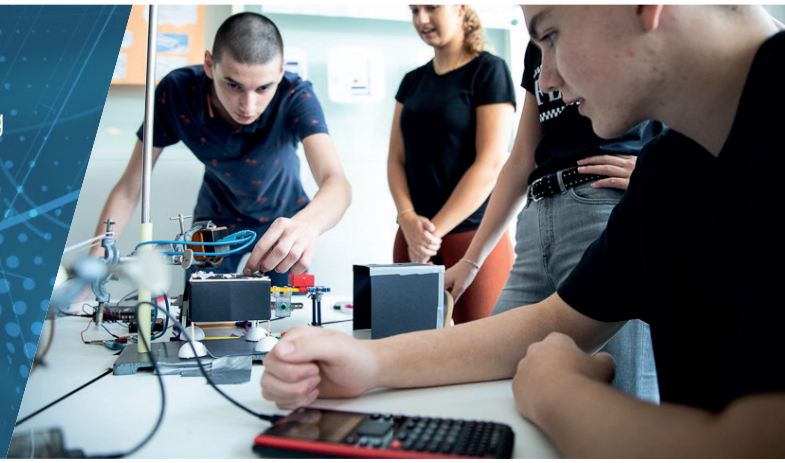
## Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

# Help leerlingen op weg met programmeren




Laat uw leerlingen aan de slag gaan met de **lesactiviteiten TI Coderen** en help ze zo op weg met programmeren! De lessen vormen een leuke introductie op programmeren waarbij leerlingen in korte, duidelijke stappen spelenderwijs leren coderen. Beheersen ze eenmaal de basis, dan motiveert dat om door te gaan met coderen, informatica en robotics!



## Programmeren in Python

Werkt u op school met de TI 84 Plus CE-T Python Edition of de TI-Nspire™ CX II-T? Dan zijn er lesactiviteiten TI Coderen met Python.

*Let op: alleen met het nieuwste besturingssysteem is Python op de TI-Nspire CX II-T te gebruiken.*

## Programmeren met TI Basic

Gebruiken uw leerlingen een TI-84 Plus CE-T of TI-Nspire™ CX handheld? Dan kunnen ze aan de slag met activiteiten in TI Basic.

**Start hier met TI Coderen**

**education.ti.com/nederland**

## TI Python BootCamp voor leraren

T³ NEDERLAND

**Wilt u zelf aan de slag met programmeren in Python?** Doe dan mee met de TI Python BootCamp van lerarennetwerk T³ Nederland. Via gratis webinars maakt u kennis met deze populaire programmeertaal.

**www.wil-depython.nl**

TEXAS INSTRUMENTS

©2020 Texas Instruments

Rob Bosch

# Rijtjes met witte en zwarte (bingo)ballen V

We trekken zonder terugleggen één voor één ballen uit een vaas met zes witte en vier zwarte ballen. We doen dat net zolang totdat we de laatste zwarte bal getrokken hebben. De stochast die de beurt aangeeft waarin we die laatste zwarte bal trekken, noemen we $B$. Hoe ziet de kansverdeling van deze stochast $B$ eruit? In het voorbeeld in figuur 1 trekken we de laatste zwarte bal in de zevende beurt.

*figuur 1*

De kans op deze volgorde is $\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{210}$.

De trekking in figuur 2 geeft ook een laatste zwarte bal in de zevende beurt.

*figuur 2*

De kans dat we op deze manier de laatste zwarte bal in de zevende beurt trekken, is $\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{210}$. Merk op dat deze kansen gelijk zijn. Iedere volgorde waarbij we in de zevende beurt de laatste zwarte bal trekken, heeft een kans van $\frac{1}{210}$. De drie witte ballen kunnen we op $\binom{6}{3}$ manieren over de eerste zes trekkingen verdelen zodat we de kans $\frac{1}{210}$ nog moeten vermenigvuldigen met $\binom{6}{3}$ om de kans te vinden op een laatste zwarte bal in de zevende beurt. Voor $P(B = 7)$ vinden we:

$$P(B = 7) = \binom{6}{3}\times\frac{1}{210} = \frac{20}{210}$$

Op eenzelfde wijze vinden we de andere kansen.

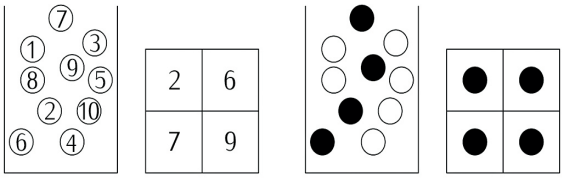
De kansverdeling van $B$ is:

| $b$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(B = b)$ | $\frac{1}{210}$ | $\frac{4}{210}$ | $\frac{10}{210}$ | $\frac{20}{210}$ | $\frac{35}{210}$ | $\frac{56}{210}$ | $\frac{84}{210}$ |

Het eerste dat opvalt aan deze discrete kansverdeling is de monotonie. De kansen nemen toe met de beurt waarin de laatste zwarte bal getrokken wordt. Het is een aanzienlijk scheve verdeling. Zo is de kans dat de laatste zwarte bal pas in de negende of tiende beurt getrokken wordt gelijk aan ⅔. Ook uit de verwachtingswaarde blijkt de scheefheid van de verdeling.
Voor de verwachtingswaarde geldt:

$$E(B) = \sum_{k=4}^{10} kP(B=k) = \frac{44}{5} = 8{,}8$$

Gemiddeld trekken we de laatste zwarte bal in, zeg, beurt 9. We noemen de bovenstaande verdeling in het kader van dit stukje een bingoverdeling. Als we de tien ballen nummeren van 1 tot en met 10 en de nummers van de vier zwarte ballen op een kaart zetten dan hebben we namelijk een eenvoudige versie van het bekende bingospel. Bij iedere trekking van een zwarte bal – een bal waarvan het nummer op de kaart staat – strepen we het getal op de kaart weg. Zodra alle nummers op de kaart weggestreept zijn, hebben we bingo(!). De kans op een bingo in een bepaalde beurt wordt gegeven door de kansverdeling van de bovenstaande stochast $B$; vandaar de keuze van $B$ voor de stochast. In de figuur 3 zien we de vaas met genummerde ballen en de bingokaart.



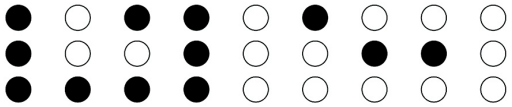

*figuur 3*

Omdat voor een bingo de volgorde waarin we de bingogetallen (getallen op de kaart) en de andere getallen trekken niet van belang is, kunnen we het spel analyseren aan de hand van een vaas met witte en zwarte (bingo)ballen. Het spel met genummerde ballen en een bingokaart met getallen is hetzelfde als een spel met witte en zwarte ballen. De bingokaart geeft dan slechts het aantal zwarte ballen aan, zie figuur 3.
Een bingospel met $n$ genummerde ballen en een bingokaart met $m$ getallen geven we aan met $b(n, m)$. Dat is dus een spel met een vaas met $n$ ballen waarvan er $m$ zwart zijn. Ons voorbeeld is de versie $b(10, 4)$.

>

Het bingospel zoals dat in feestzalen en op campings gespeeld wordt is versie $b(99, 16)$.

We trekken één voor één ballen uit een vaas met $n$ ballen waarvan er $m$ zwart zijn. Dat geeft $\binom{n}{m}$ verschillende rijtjes of volgordes. Er zijn immers $\binom{n}{m}$ mogelijkheden om de $m$ zwarte ballen in het rijtje van $n$ op te nemen. Voor $n = 10$ en $m = 4$ zijn bijvoorbeeld de volgende trekkingen mogelijk, zie figuur 4.



*figuur 4*

In de bovenstaande trekkingen valt de bingo (laatste zwarte bal) in respectievelijk de zesde, achtste en de vierde beurt. Het aantal trekkingen of rijtjes waarin de laatste zwarte bal voorkomt op positie $k$ is gelijk aan $\binom{k-1}{m-1}$. In dit geval moeten we $m - 1$ zwarte ballen verdelen over de $k - 1$ voorafgaande posities. De kans dat we bingo hebben in de $k$-de beurt of daaraan gelijk de kans dat we de laatste zwarte bal trekken in beurt $k$ is dus gelijk aan $\binom{k-1}{m-1} / \binom{n}{m}$.

De kansverdeling van de bingostochast $B$ voor de versie $b(n; m)$ wordt gegeven door de 'bingoverdeling':

$$P(B=k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} \qquad k = m, m+1, \ldots, n$$

Voor de versie $b(10, 4)$ uit ons voorbeeld geldt dus:

$$P(B=k) = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\binom{k-1}{3}}{210}$$

waarmee de lezer de kansen in de eerder gegeven kansverdeling kan controleren. De kansen tellen uiteraard op tot 1 zodat we de volgende identiteit kunnen afleiden:

$$\binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \quad + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m}$$

In de driehoek van Pascal vinden we deze identiteit terug als de som van de getallen op een diagonaal. Deze identiteit wordt vaak het hockeystickpatroon in de driehoek van Pascal genoemd. Dit hockeystickpatroon geeft verrassend de kansen van het bingospel.

Opmerkelijk dat we de kansen in het bingospel in de driehoek van Pascal kunnen aflezen. De kansen van $b(n, m)$ zijn te vinden op de $(m - 1)$-ste diagonaal in de driehoek. Dat wil zeggen de tellers van de kansen vinden we op de diagonaal, de bijbehorende noemer vinden we via het knikje in het patroon. Voor $m = 2$ vinden we voor de tellers de natuurlijke getallen 1, 2, … . Bij $m = 3$ zijn de tellers, toch wel enigszins verrassend, de driehoeksgetallen 1, 3, 6, 10, … . In de driehoek in figuur 5 zijn de bingokansen voor de versie $b(5, 2)$ (blauw) en $b(6, 3)$ (rood) gegeven.

$n = 0$ 1

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

*figuur 5*

We besteden nog even aandacht aan twee kansen. De kans dat we pas in de laatste beurt bingo hebben, is gelijk aan:

$$P(B=n) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{m}{n}$$

Dit kunnen we uiteraard eenvoudig nagaan met de kansen uit de bingoverdeling maar het volgt ook direct uit de symmetrie. Het aantal rijtjes van $n$ ballen dat eindigt met een zwarte bal is gelijk aan het aantal rijtjes dat begint met een zwarte bal. Met andere woorden: de kans dat de laatste bal zwart is, is gelijk aan de kans dat de eerst getrokken bal zwart is en die kans is simpel: $m/n$. Voor de versie $b(10, 4)$ is deze kans dus 4/10 in overeenstemming met ons resultaat uit het eerste voorbeeld. Voor de versie $b(99, 16)$ is deze kans 16/99. Een vrij grote kans dat we tot de laatste bal moeten wachten voor onze bingo.

De kans dat we al na $m$ beurten bingo hebben is $1/\binom{n}{m}$.

