Uitwerking Puzzel 95-5 Wobien Doyer

Een straal met zeven cirkels Lieke de Rooij

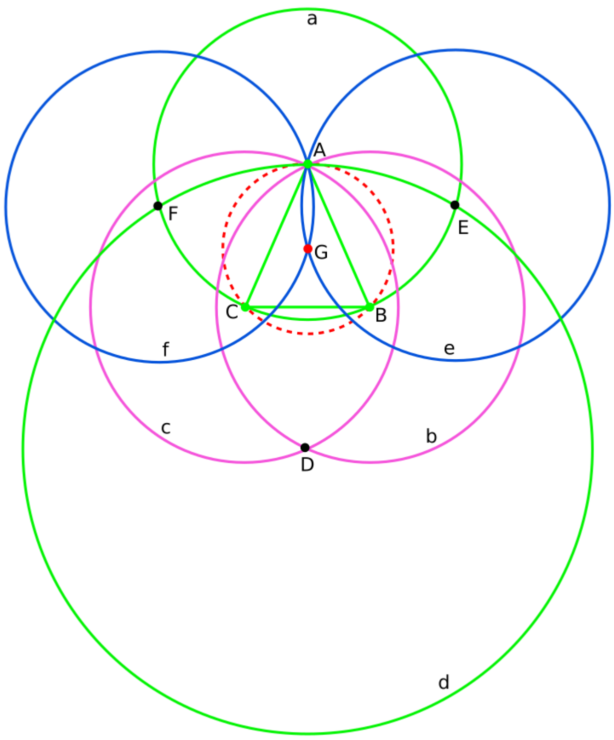
In deze puzzel gaan we de straal van de omgeschreven cirkel van een gegeven driehoek construeren, en dat met alleen een passer. Er is veel bekend over constructies met alleen een passer, maar de hier bedoelde constructie is minder bekend en zeker de moeite waard om nader te bekijken. In tegenstelling tot andere beschreven methoden heb je hier namelijk (in verreweg de meeste gevallen) slechts 7 cirkels voor nodig.

Enkele inzenders maakten gebruik van inversie of meldden dat het met inversie moet lukken. Er is over inversie op internet wel het een en ander te vinden. Bijvoorbeeld Dick Klingens[1]) laat zien hoe je via inversie met alleen een passer het middelpunt van een gegeven cirkel kan bepalen. Die methode komt overeen met de methode die wij gebruikten voor opgave 1. Bij de (niet gelijkbenige) driehoek in opgave 2 levert die methode met 9 cirkels het middelpunt van de omgeschreven cirkel op, en daarmee ook de straal. Het lukt zo dus niet om, zoals wij vragen in opgave 2, die straal na 7 cirkels te vinden.

We beginnen met een bijzonder geval: Een gelijkbenige driehoek.

In de figuur zie je het resultaat van de constructie. Er zijn dan slechts 6 cirkels nodig en we hebben niet alleen de straal, maar ook het middelpunt.

In het algemene geval, dus een niet gelijkbenige driehoek, gaat de constructie analoog, en vinden we met 7 cirkels de straal. Om dan het middelpunt te vinden hebben we nog 2 cirkels nodig, maar dat is niet de vraag.



figuur 1

Opgave 1a: Beschrijf hoe de constructie van de omgeschreven cirkel van een gelijkbenige driehoek tot stand is gekomen. We hebben bewust alleen de gegeven driehoek ABC getekend en de benodigde cirkels. Met een rood stippellijntje is de bedoelde omgeschreven cirkel getekend met z'n middelpunt. Die mag je natuurlijk niet gebruiken bij de constructie, want die is nog onbekend.

In de figuur hiernaast zijn, anders dan in de opgave waarin alleen de punten A, B

[1] Zie de site van Dick Klingens: http://www.pandd.demon.nl/ en kies wiskunde > meetkunde > passermeetkunde

en C werden benoemd, cirkels benoemd met kleine letters, snijpunten van cirkels met hoofdletters.

