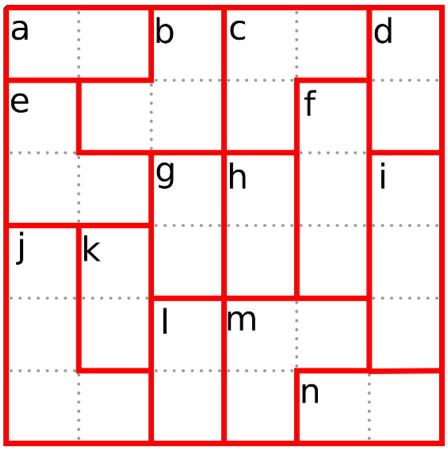
Puzzel 95-7 Wobien Doyer

Lege Latijnse vierkanten vullen Lieke de Rooij

Voor de zomervakantie een puzzel waarbij geen noemenswaardige wiskunde nodig is, dus ook voor familie en vrienden. En voor iedereen die graag Sudoku's oplost, maar wel anders. Wel vragen we om bij alle oplossingen uw redenering/strategie in grote lijnen aan te geven. Dus niet alleen de resultaten van een computerprogramma. In tegenstelling tot een goede Sudoku, waarin het altijd mogelijk is via redeneren een volgend getal in te vullen, zul je bij deze puzzels soms iets moeten uitproberen.

Wij geven hieronder steeds een uitgebreide toelichting en dat kregen we ook van verschillende inzenders, maar minder was ook goed, zolang maar duidelijk was dat het resultaat niet alleen is gevonden via computerprogrammering.

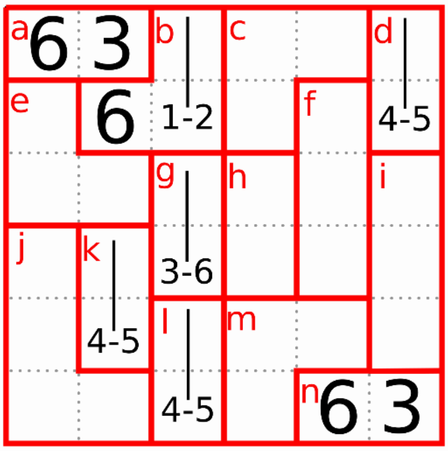
We starten met een leeg vierkant met n bij n vakjes. Daarin moeten getallen van 1 tot en met n worden ingevuld, zodanig dat in elke rij en elke kolom de getallen van 1 tot en met n precies één keer voorkomen, ofwel het wordt een Latijns vierkant.
Net als bij een Sudoku mag er slechts één oplossing zijn, maar zonder verdere eisen wordt daar natuurlijk niet aan voldaan. Er bestaan zulke puzzels waarbij het vierkant in gebiedjes is ingedeeld en bepaalde eisen worden gesteld aan de sommen van de getallen in die gebiedjes. Dus anders dan bij een Sudoku mogen er dan wel gelijke getallen worden ingevuld binnen een gebied. Daarover gaat deze puzzel.



figuur 1

Opgave 1: (Zie figuur 1)
Een vierkant met 6 × 6 vakjes is verdeeld in 14 gebieden, in elke rij en elke kolom (dus niet per se in de diagonalen) staan de getallen 1 tot en met 6, elk precies één keer.
In elk van de 14 gebieden is de som van de getallen gelijk.
Hoe staan de getallen in dat vierkant?

Uitwerking opgave 1:
De som van alle getallen in het vierkant is 6 × de som van de getallen 1 tot en met 6, dus 6 × 21 = 126. Verdelen we dat over 14 gebieden met gelijke sommen dan is de som per gebied dus 126 : 14 = 9.
De gebieden d en i zijn dus samen 18 en de som van een hele rij is 21. Het rechtervakje van n is dus 3, en dan moet het linkervakje 6 zijn.
Gebieden met 2 vakjes kunnen alleen 3 en 6 of 4 en 5 bevatten. d en l bevatten dus 4 en 5. In g komt dan weer 3 en 6.
Voor gebied b blijft dan in kolom 3 alleen 1 en 2 over, en dus staat in het linkervakje van b een 6.
Gebied k kan dus niet 3 en 6 zijn en is dus 4 en 5, en a bevat dus weer 3 en 6, met de 6 links en de 3 rechts.
Het resultaat tot nu toe zie je in figuur 1a.



figuur 1a

De gegevens uit 1a zijn overgenomen in figuur 1*b*.

We werken verder met blauw in figuur 1b.

