EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Help leerlingen verder met heuristiekbomen

Wat bedoelen ze toch met... statistical literacy?

Lockdown wiskunde in het verleden

Meetkunde in vwo 6

NR.2

JAARGANG 96 - OKTOBER 2020

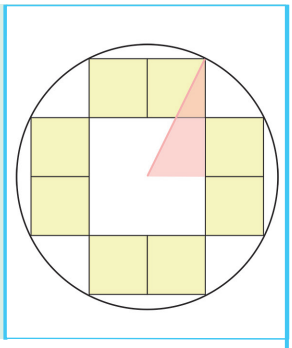
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 96 NR2

IN DIT NUMMER

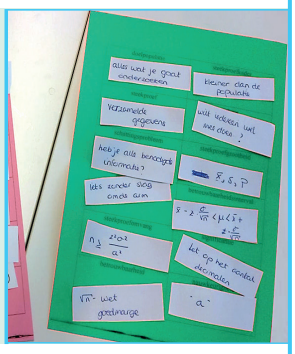
VASTGELOPEN?
JE KUNT DE BOOM IN!
Theo van den Bogaart
Rogier Bos
4



COMPUTATIONEEL DENKEN BIJ VWO WISKUNDE A
EEN WERKMIDDAG OVER HET K-MEANS-ALGORITME
Jelle Neeft
Mark Timmer
8

WORTELS VAN DE WISKUNDE
17: LOCKDOWN WISKUNDE
Desiree Van Den Bogaart
Viktor Blåsjö
12

GOING LOCO!
Desiree van den Bogaart
16



DUALITEIT IN MEETKUNDE
Martin Kindt
18

MEETKUNDE IN VWO 6
Sjef van Dongen
23

BOEKBESPREKING KANSPROBLEMEN EMPIRISCH IN ACTIE
Alex van den Brandhof
26

'DE VLOEK VAN KENNIS'
René Kneyber
28

UITDAGENDE PROBLEMEN
WORSTELEN MET EEN INTEGRAAL
Jacques Jansen
30

HOE DIK MOGEN STAARTEN ZIJN?
Luc Van den Broeck
33

WERELDWISKUNDE FONDS
VISUALISEREN VAN REKENEN EN WISKUNDE IN INDONESIË
Ed van den Berg
Helti Lygia Mampouw
36

VASTGEROEST
Ab van der Roest
38

Foto: 'Adamas' (Diamant) is het nieuwe zandstrooikunstwerk van Elvira Wersche, onderdeel van de tentoonstelling Natura Artis Magistra in Museum Schloss Moyland, vlak over de grens bij Kleve. Zie de aankondiging hieronder.

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

WIS EN WAARACHTIG 40

WITJE: HOE LANG MOET EEN VETER ZIJN? 41

VERENIGINGSNIEUWS
NOTULEN VAN DE
NVVW-JAARVERGADERING 2019 42

PUZZEL 44
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

SERVICEPAGINA 46

Het zandstrooikunstwerk dat op de omslag is afgebeeld is te zien op de tentoonstelling Natura Artis Magistra in museum Schloss Moyland. Hedendaagse kunstenaars tonen structuren en patronen, gemaakt van natuurlijke materialen zoals zand, bladeren, zaden, wortels en zelfs vliegen. De tentoonstelling is te zien tot 15 februari 2021.

Kort vooraf

Het Simon-Stevinjaar loopt op zijn einde. 400 jaar geleden overleed deze briljante visionair. Onlangs vond het onlinesymposium 'In de geest van Stevin' plaats, dat werd georganiseerd door de werkgroep Geschiedenis van de NVvW. *Euclides* gaat het herdenkingsjaar afsluiten met enkele opbrengsten van dit symposium, maar dat zie je in de komende nummers. Het inspireerde me in ieder geval om eens op te zoeken of het waar is dat ons woord 'wiskunde' door Simon Stevin is bedacht: 'wisconst'. De bronnen lijken het allemaal te bevestigen. Ergens las ik zelfs dat hij ook het woord 'scheikunde' heeft bedacht.
Wiskunst komt in dit nummer zeker aan bod. Ab van der Roest bleef in eigen land, hield deze zomer zijn ogen open en kwam veel uiteenlopende wiskundige kunstwerken tegen. Een goede aanleiding om de jaarlijkse *Ars et Mathesis*-dag op 21 november aanstaande aan te kondigen.

Terwijl Europa geteisterd werd door een hittegolf heb ik me, als lid van het strooi-collectief van Elvira Wersche, weer heerlijk uit kunnen leven in de permanente koelte van een museum waar we in een week tijd het werk gestrooid hebben dat de voorkant van deze *Euclides* siert. Een aanrader! Een beetje je eigen hobby's promoten op deze bladzijde mag toch best?

Veel genoegen met het lezen van deze *Euclides*, ik hoop velen van jullie op mijn scherm aan te treffen tijdens de jaar-vergadering van de NVvW op 7 november!

Tom Goris

Theo van den Bogaart, Rogier Bos

Vastgelopen? Je kunt de boom in!

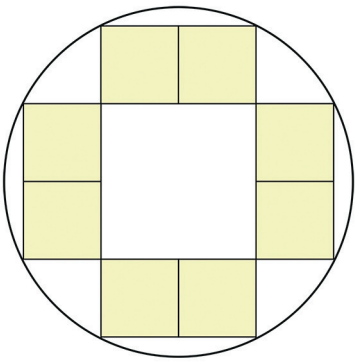
Hoe ondersteun je leerlingen die zelfstandig werken aan uitdagende, denk-actieve opgaven, als ze – onverhoopt maar niet onverwacht – vastlopen? Lees hoe interactieve heuristiekbomen deze leerlingen weer op gang helpen, en ze gaandeweg leren hun aanpak te structureren én heuristische technieken te ontwikkelen.

Inleiding

Gedurende een intelligente lockdown werken leerlingen meer dan normaal zelfstandig aan opgaven. Als leerlingen werken aan opgaven die niet routinematig opgelost kunnen worden en vastlopen, zit er vaak niets anders op dan bij de antwoorden te kijken. Natuurlijk worden er bij zulke denk-actieve opgaven vaak hints aangeboden, maar aan die praktijk valt nog wel wat te verbeteren. Dit artikel gaat over een visie op hints en een nieuwe digitale tool om die aan te bieden.

Problemen

Aan de hand van het volgende voorbeeld leggen we uit hoe we te werk gaan.



figuur 1 Probleem: de cirkel in figuur 1 heeft oppervlakte 4π. Wat is de oppervlakte van een vierkantje?

Hoe kun je leerlingen ondersteunen bij zo'n probleem op een manier dat ze ook van de aangeboden hulp nog zo veel mogelijk leren? Dat is de uitdaging die we aangaan.

We bespreken eerst twee al wat langer bekende aspecten van probleemaanpak – voorkennis en heuristieken – daarna introduceren we ons idee van heuristiekbomen. Hoe problematisch het probleem is hangt natuurlijk af van de voorkennis en ervaring van de leerling. We gaan hier uit van een enigszins onervaren 2, 3 of 4 havo- of vwo-leerling. De benodigde voorkennis voor het probleem bestaat onder andere uit concepten, zoals vierkant, cirkel, en daarmee samenhangend, straal, en enkele proposities: (1) over de oppervlakte van een vierkant, (2) over de oppervlakte van een cirkel, en (3) de stelling van Pythagoras. Achter elk van de proposities gaat een techniek schuil om deze toe te passen in een concrete situatie. Maar het kennen en beheersen van deze concepten, proposities en technieken is nog niet voldoende om het probleem te kunnen oplossen. Je moet eerst een idee hebben.

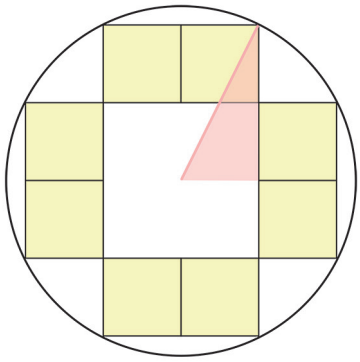
Heuristieken

Heuristieken helpen bij het ontwikkelen van ideeën voor een aanpak. De rol van heuristieken in probleemaanpak werd in de jaren '50 door Pólya[1] onder de aandacht gebracht. Een heuristiek bij dit probleem zou kunnen zijn: 'teken een geschikte hulplijn'. Onderzoek van Schoenfeld[2] en enkele voorgangers toonde echter aan dat leerlingen het moeilijk vinden om zo'n algemene handwijzing in een nuttige actie om te zetten. Schoenfeld zei dat zo'n algemene heuristiek eerder een label is voor een hele verzameling meer onderwerp-specifieke heuristische technieken. In dit geval zou dat bijvoorbeeld zijn: 'In een probleem met een cirkel is het nuttig de straal door een of meer voor het probleem relevante punten te tekenen en te onderzoeken of deze lijnstukken van gelijke lengte

bijdragen aan de oplossing'. Schoenfelds onderzoek toonde transfer aan: leerlingen konden deze specifiekere heuristische technieken wel met succes toepassen bij nieuwe problemen. Een andere heuristiek die onder het hulplijn-label valt is: 'Als je de lengte van een lijnstuk wilt berekenen, probeer dan hulplijnen door enkele voor het probleem relevante punten te tekenen zodat het lijnstuk onderdeel wordt van een rechthoekige driehoek. Onderzoek of de lengte van de hulplijnen bepaald kunnen worden.'

Compressie en decompressie

Spoiler-alert! Dan nu de oplossing zoals een ervaren wiskundige die zou kunnen verwoorden: ik bereken de straal uit de oppervlakte van de cirkel. Dat is de diagonaal van een rechthoek van twee tegen elkaar geschoven vierkanten, zie figuur 2. Met behulp van Pythagoras en verhoudingen bereken ik de zijde van een vierkant. Daarmee bereken ik de oppervlakte. Het uitwerken van deze ideeën is vervolgens voor de ervaren wiskundige een peulenschil. Een onervaren leerling zou het zo waarschijnlijk niet bedacht hebben en het is maar de vraag of deze beschrijving zo'n leerling verder zou helpen.



figuur 2

Het verschil is dat de ervaren wiskundige zijn kennis *gecomprimeerd* heeft. Als hij aan Pythagoras denkt, dan is dat niet in termen van een stappenplan, maar eerder in de eigenschappen die bepalen of deze toepasbaar is, bijvoorbeeld: 'als ik twee zijden ken, dan kan ik de derde berekenen'. Doordat de routines voor berekeningen met Pythagoras als betrouwbare techniek in het langetermijngeheugen resideren, ontstaat er ruimte in het werkgeheugen om de aandacht te verschuiven naar dit soort andere aspecten van Pythagoras, die ondersteunend zijn bij het verzinnen van een strategie. Evenzo, maar iets eenvoudiger: gedachtes aan procedures voor het rekenen aan de cirkeloppervlakte zijn gecomprimeerd tot 'ik kan heen en weer rekenen tussen oppervlakte en straal: weet ik de een dan weet ik de ander'. Gecomprimeerde gedachten zorgen voor een goed georganiseerd 'opgeruimd' brein waarin problemen kunnen worden teruggebracht tot een overkomelijk aantal stappen. Op het moment dat in gecomprimeerde taal een oplossing is gevonden, dan kan die worden gedecomprimeerd tot een volledige uitwerking, mits je kunt vertrouwen op je routines en conceptuele kennis.