Uitwerking 1a:

Uitgaand van de gelijkbenige driehoek ABC (AB=AC) gaat de constructie als volgt. We noteren de cirkel a met middelpunt A en straal AB als: a=⨀(A, AB). We tekenen de volgende cirkels en snijpunten:

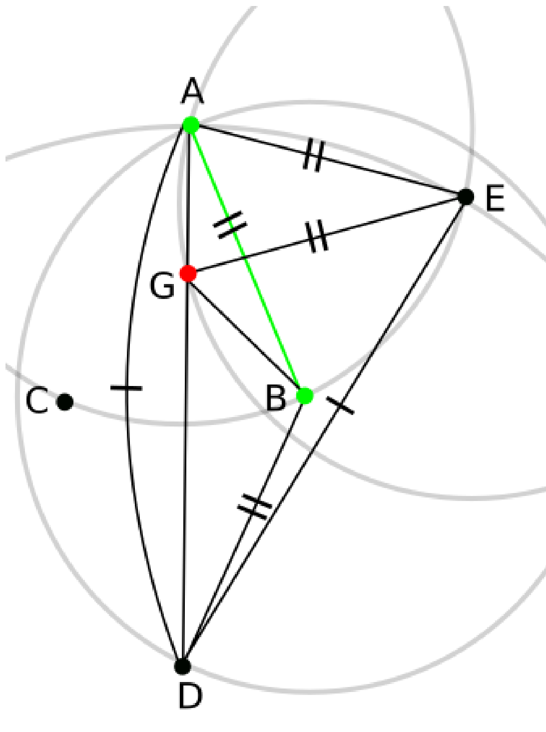
We construeren (met 2 roze cirkels) het spiegelbeeld van A in BC *en* noemen het D:

b=⨀(B, AB)
c=⨀(C, AC) b en c snijden elkaar in A, en spiegelbeeld D is het tweede snijpunt.
Twee groene cirkels:
a=⨀(A, AB) (omdat ABC gelijkbenig is gaat deze cirkel ook door C)
d=⨀(D, AD) d en a snijden elkaar in twee punten; noem het rechter snijpunt E en het linker F.[2])
We construeren het spiegelbeeld van A in EF *en* noemen het G: (2 blauwe cirkels)
e=⨀(A, AE)
f=⨀(A, AF) e en f snijden elkaar in A, en spiegelbeeld G is het tweede snijpunt.
Bewering: G is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC
Dat dit klopt willen we natuurlijk wel bewijzen. En dat lukt met gewone 'school meetkunde', met hulp van gelijke hoeken, afstanden, gelijkvormigheid, etc.

Opgave 1b: Geef dit bewijs.

Uitwerking 1b:

Uit figuur 1 kunnen we een aantal gegevens afleiden:
Omdat driehoek ABC gelijkbenig is, is de hele figuur spiegelsymmetrisch in de zwaartelijn uit A van ABC.
Op die symmetrieas liggen dus ook behalve A de punten D en G.
De volgende paren afstanden tussen punten zijn stralen van dezelfde cirkel en dus aan elkaar gelijk:
AB en AE (cirkel a)
AB en BD (cirkel b)
AE en EG (cirkel e) Dus AB = AE = BD = EG.
DE en AD (cirkel d) Dus DE = AD
In figuur 2 nemen we alleen de rechterhelft van figuur 1 over, met de punten A, B, D en G, met op de achtergrond delen van de cirkels, en we trekken AD (die dus door G gaat), AB, BD, GB, AE en ED. Ook



figuur 2

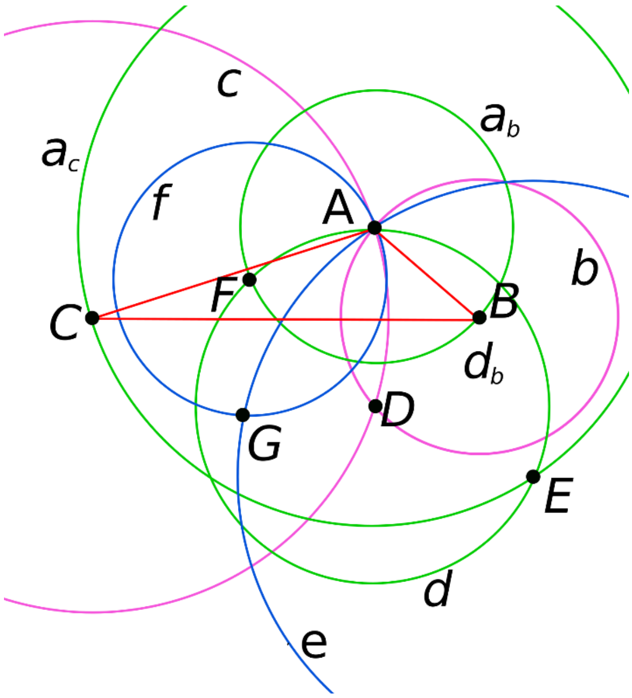
[2] Dit lukt niet altijd: als hoek A in driehoek ABC te groot is valt de cirkel d binnen de cirkel a. Dat gebeurt als de verhouding AC:BC≥ $\frac{1}{2}\sqrt{15}$. Bij bijzonder "platte" driehoeken hebbeen we meer cirkels nodig. Zie ook opgave 3.

bovenstaande gelijkheden zijn in de figuur aangegeven.