Merk op dat in de twee bovenste rijen alle getallen 1 tot en met 5 één keer voorkomen, en 6 twee keer. Dat betekent dat geen enkel getal 2 × kan voorkomen in *c*, en de 6 helemaal niet. De enig mogelijke sommen in *c* zijn dan 1 + 3 + 5 en 2 + 3 + 4 (niet noodzakelijk in die volgorde). Er is dus zeker een 3 in *c*, die in het onderste vakje zit vanwege de 3 in *a*.

Gebied *h* kan dan geen 3-6 zijn en is dus 4-5.

De enige plaats in kolom 4 waar een 6 kan staan is in het vakje linksboven in m, en dat betekent dat de andere twee vakjes in *m* 1 en 2 zijn.

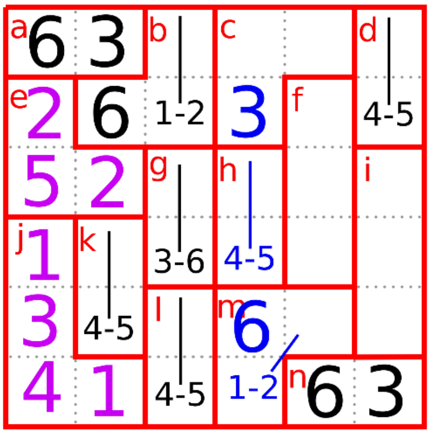
Om de draad niet kwijt te raken werken we nu verder in figuur 1b met paars.

In de tweede rij van onder kan de 3 nu alleen nog in het middelste vakje van de 1e kolom in *j* staan.

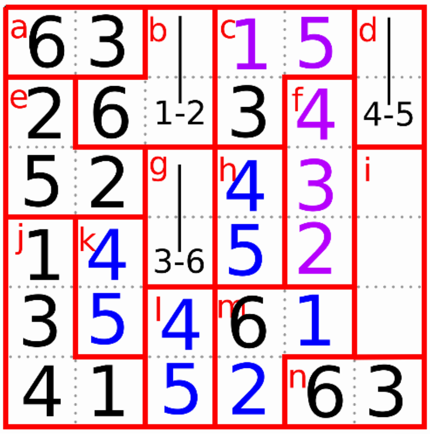
Het vakje rechtsonder in *j* kan alleen 1 of 2 zijn. Als het 2 zou zijn, dan zijn de onderste 3 getallen in de eerste kolom samen 7. Maar dat kan alleen met 1 + 2 + 4, en dat kan niet want er staat al een 3.

Rechtsonder in *j* komt dan een 1 en in de linkerkolom 1-3-4.

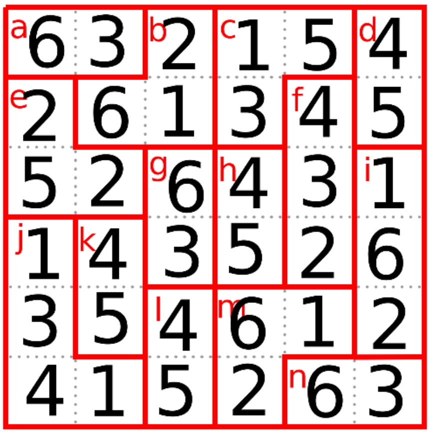
Nu moet dus het vakje rechtsonder in *e* 2 zijn. De andere twee vakjes van *e* zijn dus samen 7, en dat kan alleen 2 en 5 zijn, met dus de 2 boven en de 5 onder.



figuur 1b



figuur 1c



figuur 1d

We nemen de gegevens van figuur 1b over met zwart in figuur 1c en werken verder in blauw.

Door de 4 linksonder in *j* kunnen we achtereenvolgens de 4 en de 5 op z'n plaats zetten in de gebieden *l*, *k* en *h*.

Door de 1 rechtsonder in *j* kunnen we in *m* de 1 en de 2 op hun plaats zetten.

We gaan nu verder in paars in 1c.

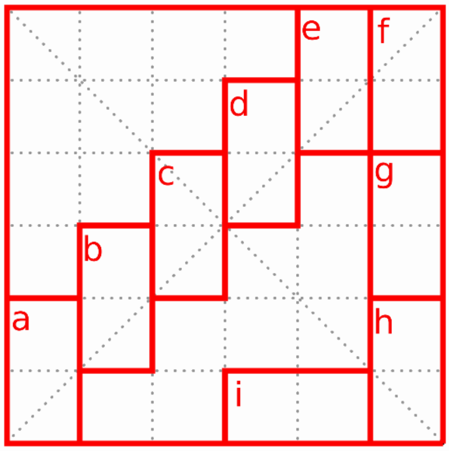
In *c* moet nu het vakje linksboven 1 zijn en dus het vakje rechtsboven 5.