Heuristiekbomen

Leerlingen maken zich nieuwe stof eigen in ongecomprimeerde vorm, bijvoorbeeld in de vorm van het bestuderen van veel voorbeelden en stappenplannen. Heuristiekbomen bieden hulp door de compressie-decompressiedynamiek te tonen. Leerlingen worden ook geholpen door de fasen van probleemaanpak – oriëntatie, plannen maken en uitvoeren, afronding – in de boomstructuur te verwerken. Een heuristiekboom, zie figuur 3, is een boom van door lijnen verbonden kaartjes waarvan de inhoud (in de grijze blokken) zichtbaar wordt als je erop klikt. Bij de stam staan er zichtbaar vragen op de kaartjes die een indruk geven van wat er van die tak te verwachten valt (in de witte blokken).

In de oriëntatietak wordt relevante voorkennis geactiveerd. Op de kaartjes met de vragen 'Wat zijn belangrijke begrippen?' en 'Waar moet je aan kunnen rekenen?' worden relevante concepten en formules eerst benoemd en zo nodig toegelicht verder langs de tak. Natuurlijk worden verhoudingen of de stelling van Pythagoras hier nog niet genoemd, want je wilt de leerling de kans geven zelf te ontdekken dat deze van belang zijn. De volgende tak richt zich op het vinden van een opening, een idee. Hier zie je de decompressie van de heuristiek 'teken een hulplijn' uitgewerkt in de boom.
De tak daarna beschrijft hoe een idee kan worden omgezet in een plan in drie overzichtelijke stappen.
Essentieel is dat een leerling die vastloopt hier wordt getoond dat je op zoek kunt naar een aanpak in deze algemene bewoordingen, zonder direct op de details in te gaan. De volgende tak biedt hulp aan leerlingen die wel een plan hebben, maar vastlopen bij de uitwerking.
Er worden twee varianten van aanpak ondersteund.
Tot slot is er aandacht voor de afrondingsfase: leuk dat je het probleem hebt opgelost, maar wat kun je er verder nog van leren?

>

Oriënteren

Wat zijn belangrijke begrippen in dit probleem?

De cirkel en de straal van een cirkel. Wat zijn dat?
Een vierkant. Wat is dat?

→ Een cirkel bestaat uit alle punten op gelijke afstand van het middelpunt. Een lijnstuk van het midden naar de rand heet een straal en die is dus voor ieder punt even lang.

→ Een vierkant is een vierhoek met rechte hoeken en zijden van gelijke lengte.

Waar moet je aan kunnen rekenen?

De oppervlakte van een cirkel. Hoe moet dat?
De oppervlakte van een vierkant. Hoe moet dat?

→ De oppervlakte A van een cirkel met een straal r is $A = \pi r^2$.

→ De oppervlakte van een vierkant met zijde z is z^2.

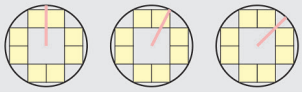
Plannen maken & uitvoeren

Hoe maak ik een begin met een plan?

Teken geschikte hulplijnen.

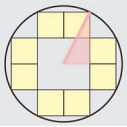
→ Bij een probleem met een cirkel is het vaak nuttig de straal door één of meer relevante punten op de omtrek te tekenen en te onderzoeken of deze bijdragen aan het oplossen van het probleem.

→ Teken een straal naar het hoekpunt van een vierkant op de cirkel, bijvoorbeeld:



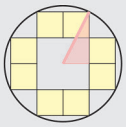
→ Als je de lengte van een lijnstuk wilt berekenen, probeer dan hulplijnen door enkele voor het probleem relevante punten te tekenen zo dat het lijnstuk onderdeel wordt van een rechthoekige driehoek. Onderzoek of de lengte van de hulplijnen bepaald kunnen worden.

→ Teken een rechthoekige driehoek, zoals bijvoorbeeld hieronder:



Hoe maak ik een plan?

Je kunt onderstaande driehoek gebruiken:



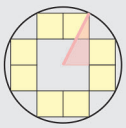
Uit de oppervlakte van de cirkel kun je de straal berekenen. Hoe ga je dan verder?

→ Met de stelling van Pythagoras kun je de andere zijden van de driehoek berekenen. Wat is dan de laatste stap?

→ Uit de korte zijde bereken je de oppervlakte van een vierkantje.

Hoe reken ik aan het plan?

Het plan is om onderstaande driehoek te gebruiken:



Vanuit de oppervlakte van de cirkel bereken je de straal. Hoe moet dat? Met behulp van de driehoek bereken je vervolgens de zijde van het vierkant. Hoe moet dat? Dat kan met (1) verhoudingen of met (2) variabelen. Daarmee bereken je vervolgens de oppervlakte.

→ De oppervlakte $A = 4\pi = \pi r^2$. Hoe ga je verder?

→ Hieruit volgt $r^2 = 4$, dus $r = 2$.

→ De verhouding van de zijden van de rode driehoek kun je berekenen met de stelling van Pythagoras. Stel de kortste zijde heeft lengte 1. Hoe moet het dan verder?

→ De lange rechthoekszijde heeft dan lengte 2. Met de stelling van Pythagoras bereken je de schuine zijde: $\sqrt{(1^2 + 2^2)} = \sqrt{5}$. Vanwege gelijkvormigheid is de lengte z van een zijde van een vierkantje dus $\sqrt{5}$ keer kleiner dan de straal: $z = 2/\sqrt{5}$.

→ De korte rechthoekszijde heeft lengte z, de lange dan $2z$. Gebruik de stelling van Pythagoras om een vergelijking in z op te stellen en los deze op.

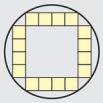
→ De vergelijking luidt: $z^2 + (2z)^2 = r^2$, dus $5z^2 = 4$, ofwel $z = 2/\sqrt{5}$.

Afronden

Wat kun je nog meer, nu je dit probleem kunt oplossen?

Bedenk hoe je met dezelfde technieken het probleem kunt oplossen voor andere aantallen vierkantjes.

→ Het kan met drie, vier of meer vierkantjes naast elkaar in plaats van twee. Zie het voorbeeld met vier hieronder:



Wat voor verband heb je ontdekt?

Als je de oppervlakte van de cirkel twee keer zo groot maakt, hoeveel keer groter is dan de oppervlakte van een vierkantje?

→ Er is sprake van een evenredig verband.

figuur 3 Een volledige, opengeklapte heuristiekboom, de interactieve versie staat op de website

> "Het is belangrijk om te beginnen met kleine problemen met kleine bijbehorende boompjes"

Implementatie en ervaringen

Bij enkele eerste ervaringen[3] kwamen we erachter dat het belangrijk is om te beginnen met kleine problemen met kleine bijbehorende boompjes. Leerlingen moeten wennen aan het hulpmiddel en geleidelijke groei helpt daarbij. Ook introduceerden we een *flow chart*[4] die leerlingen helpt hulp te zoeken op het juiste moment op de juiste plek in de heuristiekboom. De tweede ervaring was een zeer goede[5]: twee derde klassen werkten twee keer drie kwartier aan een set problemen vergelijkbaar met het voorbeeld hier. De leerlingen werkten met succes, enthousiasme en vrijwel zonder hulp van de docente. Dat was wel prettig, want normaal gaan bij een lastig probleem juist alle vingers tegelijk de lucht in.

Recent hebben we, als onderdeel van een vervolgonderzoek, heuristiekbomen aangeboden bij de huiswerkopgaven voor Getaltheorie aan de lerarenopleiding van de HU. Deze groep kon bevestigen dat het gebruik van heuristiekbomen hen bewuster maakte van de algemene getal theoretische inzichten en technieken uit de cursus, maar het is nog te vroeg om te concluderen dat dit ze ook hielp bij het aanpakken van nieuwe problemen waarbij deze van pas kwamen.

Natuurlijk lijken er ook restricties aan het gebruik van heuristiekbomen te zitten; de meest prominente misschien wel de inflexibiliteit: je kiest één niveau en (meestal) één aanpak waarop hulp wordt geboden. Toch lijkt dit in de praktijk niet veel moeilijkheden te veroorzaken. Als de docent beschikbaar blijft, kan hij in deze gevallen bijspringen, omdat hij verder goed ontlast wordt.

De leraren-in-opleiding gaven aan dat ze het prettig vinden dat ze niet meteen naar het antwoordmodel hoeven te grijpen als ze vastlopen. Doordat ze bovendien in kleine stappen verder geholpen worden, behouden ze maximaal eigenaarschap over de uiteindelijke oplossing.

Zelf aan de slag

Ben je enthousiast geworden over heuristiekbomen, dan bieden we een aantal mogelijkheden om er zelf met je klas mee aan de slag te gaan.

Ten eerste vind je op de website van *Euclides* een set problemen rond de Stelling van Pythagoras met ondersteunende heuristiekbomen in pdf, klaar voor gebruik.

vakbladeuclides.nl/962heuristiekbomen

Wil je er dieper induiken, dan kun je aan de slag met onze LaTeX-bestanden om klikbare heuristiekbomen-pdf's te maken. Ondertussen zijn we gestart met het ontwikkelen van een gebruiksvriendelijke, webbased applicatie voor het maken en aanbieden van heuristiekbomen en het volgen van het gebruik.

Noten

[1] Pólya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Zie: *https://doi.org/doi:10.2307/j.ctvc773pk*

[2] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* *Zie: https://doi.org/10.1016/C2013-0-05012-8*

[3] Bos, R. (2017). Structuring hints and heuristics in intelligent tutoring systems. In G. Aldon & T. Jana (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 436–439). Zie: *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970*

[4] Zie: *vakbladeuclides.nl/961heuristiekbomen*

[5] Lemmink, R. (2019). *Improving Help-Seeking Behavior for Online Mathematical Problem-Solving Lessons* (Universiteit Utrecht). Zie: *https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/382857*

Over de auteurs

Rogier Bos werkt als universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en is redactielid van de *Euclides*. Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde en onderzoeker voor het lectoraat Wiskundig en analytisch vermogen van professionals aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadressen: *r.d.bos@uu.nl* en *theo.vandenbogaart@hu.nl*

Jelle Neeft, Mark Timmer

Een werkmiddag over het K-means-algoritme

Computationeel denken bij vwo wiskunde A

In het kader van zijn afstuderen ontwikkelde Jelle Neeft een praktische opdracht over computationeel denken voor vwo 5 wiskunde A. Samen met zijn afstudeerbegeleider Mark Timmer doet hij verslag van zijn bevindingen.

Inleiding

Met de steeds maar groeiende impact van digitale technologie in de wereld om ons heen, zowel in het dagelijks leven als in de wetenschap, ligt het voor de hand om het wiskundeonderwijs ook in deze richting bij te sturen. Het is daarom niet onverwacht dat het concept 'computationeel denken' steeds vaker aan bod komt als het gaat over de toekomst van het wiskundeonderwijs.[1] Simpel gezegd komt computationeel denken neer op het zodanig formuleren van problemen dat deze met behulp van computertechnologie opgelost kunnen worden. Te denken is dan aan onderwerpen als decompositie, abstractie, patroonherkenning en algoritmiek. Computationeel denken past goed bij het wiskundig denken uit de vernieuwde wiskundeprogramma's, waarin aspecten als probleemoplossen, modelleren, abstraheren en analytisch denken van belang zijn. De wederkerige relatie tussen wiskunde en computationeel denken – computationeel denken om het wiskundecurriculum te verrijken en het gebruik van het vak wiskunde om computationeel denken te promoten – vormt de basis van de argumentatie om computationeel denken en wiskunde samen te brengen. Het landelijke vernieuwingsproject Curriculum.nu noemt computationeel denken zelfs één van de vier pijlers van digitale geletterdheid, en het ligt in de lijn der verwachting dat er in het nieuw te ontwikkelen curriculum dan ook veel aandacht is voor computationele concepten.