De gelijkbenige driehoeken ADE en AEG hebben de basishoek A gemeenschappelijk, en dus zijn ze gelijkvormig. Dus is:
$\frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AG}$ en dus ook $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AG}$. Dus is ABD gelijkvormig met AGB (verhouding en gemeenschappelijke hoek) Dus is AGB gelijkbenig en GA=GB dus is G het middelpunt van de omgeschreven cirkel (want vanwege de symmetrie is GB=GC) QED.
Opgave 2a: Beschrijf hoe op een analoge wijze de lengte van de straal van een niet gelijkbenige driehoek kan worden geconstrueerd , nu met 7 cirkels.

Uitwerking 2a:
We kondigden aan dat de constructie van het asymmetrische geval parallel loopt aan de constructie van het symmetrische geval, en dat er dan 7 in plaats van 6 cirkels nodig zijn.
Maar Gerard Bouwhuis verraste ons met een oplossing voor het asymmetrische geval met 6 cirkels!
Voor iedereen die -met meer of minder succes geprobeerd heeft om de door ons bedoelde oplossing - parallel aan het symmetrische geval- te vinden geven we hier eerst die oplossing met 7 cirkels. Daarna laten we zien hoe Gerard het deed met 6 cirkels.
Behalve de verbetering van Gerard was er nog een opmerkelijke inzending van Hans Huisman. Om het niet te ingewikkeld te maken behandelen we die aan het eind van deze uitwerking.

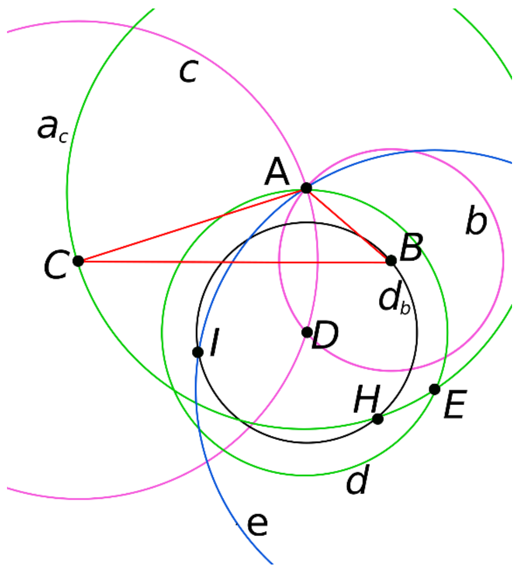
De constructie met 7 cirkels gaat parallel aan die voor het symmetrische geval, dus we spiegelen eerst A in BC en dan in EF. Alleen krijgen we nu 2 cirkels met A als middelpunt, één door B en één door C: We tekenen de volgende cirkels en snijpunten:
We construeren het spiegelbeeld van A in BC *en* noemen het D (2 roze cirkels)
b=$\odot(B, AB)$
c=$\odot(C, AC)$ b en c snijden elkaar in A, en spiegelbeeld D is het tweede snijpunt.
Drie groene cirkels
a_b =$\odot(A, AB)$
a_c =$\odot(A, AC)$
d=$\odot(D, AD)$
d en a_c snijden elkaar in twee punten; noem het rechter snijpunt E.
d en a_b snijden elkaar in twee punten; noem het linker snijpunt F.



figuur 3

We construeren, met 2 blauwe cirkels, het spiegelbeeld van A in EF en noemen het G:
$e=\odot(E, AE)$
$f=\odot(F, AF)$ e en f snijden elkaar in A, en spiegelbeeld G is het tweede snijpunt.
Bewering: de afstand AG is gelijk aan de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC
Opmerking: bij het bepalen van de punten E en F maakt het niet uit welk van de twee snijpunten we kiezen. Wel is het voor de nauwkeurigheid van de constructie van belang dat we één keer de linker en één keer de rechter nemen.