De som in *f* moet dus 2+3+4 zijn. De 2 kan alleen onderaan, dus de 3 komt dan in het midden en dus de 4 bovenaan.

De verdere invulling van *b*, *d*, *g* en *i* is triviaal, en is te vinden in figuur 1d

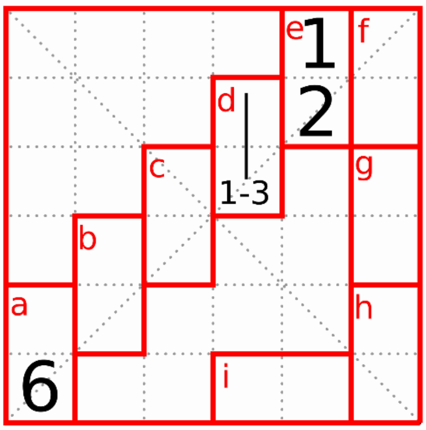
In dit geval is de oplossing dus te vinden door redeneren, en zonder iets uit te proberen.

Opgave 2: (Zie figuur 2).
In deze opgave bestaan rijen, kolommen en diagonalen uit de getallen 1 tot en met 6, elk precies één keer.
De indeling in gebieden is gegeven, en van een deel van de gebieden is ook de som gegeven.
De gebieden *a*,*b*,*c*,*d* en *e* bevatten de sommen 7, 6, 5, 4 en 3, in die volgorde. De andere vier gelabelde gebieden hebben de sommen 6, 7, 8 en 9 niet per se in deze volgorde. Aan jou om dit vierkant te vullen.

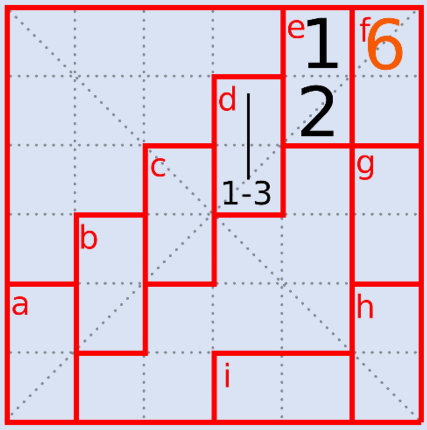


figuur 2

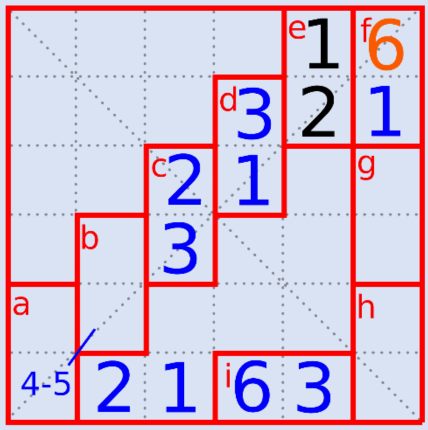
Uitwerking opgave 2:
Gebied *e* bevat 1 en 2, en gebied *d* bevat 1 en 3. Als in *e* de 1 onderaan staat mag er geen 1 staan in het bovenste vakje van *d*, maar ook niet in het onderste (dan hebben we twee enen op de stijgende diagonaal). In *e* moet de 1 dus boven en de 2 onder staan.
Drie van de sommen 6, 7, 8 en 9 komen in *f*, *g* en *h*. De som van *f*, *g* en *h* is 21 en dat lukt alleen met 6 + 7 + 8 = 21. Vakje *i* bevat dus de som 9 en kan dus 4 en 5 bevatten of 3 en 6, en in het laatste geval staat de 3 rechts.
De 6 op de stijgende diagonaal kan alleen in gebied *a* (onderaan, en het bovenste vakje van *a* is dan 1) of in *f* (bovenaan) staan (alle andere vakjes op die diagonaal hebben sommen ≤ 6).
We splitsen nu in twee gevallen: 6 in het onderste vakje in *a* (zwart) en 6 in het bovenste vakje van *f* (rood) en vullen in wat we tot nu toe weten (in zwart) (zie figuur 2a en 2b).
We gebruiken een lichtblauwe achtergrond voor varianten die later verworpen worden.