Voor het bingospel $b(99, 16)$ is deze kans $1/\binom{99}{16} \approx 10^{-18}$. Als je (of een computer) iedere seconde een bingospelletje speelt dan moet je gemiddeld meer dan 100 miljard jaar spelen om zo'n extreem succes mee te maken. En dan te bedenken dat je ook in dat geval slechts een strijkijzer of een luchtbed wint.

Na enig puzzelen met reeksen vinden we voor de verwachtingswaarde van de bingoverdeling:

$$E(B) = \frac{m}{m+1}(n + 1)$$

Voor onze voorbeeldversie $b(10, 4)$ geldt dat $E(B) = 44/5 = 8{,}8$ in overeenstemming met het eerder gevonden resultaat. De verwachtingswaarde van de campingversie $b(99, 16)$ is $16/17 \times 100 \approx 94$. Je moet bij dit spel dus veel geduld hebben. De verwachtingswaarde hadden we ook zonder berekening kunnen bepalen. Gemiddeld zijn de $m$ zwarte ballen uniform verdeeld over de rij van $n$ ballen. Voor $n = 11$ en $m = 3$ geeft dat de uniforme verdeling van figuur 6.

*figuur 6*

De laatste zwarte bal vinden we in beurt 9 in overeenstemming met de verwachtingswaarde $¾ \times 12 = 9$. De rijtjes van witte en zwarte ballen hebben voor de analyse van het bingospel hun dienst bewezen.

## Over de auteur

Rob Bosch was universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van *Euclides*. E-mailadres: *dr.robbert.bosch@gmail.com*

# Verschenen

**Giraf-reeks 2**
**Titel: Cryptografie.**
**Een doeboek vol codes en geheimtaal**
**Auteur: Paul Durenkamp**
**ISBN: 9789050411844**
**Doelgroep: vmbo, onderbouw havo/vwo**
**Prijs: € 7,-**

De Giraf-reeks is bedoeld voor leerlingen in de onderbouw die meer willen weten van wiskunde. Deze tweede uitgave staat vol informatie, opdrachten en puzzels over cryptografie. Leerlingen gaan aan de slag met het kraken van codes, het maken van codes en het puzzelen met codes.

**Zebra-reeks 58**
**Titel: Besmettelijke ziekten**
**Auteurs: Don Klinkenberg en Swier Garst**
**ISBN: 9789050411806**
**Doelgroep: bovenbouw havo/vwo**
**Prijs: € 10,-**

Van een infectie word je ziek en je kan andere mensen besmetten. Behandeling van de ziekte leidt dus tot minder nieuwe besmettingen, en vaccinatie beschermt jezelf maar zorgt ook dat je de ziekte niet kan verspreiden. Hoe snel moet je behandelen of hoeveel mensen moet je vaccineren om de infectie helemaal te stoppen? Waarom lukt dat bij de ene infectie wel en bij de andere niet? Kunnen we dat voorspellen? Hoe hangt dat af van eigenschappen van de infectieziekte? Een wiskundig model kan ons helpen. In een model worden de biologische eigenschappen van een infectie in formulevorm opgeschreven. In dit boekje leren we zo'n model te maken en te gebruiken om antwoord op deze vragen te kunnen geven.

# Boekbespreking

# Straf in Statistiek

Henk Hietbrink

**Titel: Straf in Statistiek**
**Auteur: Ellen Vandervieren**
**Uitgever: Uitgeverij Acco**
**ISBN: 978-94-637-9827-3, 109 pagina's paperback**
**Prijs: € 20,10**

## Straf bier, straf in statistiek

Straf bier is bier met een stevige smaak, bier waar je goed voor gaat zitten, bier dat je niet gauw vergeet. Straf in statistiek is net zo. In Vlaanderen is het curriculum voor de eerste graad (onze onderbouw) herzien. Het onderdeel statistiek is grondig aangepakt en wordt vanaf nu stevig neergezet. Op een bijscholingsmiddag in Vorselaar, georganiseerd door de Thomas More lerarenopleiding in de Kempen, verzorgde Ellen Vandervieren, de auteur van Straf in Statistiek, haar workshop. Het was een echte doe-activiteit. Na een korte inleiding ging iedereen achter de computer aan de slag met Google Forms en Excel om die nieuwe statistiek zelf te ervaren. Het boek Straf in Statistiek met de ondertitel 'Laat je leerlingen werken met data en digitale tools' zet het nieuwe programma stevig neer. Het woord 'straf' is zeker op zijn plaats. Het boek is beslist een aanrader voor studenten van de lerarenopleidingen en voor iedere docent in de onderbouw of bovenbouw, voor vmbo en voor vwo. Het boek geeft meer dan voldoende inhoud om zelf een lesplan te maken met het materiaal dat kant-en-klaar aangeleverd wordt.

## Zelfstandig onderzoek doen

Na afloop van de bijscholingsmiddag had ik zin om het aangeboden materiaal uit te proberen in een brugklas. Zouden ze zelfstandig een onderzoek kunnen opzetten? Zouden ze zelfstandig de uitkomsten kunnen verwerken?

Op mijn school beginnen we in havo 4 met het profielwerkstuk. Dat doen we kort voor de zomer. Veel leerlingen willen een enquête houden, maar doen dat voor het eerst. Mijn havisten zouden echt geholpen zijn als ze deze cursus hadden doorlopen. Ze zouden bijvoorbeeld weten hoe je een onderzoek opzet, ze zouden weten wat je allemaal met Google Forms kunt doen en hoe je de uitkomsten in Excel kunt verwerken.

## Doe-boek

*Straf in Statistiek* is bedoeld voor alle docenten, voor zowel leraren met ict-ervaring en een smartboard, als voor leraren met een krijtbord. Het boek staat vol met verwijzingen naar filmpjes op het internet en websites. De QR-codes zijn erbij gezet. Op die manier wordt het de lezer heel gemakkelijk gemaakt om al het extra materiaal te bekijken. Het boek staat vol met schermprintjes en neemt de lezer aan de hand mee. Het boek is een superhandig doe-boek. Slim is ook dat informatieve video's klaar staan in SoapBox voor alle belangrijke onderdelen. Deze video's zijn eenvoudige screencasts. Ze zijn helder ingesproken. Er zijn geen flitsende achtergronden, hippe acteurs of vlotte muziekjes. Alle aandacht voor wat er op het beeldscherm gebeurt. Dat komt saai over voor klassikaal onderwijs, maar daar is het vast niet voor bedoeld. Als vakdidacticus geeft Vandervieren de boodschap dat met SoapBox iedere docent een screencast kan maken, als je maar een goed verhaal hebt.

> "Laat vooral leerlingen aan het woord bij het interpreteren van gegevens en het trekken van conclusies."

## Opzet van een onderzoek

Na een inleidend hoofdstuk over de Vlaamse eindtermen voor de eerstegraad secundair onderwijs, begint het echte werk in hoofdstuk 2 met de vier stappen in statistisch onderzoek:

1. Een goede onderzoeksvraag formuleren
2. Data verzamelen
3. Data verwerken
4. Een antwoord formuleren

Concrete, aansprekende onderzoeksvragen worden aangereikt met verwijzingen naar websites waar leerlingen extra informatie kunnen vinden. Vandervieren geeft een gouden grondregel voor het klassengesprek. Laat vooral leerlingen aan het woord bij het interpreteren van gegevens en het trekken van conclusies. Leerlingen leren van elkaar, van hun eigen fouten en van elkaars fouten.

## Google Forms

Hoofdstuk 3 is een uitgebreide handleiding Google Forms met concrete opdrachten. Aanvullend op de tekst, kun je de screencasts bekijken. De screencasts kun je leerlingen individueel laten bekijken terwijl ze met de opdrachten bezig zijn. De rustige toonzetting is daar een voordeel. Vandervieren behandelt de verschillende manieren van vragen stellen en besteedt ook aandacht aan het gevoelige onderwerp privacy. Ik kan iedereen aanraden om zelf een enquête te maken en die af te nemen in een klas. Met het boek in de hand, heb ik in de toetsweek snel een enquête rond doen gaan in havo 4 ter evaluatie van de wiskundetoets en hun voorbereiding op die toets.

## Werken met Excel

Hoofdstuk 4 is een lang hoofdstuk over het werken met Excel. In het boek staat een code die toegang geeft tot een website met een aantal datasets om oefeningen mee te doen. Ook hier krijgt de lezer concrete doe-opdrachten. Het boek legt alles rustig uit en wie wil kan het rustig bekijken in de screencast. Het gedoe met Nederlandstalige of Engelstalige versie van Excel is ondervangen door beide talen te vermelden, bijvoorbeeld SOM / SUM en AANTAL.ALS / COUNTIF. Wanneer je al veel gedaan hebt met Excel, dan staat er weinig nieuws. Toch is ook dan het boek zinvol omdat het basaal blijft bij wat de leerling minimaal moet weten zonder uitweidingen met slimme trucs. Voor de docent die nog onwennig met deze onderwijsvernieuwing kennismaakt, is het boek fantastisch want stap voor stap worden de essentiële opties van Excel doorgenomen.
Van alles komt langs: frequentietabellen, cirkeldiagrammen, staaf- en lijndiagrammen, et cetera. Opvallend is dat de boxplot ontbreekt. Navraag leert dat de boxplot niet bij het nieuwe curriculum voor de eerste graad (onze klas 1 en klas 2) hoort, maar net als in Nederland vast een plaatsje zal krijgen in de tweede of derde graad (onze bovenbouw). In oude versies van Excel was het een heel gedoe om een boxplot te maken, maar sinds Excel 2013 is de boxplot een standaard grafiek. De dotplot krijgt in het boek veel aandacht. Praktisch punt is dat Excel de dotplot (nog) niet als standaardgrafiek aanbiedt. Typerend voor de stijl van Vandervieren is om er geen probleem van te maken. Met het boek in de hand maak je snel een dotplot van je favoriete zanger. Op de dots komen eerst ronde cirkels en even later de foto's van favoriete zangers. Dankzij Straf in Statistiek weet de lezer hoe Billie Eilish en Taylor Swift eruitzien. Kortom, van iets wat niet kan, maakt Vandervieren iets leuks wat wel kan. Het zou mooi zijn als we die vrolijkheid op onze leerlingen kunnen overdragen. Naast het boek staan er in de SoapBox weer allemaal screencasts die uitleggen hoe je een opdracht met Excel kunt maken. Nogmaals, ik zou ervoor kiezen om leerlingen de screencasts te laten bekijken (en beluisteren met oortjes) terwijl ze de opdracht maken. Ze kunnen dan zelf bepalen hoe en wanneer ze die willen kijken (bijvoorbeeld op snelheid 150%).