We geven nu de constructie van Gerard, met 6 cirkels:



figuur 4

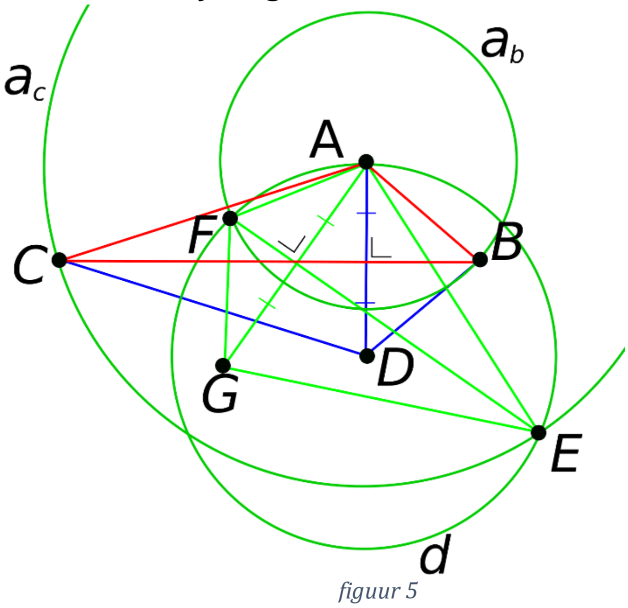
We construeren het spiegelbeeld van A in BC *en* noemen het D (2 roze cirkels als hiervoor)
$b=\odot(B, AB)$
$c=\odot(C, AC)$ b en c snijden elkaar in A, en spiegelbeeld D is het tweede snijpunt.
Twee groene cirkels
$a_c=\odot(A, AC)$
$d=\odot(D, AD)$
d en a_c snijden elkaar in twee punten; noem het rechter snijpunt E.
Een blauwe cirkel $e=\odot(E, AE)$
Een zwarte cirkel $d_b=\odot(D, DB)$
Het rechter snijpunt van a_c en d_b noemen we H en het snijpunt van e en d_b dat we vinden door punt H rechtsom over een hoek $<180^0$ te roteren om D noemen we I (er is nog een 2e snijpunt van e en d_b dat we <u>niet</u> moeten hebben).
Bewering: de afstand HI is gelijk aan de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC
Vergelijken we de twee constructies dan zien we dat de cirkels b, c, a_c, d en e in beide constructies gelijk zijn. Ook de punten A, B, C, D en E zijn in beide constructies zijn gelijk.
Het verschil is dat Gerard de cirkel a_b vervangt door de cirkel d_b, dus het spiegelbeeld van cirkel a_b in de lijn BC.
Daardoor ontbreekt in zijn constructie het punt F en dus ook de cirkel f en punt G. En dan blijkt dat op d_b twee punten H en I te vinden zijn met een afstand gelijk aan de straal van de omgeschreven cirkel!

Opgave 2b: Geef ook hiervan het bewijs.
Uitwerking 2b:
We moeten dus twee bewijzen geven, één voor elk van de twee constructies.

Beide bewijzen maken gebruik van een stelling die het verband bepaalt tussen de straal van de omgeschreven cirkel van een driehoek en een hoogtelijn in die driehoek: In driehoek *ABC* met zijden *a*, *b* en *c* geldt voor de hoogtelijn uit *A* h_a en de straal *r* van de omgeschreven cirkel: $r = \frac{b.c}{2h_a}$. De stelling is bekend in de literatuur, maar is ook vrij gemakkelijk te bewijzen.[3])

We beginnen met het bewijs voor de constructie met 7 cirkels:

We zagen al dat *D* het spiegelbeeld is van *A* in *BC* en *G* het spiegelbeeld van *A* in *EF*. We kunnen daarom de figuur vereenvoudigen en de cirkels *b*, *c*, *e* en *f* weglaten. Die waren alleen nodig om *A* in *BC* resp. *EF* te spiegelen. (*Zie figuur 5*)



figuur 5

In de vierhoek *ABDC* is dus de diagonaal *BC* de middelloodlijn van *AD* en in de vierhoek *AEGF* is *EF* de middelloodlijn van *AG*.

Ten slotte geldt dat *A*, *E* en *F* op de cirkel *d* met middelpunt *D* liggen.

We passen nu de bovengenoemde stelling 2x toe, op de driehoeken *ABC* en *AEF*.

De hoogtelijnen zijn dan de helft van resp. *AD* en *AG*. Laat daarin *r* de straal zijn van de omgeschreven cirkel van *ABC*.

De straal van de omgeschreven cirkel van *AEF* weten we: cirkel *d* is deze omgeschreven cirkel en de straal daarvan is *AD*.