figuur 2a



figuur 2b

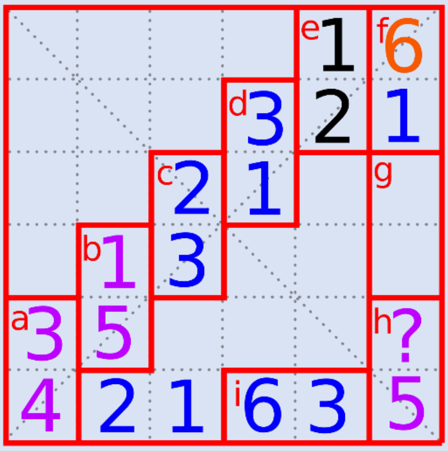


figuur 2c

Proberen: 6 in de rechterbovenhoek:

We werken nu eerst figuur 2b verder uit in blauw in figuur 2c
De som van *f* is 6, 7 of 8. Het onderste vakje van *f* is dus 1 of 2, maar 2 kan niet, dus 1. Dan staat dus in *d* de 1 onder en de 3 boven.
Dan kan in *c* (som 5) geen 1 staan dus kan alleen 2 en 3 bevatten, en omdat de 2 al op de diagonaal staat komt de 2 boven.
In het onderste vakje van *a* kan nu alleen nog 4 of 5 staan, dus *i* kan niet 4 en 5 bevatten, dus moet het 3 en 6 zijn, en die 3 kan alleen rechts staan.
In het onderste vakje van *h* kan geen 1 of 2 staan vanwege de 1 in *f* en de 2 in *c* op de dalende diagonaal. De 1 en 2 in rij 1 komen dus in de kolommen 2 en 3 te staan, met de 2 in kolom 2. We hebben nu de situatie in figuur 2c

In figuur 2d gaan we verder met paars.
De som in *b* is 6, en dat is dus 4 + 2 of 5 + 1. 4 + 2 kan niet vanwege de 2 in de onderste rij dus komt in b de 5 onder en 1 boven.
In de onderste rij komt de 5 dus in het onderste vakje van *h*. Maar de som van *h* is 6 of 8 en dat lukt niet. 1 of 3 in het bovenste vakje kan niet vanwege de 1 erboven en de 3 in de 2e rij.



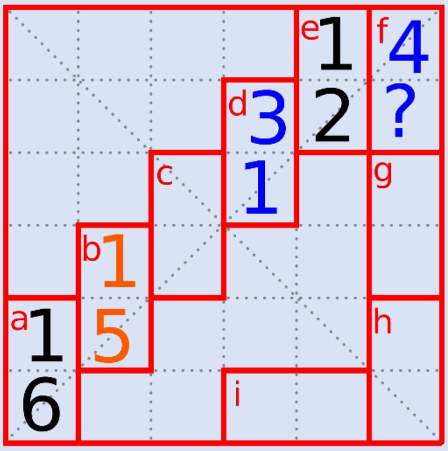
figuur 2d

En dus: 6 in de linkerbenedenhoek:

We gaan nu figuur 2b verder uitwerken. In figuur 2e zijn de gegevens uit 2b in zwart overgenomen. Omdat de som van *a* 7 moet zijn is het bovenste vakje van *a* een 1.
In *b* is de som 6. Dat kan alleen 1 + 5 of 2 + 4 zijn.

Proberen: 1 en 5 in gebied *b*:

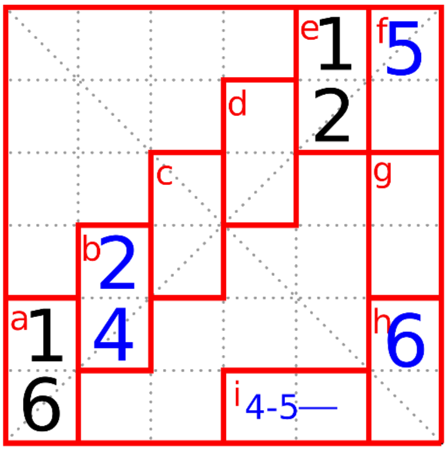
In *b* komt de 1 dan boven (figuur 2e).
We gaan verder met blauw.
De 1 op de stijgende diagonaal kan dan alleen nog in d zitten. Dus daar komt dan de 3 boven en de 1 beneden.
De 4 op de stijgende diagonaal kan nu alleen nog in *f* staan (in *c* zou het 4 - 1worden met twee enen naast elkaar).
De som van *f* moet 6, 7 of 8 zijn en er is dus geen geldige invulling van het onderste vakje in *f*.



figuur 2e

En dus: 2 en 4 in gebied *b*:

In figuur 2f nemen we de zwarte gegevens uit 2e over en gaan verder met blauw:
Omdat de 2 al op de diagonaal staat komt in *b* de 2 boven en de 4 onder.
De som van *i* is 9 en kan niet 6 + 3 zijn. Het is dus 4 + 5.
De 5 op de stijgende diagonaal kan niet in *c* of *d* staan (som 5 en 4) en komt dus in het bovenste vakje van *f* .
Het onderste vakje van *h* is dus 1, 2 of 3, en omdat de som van *h* 6, 7 of 8 is moet het bovenste vakje van *h* 4, 5 of 6 zijn, en dat kan dus alleen 6 zijn.



figuur 2f

In de stijgende diagonaal kan in gebied *d* een 1 of een 3 staan.