Aangezien het niet eenvoudig is om een computationeel sausje over het wiskundecurriculum van het voortgezet onderwijs te schenken, wordt hier al breed over nagedacht. Zo heeft Joris van der Meulen, een eerdere afstudeerder van de lerarenopleiding aan de Universiteit Twente, reeds lesmateriaal ontwikkeld over het algoritme-ontwerp-paradigma 'branch and bound' voor vwo 5 wiskunde B[2]. Ook werkt een consortium van de Universiteit Utrecht, de Radboud Universiteit, SLO en een vijftal vo-scholen momenteel aan een praktijkgericht onderzoek dat lesmateriaal ontwikkelt voor het vwo over computationeel denken.[3] Ons onderzoek, uitgevoerd in het kader van de opleiding Educatie en Communicatie in de Bètawetenschappen (eerstegraads lerarenopleiding) aan de Universiteit Twente, sluit hierop aan met een ontwerp van een empirisch gevalideerde werkmiddag voor vwo 5 wiskunde A over computationeel denken.

K-means clustering

We hebben gekozen voor een ontwerp passend binnen het vakgebied 'statistisch leren': technieken om op wiskundige wijze patronen te vinden in (vaak grote hoeveelheden) data. Gavaldà[4] noemde het reeds in 2008 een uniek onderdeel van de informatica om lesmateriaal over te ontwikkelen voor het vo, vanwege de volgende eigenschappen:

— de basistechnieken kunnen worden uitgelegd met wiskunde die op het vo behandeld is;
— zonder programmeerervaring kan er toch direct aan de slag worden gegaan en kunnen er resultaten worden gegenereerd die leerlingen kunnen interpreteren;
— realistische en nuttige toepassingen en uitdagingen in de wetenschap kunnen worden beschreven om leerlingen te inspireren om meer geavanceerde technieken te willen leren.

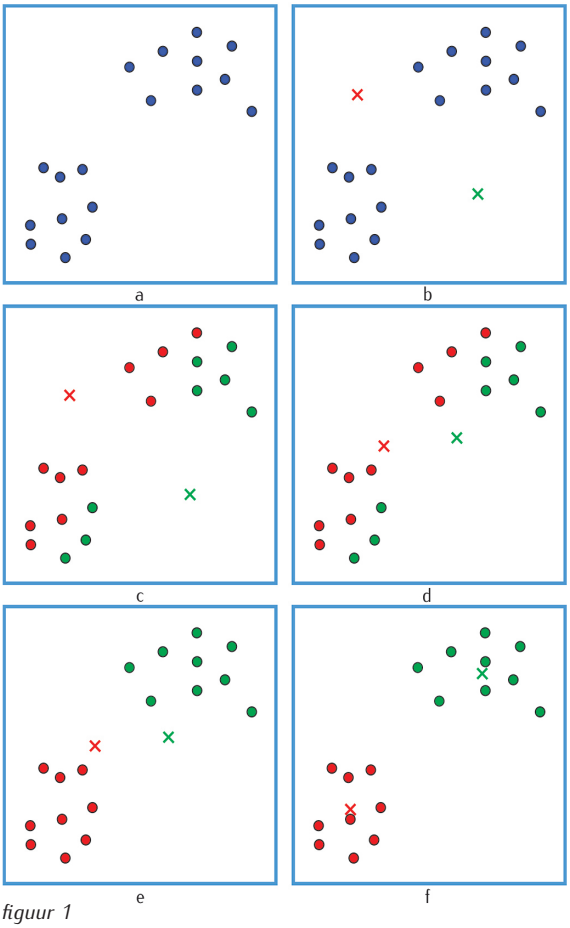
Binnen dit vakgebied hebben we gekozen voor '*K*-means clustering', een eenvoudig clusteringsalgoritme om datasets zo goed mogelijk te partitioneren in groepen vergelijkbare objecten. Het algoritme gaat uit van een op voorhand bepaald aantal clusters K en een afstandsmaat die voor ieder paar objecten aangeeft hoe ver ze uit elkaar liggen. Over het algemeen worden objecten gerepresenteerd als punten in een euclidische ruimte (met een dimensie

die vaak veel groter is dan 3) en wordt de euclidische afstand gebruikt als afstandsmaat.
Het algoritme werkt dan als volgt:

1. Kies het aantal clusters K.
2. Kies (willekeurige) posities voor de clustercentra $c_1, c_2, \ldots, c_K$.
3. Doe het volgende totdat er geen verandering meer optreedt:

— Bepaal voor ieder punt het dichtstbijzijnde clustercentrum (op basis van de euclidische afstand) en ken de punten toe aan de bijbehorende clusters.
— Bereken van elk cluster een nieuw clustercentrum (door voor elke coördinaat het gemiddelde te nemen over alle datapunten uit het cluster).

Zie figuur 1a t/m 1f voor een illustratie van de stappen, in een situatie waarbij gekozen is voor twee clustercentra (weergegeven met kruisjes) en waarbij de toekenning van punten aan de clusters met de kleuren rood en groen is weergegeven. Het lokale optimum dat zo gevonden wordt kan theoretisch erg 'slecht' zijn, maar veel empirisch onderzoek toont aan dat, wanneer de dataset goed clusterbaar is, er vaak een zo goed als optimale oplossing kan worden gevonden.[5] Hoewel er geen garantie is voor het bereiken van zo'n globaal optimum, is convergentie wel gegarandeerd. Onhandige eigenschappen van het algoritme zijn dat het niet altijd op voorhand duidelijk is welk aantal clusters K gekozen moet worden en dat de initialisatiestrategie van grote impact kan zijn op de kwaliteit van de gevonden oplossing. Het is aardig om eens online[6] te experimenteren met het K-means-algoritme.



figuur 1

De werkmiddag

Uitgangspunten voor de werkmiddag waren dat de opdrachten in ongeveer drie uur af te ronden moeten zijn, dat ze aansluiten op de belevingswereld van de leerlingen en dat ze goed aansluiten op de voorkennis van de leerlingen. Inhoudelijk hadden we de volgende leerdoelen opgesteld:

1. De leerling kan omschrijven wat een algoritme is en kan zowel in praktijksituaties als uit de wiskundeles voorbeelden benoemen;
2. De leerling kan omschrijven waar het K-means-algoritme voor dient;
3. De leerling kan het K-means-algoritme uitvoeren, zowel handmatig als met behulp van technologische hulpmiddelen;
4. De leerling kan kenmerkende aspecten van algoritmiek beschrijven, zoals initialisatie, convergentie en uniciteit, en hij kan deze begrippen toepassen bij het analyseren van het K-means-algoritme.

Om aan te sluiten bij de belevingswereld van de leerlingen is als context gekozen voor het aanbevelingssysteem van Netflix, dat op basis van beoordelingen tips geeft betreffende films of series die een gebruiker wellicht ook leuk zou kunnen vinden. De bijbehorende datasets zijn vrij beschikbaar, en uit eerder onderzoek[7] bleek reeds dat het toepassen van K-means-clustering betekenisvolle resultaten oplevert. Leerlingen worden eerst gevraagd om eens na te denken over de variabelen die allemaal in zo'n dataset zullen zitten. Vervolgens gaan ze aan de slag met wat inleidende opgaven over clustering. Ze maken op gevoel een clustering in een eenvoudige situatie, denken na over de impact van veranderingen in het aantal clusters en worden aan het werk gezet met twee verschillende afstandsmaten: de Manhattan-afstand (die ze eigenlijk al kennen van de roosterproblemen bij combinatoriek) en de euclidische afstand (die ze uiteraard ook al langer kennen). Vervolgens begint het echte werk en wordt eerst kort besproken wat überhaupt een algoritme is, waarbij leerlingen worden aangezet tot nadenken over algoritmen die ze al kennen uit de wiskundeles. Dan wordt het K-means-algoritme uit de doeken gedaan. Het algoritme wordt eerst gegeven en toegelicht aan de hand van figuur 1. >

Verdieping voor leraren

Stappen zetten in programmeren en STEM

Kant-en-klare lesmaterialen voor in uw klas

Bekijk het nieuwe platform WIL-de STEM van lerarennetwerk T³ Nederland voor uitdagende activiteiten bij de exacte vakken! De kant-en-klare materialen helpen u om te starten met eenvoudige programmeeractiviteiten in uw klas of met meer uitgebreide STEM-projecten (Science, Technology, Engineering en Mathematics). Alle lesactiviteiten zijn gemaakt door leraren.

www.wil-destem.nl

Python bootcamp voor leraren

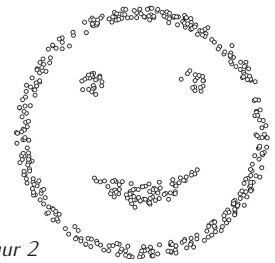
T³ NEDERLAND

Wilt u leren programmeren in Python? Doe dan mee met de Python bootcamp van T³ Nederland. Via een aantal webinars maakt u kennis met deze populaire programmeertaal. Ook zijn er verschillende sessies waarbij u online ondersteuning kunt krijgen bij het programmeren. In de webinars komen voorbeelden aan bod rond wiskundige en wetenschappelijke concepten.

Ga naar **www.t3nederland.nl** voor meer informatie of om aan te melden!

©2020 Texas Instruments

Vervolgens gaan leerlingen handmatig aan de slag met de uitvoering van het algoritme voor een concreet getallenvoorbeeld met vier punten en $K = 2$, gevolgd door het gebruik van Excel om een probleem met zeventien punten en $K = 3$ door te rekenen.
Nadat leerlingen op deze manier wat gevoel hebben gekregen voor de manier waarop het algoritme werkt, worden ze aan het denken gezet over de impact van de initialisatie, de gegarandeerde terminatie van het algoritme en de factoren die invloed hebben op het aantal stappen tot aan die terminatie. Zo moeten leerlingen bijvoorbeeld via een website[8] bij een gegeven dataset de clustercentra zo initialiseren dat er een leeg cluster ontstaat. Ook moeten ze beredeneren waarom het K-means-algoritme niet altijd werkt zoals je wellicht zou verwachten of zou willen, bijvoorbeeld bij een dataset waarin de punten in de vorm van een gezichtje gepositioneerd zijn, zie figuur 2.



figuur 2

De opdracht eindigt weer met de Netflix-dataset. Er wordt uitgelegd hoe het K-means-algoritme gebruikt is om de gebruikers te clusteren in groepen met een overeenkomstige smaak. Leerlingen moeten dan wat redenaties geven omtrent die clustering, en worden aangespoord om na te denken over hoe deze clustering zou kunnen helpen bij het adviseren over te kijken films.