In *ABC*: $r = \frac{AB.AC}{2AD/2} = \frac{AB.AC}{AD}$

In AEF: $AD = \frac{AE.AF}{2AG/2} = \frac{AF.AE}{AG}$ invullen levert:

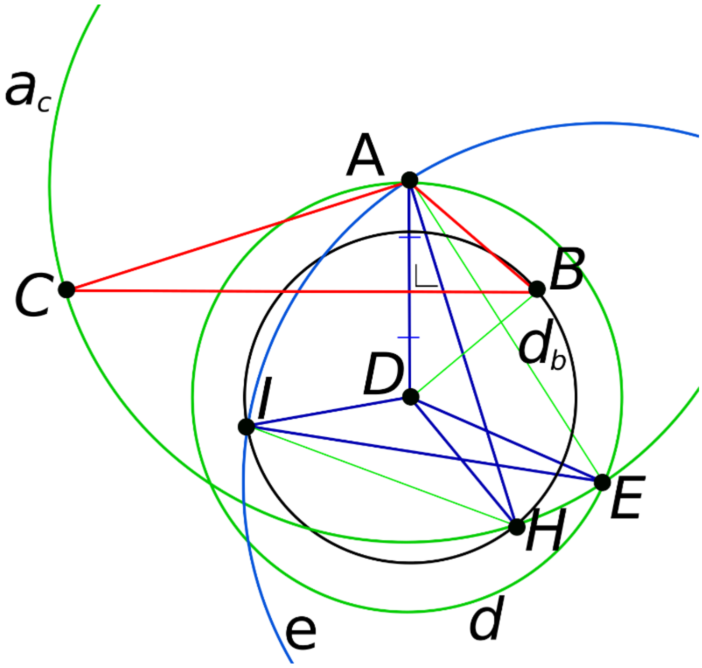
$r = \frac{AB.AC}{AD} = \frac{AB.AC}{AF.AE}.AG$

Omdat *B* en *F* beide op cirkel a_b liggen geldt *AB*=*AF* en omdat *C* en *E* beide op a_c liggen geldt *AC*=*AE*, dus hebben we *r* = *AG*.

QED.

Nu volgt het bewijs voor de constructie van Gerard met 6 cirkels.

Ook hier vereenvoudigen we de figuur door de cirkels *b* en *c*, die alleen gebruikt worden om het spiegelbeeld *D* van *A* in *BC* te construeren, weg te laten. In plaats daarvan geven we in de figuur aan dat *BC* de middelloodlijn is van *AD*. (zie figuur 6)

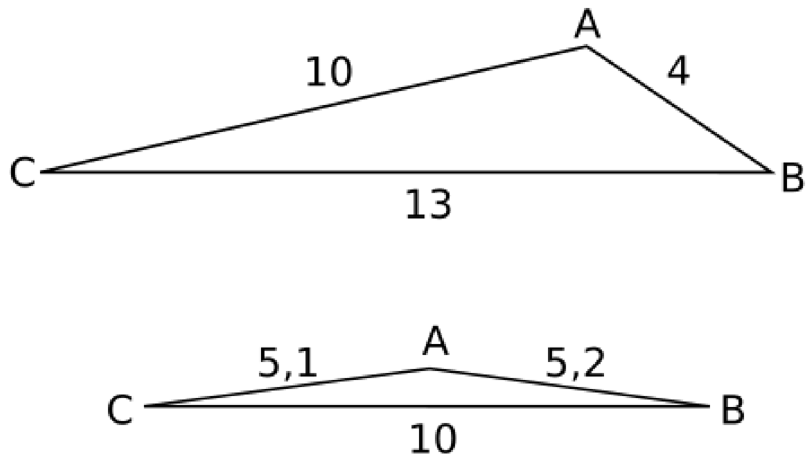


figuur 6

[3] Zie voor bewijs blz 9

We tekenen de driehoeken ADH en EDI, en we trekken DB, IH en AE. Nu geldt: ID=HD (beide zijn stralen van d_b),
DE=DA (beide zijn stralen van d),
en EI=AH
(EI en EA zijn stralen van e en AE en AH zijn stralen van a_c, en die stralen zijn gelijk omdat ze beiden gelijk zijn aan AE).
ADH en EDI zijn dus gelijkvormig, dus $\angle ADH = \angle EDI$. Trekken we van deze beide hoeken $\angle EDH$ af dan krijgen we $\angle ADE = \angle HDI$. Omdat de driehoeken ADE en HDI gelijkbenig zijn (de benen van de driehoeken zijn stralen van de cirkels d resp. d_b) zijn zijn ze dus gelijkvormig, met: $\frac{DI}{IH} = \frac{DA}{AE}$.
Nu geldt:
1) DI=DB (stralen van d_b) en DB=AB (B op middelloodlijn van AD) dus DI=AB
2) DA = $2h_a$ (met h_a is de hoogtelijn uit A in ABC)
3) AE= AC (stralen van a_c)
Invullen geeft: $\frac{AB}{IH} = \frac{2h_a}{AE}$

Er schuilt nog wel een klein addertje onder het gras, want het lukt niet altijd zomaar met willekeurig elke driehoek. Soms moet je punt A met zorg kiezen, maar soms lukt ook dat niet. Dan hebben we een extra punt op de omgeschreven cirkel nodig. We hebben dan wel één of meer extra cirkels nodig om de lengte van de straal te construeren, maar uiteindelijk lukt het.