Proberen: 1 op de diagonaal in *d*

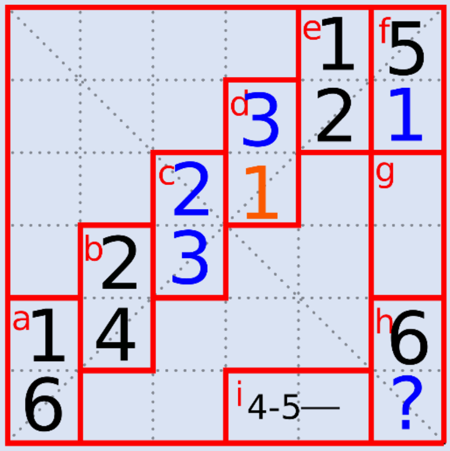
In figuur 2g zijn de gegevens uit 2f zwart en de 1 op de diagonaal rood. We gaan verder met blauw.

In *d* komt de 1 op de diagonaal dus onder. De som van *d* is 4 dus daarboven komt een 3.

In gebied *c* staat dus 3 op de diagonaal en daarboven een 2 (som 5)

De som van *f* is 6, 7 of 8, dus het onderste vakje is 1, 2 of 3 en kan dus alleen 1 zijn.

De som van *h* is dus 7 of 8 en het onderste vakje van *h* is dus 1 of 2. 1 kan niet omdat er al een 1 in de laatste kolom staat en 2 kan niet omdat er al een 2 in de dalende diagonaal zit.



figuur 2g

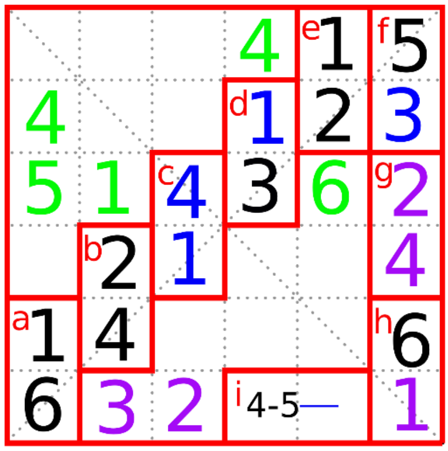
In gebied *d* staat dus 3 op de diagonaal.

In figuur 2h nemen we de zwarte gegevens uit 2g over en vullen in *d* een 3 in de diagonaal in. We gaan verder met blauw.

Het bovenste vakje van *d* is een 1 (som 4)

Het onderste vakje van *c* is 1 (enige mogelijkheid op de stijgende diagonaal), en daarboven komt 4 (som 5).

Het onderste vakje van *f* is 3 (som ≤ 8)



figuur 2h

We gaan verder in figuur 2h in paars;

In de 6e kolom hebben we 1, 2 en 4 nog over en we moeten nog som 6 en 7 maken. Dat lukt alleen met 6+1 in *h* en 2 + 4 in *g* (met de 4 onder).

In de onderste rij moeten we nog een 2 en een 3 plaatsen en dat kan alleen met de 2 rechts.

We gaan verder in 2h met groen.

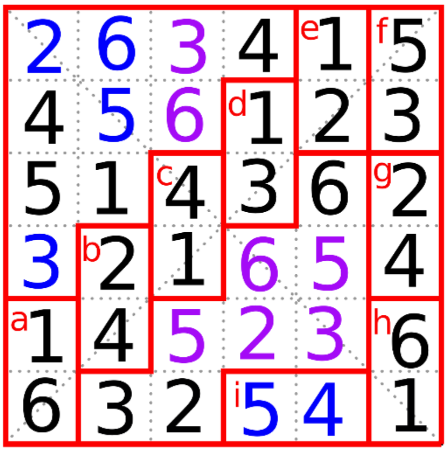
We hebben al 5 enen, de 6e komt op de derde rij van boven kolom 2.

In deze rij missen we nog een 5 en een 6. De 6 kan alleen in kolom 5 en de 5 komt dan in kolom 1.

In rij 5 is de enige plaats waar een 4 kan staan kolom 1, en de 4 in de bovenste rij moet dan kolom 4 zijn.