## Inzicht stimuleren

Het boek sluit af met een kort vijfde hoofdstuk onder de titel 'Inzicht van leerlingen stimuleren'. Verschillende zaken worden besproken. Eerst komt het rekenkundig gemiddelde aan bod. Het beeld van een wip wordt aangereikt om het begrip te visualiseren. Aansluitend gaat het om de vraag wanneer het wel en wanneer het niet zinvol is om het gemiddelde uit te rekenen, bijvoorbeeld wel bij leeftijden, niet bij postcodes. Zo wordt het verschil benoemd tussen kwalitatieve en kwantitatieve variabelen, tussen nominaal en ordinaal en tussen ratioschaal en intervalschaal.

## Conclusie

Kort samengevat zijn er twee redenen waarom ik dit boek wil aanraden. Allereerst helpt het boek om als docent de stap te zetten naar digitale tools als Google Forms en Excel waar leerlingen later nog wat aan kunnen hebben, bijvoorbeeld tijdens hun profielwerkstuk, hun vervolgopleiding of hun werk. Ten tweede is het boek een geslaagd voorbeeld van een mix van boek, QR-codes die linken naar handige websites, screencasts en opdrachten.

## Over de recensent

Henk Hietbrink gaf vorig schooljaar wiskunde op het Hermann Wesselink College in Amstelveen. Momenteel doet hij onderzoek naar de wiskunde van Simon Stevin, (Vestingbouw en Interest), schrijft daarover op zijn website www.fransvanschooten.nl en verzorgt workshops over zonnewijzers en muqarnas.
E-mailadres: *hietbrink.h@planet.nl*

Dédé de Haan

# OnderbouwWiskundeDag 2020: Hitte in de stad

## Inleiding

De Onderbouw Wiskunde Dag (OWD) is een van de drie activiteiten van 'Wiskunde in teams' die door het Freudenthal Instituut georganiseerd worden; de andere twee zijn de Wiskunde A-lympiade en de Wiskunde B-dag. De OWD is de jongste variant van dit drietal, en wordt sinds 2012 georganiseerd voor havo-vwo3.
In teams van drie of vier leerlingen wordt een dag lang gewerkt aan een grote opdracht, waarbij een beroep wordt gedaan op vaardigheden als probleemstelling herkennen en begrijpen, strategie bepalen, redeneren en argumenteren, samenwerken, communiceren en presenteren – kortom: wiskundige denkactiviteiten.
Dit schooljaar hadden 35 scholen zich opgegeven om mee te doen. Niet alle scholen zenden dan daadwerkelijk het 'beste werkstuk' van de school in om mee te dingen naar een prijs; soms komt dat doordat ze de OnderbouwWiskundeDag niet op de wedstrijddag organiseren, soms doordat de organiserende docent de werkstukken niet voldoende wedstrijdkwaliteit vindt hebben. Dat laatste speelde dit jaar een grotere rol dan andere jaren: het gevraagde product was deze keer geen geschreven werkstuk, maar een filmpje! Van tien scholen hebben we uiteindelijk een filmpje, inclusief onderbouwing, ontvangen.

## OnderbouwWiskundeDag 2020

De opdracht van dit jaar behelsde het maken van een plan voor een gemeente die nieuwe woningen wil bouwen in een wijk in aanbouw. Hierbij was de plattegrond geleverd, met een school, een aantal woningen, pleinen, water, groen en nog onbebouwde stukken.
Het grote probleem in zo'n stadswijk is dat er door het vele bouwen steeds meer verharde gebieden komen (straten, tegels in de tuin, pleinen, parkeerplaatsen) en die stenen houden de hitte langer vast; dit wordt het 'hitte-eilandeffect' genoemd. In grote steden is het daardoor gemiddeld 3°C tot soms wel 8°C warmer dan in de rest van het land. De gemeente wil de wijk dan ook groener maken, om het hitte-eilandeffect te verkleinen. De vraag van de gemeente was: 'Hoe bouw je in de wijk tweehonderd aantrekkelijke nieuwe woningen voor gezinnen, en zorg je er tegelijkertijd voor dat de wijk groen blijft en het "hitte-eilandeffect" zo klein mogelijk wordt?'
De leerlingen voerden hiertoe eerst twee deelonderzoeken uit: een naar het koelen met groen en schaduw, en een naar het koelen met water. De opdracht was om het uiteindelijke plan dat voor de wijk gemaakt werd te presenteren in de vorm van een promotiefilmpje, waarbij duidelijk gemaakt moest worden op wat voor gronden de voorstellen gedaan werden.

*figuur 1 Hitte in de stad. Bron: 'New Park Life' foto: Andy Howell (licentie: CC BY-NC 2.0)*

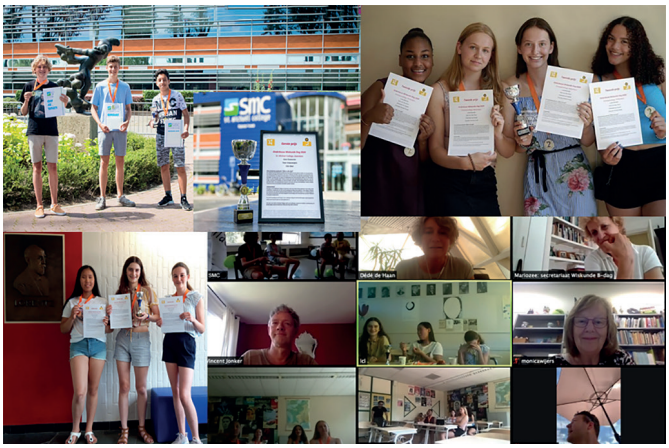
## De inzendingen

Als een school meedoet met de wedstrijd (je bent overigens niet verplicht om mee te doen met de wedstrijd als je je opgeeft voor de OnderbouwWiskundeDag) dan wordt het beste product van de school ingestuurd. Een jury van vijf OWD-commissieleden bepaalt dan een volgorde; nummer 1, 2 en 3 krijgen een prijs. Dit jaar waren er, zoals al eerder vermeld, tien inzendingen.
Zoals ieder jaar was er ook een inzending vanuit Caribisch Nederland, van het Milton Peters College op St. Maarten. De filmpjes waren divers, en creatief: het team van SG St. Ursula uit Horn had de wijk nagebouwd in *Minecraft*; door de teams van het Trinitas Gymnasium uit Almere en het Stedelijk Gymnasium Utrecht werden toneelvoorstellingen opgevoerd. De jury heeft met ontzettend veel plezier alle filmpjes bekeken – en moest toen ook gaan oordelen.
Dat was een stuk moeilijker dan van tevoren was bedacht. Gekeken is naar de presentatie, de duidelijkheid ervan, de creativiteit in de aangedragen oplossingen om het hitte-eilandeffect tegen te gaan, de correctheid van de berekeningen en de onderbouwing van de keuzes.
De derde prijs is gewonnen door het team van het Lorentz Casimir Lyceum uit Eindhoven; de tweede prijs is gewonnen door het Emmauscollege uit Rotterdam en de eerste prijs door het St. Michaëlcollege uit Zaandam.

> "Het team van SG St. Ursula uit Horn had de wijk nagebouwd in *Minecraft*"

## De prijsuitreiking

De jury stelt de prijswinnaars vast en neemt vervolgens contact op met de docenten die de producten hebben ingestuurd. Dan wordt een afspraak gemaakt wanneer de prijs (beker, juryrapporten en medailles) uitgereikt wordt door één van de juryleden. Meestal gebeurt dit tijdens een lesuur, regelt de school lokale pers en soms een extra cadeautje of een traktatie.
Dit jaar was de situatie anders: de scholen gingen eerst dicht vanwege corona, en na 1 juni weer mondjesmaat open. De jury heeft zo lang mogelijk gewacht met het maken van afspraken met de prijswinnaars, met als doel fysiek de prijs uit te kunnen reiken – totdat bleek dat dit geen haalbare kaart meer was in schooljaar 2019-2020.
De prijsuitreiking die we toen hebben georganiseerd bleek echter een schot in de roos! Het werd een gecombineerde fysieke/online prijsuitreiking, waarbij de verschillende teams op hun eigen school waren, met hun docent(en), en een onlineverbinding. De juryleden zaten ieder op hun eigen (thuis)werkplek. In een Zoom-meeting waren de juryleden en de verschillende scholen verzameld.
De leerlingen wisten niet of ze eerste, tweede of derde waren geworden; hun docenten echter wel. De docenten hadden van tevoren de beker, de medailles en de jury-rapporten toegestuurd gekregen – dus toen de voorzitter van de jury na de inleidende woorden de uitslag mededeelde, en de juryrapporten voorlas, kregen de betreffende leerlingen ook daadwerkelijk de juryrapporten en medailles van hun docent.



*figuur 2 Linksboven: Michaëlcollege, Zaandam rechtsboven: Emmauscollege, Rotterdam linksonder: Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven*

## Nieuwsgierig geworden?

De tiende OnderbouwWiskundeDag vindt dit schooljaar plaats op 10 februari 2021. Je kunt je opgeven via *https://wiskundeinteams.sites.uu.nl/*.
Wil je liever (eerst) een wat kleinere opdracht doen? Kijk dan in *Euclides* 96-1 op pagina 39 bij het WiTje. Een WiTje is een aangepaste versie van een grotere Wiskunde in Teams-opdracht die in één lesuur te maken is.


## Over de auteur

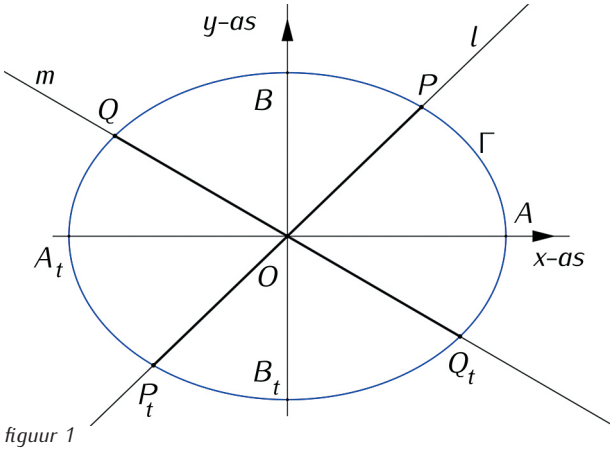
Dédé de Haan is werkzaam als lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool en als ontwikkelaar van wiskundeonderwijs bij het Freudenthal Instituut. Dédé is lid van zowel de OWD- als de A-lympiade-commissie.

Dick Klingens

# Over een eigenschap van een ellips

Dick Klingens beschrijft constructies met passer en liniaal met behulp van de *toegevoegde middellijnen* van een ellips.

## Inleiding




*figuur 1*

In figuur 1 zijn in een rechthoekig $xOy$-assenstelsel weergegeven:

- een ellips $\Gamma$ met vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;
- de lijnen $l$, $m$ die beide door het middelpunt $O$ van de ellips gaan;
- de toppen van de ellips: $A$, $A_t$, $B$, $B_t$ met $OA = a$, $OB = b$;
- de snijpunten[1] van $\Gamma$ met $l$, $m$: $\Gamma \,\&\, l = \{P, P_t\}$, $\Gamma \,\&\, m = \{Q, Q_t\}$.