Conclusie

Computationeel denken lijkt een belangrijk onderdeel te worden van het toekomstige wiskundecurriculum. Het is daarom van belang om lesmateriaal te ontwikkelen en te experimenteren met onderwijs op dit vlak. Onze werkmiddag over het K-means-algoritme toont aan dat het zeker mogelijk is om ook binnen wiskunde A aan de slag te gaan met interessante theorie over computationeel denken. Alle vier de hoofdcategorieën van computationeel denken ('data', 'modelleren en simuleren', 'computationeel probleemoplossen' en 'systeemdenken') komen aan bod. Hoewel de opdracht uiteraard voor verbetering vatbaar is en met name de opdrachten omtrent convergentie en uniciteit nog lastig bleken, kwamen leerlingen bij het uitproberen van deze werkmiddag in de klas toch een aardig eind met de uitvoering van het algoritme en redenaties over initialisatie. Ze konden naderhand ook redelijk uitleggen wat het K-means-algoritme inhoudt, hoewel dit nog wel (te) veel aan de Netflix-context gekoppeld werd. Het is naar ons idee in ieder geval duidelijk geworden dat het K-means-algoritme goed bruikbaar is in het voortgezet onderwijs. Wie deze opdracht ook eens in de klas wil proberen, kan het materiaal per e-mail opvragen en/of het bijbehorende afstudeerverslag bekijken.[9]

Noten

[1] Timmer, M., & Tolboom, J. (2019). Computational thinking – een vooruitblik op het wiskundeonderwijs van de toekomst. *Nieuw archief voor wiskunde*, 5/20(1), 42-45.

[2] Timmer, M., & van der Meulen, J. (2018). Computational thinking in vwo 5: Een werkmiddag over 'branch and bound'. *Euclides*, 94(3), 14-17.

[3] *https://www.nro.nl/nro-projecten-vinden/?projectid=40.5.18540.130*

[4] Gavaldà, R. (2008). Machine Learning in Secondary Education? In *Proceedings van de TML-2008-conferentie (Teaching Machine Learning)*.

[5] Meilă, M. (2006). The uniqueness of a good optimum for K-means. In *Proceedings van de 23e internationale conferentie over Machine learning*, 625-632.

[6] *http://stanford.edu/class/ee103/visualizations/kmeans/kmeans.html*

[7] Shea, R. (2018). *K*-means clustering of movie ratings. Geraadpleegd van *https://programming.rhysshea.com/K-means_movie_ratings/*

[8] *https://www.naftaliharris.com/blog/visualizing-k-means-clustering*

[9] Neeft, J.M. (2019). *Computationeel denken bij vwo wiskunde A*. Enschede: Universiteit Twente. *https://essay.utwente.nl/79806/*

Over de auteurs

Jelle Neeft is econometrist en wiskundige, en werkt momenteel als wiskundedocent aan het Openbaar Lyceum Zeist. E-mailadres: *jneeft@openbaarlyceumzeist.nl*
Mark Timmer is gepromoveerd theoretisch informaticus en werkt momenteel als wiskundedocent aan het Twents Carmel College te Oldenzaal en als vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente. E-mailadres: *m.timmer@utwente.nl*

Viktor Blåsjö, Desiree van den Bogaart

Wortels van de wiskunde
17: Lockdown wiskunde

In zijn artikel *Lockdown mathematics: a historical perspective* dat onlangs verscheen in *Nieuw Archief voor Wiskunde* kijkt Viktor Blåsjö naar historische episodes waarin wiskundigen in lockdown condities werkten. Desiree van den Bogaart maakte een Nederlandstalige bewerking van dit toepasselijke artikel.

Verdacht van spionage

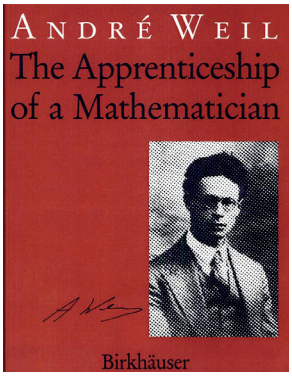
'Een wiskundige is relatief goed geschikt voor gevangenschap.' Dat was de mening van Sophus Lie, die in 1870 een maand lang in de gevangenis zat. Hij was toen 27. Het feit dat hij opgesloten zat, belemmerde hem niet in zijn onderzoek naar wat Lie-groepen zouden worden. 'Terwijl ik een maand in de gevangenis zat... had ik daar de beste geestelijke rust om mijn ideeën te ontwikkelen.'[1] Zeventig jaar later zou André Weil een zeer vergelijkbare ervaring hebben. De omstandigheden van hun gevangenschap zijn nauw met elkaar verbonden. Nadat ze op reis waren om wiskundige collega's te bezoeken, raakten ze beiden gedwongen hun werkzaamheden in het buitenland voort te zetten toen er een oorlog uitbrak: Lie in Frankrijk bij het uitbreken van de Frans-Pruisische oorlog, en Weil in Finland bij het begin van de Tweede Wereldoorlog. Ze werden beiden snel verdacht van spionage, vanwege hun vreemde gewoontes als excentrieke mathematici die onophoudelijk een soort onbegrijpelijke notities neerkrabbelden en buiten rondzwierven zonder een voor niet-vakgenoten begrijpelijk doel. Beiden werden uiteindelijk van de verdenking ontheven door de tussenkomst van wiskundige collega's die konden aantonen dat hun gedrag passend was voor een wiskundige en dat hun mysterieuze notitieboekjes geen geheime cijfers waren.[1], [2]

> "Sophus Lie: 'Een wiskundige is relatief goed geschikt voor gevangenschap.'"

Productieve tijd

Weil werd teruggestuurd naar Frankrijk, waar hij nog een paar maanden gevangen werd gezet voor het ontlopen van zijn militaire taken. Net als Lie had hij een productieve tijd in de gevangenis. 'Mijn wiskundewerk gaat door... en ik ben zelfs een beetje bezorgd... als het alleen in de gevangenis is dat ik zo goed werk, moet ik dan regelen dat ik elk jaar twee of drie maanden opgesloten zit?' 'Ik hoop hier wat meer tijd te hebben om in alle rust af te maken waar ik aan begonnen ben. Ik begin te denken dat niets zo bevorderlijk is voor de abstracte wetenschappen als de gevangenis.' 'Mijn zus zegt dat als ik hier wegga, ik een monnik moet worden, omdat dit regime zo bevorderlijk is voor mijn werk.' Weil vertelt hoe collega's zelfs aangaven jaloers te zijn op zijn gevangenisonderzoek. 'In het begin van mijn tijd in de gevangenis waren de brieven vooral variaties op het volgende thema: "Ik ken je goed genoeg om er vertrouwen in te hebben dat je deze beproeving waardig zult doorstaan". ... Maar al snel veranderde de toon. Twee maanden later schreef Cartan: 'We hebben niet allemaal het geluk om net als jij ongestoord te kunnen zitten en werken.' En Cartan was niet de enige: 'Mijn hindoeïstische vriend Vijayaraghavan zei vaak dat als hij zes maanden of een jaar in de gevangenis zat, hij zeker de hypothese van Riemann zou kunnen bewijzen. Dat was misschien waar, maar hij kreeg de kans niet.'

Sophus Lie (1842 – 1899)



Autobiografie uit 1992 van André Weil (1906 – 1998)

Moe van het isolement

Echter, Weil werd moe van het isolement. Hij probeerde vreugde te vinden in de kleine dingen: 'Als ik m'n nek omhoog optil, kan ik de bovenste takken van een paar bomen zien. Toen hun bladeren in het voorjaar begonnen uit te komen, droeg ik vaak de zinnen van de *Gita* voor. Patram puspam phalam toyam...' ('Een blad, een bloem, een vrucht, water, voor een zuiver hart kan alles een offer zijn'). Al snel meldde hij dat in zijn brieven: 'Mijn wiskundige koorts is afgenomen; mijn geweten zegt me dat ik, voordat ik verder kan gaan, de details van mijn bewijzen moet uitwerken, iets wat ik zo dodelijk saai vind dat ik, hoewel ik er elke dag enkele uren aan besteed, nauwelijks vordert.'[2]

Aan de hand van deze voorbeelden lijkt het erop dat eenzame opsluiting en het opschorten van de afleidingen en verplichtingen van het dagelijks leven een maand of twee lang zeer bevorderlijk zouden kunnen zijn voor de wiskundige productiviteit, maar dat het ook heel goed mogelijk is om een minimaal rendement te krijgen als het langer duurt. Natuurlijk is het discutabel of de opsluiting vanwege het coronavirus überhaupt analoog is aan deze milde vorm van gevangenisstraf. Toen Bertrand Russell in 1918 voor een paar maanden gevangen werd gezet wegens pacifistische politieke acties, vond ook hij 'de gevangenis in vele opzichten heel aangenaam'. '... Ik heb enorm veel gelezen; ik heb een boek geschreven, *Inleiding tot de Wiskundige Filosofie*.' Maar zijn diagnose van de oorzaak van deze productiviteit is minder vergelijkbaar. Ik heb tenminste nog geen collega's horen roepen over de huidige omstandigheden: 'de vakantie van de verantwoordelijkheid is echt heerlijk'.[3]

Tweede Wereldoorlog

'Tijdens de Tweede Wereldoorlog mocht Hans Freudenthal als Jood niet op de universiteit werken; zijn interesse in het wiskundeonderwijs op de basisschool werd toen aangewakkerd door 'speelschool' met zijn kinderen - een interesse die verder werd aangewakkerd door gesprekken met zijn vrouw.[4] De lockdown als gevolg van het coronavirus heeft veel wiskundigen in een vergelijkbare positie gebracht. Misschien moeten we een nieuwe stijging van de belangstelling voor schoolwiskunde onder professionele wiskundigen verwachten. Freudenthals tijdgenoot Jakow Trachtenberg, een Joodse ingenieur, werd veel erger vervolgd, maar paste ook zijn wiskundige interesses aan zijn omstandigheden aan. Gevangen in een concentratiekamp zonder toegang tot zelfs maar pen en papier, ontwikkelde hij een systeem van mentale rekenkunde. Trachtenberg overleefde het concentratiekamp en publiceerde zijn rekenmethodes in een succesvol boek dat vele drukken heeft doorstaan en tot op de dag van vandaag zijn aanhangers heeft.[5] Een ander nazi-kamp was de geboorteplaats van abstracte wiskunde door een luitenant artillerie, genaamd Jean Leray, tijdens een interneringsperiode van juli 1940 tot mei 1945. De omstandigheden van de opsluiting hebben de richting van dit onderzoek sterk beïnvloed: Leray slaagde erin voor de Duitsers te verbergen dat hij een toonaangevende expert was in vloeistofdynamica en mechanica. In plaats daarvan richtte hij zich op de algebraïsche topologie, een gebied waarvan hij het onwaarschijnlijk achtte dat het oorlogsachtige toepassingen zou voortbrengen.