In figuur 2i maken we alles wat we nu weten zwart en gaan verder met blauw.
De rest is niet moeilijk meer. Begin bijvoorbeeld met de 4 en de 5 in de onderste rij, de 2 en de 3 in de eerste kolom en de 5 en de 6 in de tweede kolom, enzovoort.

We kunnen constateren dat dit de enig mogelijke oplossing is, maar ook dat we een paar zijtakken moeten inslaan om de oplossing te vinden.

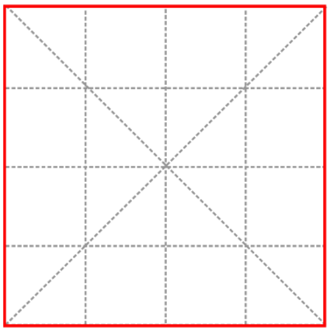


figuur 2i

En ten slotte starten we met een echt leeg vierkant van 4 × 4 waarin de rijen, kolommen en diagonalen gevuld moeten worden met de getallen 1 tot en met 4. (Zie figuur 3).
Daarbij moet je zelf een indeling in gebieden bedenken waarbij de sommen in die gebieden opvolgende aantallen zijn.

De gebieden bestaan uit een of meer vakjes waarbij de vakjes (net als in de vorige opgaven) steeds met een hele zijde aan elkaar grenzen.
Het is de bedoeling dat je een indeling maakt in gebieden zodat een puzzel ontstaat.
Het maximaal aantal punten krijg je als je puzzel slechts één unieke oplossing heeft. Maar indelingen met meer dan een oplossing leveren ook punten op.

Opgave 3a: (Zie figuur 3).
Een reeks opvolgende getallen die de sommen vormen van de gebieden is alleen mogelijk bij bepaalde aantallen gebieden.
Bepaal daarom welke aantallen gebieden mogelijk zijn in een 4 × 4 Latijns vierkant met de getallen 1 - 4.


figuur 3

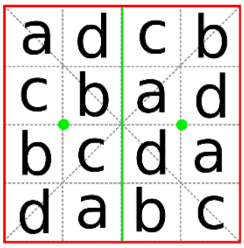
Voorafgaand aan de uitwerking:
Om te beginnen: onze formulering van deze opgave bleek niet helemaal waterdicht te zijn. In opgave 2 kwamen 2 gebieden voor waarvan de som niet gegeven is, en die we daarom niet van een letter hadden voorzien. Maar daarmee kan het idee ontstaan dat met ‘gebieden’ alleen delen van het vierkant bedoeld worden die van een letter zijn voorzien. Dat maakt het, anders dan onze bedoeling was, in opgave 3 mogelijk delen van het vierkant niet op te nemen in een gebied door er geen letter bij te zetten. Ook was het niet voor iedereen duidelijk dat het aan de oplosser (en niet aan de maker van de puzzel, u dus) om vast te stellen welk gebied welke som heeft. Sommige inzenders hebben het anders geïnterpreteerd dan de bedoeling was, en zij hebben dus een andere opgave 3 opgelost dan bedoeld en dat hebben we goed gerekend mits natuurlijk uniek.
De onderstaande uitwerking gaat wel uit van de bedoelde interpretatie: alle vakjes van het vierkant behoren bij precies één gebied, de sommen van de gebieden vormen een rij opvolgende getallen zonder dat gegeven is welk gebied welke som heeft en in alle rijen, kolommen en diagonalen moeten de getallen 1 tot en met 4 precies één keer voorkomen.

Uitwerking opgave 3a:
In elke rij komen de getallen 1 tot en met 4, en de som van elke rij is dus 10, en de som van alle vakjes dus 40. De totale som van alle gebieden moet dan ook 40 zijn.
Als de sommen van de gebieden een reeks opvolgende getallen is kunnen we die sommen schrijven als p, p + 1, p + 2,.....,p + $n - 1$, met n= het aantal getallen en p de kleinste som.
Opgeteld is dat $\frac{n\{p+(p+n-1)\}}{2} = \frac{n(2p+n-1)}{2}$ en dus moet $\frac{n(2p+n-1)}{2} = 40$
en $n(2p+n-1) = 80$
Als n even is is $2p+n-1$ oneven en omgekeerd, dus we moeten 80 schrijven als een product van een even en een oneven getal. Dat kan maar op één manier: $80 = 5 \cdot 16$. Omdat $2p+n-1 > n$ moet $n = 5$ en $2p+n-1 = 16$, dus $2p = 12$ en $p = 6$.
We maken dus 5 gebieden met totalen 6, 7, 8, 9 en 10.