De lijnstukken $PP_t$ en $QQ_t$ worden *middellijnen* van de ellips genoemd – analoog aan hetzelfde begrip bij de cirkel: het zijn koorden door het middelpunt. Ik val nu maar direct in huis met een definitie:

**Definitie.** Twee middellijnen $PP_t$, $QQ_t$ van een ellips heten *toegevoegde middellijnen* als voor de richtingscoëfficiënten (rico's) van de dragers $l$, $m$ van die middellijnen geldt: $\text{rico}(l) \cdot \text{rico}(m) = -b^2/a^2$.

In hetgeen volgt zal onder meer een constructie met passer en liniaal (met p&l) worden besproken waarmee, bij gegeven lijnstukken $OP$ en $OQ$, de halve grote as $OA$ en de halve kleine as $OB$ van de ellips kunnen worden gevonden.
Ik merk nog op dat met de lijnstukken $OP$ en $OQ$ – die ook wel *toegevoegde stralen* worden genoemd – tevens de middellijnen $PP_t$ en $QQ_t$ vastliggen.

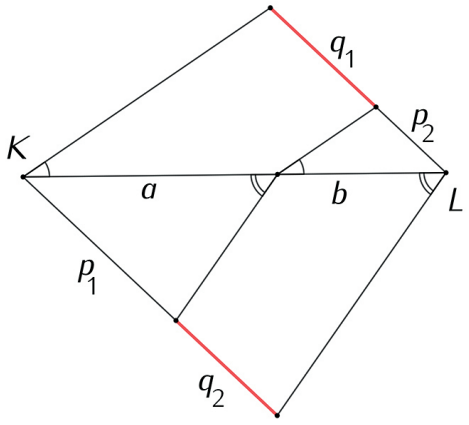
## Gegeven: de ellips en een punt erop

Als de ellips $\Gamma$ gegeven is in een coördinatenstelsel en als het punt $P$ op $\Gamma$ ligt, dan kunnen de coördinaten van het punt $Q$ uitgedrukt worden in die van $P$ als $OP$ en $OQ$ toegevoegde stralen van $\Gamma$ zijn. Er geldt namelijk:

**Stelling 1.** Is in een $xOy$-assenstelsel een ellips $\Gamma$ gegeven met de vergelijking $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ligt het punt $P = (p_1, p_2)$ op $\Gamma$ en is $Q$ het op $\Gamma$ liggende eindpunt van de toegevoegde straal $OQ$ van $OP$, dan is voor de coördinaten $(-q_1, q_2)$ van het punt $Q$ (zie figuur 1):[2]
$q_1 = a/b \cdot p_2$, $q_2 = b/a \cdot p_1$

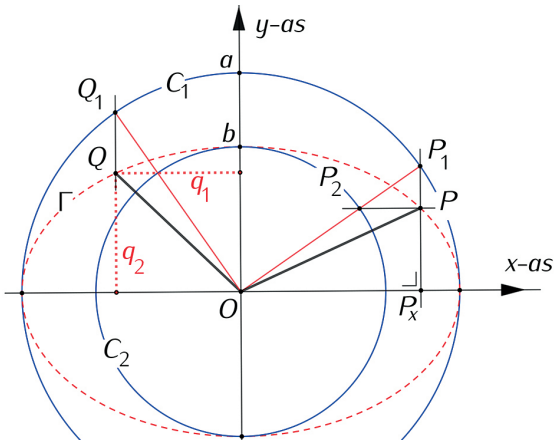
Het bewijs van stelling 1 staat in paragraaf 1 in de appendix bij dit artikel.[3]

De p&l-constructie van de coördinaten van het punt $Q$ volgt nu eenvoudig uit twee evenredigheden die gebaseerd zijn op de in stelling 1 genoemde relaties:
$b : a = p_2 : q_1$, $a : b = p_1 : q_2$
In figuur 2 is de (gebruikelijke) constructie van lijnstukken met lengtes $q_1$, $q_2$ uitgevoerd, uitgaande van een lijnstuk $KL$ met lengte $a + b$, en lijnstukken met lengtes $p_1$, $p_2$.




*figuur 2*

Zoals bekend is het met p&l construeren van een kegelsnede *alleen puntsgewijs* mogelijk. Voor de constructie van een punt van de ellips (in casu het punt $P$) kies ik een *loodrechte lijnvermenigvuldiging*[4] van de cirkel $C_1$ (middelpunt $O$) met straal $a$ ten opzichte van de $x$-as met factor $b/a$. Zie daartoe figuur 3, waarin de lengte van de straal van de cirkel $C_2$ (middelpunt $O$) gelijk is aan $b$ (hier met $b < a$).
Ik zal laten zien dat bij die lijnvermenigvuldiging (het woord 'loodrechte' laat ik in hetgeen volgt maar weg) een cirkel inderdaad wordt afgebeeld op een ellips.




*figuur 3*

In de appendix (paragraaf 4)[3] toon ik aan, dat deze afbeelding (met een factor kleiner dan 1) overeenkomt met een *orthogonale projectie* van een cirkel in de 3-dimensionale euclidische ruimte op een vlak.

De vergelijking van $C_1$ is $x^2 + y^2 = a^2$; daarop ligt het punt $P_1$. Met[5] $x(P_1) = x_1$, $y(P_1) = y_1$ geldt dan:
$x_1^2 + y_1^2 = a^2$ (1)

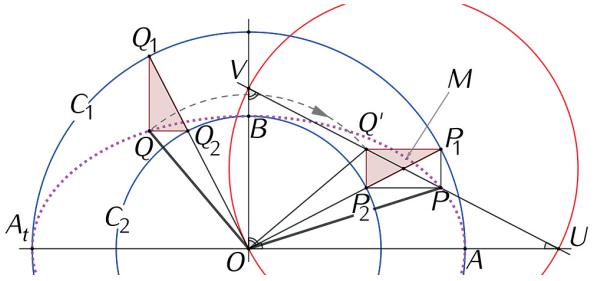
Het punt $P$ is het beeld van $P_1$ bij de bedoelde lijnvermenigvuldiging. Met $x(P) = x$, $y(P) = y$ is nu:

$$\begin{cases} x(P) = x(P_1) \Rightarrow x_1 = x \\ y(P) = b/a \cdot y(P_1) \Rightarrow y_1 = a/b \cdot y \end{cases} \qquad (2)$$

Immers, in driehoek
$OP_xP_1$ is $P_1P_x : PP_x = P_1O : P_2O$ of $y_1 : y = a : b$.
Uit (1) en (2) volgt dan door substitutie de vergelijking van de *meetkundige plaats* van het punt $P$ als $P_1$ de cirkel $C_1$ doorloopt:
$x^2 + (a/b)^2 \cdot y^2 = a^2$ of $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
En dit is inderdaad de vergelijking van Γ.
**Gevolg** (van stelling 1). Het punt $Q$ in figuur 3 is uiteraard ook het beeld van een punt van $C_1$ bij de onderhavige lijnvermenigvuldiging, namelijk van $Q_1$. Voor het product van de rico's van $OP$, $OQ$ geldt (per definitie):
$\text{rico}(OP) \cdot \text{rico}(OQ) = -b^2/a^2$.
Nu is $\text{rico}(OP_1) = a/b \cdot \text{rico}(OP)$, $\text{rico}(OQ_1) = a/b \cdot \text{rico}(OQ)$, zodat:
$\text{rico}(OP_1) \cdot \text{rico}(OQ_1) = a^2/b^2 \cdot -b^2/a^2 = -1$
De lijnstukken $OP_1$ en $OP_2$ (stralen van $C_1$) staan dus in $O$ loodrecht op elkaar. En, het omgekeerde is eveneens juist.

## Gegeven: twee toegevoegde stralen van een ellips

Ik merk allereerst op dat het werken met coördinaten ten behoeve van een p&l-constructie, zoals in de vorige paragraaf, niet mogelijk is als alleen twee toegevoegde stralen van een ellips in ligging en grootte gegeven zijn. In de nu volgende theoretische voorbehandeling (de analyse) van de constructie zal ik echter wél gebruik maken van de halve assen.




*figuur 4*

In figuur 4 is de straal van cirkel $C_1$ gelijk aan $a$ en die van $C_2$ gelijk aan $b$. Voorts zijn er twee onderling loodrechte lijnen door $O$ getekend: $OA$, $OB$; dit zijn de (symmetrie)assen van de ellips. >

De punten $P$, $Q$ van de ellips zijn de beelden van de punten $P_1$, $Q_1$ (op cirkel $C_1$) bij de lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de lijn $OA$ (de drager van een middellijn van $C_1$).

De lijnstukken $OP_1$ en $OP_2$ zijn zo gekozen dat ze loodrecht op elkaar staan. Op grond van het gevolg van stelling 1 zullen $OP$ en $OQ$ dan toegevoegde stralen van de ellips zijn.
De in $Q$ rechthoekige driehoek $QQ_1Q_2$ ($Q_2$ op cirkel $C_2$) wordt geroteerd in wijzerrichting (over -90°) met $O$ als centrum. Het beeld van die driehoek is driehoek $Q'P_1P_2$ ($P_2$ op cirkel $C_2$).
Verder is $PQ'$ & $OA = U$ en $PQ'$ & $OB = V$. Dan is vierhoek $PP_1Q'P_2$ een rechthoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn met de assen van de ellips. Daardoor maakt de lijn $UV$ dezelfde hoeken met de assen van de ellips als de lijn $OP_1$ (beide zijn drager van een diagonaal van de rechthoek). Dan is, en zie de *gelijkbenige* trapezia $OP_2Q'V$ en $OUPP_2$:
$OP_1 = \boldsymbol{a} = OP_2 + P_2P_1 = \boldsymbol{b} + Q'P =$
$VQ' + Q'P = \boldsymbol{VP}$
$OP_2 = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{UP}$
Ik formuleer nu, deels op grond van wat hierboven is gevonden:

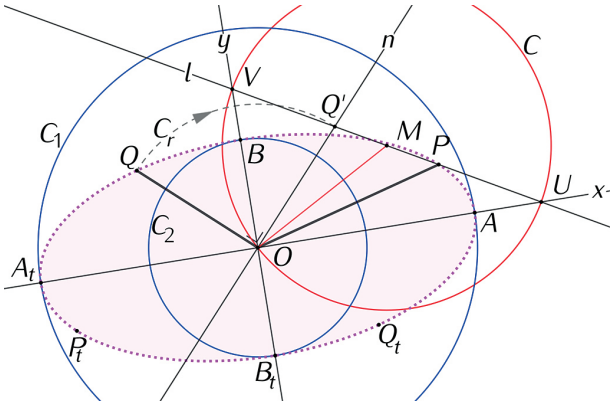
**Stelling 2.** Zijn $OP$ en $OQ$ toegevoegde stralen van een ellips (met halve assen $a$ en $b$), is $Q'$ het beeld van $Q$ bij een rotatie om $O$ over -90° en is $M$ het midden van $PQ'$, dan snijdt de lijn $PQ'$ de cirkel met middelpunt $M$ en straal $MO$ in de punten $U$ en $V$ (zie figuur 4), waarbij $VP = a$ en $UP = b$.