Hans Freudenthal (1905 – 1990)

Wiskunde zonder boeken

Een eerder geval van gevangenisstraf die het verloop van de wiskunde beïnvloedde, is Jean-Victor Poncelets anderhalf jaar als krijgsgevangene in Rusland. Poncelet maakte deel uit van Napoleons mislukte militaire campagne van 1812, en was pas in staat om terug te keren naar Frankrijk in 1814. In zijn tijd als gevangene werkte hij aan meetkunde. Poncelet had een eersteklas opleiding in de wiskunde aan de École Polytechnique gekregen, en zijn rol in het leger was luitenant in het ingenieurskorps. In zijn Russische gevangenis had hij geen toegang tot boeken, dus hij moest alle wiskunde die hij kende uit het geheugen uitwerken. Wellicht is het alleen maar omdat de wiskunde zich zo goed leent om op deze manier te worden gereconstrueerd dat Poncelet uiteindelijk een wiskundige werd; andere technische interesses zouden moeilijker zijn geweest om in afzondering na te streven zonder boeken. De afwezigheid van naslagwerken zou Poncelet er op natuur-

Jean-Victor Poncelet (1788 - 1867) >

lijke wijze toe leiden om de meetkundige theorie samen te brengen en veel resultaten af te leiden uit een paar belangrijke principes. Tegelijkertijd is dit een prominent thema in de meetkunde aan het begin van de negentiende eeuw. Niet alleen de gevangene Poncelet had dit idee. Poncelet kon van de nood een deugd maken met een stijl van wiskunde waartoe hij tijdens zijn gevangenschap werd beperkt. Men is geneigd om zich voor te stellen dat Poncelet werd gedwongen om zich te wenden tot deze intuïtieve stijl van meetkunde als gevolg van het ontbreken van pen en papier, net zoals Trachtenberg zijn toevlucht moest nemen tot mentale rekenkunde. Maar dit is op zijn best een halve waarheid, want Poncelet had blijkbaar wel ruwe schrijfbenodigdheden tot zijn beschikking: de gevangenen kregen een minimale toelage, waarvoor hij enkele vellen papier kon krijgen, en hij slaagde er ook in zijn eigen inkt voor het schrijven te maken.[6]

Ibn al-Haytham (965 – 1040)

Van ingenieur naar wiskundige

Ibn al-Haytham is een ander voorbeeld van een wiskundige die begint als ingenieur en zich vervolgens in gevangenschap in toenemende mate richt op de wiskunde. In het begin van zijn carrière bedacht hij een irrigatieschema waarmee de Nijl zou kunnen worden gebruikt om de nabijgelegen velden te besproeien. Toen zijn plannen onuitvoerbaar bleken, 'veinsde hij waanzin om te ontsnappen aan de toorn van de kalief en werd hij lange jaren opgesloten in een privé-huis tot de dood van de tirannieke en wrede heerser. Hij verdiende zijn broodwinning door de werken van Euclides en Ptolemaeus in geheime vertalingen te kopiëren.'[7] De euclidische meetkunde en ptolemeïsche sterrenkundige berekeningen zijn zeker beter geschikt voor huisarreststudies dan technische projecten. Men kan zich verder afvragen of het toeval is dat Ibn al-Haytham, die zoveel zonnige dagen binnenshuis moest doorbrengen, ook de camera obscura ontdekte en deze een centrale rol gaf in zijn optica. Uit deze voorbeelden kunnen we concluderen dat als coronavirusmaatregelen een indirecte invloed hebben op de richting van het wiskundig onderzoek, het niet de eerste keer zou zijn dat de condities waarin de lockdown plaatsvinden, bepaalde gebieden of stijlen van de wiskunde meer uitvoerbaar maken dan andere.

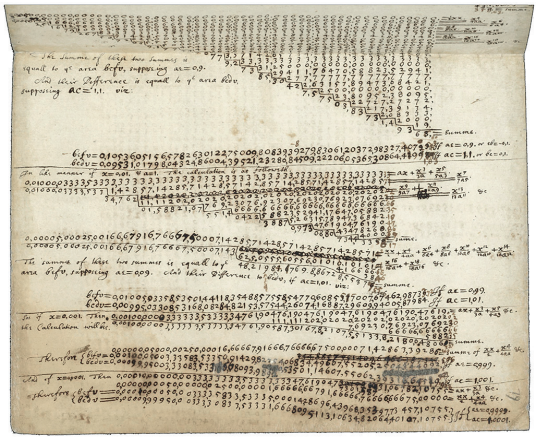
Newton en de pest

Isaac Newton ging in 1665 naar huis in isolatie, toen de Universiteit van Cambridge 'alle Fellows & Scholars' adviseerde om 'het land in te gaan ter gelegenheid van de pest', omdat het 'de Almachtige God in zijn rechtvaardige strengheid had behaagd om de stad Cambridge te bezoeken met de pest'. Newton was toen tweeëntwintig en had net zijn bachelordiploma behaald. Zijn productiviteit tijdens de pestisolatie is legendarisch: dit was zijn *annus mirabilis*, een prachtig jaar, waarin hij een aantal baanbrekende ontdekkingen deed. De tijdlijn is voor ons niet al te bemoedigend: de universiteit bleef bijna twee jaar effectief gesloten, met een afgebroken poging tot heropening halverwege, waardoor 'de plaag' alleen maar weer opkwam. Het is waar dat Newton grote dingen heeft bereikt tijdens de pestjaren, maar het is hoogst twijfelachtig of het isolement er veel mee te maken had en of die jaren echt allemaal uitzonderlijke jaren waren. Newton boekte al enorme vooruitgang voordat de pest uitbrak, en was op weg naar grote ontdekkingen, ongeacht de situatie omtrent de volksgezondheid. Inderdaad, Newtons eigen verslag van hoeveel hij bereikt heeft 'in de twee pestjaren van 1665 en 1666' schrijft zijn doorbraken niet toe aan externe omstandigheden, maar aan zijn eigen intellectuele ontwikkeling: 'Want in die tijd was ik in de bloei van mijn leven voor het doen van uitvindingen op het gebied van Wiskunde & Filosofie .'[8]
'Filosofie' betekent hier fysica. En inderdaad heeft Newton over dit onderwerp veel voorbereidend werk verricht voor zijn latere succes tijdens de pestjaren, maar de fundamentele visie en synthese die we vandaag de dag associëren met 'newtoniaanse mechanica' ontbrak nog steeds. Zijn uiteindelijke doorbraak in de fysica hing af van de interactie met collega's en niet van het isolement.

Isaac Newton (1643-1727)

Rol van collega's

Newton deed later alle moeite om de betekenis van collega's te minimaliseren. Dit is nog een reden waarom Newtons pestervaring een dubieus model is om te volgen.



Newtons berekeningen

Newton zou een misantropische kluizenaar kunnen zijn, zelfs in normale tijden. Toen Cambridge weer in volle gang was, verliet Newton nog steeds 'zelden zijn kamer', herinnerden tijdgenoten zich, behalve wanneer hij verplicht was een lezing te geven - en zelfs dat had hij net zo goed in zijn kamer kunnen doen, want 'vaak leek het of hij aan de muren voorlas, bij gebrek aan toehoorders.'[9] Hij publiceerde met tegenzin, en toen hij dat deed was Newton 'niet voorbereid op iets anders dan de onmiddellijke aanvaarding van zijn theorie': 'een beetje kritiek volstond, om hem eerst aan te zetten tot woede, en dan om hem in een isolement te drijven.' Het is goed mogelijk dat Newton alleen maar met collega's omging om zijn eigen superioriteit te bewijzen. Maar dat is toch ook een sociale invloed. Het feit blijft dat Newtons Principia niet werd geboren toen hij in quarantaine verbleef. In de wiskunde is het nauwkeurig genoeg om te zeggen dat Newton 'calculus' heeft uitgevonden tijdens de jaren van de pest. Maar hij was voor die tijd al goed op weg, inclusief de ontdekking van het binomium. Newton zei zelf dat de pest een onderbreking van twee jaar veroorzaakte in zijn experimenten over kleur, die hij was begonnen toen hij nog in Cambridge zat.[10] Misschien is dit een ander voorbeeld van zuivere wiskunde die in afzondering wordt begunstigd ten koste van andere onderwerpen die meer afhankelijk zijn van boeken en hulpmiddelen. Thuisisolatie biedt ook tijd voor uitgebreide handmatige berekeningen: een zelfredzame wiskunde die zonder bibliotheek en laboratorium kan worden nagestreefd. Newton heeft deze kans niet gemist tijdens zijn isolatie. Zoals hij zich later herinnerde, '[voor het verlaten van Cambridge] vond ik de methode van de Oneindige reeks. En in de zomer van 1665, toen ik door de pest uit Cambridge werd gedwongen, berekende ik de oppervlakte onder de Hyperbool ... tot twee-en-vijftig cijfers met dezelfde methode.'[11] Newtons notitieboekje met deze vervelende berekening is te bekijken op de website van de Universiteitsbibliotheek van Cambridge.[12]

Noten

[1] Stubhaug, A. (2002). *The Mathematician Sophus Lie: It was the Audacity of My Thinking*. Berlin: Springer.

[2] Weil, A. (1992). *The Apprenticeship of a Mathematician*. Bazel: Birkhäuser.

[3] Russell, B. (1968). *The autobiography of Bertrand Russell: 1914–1944*. New York: Little Brown and Company.

[4] Bakker, A. & Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics*, *https://doi.org/10.1007/s10649-020-09946-3*

[5] Trachtenberg, J. (1960). *The Trachtenberg Speed System of Basic Mathematics*. New York: Doubleday and Company.

[6] Didion, I. (1869). Notoice sur la vie et les ouvrages du Général J.-V Poncelet. Paris: Gauthiers-Villars, p. 20.

[7] Meyerhof, M. (1948). Ali al-Bayhaqi's Tatimmat Siwan al-Hikma: A biographical work on learned men of the Islam. *Osiris*, 8, 122-217.

[8] Whiteside, D.T. (1966). Newton's Marvellous Year: 1666 and All That. *Notes and Records of the Royal Society of London 21*(1), 32-41.

[9] Cohen, I.B. (1974). Newton, Isaac. Dictionary of Scientific Biography, Vol. 10. New York: Charles Sribner's Sons.

[10] Rupert Hall, A. (1992). *Isaac Newton: Adventurer in Thought.* Cambridge: Cambridge University Press.

[11] Westfall, R.S. (1983). *Never at rest: A Biography of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press.

[12] Isaac Newton, MS Add.3958, 79r ff., https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03958/151

Over de auteurs

Viktor Blåsjö is universitair docent en onderzoeker geschiedenis van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Hij is gespecialiseerd in meetkunde en analyse.
Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. E-mailadressen: *V.N.E.Blasjo@uu.nl* en *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

Het oorspronkelijke artikel van Viktor Blåsjö is te vinden op: *http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2020-21-2-095.pdf*

Desiree van den Bogaart

Going LOCO

Terwijl het (wiskunde)onderwijs steeds meer online gaat, blijft het toch heerlijk om af en toe ouderwets te knippen en te plakken met je leerlingen. In dit artikel beschrijft Desiree van den Bogaart hoe je de 'gouwe ouwe' mini-LOCO (wie is er niet groot mee geworden?) kunt omzetten naar een werkvorm met papier, pen en schaar.

De kracht van eenvoud

Ik ben dol op werkvormen en spelletjes. Soms kom ik ergens een interessante activiteit tegen en dan sla ik die op in mijn mentale archief om hopelijk nog een keer uit de kast te kunnen trekken voor gebruik in het wiskunde-onderwijs. Zo ontstond destijds de werkvorm Legoman[1] en speel ik sinds een paar jaar wanneer het even kan Bingo om voorkennis op te halen of de stof juist samen te vatten. Ook mini-LOCO[2] is er zo één, die al een tijdje op mijn wensenlijstje stond om in te zetten. Ik ga er voor het vervolg van dit artikel van uit dat het spel bekend is bij de lezer, vraag anders even aan een collega of een andere volwassene of die je bijpraat.