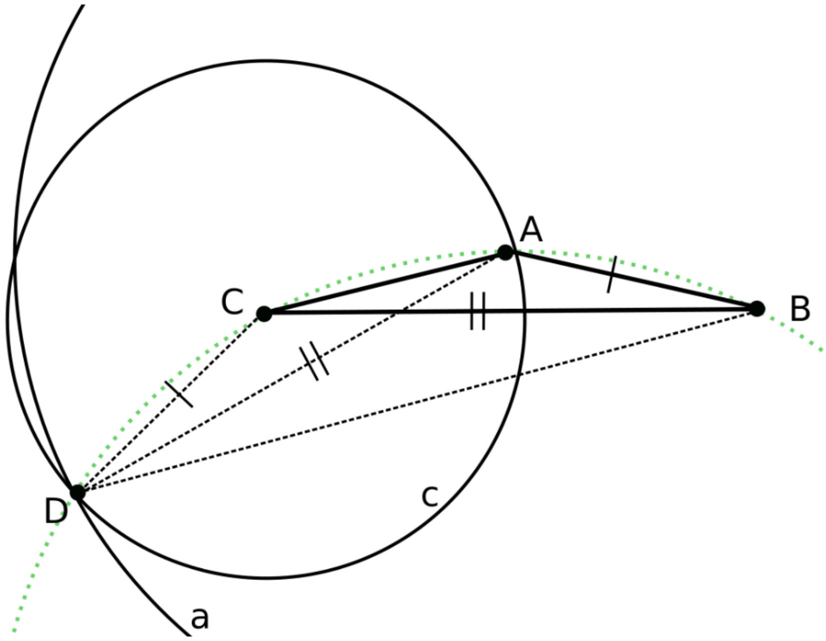


figuur 7

Opgave 3: Laat zien hoe dat kan met een driehoek met zijden AB=4, AC=10 en BC=13 en ook een met zijden AB=5,2, AC=5,1 en BC=10

Uitwerking 3:
Als we proberen de in opgave 2 beschreven constructie uit te voeren met deze driehoeken ontstaat er een probleem: de cirkel d valt geheel binnen de cirkel a_c (en bij de 2e driehoek ook nog binnen de cirkel a_b). Het punt E (of de punten E en F) bestaat dus niet.
Bij de driehoek met zijden 4, 10 en 13 redden we het nog door de punten te verwisselen, als we het punt C gebruiken in de rol die in de constructie hierboven door

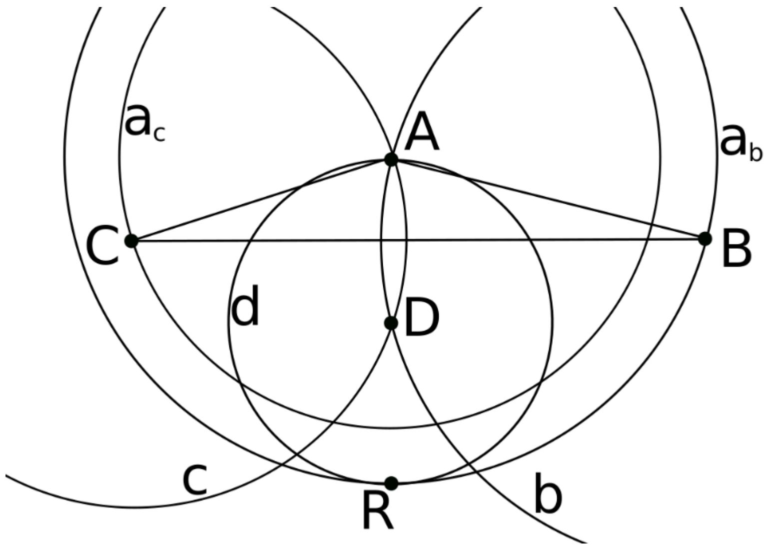
punt A werd ingenomen lukt het wel (tenminste in onze constructie; in de constructie van Gerard is dat niet zo).
Bij de driehoek met zijden 10, 5,1 en 5,2 lukt ook dat niet. Het lukt dan alsnog door (een of meer) extra punten te construeren die op de omgeschreven cirkel liggen.
In ons geval als volgt: (zie figuur 8)
Driehoek ABC (AB=5,2, AC=5,1 en BC=10)
Cirkel c is de cirkel met middelpunt C, straal AB.
Cirkel a is de cirkel met middelpunt A, straal BC.
Punt D is het “onderste” snijpunt van de 2 cirkels.
Gevolg: $ABC \cong CDA$. De straal van de omgeschreven cirkels van beide driehoeken is dus gelijk, AC is een koorde van beide cirkels en in beide cirkels ligt de kortste boog AC boven de koorde AC. De cirkels vallen dus samen, en dus ligt D op de omgeschreven cirkel van ABC.