**Bewijs.** Voor de punten $U$, $V$ op de lijn $PQ'$ geldt dan $VP > UP$. Verder is $VQ' = OP_2 = UP$ (zie de genoemde trapezia), zodat het midden $M$ van het lijnstuk $PQ'$ ook het midden is van het lijnstuk $UV$. Met andere woorden: $M$ is het middelpunt van de omcirkel van de (in $O$ rechthoekige) driehoek $OUV$.

Tot zover de theoretische aanloop naar de hierna volgende p&l-constructie.

## De constructie van Rytz

Geheel conform stelling 2 kunnen de grote en de kleine as van een ellips met p&l worden geconstrueerd als *alleen* twee toegevoegde stralen $OP$ en $OQ$ gegeven zijn; zie figuur 5.




*figuur 5*

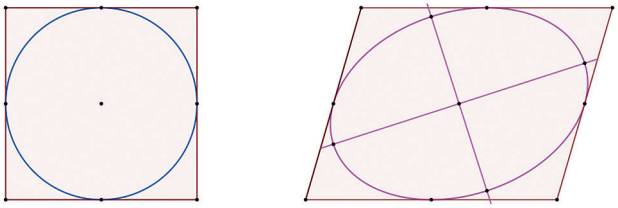
Constructiestappen bij de in ligging en grootte gegeven lijnstukken $OP$ en $OQ$. [6]

1. Loodlijn($O$, $OQ$) = $n$
2. Cirkel ($O$, $Q$) = $C_r$ // t.b.v. de rotatie.
3. $C_r$ & $n = Q'$
4. Midden($P$, $Q'$) = $M$
5. Lijn($P$, $Q'$) = $l$
6. Cirkel($M$, $O$) = $C$
7. $C$ & $l = \{U, V\}$
8. Passer($VP$, $O$) = $C_1$ ; Passer($UP$, $O$) = $C_2$
9. Lijn($O$, $U$) = $x$ ; Lijn($O$, $V$) = $y$ // dit zijn de assen van de ellips.
10. $C_1$ & $x = \{A, A_t\}$ ; $C_2$ & $y = \{B, B_t\}$ // dit zijn de toppen van de ellips.

De ellips is nu bepaald door vijf van de zes (acht) punten $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $P$, $Q$, ($P_t$, $Q_t$).
Deze constructie, die voor het eerst gepubliceerd is in 1845, is vernoemd naar de Zwitserse wiskundige David Rytz von Brugg (1801–1868).

## Het waarom?

Het antwoord op die vraag is natuurlijk niet alleen 'Vanwege de wiskunde!'. Het met p&l construeren van een ingeschreven cirkel in een vierkant kost minder dan een cent: construeer het midden van twee geschikte lijnstukken en je hebt het middelpunt en een raakpunt van die cirkel, zie figuur 6 (links). Het tekenen (want met p&l écht construeren gaat immers niet) van een ingeschreven ellips van een parallellogram, zie figuur 6 (rechts), waarin ook de assen van het parallellogram zijn weergegeven, kost toch wel iets meer!

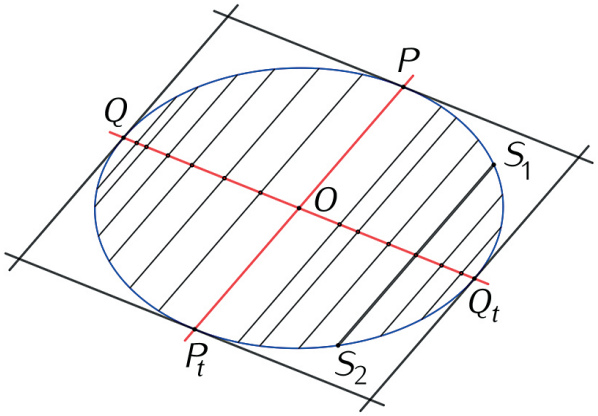


*figuur 6*

Maar, een eigenschap van twee toegevoegde middellijnen van een ellips kan bij dit laatste uitkomst bieden, namelijk:

**Stelling 3.** De meetkundige plaats van de middens van de koorden van een ellips die evenwijdig zijn met een middellijn van die ellips, is de aan die middellijn toegevoegde middellijn, zie figuur 7.

Een analytisch bewijs van deze stelling staat in de appendix (in paragraaf 2).[3]




*figuur 7*

In figuur 7 zijn ook de raaklijnen in de eindpunten van beide toegevoegde middellijnen $PP_t$ en $QQ_t$ weergegeven. Deze zijn uiteraard (?) evenwijdig met de betreffende middellijn.[7]

**Een slotopdracht.** Construeer met p&l de assen van een ingeschreven ellips in een gegeven parallellogram. Hierbij merk ik op, dat er natuurlijk méér ingeschreven ellipsen zijn dan die ene die kan worden 'gevonden' met de constructie van Rytz.[8]

Voor de appendix bij dit artikel:

*vakbladeuclides.nl/963klingens*

## Noten

[1] In hetgeen volgt betekent $u$ & $v = \{X, Y\}$: de punten $X$ en $Y$ zijn de snijpunten van de meetkundige objecten $u$ en $v$; $u$ & $v = X$ betekent: $X$ is een/het snijpunt van $u$ en $v$.

[2] De algemene geldigheid van de stelling wordt geen geweld aangedaan door te stellen dat $p_1, p_2 > 0$ en ook $q_1, q_2 > 0$.

[3] Voor de appendix bij dit artikel: *vakbladeuclides.nl/963klingens*

[4] Een lijnvermenigvuldiging behoort tot de klasse van affiene afbeeldingen van het euclidische vlak op zichzelf. Zie voor een beschouwing daarvan bijvoorbeeld: *http://www.pandd.demon.nl/promeet/affien.htm#41*

[5] Met $x(U)$ c.q. $y(U)$ wordt in hetgeen volgt bedoeld: de $x$-coördinaat van het punt $U$ c.q. de $y$-coördinaat van het punt $U$.

[6] De functies die in de constructiestappen worden gebruikt, komen in het algemeen overeen met functies die zijn opgenomen in computer-tekenprogramma's, zoals GeoGebra. Na // staat commentaar bij de constructiestap. Zie: *https://www.geogebra.org*.

[7] Zie opmerking 2 bij stelling 3 in paragraaf 2 van de appendix.

[8] In de appendix (paragraaf 5) staat een eenvoudiger methode om punten van een in een parallellogram ingeschreven ellips te construeren. Die methode is gebaseerd op een orthogonale projectie, waarvan een korte inleiding staat in paragraaf 4 van die appendix.

## Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides*. Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook actuarieel rekenaar, wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Van 2005 tot 2012 was hij lid-deskundige van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*
website: *http://www.pandd.nl*

Gerard Koolstra

# Waardevolle producten I

Door polynomen als productvormen te schrijven ontstaan er verrassende ontdekkingen. Gerard Koolstra brengt ze systematisch in kaart in een driedelige serie.

## Inleiding

Het is in het voorgezet onderwijs gebruikelijk om kwadratische functies te noteren als de som van machten.
Vormen als $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ komen vaker voor dan bijvoorbeeld $f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$, de vorm met afgesplitst kwadraat, of $f(x) = 3(x + 2)(x - 4)$, de *productvorm*.
Dit geldt algemener:
Notaties van de vorm $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ zijn populair, vooral als het gaat om opgaven waarbij toppen of raaklijnen een rol spelen. Dat is ook begrijpelijk: de somregel voor differentiëren is heel wat eenvoudiger dan de productregel.
Toch is het soms de moeite waard om de productvorm intact te laten en niet meteen uit te werken tot een som van machten. Dit kan, zoals we zullen zien, van pas komen bij het ontwerpen van 'mooi uitkomende' oefen- of toetsopgaven rond veeltermfuncties, en levert wellicht hier en daar een ontdekking op.

## Eerstegraads functies

Wanneer het gaat om *lineaire* functies zijn de vormen $ax + b$ en $a(x - p)$ eenvoudig uitwisselbaar. De tweede vorm laat direct het snijpunt met de $x$-as zien: $(p, 0)$, en om die reden zullen we ook vooral $y = a(x - p)$ gebruiken als het gaat om een lijn door $(p, 0)$, en $y - q = a(x - p)$ of $y = a(x - p) + q$ voor lijnen door $(p, q)$. Om complicaties te voorkomen stellen we steeds als eis dat $a$ ongelijk aan 0 is.

## Tweedegraads functies

Bij *tweedegraads* functies heeft het herschrijven van $ax^2 + bx + c$ als $a(x - p)(x - q)$, met $a \neq 0$, vaak iets meer voeten in de aarde, zeker als $p$ en/of $q$ niet geheel zijn.
De tweede vorm laat direct zien wat de nulpunten[1] zijn: $p$ en $q$. Uiteraard heeft niet elke tweedegraadsfunctie reële nulpunten, via een verticale verschuiving kunnen we daar wel voor zorgen.
Ik beperk me tot $y = a(x - p)(x - q)$, met $p$ en $q$ geheel, althans rationaal. De resultaten zijn eenvoudig te generaliseren, zoals we zullen zien.
Het differentiëren van $y = a(x - p)(x - q)$ is iets lastiger dan $y = ax^2 + bx + c$, maar met de productregel is dat goed te doen:

$$y' = a \cdot 1 \cdot (x - q) + a(x - p) \cdot 1 =$$
$$a(2x - p - q) = 2a(x - \tfrac{p+q}{2}) \qquad [1]$$

Vooral de laatste vorm laat goed zien waar een maximum of minimum optreedt, namelijk voor $x = \frac{p+q}{2}$, het gemiddelde van $p$ en $q$.
De waarde van dit maximum of minimum (oftewel de $y$-coördinaat van de top) is ook goed uit te drukken in $p$ en $q$ , een kwestie van $\frac{p+q}{2}$ substitueren voor $x$ in $y = a(x - p)(x - q)$.