Collega-lerarenopleider Luuk Hoevenaars liet me jaren geleden al zien hoe hij met basisdoosjes mini-LOCO, zie figuur 1, die hij op Marktplaats had gekocht, het spel speelde bij vakken als Geschiedenis van de wiskunde en Dynamische systemen op de Hogeschool Utrecht. Wie lid is van de Facebookgroep Leraar Wiskunde en/of de *Wageningse Methode* kent, is waarschijnlijk bekend met het werk van Henk Reuling, die een digitale versie van mini-LOCO heeft gemaakt en daar al voor vele onderwerpen en niveaus spellen bij heeft ontworpen. Maar ik wilde zelf het liefst een papieren versie, die laagdrempelig is in gebruik: geen basisdoosjes of computers nodig.

De kracht van een goede werkvorm zit vaak in de eenvoud. Bij mini-LOCO is dat wat mij betreft: het werken met concreet materiaal en het zelf-controlerende aspect.[3] Een nadeel van mini-LOCO is dat het in principe een reproductief karakter heeft. De ontworpen spellen testen of bepaalde kennis of vaardigheden bij de speler aanwezig is. Dat laatste wilde ik aanpassen in mijn werkvorm en dus ook het gebruik van basisdoosjes (of computers) vervangen door papier, pen en schaar.

figuur 1 Basisdoos mini-LOCO

De papieren versie

Een ervaren docent weet dat je, als het even kan, de leerlingen zoveel mogelijk zelf moet laten doen. Om het reproductieve gehalte van het spel te verkleinen en tegelijkertijd mijzelf een hoop voorbereidend werk te besparen, heb ik ervoor gekozen om de leerlingen zelf voor elkaar spellen te laten ontwerpen en die meteen te laten spelen. Ik voorzag dat dit nog wel wat gedoe zou kunnen opleveren bij het maken van een kloppend patroon op de achterkant van de genummerde kaartjes, want dan moet je rekening gaan houden met het spiegelbeeld. Het gekleurde patroon heb ik daarom vervangen door een zin. Daaraan kun je immers ook zien of die klopt: als je de woorden van een zin in een andere volgorde legt, krijg je over het algemeen onzin. De les waarin ik deze werkvorm voor het eerst heb gebruikt, ging over statistiek: betrouwbaarheids-intervallen en aanverwante begrippen. Statistiek is een relatief talige tak van de wiskunde. Daarom koos ik ervoor om de leerlingen zelf omschrijvingen te laten bedenken bij een aantal door mij voorgeschreven begrippen. Je kunt er ook voor kiezen om ze zelf korte opgaven met antwoorden te laten bedenken, bijvoorbeeld over de rekenregels, vergelijkingen oplossen of de afgeleide functie. Ter voorbereiding heb ik een selectie gemaakt van twaalf begrippen (dat had uiteraard ook een ander aantal kunnen zijn) en ze in

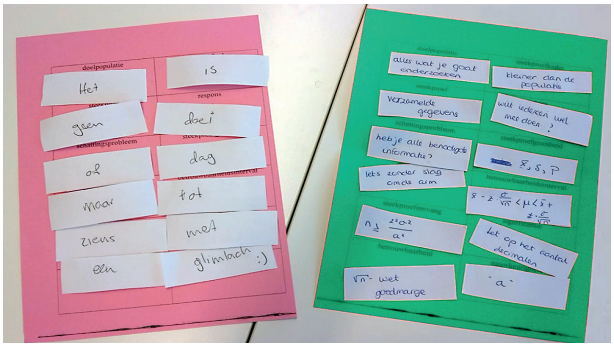
een tabel geplaatst, zie figuur 2. Elk groepje kreeg twee exemplaren van deze tabel: een op gekleurd en een op wit papier. De gekleurde tabel fungeerde als het ware als de basisdoos en de witte tabel werd opgeknipt tot kaartjes waarmee geschoven kon worden.

doelpopulatie	steekproefkader
steekproef	respons
schattingsprobleem	steekproefgrootheid
puntschatting	betrouwbaarheidsinterval
steekproefomvang	significantie
betrouwbaarheid	nauwkeurigheid

figuur 2 Tabel met twaalf begrippen uit de statistiek

Leerlingen aan de slag

Vervolgens was het de beurt aan mijn leerlingen om in actie te komen. Zij bedachten met hun groepje een leuke zin van precies twaalf woorden. Afhankelijk van je klas moet je even letten op hoe je instrueert waar de zin aan moet voldoen, zodat het ook echt leuk blijft. Mijn leerlingen schreven echt schattige zinnen zoals 'Het is geen doei of dag maar tot ziens met een glimlach', zie figuur 3. Vervolgens moesten ze twaalf omschrijvingen bedenken voor de gegeven begrippen en die op de juiste plaats in de witte tabel schrijven. Daarna werden de witte kaartjes uitgeknipt (met weglating van de voorgedrukte woorden, die dus expres niet midden in de vakjes staan!) en op de juiste plek op de gekleurde tabel gelegd. En dan de truc: de leerlingen draaiden de beschreven witte kaartjes om, zodat de lege kant naar boven lag, en schreven hun zelf bedachte leuke zin op de twaalf kaartjes, in de goede volgorde leesbaar, van links naar rechts, van boven naar beneden. Klaar is de mini-LOCO.
Elk groepje schudde de zelfgemaakte kaartjes weer door elkaar en de stapeltjes werden gerouleerd in de klas, zodat iedereen de stapel kaartjes van een ander groepje had. Met de nieuwe kaartjes gingen de leerlingen weer zoeken welk kaartje bij welk begrip hoorde, en toen alle kaartjes gelegd waren, konden ze controleren of er een lopende zin was ontstaan, door de kaartjes om te draaien. Eventuele fouten werden verbeterd.



figuur 3 'Het is geen doei of dag maar tot ziens met een glimlach'

Afronding

Nadat alle groepjes klaar waren, hebben we nog klassikaal een nabespreking gedaan. De groepjes gaven feedback aan de makers van het spel dat ze gespeeld hadden. Soms waren ze het niet helemaal eens met een omschrijving van een begrip, soms hadden ze er een vraag over, of soms gaven ze elkaar een compliment. Dat gaf nog een mooie, genuanceerde discussie over bepaalde begrippen. Tot slot deden we een rondje waarbij alle gemaakte zinnen werden voorgelezen, wat een vrolijk besluit was van deze werkvorm. In vroeger tijden zou ik leerlingen gevraagd hebben het resultaat met lijm of pritstift in hun schrift te plakken, maar nu maakten ze er een foto van met hun mobiele telefoon. Wat niet veranderd is: aan het einde van de les een rondje maken langs alle groepjes met de papierbak.

Noten

[1] Bogaart, D. van den (2012). Legoman. *Euclides*, 88(5), 238-239.
[2] *https://www.locoleerspellen.nl*
[3] LOCO staat voor Leren-Oefenen-Controleren-Ordenen

Over de auteur

Desiree van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Zij verzorgt onderwijs over o.a. vakdidactiek en activerende werkvormen in de bachelor- en masteropleiding en in de vorm van workshops en lezingen.
E-mailadres: *d.a.van.den.bogaart@hva.nl*

Martin Kindt

Dualiteit in meetkunde

Dualiteit komt in verschillende gedaanten voor in verschillende meetkunden. De projectieve meetkunde spant daarbij de kroon, want die is volmaakt duaal. Maar ook in de 'gewone' euclidische, meetkunde zijn er sporen van dualiteit te vinden.

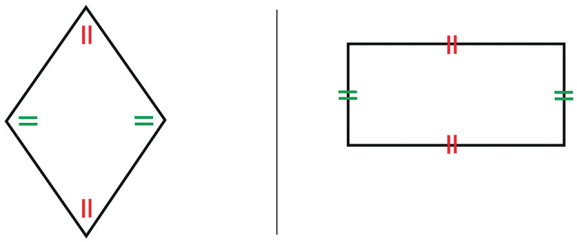
Dualiteit in projectieve meetkunde

Dualiteit in de meetkunde is een zekere symmetrie tussen begrippen (bijvoorbeeld 'punt' en 'lijn') en relaties (bijvoorbeeld 'ligt op' en 'gaat door'). In de projectieve meetkunde is het *bon ton* om beide relaties te betitelen als *is incident met*.
De absolute dualiteit tussen punten en lijnen in de projectieve meetkunde wordt vastgelegd door de axioma's dat er bij elk paar punten juist één lijn *incident* is met beide punten en dat er bij elk paar lijnen juist één punt is dat *incident* is met beide lijnen. Elke stelling in de projectieve meetkunde heeft een duale pendant. Het bewijs van de ene stelling kan door 'vertaling' worden omgezet in een bewijs voor de duale stelling. De meetkundige Von Staudt (1798 - 1867) maakt in zijn boek *Geometrie der Lage* de dualiteit zichtbaar door teksten af te drukken in twee kolommen gescheiden door een verticale lijn. Bij elke stelling kreeg de lezer zo een duale-stelling-met-bewijs als het ware cadeau.

Dualiteit tussen hoek en zijde

Als 12-jarige beginneling in de euclidische meetkunde vond ik de stellingen over de gelijkbenige driehoek mooi en handig bij allerlei opgaven. Mooi vanwege dat wat ik nu als een soort dualiteit zie.
(1 *Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de hoeken tegenover die zijden gelijk.*
(2) *Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de zijden tegenover die hoeken gelijk.*
Je hoeft in stelling (1) alleen maar 'zijde(n)' in 'hoek(en)' en 'hoek(en)' in 'zijde(n)' te vertalen om stelling (2) te krijgen.
Zo presenteerde mijn leraar dat niet, maar hij legde wel uit dat stellingen (1) en (2) elkaars omgekeerde zijn.

Dat 'omgekeerd' niet hetzelfde betekent als 'duaal' blijkt duidelijk uit de volgende stellingen voor vierhoeken:
(3) *Als in een vierhoek de vier zijden gelijk zijn, dan zijn de overstaande hoeken paarsgewijs gelijk.*
(4) *Als in een vierhoek de vier hoeken gelijk zijn, dan zijn de overstaande zijden paarsgewijs gelijk.*
Deze stellingen zijn min of meer vanzelfsprekend, want in het eerste geval is er sprake van een ruit, in het tweede geval van een rechthoek.
(3) en (4) zijn niet elkaars omgekeerde, maar er is wel sprake van dualiteit tussen zijde(lengte) en hoek(grootte). 'Ruit' en 'rechthoek' kun je blijkbaar als duale figuren zien, zie figuur 1.

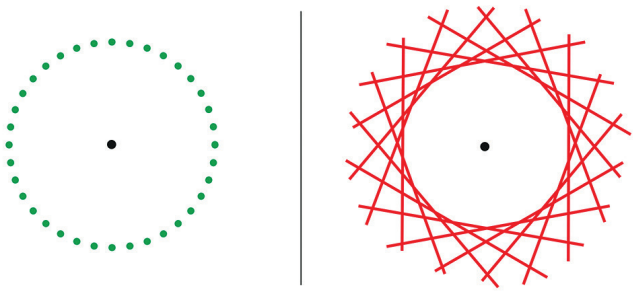


figuur 1

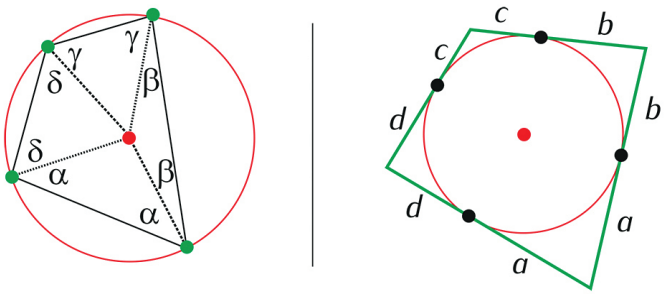
Een vierkant is zowel ruit als rechthoek en zou je daarom 'zelfduaal' kunnen noemen.