figuur 8

Die cirkel is dus ook de omgeschreven cirkel van driehoek BDA, en daarvan kunnen we de straal van de omgeschreven cirkel wel construeren, als we D gebruiken als ‘centrum’ van de constructie.
Als de driehoek waarmee we beginnen nog ‘platter’ is dan het hier gegeven voorbeeld dan is het mogelijk dat de constructie in de ‘nieuwe’ driehoek nog niet lukt, maar dan kunnen we hierboven beschreven constructie herhalen, waardoor de resulterende driehoeken steeds minder ‘plat’ worden tot we een driehoek hebben waarmee het wel lukt.
Opgave 4: Aan welke voorwaarde moet de driehoek voldoen om vanuit een bepaald hoekpunt A de constructie uit te kunnen voeren zonder dat extra punt?
Uitwerking 4:
We zagen in opgave 3 dat bij onze constructie bij de eerste driehoek nog lukt als we punt C spiegelen in AB (in plaats van punt A in BC), maar bij de constructie van Gerard niet. Dat betekent dat de bedoelde voorwaarde bij de constructie van Gerard anders is dan bij onze constructie. We geven hier eerst de voorwaarde bij onze constructie. Hiervoor gaan we nog even terug naar de constructie in figuur 3.

Figuur 9 laat een constructie zien tot en met cirkel d.
R is het snijpunt van het verlengde van AD met de grootste van de cirkels a_b en a_c.
In figuur 9 raakt cirkel d aan cirkel a_b, zodat de constructie net wel/niet lukt.



figuur 9

Die cirkels hebben A en D als middelpunt, dus ligt het raakpunt op één lijn met AD, en dus in R. De afstand AR is dus het dubbele van AD. We zagen eerder dat AD het dubbele is van de hoogtelijn h_a in driehoek. ABC. Om de constructie te laten lukken zonder eerst extra punten te bepalen moet 4 h_a> AR. Verder is AR de straal van grootste van de twee cirkels a_b en a_c en dus gelijk aan de grootste van de lijnstukken AB en AC.

We hebben dus: De constructie met A als middelpunt lukt zonder extra punten als $4h_a >$ max(AB, AC)

Het is natuurlijk ook belangrijk om te weten welk van de drie hoeken we het beste als middelpunt van de constructie kunnen nemen.
Hiervoor gaan we terug naar de stelling die het verband aangeeft tussen een hoogtelijn van een cirkel en de straal van de omgeschreven cirkel:
$r = \frac{b.c}{2h_a}$ of : $2h_a = \frac{b.c}{r}$ dus $4h_a = \frac{b.c}{r} = c.\frac{b}{r}$. Als c>b lukt het dus met een constructie vanuit A als $\frac{b}{r} > 1$. Stel (om de gedachten te bepalen) dat c>b>a. Dan lukt de constructie vanuit B en C als $\frac{a}{r} > 1$ en als daaraan voldaan wordt dan geldt ook $\frac{b}{r} > 1$.
Conclusie: als a de kortste zijde is dan kunnen we (bij “platte” driehoeken) het beste construeren vanuit A. De constructie lukt dan als $4h_a >$ max(b, c)

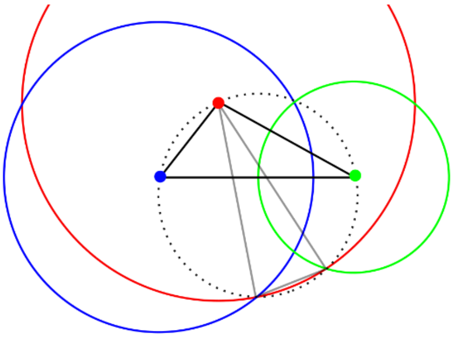
In onze constructie is dat genoeg: het garandeert dat het punt E bestaat. De constructie van de punten D en G bestaat uit een spiegeling van een punt in een lijn waarvan 2 punten gegeven zijn, en die constructie lukt altijd.