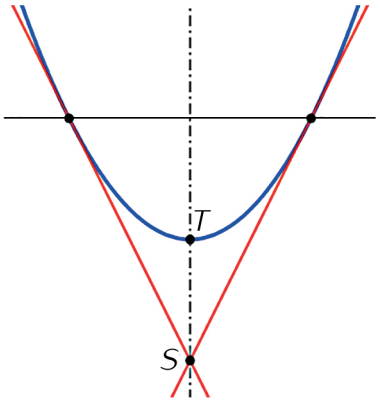
Ga na dat $\frac{p+q}{2} - p = \frac{p+q-2p}{2} = \frac{q-p}{2}$ en

$\frac{p+q}{2} - q = \frac{p+q-2q}{2} = \frac{p-q}{2}$. Dit geeft:

$$y_T = a(\tfrac{q-p}{2})(\tfrac{p-q}{2}) = -a\left|\tfrac{p-q}{2}\right|^2 = -\tfrac{a}{4}\left|p-q\right|^2 \qquad [2]$$

$|p - q|$ is uiteraard de afstand tussen beide snijpunten met de $x$-as, en $\left|\frac{p-q}{2}\right|$ de afstand tussen een van genoemde snijpunten en de symmetrieas.
Toegepast op $y = 3(x + 2)(x - 4)$ geeft dat als $y$-waarde voor de top: $-\frac{3}{4} \cdot 6^2 = -27$.
Als we de parabool één eenheid naar links verplaatsen is de uitkomst snel te controleren: $y = 3(x + 3)(x - 3) = 3(x^2 - 9)$ heeft als (absoluut) minimum -27 voor $x = 0$.

De raaklijnen in de snijpunten met de $x$-as zijn vrij eenvoudig op te stellen:
Volgens [1] geldt: $f'(x) = a(2x - p - q)$. Substitutie van $x = p$ geeft: $f'(p) = a(p - q)$. Substitutie van $x = q$ zal gezien de symmetrie precies het tegengestelde opleveren: $f'(q) = a(q - p)$.
De raaklijn door $(p, 0)$ kunnen we dus schrijven als $y = a(p - q)(x - p)$.
De raaklijn door $(q, 0)$ wordt dan $y = a(q - p)(x - q) = -a(p - q)(x - p)$.
Voor het snijpunt geldt uiteraard dat $x_S = \frac{p+q}{2}$.
De $y$-coördinaat volgt weer door invullen:
$y_S = a(p - q)(\frac{q-p}{2}) = -\frac{a}{2}(p - q)(p - q) = -\frac{a}{2}|p - q|^2$. [3]
Als we dit vergelijken met [2], dan zien we dat de top van de parabool precies midden tussen dit snijpunt en de $x$-as zit. Dit is misschien nog wat beter in te zien door de parabool horizontaal zo te verschuiven dat de top op de $y$-as ligt. Gemakshalve nemen we ook $a = 1$.
We krijgen dan: $y = (x - p)(x + p) \leftrightarrow y = x^2 - p^2$ met top $(0, -p^2)$. De lijn door $P(p, 0)$ en $T(0, -p^2)$ heeft dus als richtingscoëfficiënt: $p$.
Uiteraard geldt nu $y' = 2x$. Dat levert voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn door $P(p, 0)$: $2p$.
Hieruit volgt eenvoudig dat $S$ precies twee keer zover van de $x$-as ligt als $T$, zie figuur 1.
Als de parabool de $x$-as niet snijdt kunnen we de $x$-as vervangen door een willekeurige horizontale lijn die de parabool wel snijdt.




*figuur 1*

## Voorbeeld

$f(x) = -x^2 + 3x - 4$
De grafiek van $f$ ligt geheel onder de $x$-as. Als we de grafiek vier eenheden omhoog schuiven krijgen we $g(x) = -x^2 + 3x = -x(x - 3)$.
We weten uit [2] en [3] dat de raaklijnen door (0; 0) en (3; 0) elkaar snijden (op de symmetrieas x = 1½) op hoogte 4½, en de top op hoogte 2¼ zit. Terug verschuiven geeft als snijpunt van de raaklijnen door (0, -4) en (3, -4) het punt (1½, ½), en als top (1½, -1¾).

## Derdegraads functies

Interessanter wordt het bij derdegraadsfuncties. We gaan uit van $f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$, met a ≠ 0. Voor de goede orde: niet alle derdegraads functies zijn zo te schrijven als we uitgaan van reële waarden voor $p$, $q$, en $r$. Ook niet na verticale verschuiving.
De grafiek bij $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$ bijvoorbeeld, snijdt elke horizontale lijn in slechts één punt. De grafiek is overal stijgend, wat eenvoudig kan worden geverifieerd met de afgeleide $f'(x) = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$.
Deze grafiek heeft geen toppen.
Alle derdegraads functies *met twee toppen* zijn (wel) via een verticale verschuiving te herleiden tot de vorm:
$f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$.
We kunnen er ook voor zorgen dat zo'n grafiek maar één gemeenschappelijk punt met de $x$-as heeft. Als geldt $p = q = r$, dan krijgen we $f(x) = a(x - p)^3$. In dat geval is het punt $(p, 0)$ buigpunt, met een horizontale raaklijn.

Zoals gezegd is het uitgangspunt:
$f(x) = a(x - p)(x - q)(x - r)$.
Met de productregel is de afgeleide goed te berekenen, maar wat lastiger te vereenvoudigen:
$f'(x) = a[(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)]$. [4]
In het algemeen zijn de punten met horizontale raaklijn niet zo eenvoudig te zien. Bij een grafiek van een derdegraads functie zitten de toppen niet precies halverwege tussen twee naburige snijpunten met de $x$-as.
We komen hier later op terug.

## Buigpunt

Het buigpunt van de grafiek is wel eenvoudig te berekenen met behulp van de drie, niet noodzakelijk verschillende nulpunten. Gemakshalve spreken we af: $k = \frac{p+q+r}{3}$. Het punt $B(k,f(k))$ is het buigpunt van de grafiek. Het ligt voor de hand voor het bewijs de tweede afgeleide te gebruiken.
Hoewel een vorm als $(x - q)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x - q)$ mogelijk niet zo uitnodigt tot differentiëren (naar $x$) is het goed te doen. De afgeleide van $(x - q)(x - r)$ is $x - r + x - q = 2x - (r + q)$.
Voor de andere twee termen geldt mutatis mutandis hetzelfde. Dit geeft: (afgezien van een constante factor): $f''(x) = 6x - 2(p + q + r)$. Hieruit volgt dat $f''(x) = 0 \leftrightarrow$

$x = \frac{p+q+r}{3} \leftrightarrow x = k$ >

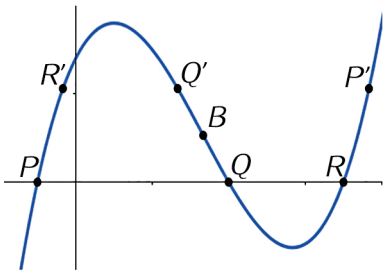
Omdat er in dit geval gegarandeerd tekenwisseling plaatsvindt bij $x = k$, is het ook zeker dat er echt een buigpunt is. De $y$-coördinaat van het buigpunt is uiteraard $f(k) = a(k - p)(k - q)(k - r)$.
We kunnen $k - p$ schrijven als

$\frac{p+q+r}{3} - \frac{3p}{3} = \frac{1}{3}(-2p + q + r)$, en voor $k - q$ en $k - r$ geldt iets dergelijks.
De $y$-coördinaat van het buigpunt is dus uitgedrukt in $p$, $q$, en $r$:

$$y_B = \frac{a}{27}(-2p+q+r)(p-2q+r)(p+q-2r) \qquad [5]$$

Het buigpunt is tevens punt van symmetrie van de grafiek. Een mooie manier om dat te zien, is de grafiek zo te verschuiven dat het buigpunt samenvalt met de oorsprong. Uitgaande van $p < q < r$ betekent dit dat $q = 0$. (Het buigpunt moet dan samenvallen met het middelste snijpunt met de $x$-as) en dat $r = -p$.

(Er moet gelden $\frac{p+0+r}{3} = 0 \leftrightarrow p + r = 0$).
We kunnen dus schrijven $g(x) = ax(x - p)(x + p) = -ax(p - x)(p + x)$. Uit de laatste vorm volgt bijna direct dat $g(-x) = -g(x)$, wat bewijst dat de oorsprong punt van symmetrie is van (de grafiek van) $g$. Als we de grafiek nu weer terug verschuiven over de vector $\begin{pmatrix} k \\ f(k) \end{pmatrix}$ blijft het buigpunt punt van symmetrie.
Op basis van deze symmetrie weten we dat behalve de punten $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ en $R(r, 0)$ ook de punten $P'(2k - p; 2f(k))$ etc. op de grafiek liggen, zie figuur 2.




*figuur 2*

## Voorbeeld

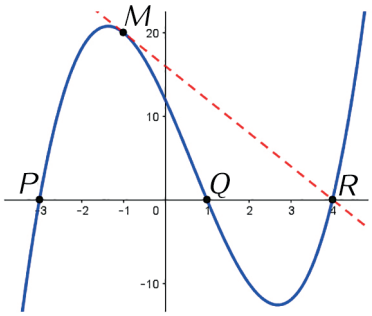
$f(x) = \frac{1}{5}(x + 2)(x - 1)(x - 7)$. $k = \frac{-2+1+7}{3} = 2$ en

$f(k) = \frac{1}{5} \times 4 \times 1 \times -5 = -4$.

Het punt van symmetrie, tevens buigpunt, is dus $B(2, -4)$. De snijpunten met de $x$-as zijn uiteraard $P(-2, 0)$, $Q(1, 0)$ en $R(7, 0)$. Spiegeling in $B(2, -4)$ geeft ook nog $P'(6, -8)$, $Q'(3, -8)$ en $R'(-3, -8)$.

## Middens

Een punt op de grafiek dat even ver van deze twee snijpunten met de $x$-as ligt, is ook interessant. Laten we als voorbeeld eens kijken naar de grafiek bij $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4)$ die de $x$-as snijdt in $P(-3, 0)$, $Q(1, 0)$ en $R(4, 0)$. De middelloodlijn van $PQ$ gaat door $(-1, 0)$, en snijdt de grafiek in het punt $M(-1, 20)$, zie figuur 3.

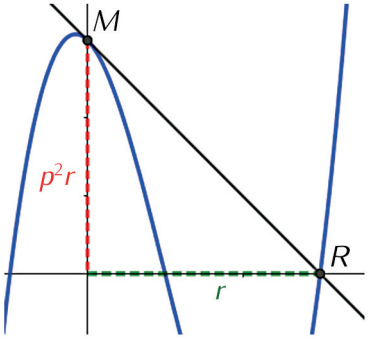



*figuur 3*

Nu geldt
$f'(x) = (x - 1)(x - 4) + (x + 3)(x - 4) + (x + 3)(x - 1)$ en dus $f'(-1) = 10 - 10 - 4 = -4$.
De raaklijn door $M$ kunnen we schrijven als $y - 20 = -4(x + 1) \leftrightarrow y = -4x + 16 \leftrightarrow y = -4(x - 4)$ en snijdt de $x$-as dus precies in $R$!
Om te laten zien dat dit algemeen geldt, is het (weer) handig om de grafiek een stukje te verschuiven. We zorgen dat de middelloodlijn van $PQ$ samenvalt met de $y$-as. Ook zorgen we via verticaal krimpen/rekken ervoor dat $a = 1$.
We kunnen nu schrijven: $f(x) = (x - p)(x + p)(x - r)$. Nu geldt: $f(0) = p^2r$ en dus $M = (0, p^2r)$ en $f'(x) = (x + p)(x - r) + (x - p)(x - r) + (x - p)(x + p) = 2x(x - r) + x^2 - p^2$. Hieruit volgt: $f'(0) = -p^2$.
We zagen eerder al dat

geldt $f(0) = p^2r$ en dus geldt: $f'(0) = \frac{f(0)}{0-r} = -p^2$ en dat

is eigenlijk voldoende om in te zien dat de raaklijn door $R$ gaat, zie figuur 4. We kunnen eventueel de vergelijking van de raaklijn door $M$ schrijven als $y - p^2r = -p^2x$ en dan geeft invullen van $(r, 0)$ bevestiging van wat we eigenlijk al wisten.