Dualiteit tussen 'omcirkel' en 'incirkel'

Een cirkel wordt normaliter gedefinieerd als de 'meetkundige plaats' van punten die op een vaste afstand van een vast punt liggen. Maar een cirkel is ook de 'omhullende' van de lijnen die op vaste afstand van een vast punt liggen, zie figuur 2.

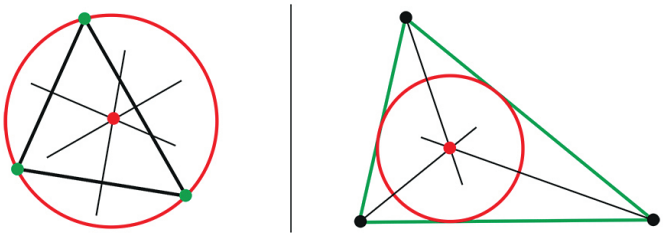


figuur 2



figuur 4

De begrippen *meetkundige plaats* en *omhullende* kunnen worden beschouwd als duale begrippen. Iedere driehoek heeft zowel één '*omcirkel*' als één '*incirkel*', ook een voorbeeld van dualiteit!
Het middelpunt van de omcirkel is het snijpunt van de symmetrieassen van de zijden en dat van de incirkel is het snijpunt van de symmetrieassen van de hoeken, zie figuur 3, dualiteit tussen hoeken en zijden!

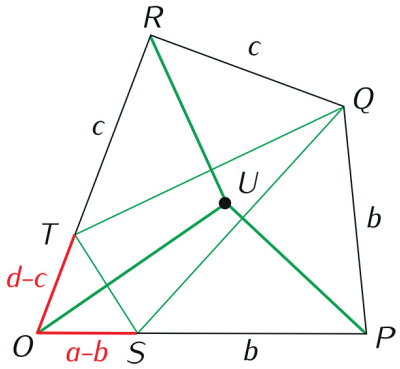


figuur 3

Hoe zit het nu bij vierhoeken?

Er zijn vierhoeken (*koordenvierhoeken*) die een omcirkel hebben en er zijn er met een incirkel (*raaklijnenvierhoeken*).
Koordenvierhoek en raaklijnenvierhoek zijn duale begrippen en daar passen duale stellingen met duale bewijzen bij. Eerst de stellingen:
(5) *Een vierhoek heeft een omcirkel, als en alleen als de som van het ene paar overstaande hoeken gelijk is aan de som van het andere paar.*
(6) *Een vierhoek heeft een incirkel, als en alleen als de som van het ene paar overstaande zijden gelijk is aan de som van het andere paar.*
'Als en alleen als' betekent hier twee keer twee bewijzen. Ik begin met 'alleen als', dus met de twee noodzakelijke voorwaarden, zie figuur 4.
In de figuur links is de som van elk paar overstaande hoeken gelijk aan $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.
In de figuur rechts is de som van elk paar overstaande zijden gelijk aan $a + b + c + d$. De volledige bewijzen zijn niet volmaakt duaal. De gelijkheid van de paren 'deelhoeken' (links) volgt direct uit stelling (1). Maar voor de gelijkheid van de 'deelzijden' (of raaklijnstukken) is wat meer nodig dan - de met (1) duale - stelling (2). Ook is het zo dat in het geval van de koordenvierhoek gekeken moet worden naar situaties waarbij het middelpunt niet binnen de vierhoek ligt. Dit levert niet al te grote problemen op, maar wel variaties op het in figuur 4 verbeelde bewijs. Het bewijs voor het 'voldoende zijn' van de voorwaarden kan zowel bij (5) als (6) uit het ongerijmde worden bewezen en zo stond het in sommige schoolboeken van vroeger. Daarbij moet dan wel een aantal gevallen worden onderscheiden en de bewijzen in de boeken waren vaak niet volledig. Er zijn ook mooie directe bewijzen voor het voldoende zijn van de voorwaarden in (5) en (6), die ik hier uit de doeken doe.[1]

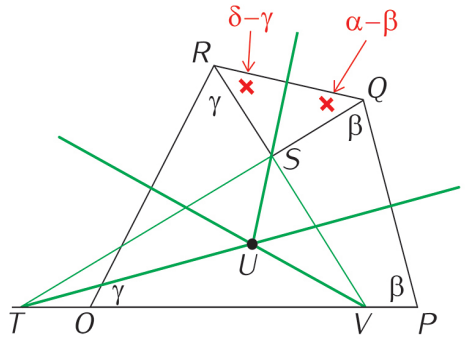
Ik begin hier, zie figuur 5, met stelling (6). Gegeven is vierhoek $OPQR$ met $OP = a$, $PQ = b$, $QR = c$ en $RO = d$. Bovendien geldt: $a + c = b + d$.
Als $a = b = c = d$ is de vierhoek een ruit en omdat de diagonalen van een ruit de bissectrices zijn van de hoeken is hun snijpunt het middelpunt van een cirkel die aan de vier zijden raakt. Veronderstel nu $a > b$. Omdat $a + c = b + d$ volgt dan $c < d$. Op zijde OP is er een punt S te vinden zó dat $PS = b$ en dus $OS = a - b$. Net zo is er op OR een punt T zo dat $RT = c$ en $OT = d - c$.



figuur 5

>

Uit $a + c = b + d$ volgt $a - b = d - c$, zodat $OS = OT$. Dat betekent dat de bissectrice van $\angle POR$ ook de middelloodlijn van lijnstuk TS is! De driehoeken QPS en QRT zijn ook gelijkbenig, zodat de bissectrices van de hoeken QPS en QRT de middelloodlijnen zijn van achtereenvolgens de lijnstukken QS en QT.
Kortom, de bissectrices van de hoeken O, P en R van vierhoek $OPQR$ zijn tevens de middelloodlijnen van de zijden van driehoek QST en gaan dus door één punt U. Hieruit volgt dan dat U op gelijke afstanden van de zijden van vierhoek $OPQR$ ligt, die daarmee is bevorderd tot raaklijnenvierhoek! Nu het bewijs voor het voldoende zijn van de voorwaarde genoemd in de duale stelling (5). De vraag is of ik dit kan vinden door het voorgaande bewijs als het ware te dualiseren? Het antwoord is 'ja'. Van vierhoek $OPQR$ weet ik nu dat de sommen van de paren overstaande hoeken, zeg $\alpha + \beta$ en $\gamma + \delta$ aan elkaar gelijk zijn. Als $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, dan is de vierhoek een rechthoek en het snijpunt van de twee symmetrieassen van de rechthoek is het middelpunt van de cirkel die door de vier hoekpunten gaat.

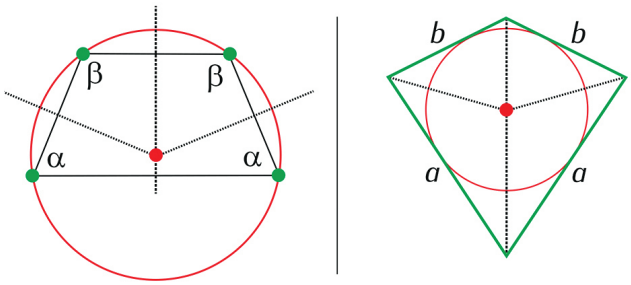


figuur 6

Veronderstel nu $\alpha > \beta$. Omdat $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ volgt dan $\gamma < \delta$. Dat betekent, zie figuur 6, dat binnen hoek PQR een lijn QT kan worden getrokken die met PQ een hoek gelijk aan β maakt. Net zo is er een lijn RV binnen hoek ORQ die met OR een hoek maakt gelijk aan γ.
Uit $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ volgt $\alpha - \beta = \delta - \gamma$, zodat de hoeken SQR en SRQ gelijk zijn aan elkaar. Dat betekent dat de middelloodlijn van QR ook de bissectrice is van hoek TSV. De driehoeken ROV en QPT zijn ook gelijkhoekig zodat de middelloodlijnen van OR en PQ de bissectrices zijn van achtereenvolgens OVR en PTQ. Kortom de middelloodlijnen van de zijden QR, PQ en RO zijn tevens de bissectrices van de hoeken van driehoek TVS en gaan dus door één punt U. Daaruit volgt dat U gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten van vierhoek $OPQR$ die daarmee is bevorderd tot koordenvierhoek.

Het 'duaal denken' levert hier inderdaad het bewijs op dat ik zocht. Zoiets lukt in de projectieve meetkunde altijd, maar in de euclidische meetkunde slechts sporadisch.

Beide bewijzen ben ik begonnen met het uitsluiten van de bijzondere exemplaren 'ruit' en 'rechthoek'. Er zijn nog twee speciale gevallen, zie figuur 7. Dit is bij (5) de vierhoek met $\alpha = \beta \neq \gamma = \delta$ ofwel het *gelijkbenig trapezium* en bij (6) de vierhoek met $a = b \neq c = d$ ofwel de *vlieger*.

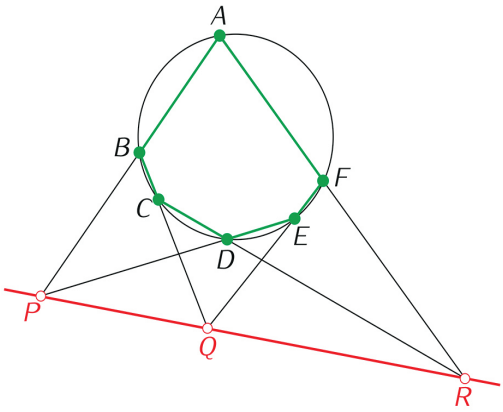


figuur 7

In de twee hier beschreven bewijzen hoefden deze gevallen niet te worden uitgezonderd.

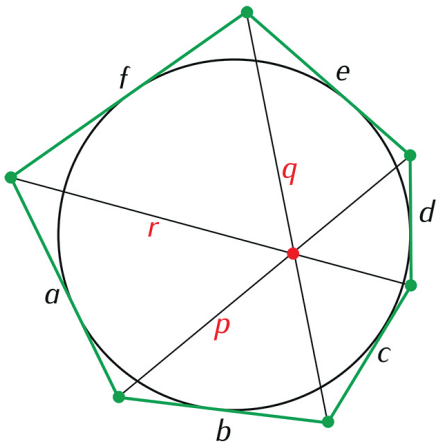
Pascal en Brianchon

De stellingen genoemd naar Pascal (1623 – 1662) en Brianchon (1783 – 1864) vormen een beroemde duale tweeling in de meetkunde. Pascal ontdekte en bewees op 16-jarige leeftijd dat de snijpunten van de (verlengden van) de overstaande zijden van een *koordenzeshoek* op één rechte lijn liggen, zie figuur 8.