Maar in de constructie van Gerard moet niet alleen het punt E bestaan (Het punt D is in beide constructies gelijk), maar ook de punten H en I. I is het snijpunt van de cirkels d_b=$\odot(D, DB)$ en e=$\odot(E, AE)$. Voor de zijden van de driehoek EID geldt dan: EI=AE=AC=b, (want A en I liggen beide op e=$\odot(E, AE)$ en E en C liggen op a_c=$\odot(A, AC)$).
ID=DB=AB=c, (want I en B liggen beide op d_b=$\odot(D, DB)$ en D is het spiegelbeeld van A in BC)
ED=AD=$2h_a$ (want A en E liggen beide op d=$\odot(D, AD)$.

I bestaat dus als b, c en $2h_a$ een driehoek kunnen vormen. Dat mislukt als $|b\text{-}c|>2h_a$
Voor het bestaan van *H* krijgen we hetzelfde resultaat.
Voor de constructie van Gerard moet dus $4h_a$ > max(b, c) en $2h_a$ >|b-c|. Bewijs verband tussen hoogtelijn en straal omgeschreven cirkel in een driehoek:

De inzending van Hans Huisman opgave 2, 3 en 4.

Hans construeert bij opgave 2 extra punten die op de omgeschreven cirkel van de gegeven driehoek liggen, zodanig dat ze met één van de gegeven punten een gelijkbenige driehoek vormen. Dat lukt met 3 cirkels (elke cirkel met als straal de overstaande zijde van zijn middelpunt). Daarna gebruikt hij de methode van opgave 1 om het middelpunt (en dus de straal) te vinden. Daarbij kan één van de 3 eerste cirkels opnieuw gebruikt worden, zodat hij na 8 cirkels het middelpunt vindt.



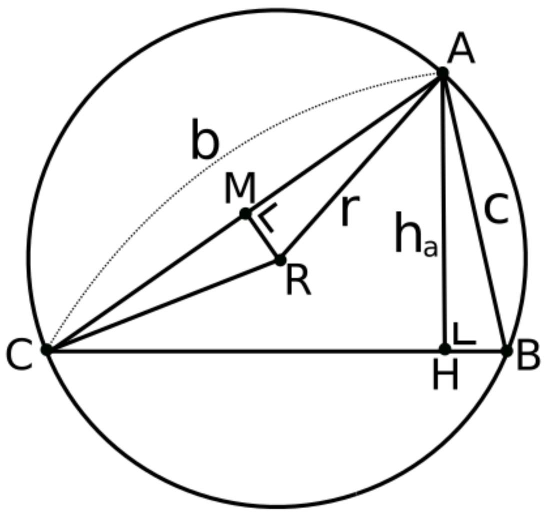
figuur 10

Dat is natuurlijk niet wat wij vroegen, maar hij heeft zo wel een methode om na 8 cirkels het middelpunt te vinden. Als je dat doet met onze methode heb je na het vinden van de straal nog 2 cirkels nodig, dus dan heb je daarvoor, net als bij de methode met inversie, 9 nodig.
Verder heeft zijn methode voordelen bij de 'platte' driehoeken uit opgave 3 en 4, omdat, bij een goede keuze van het middelpunt van de constructie, de ontstane gelijkbenige driehoek veel minder 'plat' is dan de oorspronkelijke driehoek. Het gevolg is dat hij in opgave 3 geen extra cirkel nodig heeft.

Bewijs van de stelling:
Te bewijzen: In driehoek *ABC* met zijden *a*, *b* en *c* geldt voor de hoogtelijn uit *A* h_a en de straal *r* van de omgeschreven cirkel: $r = \frac{b.c}{2h_a}$

Bewijs: in figuur 11 is *R* het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*. *RA* = *r* is dus de straal van de omgeschreven cirkel. *H* is het voetpunt van de hoogtelijn uit *A* en h_a de lengte van die hoogtelijn. *M* is het midden van *AC*. De hoeken ∠*AHB* en ∠*AMR* zijn dus recht.

∠*CRA* is de middelpuntshoek op boog *CA*, en ∠*CBA* is een omtrekshoek op boog *CA*, dus
∠*CRA* = 2 ∠*CBA* en omdat Δ*CRA* gelijkbenig is hebben we: ∠*CRA* = 2 ∠*MRA* dus ∠*CBA* = ∠*MRA.*
Dus de rechthoekige driehoeken $\Delta ABH \approx \Delta ARM$.
Dus $\frac{r}{\frac{1}{2}b} = \frac{c}{h_a}$ dus $r = \frac{b.c}{2h_a}$. QED.



figuur 11