*figuur 4*

Het kan uiteraard ook zonder bovenstaande transformaties. Gemakshalve definiëren we $m = \frac{p+q}{2}$, en we gebruiken wat we eerder bij de tweedegraadsfuncties zagen: $m - p = \frac{q-p}{2}$ en $m - q = \frac{p-q}{2} = -(m - p)$.

Hieruit volgt: $(m - p)(m - q) = -(m - p)^2 = -(\frac{p-q}{2})^2 = -\frac{1}{4}|p - q|^2$. Waarbij $|p - q|$ weer de afstand is tussen $P$ en $Q$. Nu hebben we:

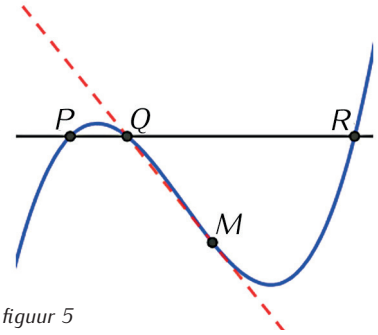
$f'(m) = a[(m - q)(m - r) + (m - p)(m - r) + (m - p)(m - q)] = a[-(m - p)(m - r) + (m - p)(m - r) - (m - p)^2] = -\frac{a}{4} \cdot |p - q|^2$ [6]

en: $f(m) = a(m - p)(m - q)(m - r) = -\frac{a}{4} \cdot |p - q|^2(m - r) = f'(m)(m - r)$ [7]

De raaklijn door $M$ aan de grafiek kan geschreven worden als: $y - f(m) = f'(m)(x - m)$ en dus, zie [7], als $y - f'(m)(m - r) = f'(m)(x - m)$. Voor het snijpunt van deze lijn met de $x$-as geldt $y = 0$ en dus:

$-f'(m)(m - r) = f'(m)(x - m) \leftrightarrow [f'(m) \neq 0] - (m - r) = (x - m) \leftrightarrow r - m = x - m \leftrightarrow x = r$.

Het bewijs laat ook zien dat $M$ niet per se op de middelloodlijn van twee *naburige* snijpunten hoeft te liggen. Figuur 5, waar $M$ op de middelloodlijn van $PR$ ligt, illustreert dit.



*figuur 5*

In deel II komt aan bod: top op de $x$-as, raaklijn door het buigpunt en toppen en nulpunten rationaal. In deel III gaat het over vierdegraads vergelijkingen.

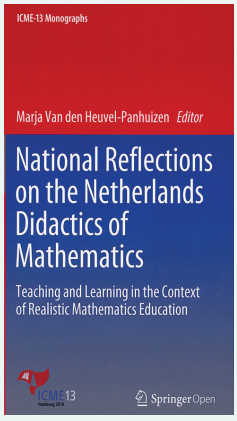
## Noten

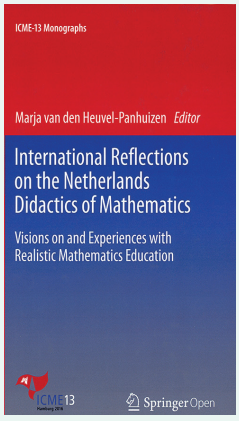
[1] Nulpunten zijn geen punten maar getallen: de oplossingen van $f(x) = 0$.

## Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*

# Verschenen




Tijdens de ICME-13 conferentie (Hamburg, juli 2016) was de Nederlandse aanpak van didactiek van de wiskunde een van de thema's. Daaruit ontstonden deze twee boeken, onder redactie van Marja van den Heuvel-Panhuizen. In de *International Reflections* laten wetenschappers uit vijftien landen zien hoe zij geïnspireerd zijn door de Nederlandse aanpak en wat zij er in hun land mee hebben gedaan. In de *National Reflections* zijn de Nederlandse reken-wiskunde-didactici aan het woord, die je vrijwel allemaal ook kent als auteurs van *Euclides*-bijdragen.

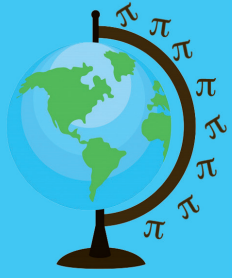
Het zijn 'open access books' ofwel, als pdf te downloaden van de *Euclides*-site.

*vakbladeuclides.nl/963national_reflections,*
*vakbladeuclides.nl/963international_reflections*

# Math between US

# So as not to outrun trust

Jana Dean



**In deze column vertelt Jana Dean over haar ervaringen als wiskundedocent en haar experimenten op een middelbare school in Washington State, USA.**

## 'We make the road by walking'

For a long time the words of activist and educator Myles Horton have hung on my wall: *We make the road by walking*. As I set out to teach 8th grade math in the fall of 2020, I can only see a few steps ahead of me. I teach public school in a small city on the west coast of Washington State. My students are distance learning until Covid transmission wanes. Without being able to see my students as they lope off the school bus to spend the day with me, I will have to trust them to log in and to show up as completely as they can. I will have to invite them to join me for support by phone, and hope that they trust me enough to accept my invitation. I will have to trust that they tell me when they are struggling and they will need to trust me to notice when they falter. Journeying together like this will demand deep, deep trust.

*figuur 1 Myles Horton was the founder of the Highland Folk School and trained activist for the Labor and Civil Rights Movements of the 20th Century. (Credit: Wisconsin Historical Society)*

## 'Move at the speed of trust'

*figuur 2*

I have learned to hold softly to trust so as not to outrun it. Writer, activist and educator Adrienne Marie Brown reminds me to always 'move at the speed of trust.' In some ways this may be easier than in the past as I can only imagine the very first steps down this road. I will carefully curate the problems students do on the first leg of this trip. I want them to see the subject as open, visual and playful and one in which depth matters more than speed. I am leaning heavily on Marilyn Burns[1] and the YouCubed[2] team. I will drop in classics like *Three Sacks*, *The King Arthur Problem*, and *Four 4s*. To surface the global roots of mathematics, I will rename Latin Squares for Choi Seok-Jeong, the Korean mathematician who first wrote about them at least a half century before Euler.

## Interactive environment

I can bring these rich problems to life thanks to the lovely work of Dr. Theresa Wills[3]. She has taught me to create an interactive environment with shared Google slide decks which everyone can edit while talking and listening to each other on Zoom. I will start each class by saying, 'Let's walk this road together. I look forward to seeing your footprints on this slide deck.' I will trust those who miss class to add their touch later. Moving at the speed of trust will mean making sure everyone has their technology feet under them as we set out. In the first three weeks of school students will learn to co-occupy digital space as they have learned to co-exist in physical classrooms every year until now. They will play games together, learn about each other and extend communication to study pods and phone sessions. My eighth graders will learn to share their math thinking using keyboard, uploaded photos, and microphone. I will offer old fashioned emoticons to share in the chat to express how they are feeling [<3][4]. I will also teach them — and invite them to teach each other — all of the communication tools afforded by Google slides. They will learn to insert tables, use voice-to-text (direct to presenter notes,) create text boxes, and make comments. Sharing control like this will go a distance towards proving the trust I offer and ask of my students. To help us remember that we walk together, we will exchange postcards — both digital and paper. I will ask that they say something about the why, the how and the what of each week's problem solving. My para educator and I will answer in kind, as witnesses to their growth. We will see them as learners as well as people with stories that have made them who they are and people with stories about their journey of becoming. And we will invite them to be curious with us, all the while holding softly to trust so as not to outrun it.

## References

[1] *http://www.marilynburnsmathblog.com/*
[2] *https://www.youcubed.org/*
[3] *https://www.theresawills.com/*
[4] This is the emoticon 'a heart'. See: *https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_emoticons*

## About the author

Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019). See: *www.mathbetweenus.org*. E-mailadress: *jdean@reachone.com*

# Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs

*NVvW Werkgroep Wiskunde voor Morgen*

De verregaande computerisering verandert de rol van rekenen/wiskunde in de maatschappij op een fundamentele manier. Rekenen/wiskunde is steeds belangrijker geworden, maar tegelijkertijd maakt het feit dat steeds meer bewerkingen door apparaten worden uitgevoerd de rol van reken-wiskundekennis vrij onzichtbaar. De beschikbaarheid van apparaten lijkt te suggereren dat die kennis minder nodig is, maar dat is niet waar. Het is zelfs zo dat meer leerlingen meer rekenen/wiskunde moeten leren, alleen gaat het wel om andere inhouden dan die nu worden onderwezen. Er is een verschuiving nodig van rekenen-wiskundige vaardigheden die concurreren met wat de computer kan doen, naar reken-wiskundige vaardigheden die het werk van de computer complementeren.
De werkgroep Wiskunde voor Morgen heeft uitgezocht welke vaardigheden dat zijn en wat dit betekent voor het reken-wiskundeonderwijs. Dit heeft geleid tot de notitie, *Toekomstgericht reken-wiskundeonderwijs*. Deze notitie bevat een beschrijving van de onderdelen waarop het reken-wiskundeonderwijs in po, vmbo en de onderbouw havo/vwo zou moeten worden aangepast om de leerlingen adequaat voor te bereiden op de toekomst.

De werkgroep komt tot de volgende bevindingen:

— In een maatschappij waar computers het uitvoerende werk doen, is het van belang dat mensen concrete problemen in de werkelijkheid kunnen vertalen naar wiskundige bewerkingen. Ook moeten ze begrijpen wat die bewerkingen inhouden en ze moeten de antwoorden die apparaten produceren globaal kunnen controleren.
— Als computers het werk doen neemt het belang van het maken van berekeningen met pen en papier af. Tegelijkertijd worden sommige reken-wiskundige onderwerpen belangrijker, omdat ze in de maatschappij een grotere rol spelen dan vroeger. Hiertoe behoren de onderwerpen statistiek, meten, meetkunde en variabelen en functies.
— Gezien de centrale rol van computers in onze maatschappij zal in het reken-wiskundeonderwijs aandacht moeten worden besteed aan computergerelateerde inzichten en vaardigheden, zoals algoritmiseren en computational thinking.
— Verder leent het reken-wiskundeonderwijs zich bij uitstek voor het ontwikkelen van de veelgenoemde 21st century skills.