We zoeken een puzzel in een 4×4 matrix (Latijns vierkant) waarin alle rijen, kolommen en diagonalen bestaan uit de getallen 1 tot en met 4 (elk precies één keer) moeten worden ingevuld zodanig dat de sommen van de gebiedjes een rij opvolgende getallen vormt (de puzzelaar weet niet welk gebied welke som heeft).

3b: Zoek een indeling in gebieden met zo min mogelijk oplossingen, liefst één, en geef de/een oplossing van de zo ontstane puzzel.

Uitwerking opgave 3b:
Voordat we hieraan beginnen is het handig om eerst even te kijken naar hoe de mogelijke 4×4 Latijnse vierkanten eruitzien. We kunnen met enig puzzelen vaststellen dat er (op spiegelingen en rotaties na) zes van deze 4×4 vierkanten zijn, die allemaal te vinden zijn door in figuur 3a verschillende letters te vervangen door verschillende getallen 1-4.
We kunnen bij het oplossen van de puzzel twee bijzonderheden gebruiken die we opmerken in figuur 3a:



figuur 3a

1. In 3a is een verticale (groene) lijn getrokken die het vierkant in twee gelijke helften verdeelt, zodanig dat in elke helft de vakjes met gelijke waarde puntsymmetrisch ten opzichte van elkaar liggen. Die puntsymmetrie is dus in elke oplossing terug te vinden, maar de verdeling in twee helften kan door rotatie of spiegeling natuurlijk ook horizontaal zijn

2. In elke oplossing staan in elk 2×2 vierkantje in de vier hoeken van het vierkant vier verschillende getallen.
   Daarbij staan steeds dezelfde getallen op de diagonaaltjes: In het eerste vierkant in figuur 3a zijn dat ab en dc: in alle vier de vierkantjes in de hoeken staan a en b samen op het ene diagonaaltje en d en c op de andere. We zullen de getallen die op één diagonaaltje staan partners noemen.

We gaan een aantal door de inzenders gevonden puzzels oplossen. We kozen voor puzzels met precies één oplossing.

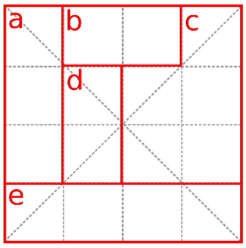
Zoals we zagen in opgave 3a moeten er steeds vijf gebieden zijn met sommen 6, 7, 8, 9 en 10.

De puzzel van Ben Groot (zie figuur 3b):

Omdat een hele rij of kolom altijd som 10 heeft weten we dat de 10 bij gebied *e* hoort.

Gebied *c* bestaat uit drie vakjes boven elkaar plus twee vakjes boven elkaar. Die drie boven elkaar zijn minimaal 1 + 2 + 3 = 6 en de twee boven elkaar 1 + 2 = 3. De totale som van *c* is dus minimaal 6 + 3 = 9, en dat is tevens het maximum. De som van *c* is dus 9. En dus is dat 1 + 2 + 3 in de rechterkolom en 1 + 2 in de linker. Dat betekent dat het meest rechtse vakje van *e* een 4 moet zijn en het vakje daarnaast 3.

Het meest rechtse vakje van *b* moet dan 4 zijn. Zie figuur 3c zwart.

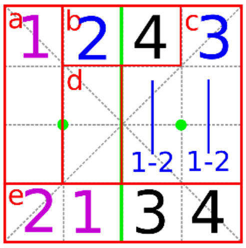


figuur 3b

We gaan verder met blauw.

We zien dat de twee 4-en elkaars puntspiegelbeeld zijn, dus we mogen de groene lijn verticaal nemen en puntspiegelen in de bijbehorende groene punten. We kunnen nu dus het puntspiegelbeeld van de 3 in gebied *e* invullen.

In gebied *b* kunnen we links geen 1 invullen, want dan zou de som van *b* 5 zijn en dat mag niet. We vullen daar dus een 2 in. (figuur 3c blauw)

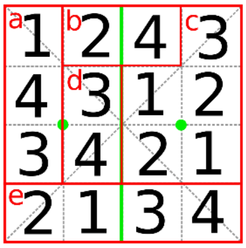


figuur 3c

We gaan verder met paars:

In het bovenste vakje van *a* kan nu alleen een 1 komen, en vervolgens kunnen we de 1 en de 2 in de bovenste rij putspiegelen. (figuur 3c paars)

De plaats van de enen en tweeën in gebied *c* worden nu bepaald door de 1 en de 2 die nu op de diagonalen staan. Hetzelfde geldt voor de drieën en vieren in de gebieden *a* en *d* (figuur 3d).