Op dit moment worden al nieuwe kerndoelen en eindtermen ontwikkeld, op basis van de voorstellen van curriculum.nu. Maar het gaat daarbij om een herziening van het curriculum die binnen enkele jaren gerealiseerd kan worden. De werkgroep Wiskunde voor Morgen wijst op de noodzaak van meer ingrijpende herzieningen van het reken-wiskundecurriculum op de langere termijn.
Over de vraag welke veranderingen moeten worden ingevoerd is uiteraard discussie mogelijk. Dat is precies de bedoeling van de notitie. De werkgroep hoopt een brede discussie op gang te brengen over de vraag hoe het reken-wiskundeonderwijs leerlingen adequaat kan voorbereiden op de maatschappij van nu en morgen.

Zie voor de notitie:

*vakbladeuclides.nl/963toekomst*

# Vastgeroest

# De eerste les na de kerstvakantie

Ab van der Roest

De eerste les van het nieuwe jaar verliep voor mijn leerlingen een beetje verrassend. In het kader van 'wiskunde is echt iets anders dan een som uit een wiskundeboek' had ik de volgende opdracht op het smartbord geprojecteerd:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+$$
$$\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}=$$

Een opgave die je elk jaar weer kunt gebruiken in bijna elke klas. Eerlijk gezegd heb ik de opgave van een collega gekregen en wilde hem gewoon als aardigheidje presenteren. Voor ik deze opgave projecteerde had ik eerst een bord vol wenskaarten geprojecteerd en de klas reageerde dat ze zoiets wel erg burgerlijk vonden. Waarop ik met mijn som kwam.

## Op het spoor van regelmaat

Wat ik eerst alleen als een leukigheidje wilde presenteren, veranderde ter plekke in een voorbeeld van probleemaanpak. Eerst even de drie puntjes toegelicht en toen leerlingen individueel en even later in groepjes laten werken. Het probleem was te groot. 2019 termen bij elkaar optellen is wel erg veel tikwerk voor de rekenmachine. Een groepje leerlingen onder leiding van Sabine veronderstelde dat er $\sqrt{2020}-1$ uit zou komen. Waarom, was mijn vraag. Toen bleek dat de rekenmachine toch geholpen had. Ze had de eerste twee termen opgeteld en de decimalen van $\sqrt{3}$ herkend. Een term verder leverde een 1 op en de som van de eerste acht termen een 2. Regelmaat was ontdekt.

## Gaat het altijd zo?

Maar, wie garandeert ons dat het echt zo verder gaat, is dan natuurlijk de vraag van elke wiskundeleraar. En dan blijft het stil, want dat garandeert voorlopig niemand. Mijn eerste interventie was dat bij zo'n onmogelijke opgave gekeken moet worden waar het op lijkt en wat we wel kunnen. Dat was snel bedacht. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ moesten we omschrijven als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, door teller en noemer met hetzelfde te vermenigvuldigen. Meteen gingen ze weer aan de slag, maar het leverde niets op. Dubbelproduct was na de kerstvakantie weer heel ver weg. De aanwijzing was dus dat we teller en noemer met hetzelfde zouden vermenigvuldigen en dat de noemer een net getal zou worden. Maar door het dubbelproduct bleven we met een wortel zitten.

## Interventie

Weer tijd voor interventie. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ is een merkwaardig product. Zijn er daar meer van? En toen begon het kwartje te vallen en werd het antwoord snel gevonden. Sabine kreeg haar gelijk, waarmee ze uiteraard zeer tevreden was. Ik kreeg mijn klas aan het denken, waarmee ik uiteraard tevreden was. Misschien een leuke les voor na de kerstvakantie. Wel een kleine aanpassing maken!


## Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*


## Nederlandse Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.

# Olympiadepuzzel 96-3

# Getallenrij

Esther Bod

PZZL

De getallenrij $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... voldoet aan $a_1 = 3^{2021}$, $a_2 = 3^{2021} + 3^{2020}$ en $9a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$ voor alle positieve gehele getallen $n$. Wat is het kleinste gehele getal dat in deze rij voorkomt?

## Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 15 januari naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

## Terugblik puzzel nr. 1

Voor de puzzel *Anderhalvemeterlezing* hebben we vier inzendingen ontvangen. Deze opgave vroeg naar het maximaal aantal mensen dat op gepaste afstand in een zaal kon zitten. De afstand tussen de verschillende stoelen kan hierbij bijvoorbeeld worden berekend met de cosinusregel. Een goede tactiek bij een dergelijke opgave is om eerst het maximale aantal mensen te zoeken en een manier te geven waarop dit aantal mensen geplaatst kan worden, en dan laten zien dat het niet mogelijk is om meer mensen in de zaal te plaatsen. Het resultaat is dat maximaal elf stoelen gebruikt kunnen worden en dat de zaal dus veilig gebruikt kan worden met bijna halve capaciteit. Alle inzenders hebben de juiste oplossing gevonden. (Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Esther Steenkamer voor het nakijken van de inzendingen.)
De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de vier inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Hans Huisman.

*vakbladeuclides.nl/963olympiadepuzzel*

## Winnaars Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op vrijdag 9 oktober 2020 zijn de prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2020 online bekendgemaakt. In de categorie 'klas 4 en lager' kwam Hylke Hoogeveen uit Odijk als beste uit de bus. De categorie 'klas 5' werd gewonnen door Peter Zhou uit Maastricht en in de categorie 'klas 6' was Kevin van Dijk uit Oeffelt de nummer één. Naast de drie winnaars van de eerste prijs ontvingen in elke categorie ook de nummers twee tot en met vijf een prijs.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd voor middelbare scholieren met interesse in wiskunde. De wedstrijd bestaat uit drie rondes. In januari 2020 deden aan de eerste ronde van de Olympiade 7962 leerlingen van 330 scholen uit het hele land mee. De beste deelnemers per categorie werden vervolgens uitgenodigd voor de tweede ronde. Aan de tweede ronde namen op 13 maart 2020 in totaal 785 leerlingen deel.

## Nationale selectie

Aan de finale op 11 september 2020 deden 156 leerlingen mee. De vijftien prijzen, bestaand uit een geldbedrag tussen € 50,– tot € 250,– en een extra cadeau, zijn beschikbaar gesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Transtrend. Met hun uitmuntende prestatie hebben de meeste prijswinnaars een plaats bemachtigd in de nationale selectie. Vanuit deze selectie zullen later de deelnemers voor de Internationale Wiskunde Olympiade, de Benelux Wiskunde Olympiade en de European Girls' Mathematical Olympiad worden gekozen. Hieronder het volledig overzicht van de vijf prijswinnaars per categorie:

Klas 6

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Kevin van Dijk | Stedelijk Gymnasium Nijmegen |
| 2 | Thian Tromp | Chr. Gymnasium Beyers Naudé Leeuwarden |
| 3 | Han Datema | Het Streek Lyceum Ede |
| 4 | Ruben Savelkouls | Sint Ursula Horn |
| 5 | Eskil Dam | Zuyderzee Lyceum Emmeloord |

Klas 5

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Peter Zhou | United World College Maastricht |
| 2 | Kees den Tex | Gemeentelijk Gymnasium Hilversum |
| 3 | Jelle Bloemendaal | Corlaer College Nijkerk |
| 4 | Lars Pos | Stadslyceum Groningen |
| 5 | Andy van Horssen | Shanghai |

Klas 4 en lager

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Hylke Hoogeveen | Openbaar Lyceum Zeist |
| 2 | Mads Kok | Utrechts Stedelijk Gymnasium |
| 3 | Daan de Groot | Dr. Nassau College Assen |
| 4 | Allie Zong | Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven |
| 5 | Wouter Zandsteeg | Bataafs Lyceum Hengelo |

# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

**Redactie**
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

**Inzenden bijdragen**
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

**Richtlijnen voor artikelen**
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

**Realisatie**
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**
Website: www.nvvw.nl

**Voorzitter**
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

**Secretaris**
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

**Ledenadministratie**
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

**Helpdesk rechtspositie**
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

**Lidmaatschap**
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Abonnementen *Euclides* niet-leden**
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

**Advertenties en bijsluiters**
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

## 2021

**Ma 18/01 Do 28/01**
### LANDELIJK
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

**Vr 29/01 Za 30/01**
### Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

**Wo 12/02**
### LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

**Vr 12/03**
### 12 NEDERLANDSE UNIVERSITEITEN
Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

**Do 18/03**
### LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

**JAARGANG 96**

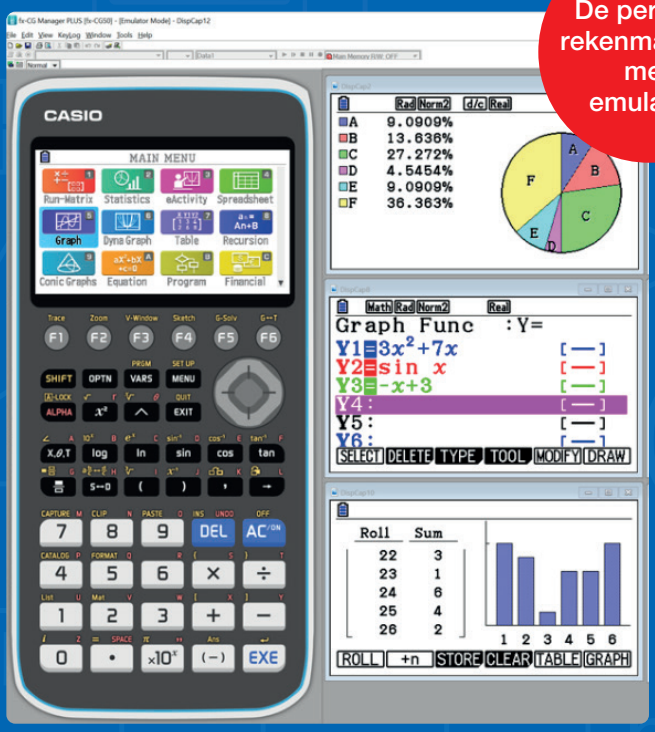
| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 4 | 27 januari 2021 | 16 november 2020 |
| 5 | 17 maart 2021 | 04 januari 2021 |
| 6 | 05 mei 2021 | 01 maart 2021 |
| 7 | 23 juni 2021 | 26 april 2021 |

CASIO

# Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken




## fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

## ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

# MODERNE WISKUNDE

## NIEUW!
## Moderne Wiskunde 12e editie havo/vwo bovenbouw

- Ontwikkelt wiskundig inzicht en begrip bij leerlingen
- Volledig nieuwe digitale omgeving met online statistiekprogramma
- Met leerdoelen en leerroutes gericht naar het examen
- Uitgebreide examentraining en oneindig oefenen met Examensprint

Vraag nu gratis beoordelingsmateriaal aan op **modernewiskunde.noordhoff.nl/hvbb**

Met gratis poster!

Noordhoff

Brengt je verder