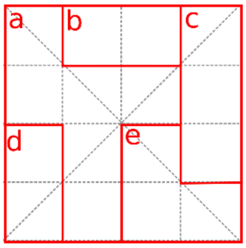


figuur 3d

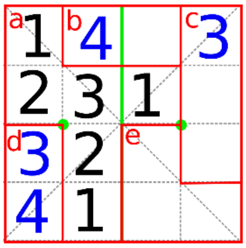
We hebben nu de sommen: e: 10, *c*: 9, *a*: 8, *d*: 7 en *b*: 6, dus dit is een oplossing, en we weten dat die oplossing uniek is.

Jos Remijn en Hans Linders vonden dezelfde puzzel(!) zie figuur 3e:

Gebied *a* heeft twee vakjes in de eerste kolom, die samen minstens 1 + 2 = 3 zijn, drie vakjes in de tweedee kolom die samen minstens 1 + 2 + 3 = 6 zijn, en nog een vakje in de derde kolom, dat minstens 1 is. De som van *a* kan dus nooit minder zijn dan 3 + 6 + 1 = 10. Dus de som van *a* moet 10 zijn, met in kolom 1: 1 + 2, in kolom 2: 1 + 2+ 3, en in kolom 3 een 1.

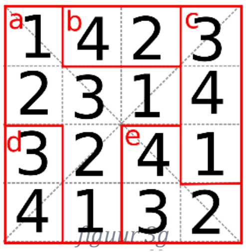


figuur 3e



figuur 3f

Met die gegevens kunnen we gebied *a* maar op één manier invullen (let ook op de diagonalen) zie figuur 3f ,

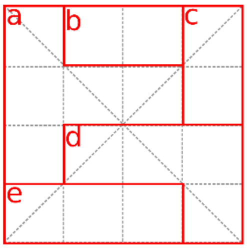


figuur 3g

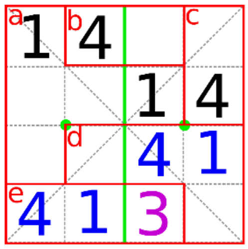
Merk op dat 1 en 3 partners zijn en dus ook 2 en 4, en ook dat de groene lijn verticaal is. De rest is dan snel in te vullen (zie figuur 3g)

We hebben nu de sommen: a: 10, e: 9, c: 8, d: 7 en c: 6, dus dit is een oplossing, en we weten dat die oplossing uniek is.

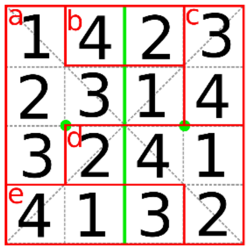
Een puzzel van Gerard Bouwhuis (zie figuur 3h).
De gebieden b en c met elk twee vakjes kunnen alleen som 6 of 7 hebben, dus 2 + 4 en 3 + 4.
Omdat er geen 1 zit in b en c is het bovenste vakje van a een 1.



figuur 3h


figuur 3i

Omdat er een 4 in b zit komt de 4 in c onder, en omdat er in het vierkantje rechtsboven maar één 4 mag staan komt de 4 in b links.
Dan kan de 1 in het vierkantje van 2 × 2 rechtsboven nog maar op één plaats staan staan. (figuur 3i zwart)


figuur 3j

De vieren in b en c liggen in de bovenste helft van het vierkant en zijn niet puntsymmetrisch, dus de groene lijn komt verticaal.
We kunnen dan de enen en de vieren puntspiegelen (blauw).

Als het derde vakje van e een 2 is, is de som 7. Maar b of c heeft al som 7, dus het derde vakje van e is 3 (paars).
Dan zijn 1 en 3 partners, en dus ook 4 en 2. Daarmee kunnen we het hele vierkant afmaken. Zie figuur 3j.

Ook hier kloppen de sommen in alle gebieden, dus ook dit is een puzzel met één unieke oplossing.

En nu hebben we een verrassing. Hoewel de indeling in gebieden bij de puzzel van Jos Remijn/Hans Linders en die van Gerard Bouwhuis verschillend zijn is het Latijnse vierkant dat we krijgen voor beide puzzels hetzelfde!

Wij zochten nog uit dat het bij elk van de 6 mogelijke 4 × 4 Latijnse vierkanten (minstens een) puzzel te maken is. We hebben ook gezien dat er meer dan één indeling in gebieden kunnen zijn die hetzelfde Latijnse vierkant als oplossing hebben.(wij hebben daarvan nog meer voorbeelden).

De volledige ladderstand en de uitwerking van de eerdere puzzels staan op de website: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*