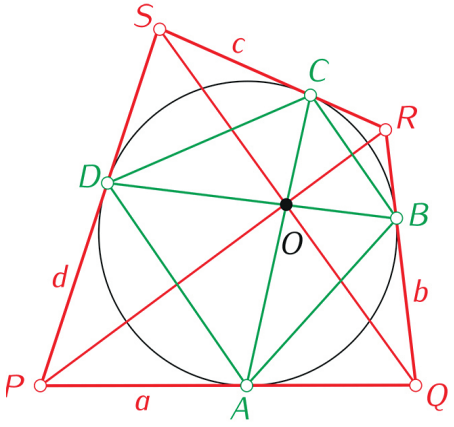
figuur 8

De duale stelling (Brianchon) heeft als onderwerp een *raaklijnenzeshoek* en zegt dat daarin de verbindingslijnen van overstaande hoekpunten door één punt gaan, zie figuur 9.



figuur 9

De dualiteit van de eerdere stellingen (5) en (6) heeft te maken met de grootte van hoek en zijde. Dit zou je een 'metrieke dualiteit' kunnen noemen. Bij de stellingen van Pascal en Brianchon heeft de dualiteit betrekking op 'snijpunt' en 'verbindingslijn' en dat is typisch de dualiteit die we kennen in de projectieve meetkunde en die betrekking heeft op incidentie.[2] De bewijzen geef ik hier niet, ze zijn in elk projectieve-meetkundeboek te vinden, en dan in algemenere vorm waarbij in plaats van *cirkel*, sprake is van *kegelsnede*. In [3] staat ook de originele tekst die de jonge Pascal produceerde. Een fraai gevolg van Brianchons stelling is een stelling die koorden- en raaklijnenvierhoek als het ware verenigt, zie figuur 10.



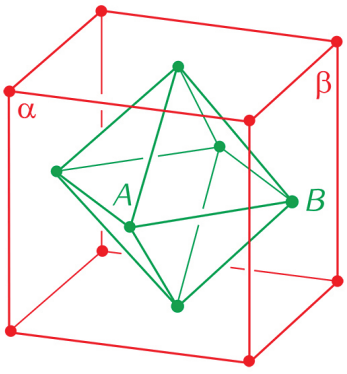
figuur 10

De raakpunten van de incirkel van de vierhoek met zijden *PQ* (of a), *QR* (of b), *RS* (of c) en *SP* (of d) zijn de hoekpunten van koordenvierhoek *ABCD*.
De snijpunten van de diagonalen van beide vierhoeken vallen dan samen!
Deze stelling kan worden bewezen met wat ik hier een 'Brianchon-speciaal' noem. Dat gaat zo. Beschouw de raaklijnenvierhoek als de raaklijnenzeshoek met zijden *a, a, b, c, c* en *d*. Naast de hoekpunten *P, Q, R* en *S* zijn er nog twee 'hoekpunten': het punt *A* (als 'snijpunt' van *a* en *a*) en het punt *C* (als snijpunt van *c* en *c*).
De drie verbindingslijnen van overstaande hoekpunten zijn nu *AC*, *QS* en *RP* en die gaan volgens Brianchon door één punt.
Op analoge wijze kan *PQRS* worden gezien als de zeshoek met zijden *b, b, c, d, d* en *a*, waarvan de hoekpunten zijn *Q, B, R, S, D*, en *P*, waarbij de drie lijnen *QS*, *BD* en *RP* ook concurrent zijn.

Ik merk nog op dat er twee speciale gevallen zijn:
— Is vierhoek *PQRS* een vlieger, dan is *ABCD* een gelijkbenig trapezium.
— Is *PQRS* een ruit, dan is *ABCD* een rechthoek.

In de ruimte

In dit artikel heb ik me beperkt tot duale vormen en stellingen in de vlakke meetkunde. Ook in de ruimtemeetkunde zijn er duale fenomenen. Daar zijn 'punt' en 'vlak', 'verbindingslijn' (van punten) en 'snijlijn' (van vlakken) voorbeelden van duale begrippen. Drie punten die niet op één lijn liggen, bepalen een vlak en drie vlakken die niet door één lijn gaan bepalen een punt, tenzij ...
Om hier perfecte dualiteit te krijgen moet er worden overgestapt naar de projectieve ruimte. Als mooi voorbeeld van duale ruimtelijke figuren noem ik de kubus en regelmatig achtvlak, zie figuur 11.



figuur 11

De kubus heeft acht (hoek)punten en zes (zij)vlakken, het achtvlak heeft acht (zij)vlakken en zes (hoek)punten. Beide figuren hebben twaalf ribben. De 1-1 correspondentie tussen de ribben van beide vormen is duaal bepaald!
Als het voorvlak en het rechterzijvlak van de kubus >

respectievelijk α en β heten, en de hoekpunten van het achtvlak die in die vlakken liggen A en B, dan correspondeert de snijlijn van α en β met de verbindingslijn van A en B. Een laatste dualistische opmerking die hierbij past: de omgeschreven bol van het achtvlak is tevens de ingeschreven bol van de kubus.

> "Meetkundige dualiteit is een intrigerend aspect van de schoonheid van de wiskunde en verdient wat mij betreft meer aandacht in ons onderwijs!"

Noten

[1] Zie bijvoorbeeld: Molenbroek, P. (1931). *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Groningen: Noordhoff.

[2] De letters *a, b, c, d, p, q, r* in figuur 9 stellen niet lengten maar (namen van) zijden voor.

[3] Kindt, M. (1996). *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

Klassieke vraag

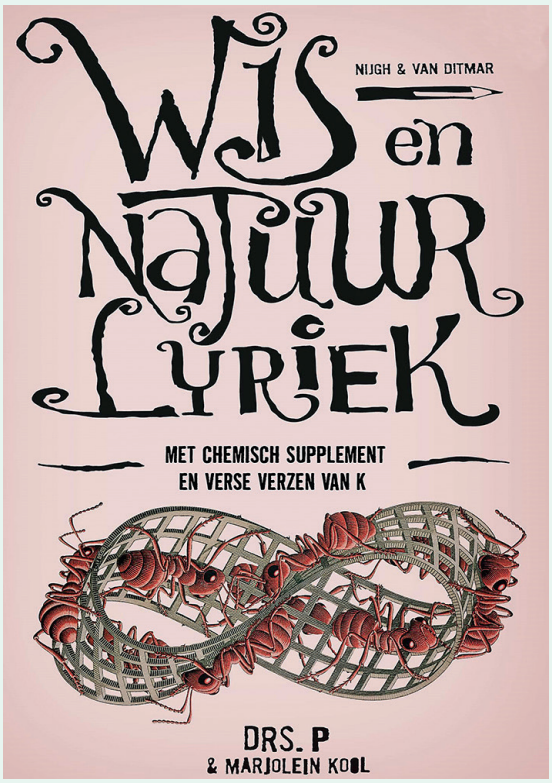
Beethovens zesde, aldus partituren,

schijnt zesendertig minuten te duren.

Zeg me nu, dit al met al overwegende:

Hoeveel minuten duurt Beethovens negende?

Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid. Klassieke vraag is een van de nieuwe gedichten.

Sjef van Dongen

Meetkunde in vwo 6

Meetkundeopgaven voor vwo 6 zijn soms ingewikkelder dan bedoeld en dan toch weer met elementaire wiskunde op te lossen.

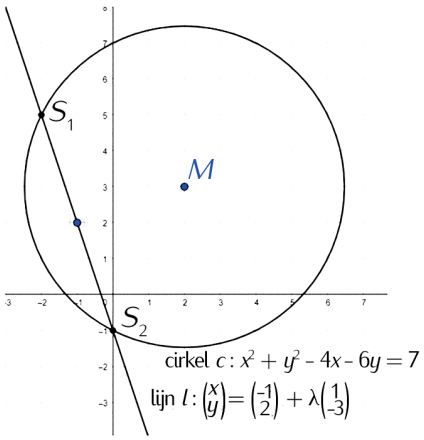
Het laatste hoofdstuk dat de vwo 6 wiskunde B-studenten via de methode *Moderne Wiskunde* voorgelegd krijgen, heet 'afsluiting meetkunde'. Deze titel geeft de indruk dat er 'gemeten' gaat worden. In werkelijkheid worden er veel meetkundige problemen voorgelegd, die vervolgens met een uitgebreid arsenaal aan algebraïsche methodes worden opgelost. Zolang het mogelijk blijft het algebraïsch verkregen resultaat te verifiëren door gebruik te maken van een meetkundige constructie, uitgevoerd met een passer en liniaal, is de betreffende opgave in dit hoofdstuk wel op zijn plaats.
De algebraïsch verkregen oplossingen van de meeste opgaven, in dit hoofdstuk 'afsluitende meetkunde', zijn door de leerlingen via bekende meetkundige constructies te verifiëren. Opgaven 11a en 11b, zie figuur 1, zijn voorbeelden hiervan.

11a Bereken exact, met behulp van substitutie, de coördinaten van de snijpunten van lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ met cirkel $c: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 7$.

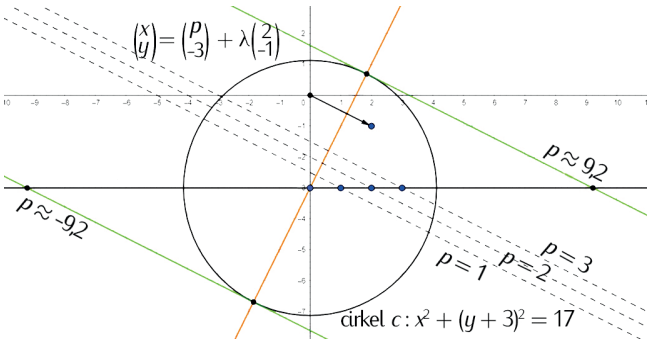
b Lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ raakt aan cirkel $c: x^2 + (y+3)^2 = 17$. Bereken exact voor welke waarde van p dit het geval is.

figuur 1 Uit Moderne Wiskunde 11e editie, deel 6, blz 142

De algebraïsch verkregen oplossing voor opgave 11a is $S_1(-2, 5)$ en $S_2(0, -1)$ en voor opgave 11b is dit $p = \sqrt{85}$ en $p = -\sqrt{85}$. De meetkundige benaderingen (zie figuren 2 en 3) lijken dit te ondersteunen.



figuur 2



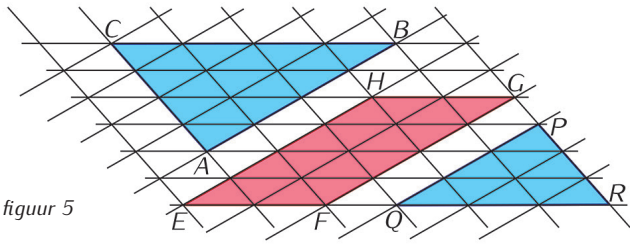
figuur 3

Opgave 22, zie figuur 4 is echter van een ander niveau.

22 Punt A ligt op de lijn $2x + y + 8 = 0$ en ligt tevens tweemaal zover van punt $B(6, 0)$ als van punt $C(0, -3)$.
Bereken de coördinaten van A.

figuur 4 Uit Moderne Wiskunde 11e editie, deel 6, blz 145.

In de leerjaren vwo 1 t/m vwo 5 is nooit een meetkundige constructie behandeld waarmee dit vraagstuk meetkundig kan worden opgelost. Met andere woorden er is de leerlingen geen te construeren meetkundige plaats bekend van punten met de eigenschap dat hun afstanden naar twee bekende punten een gegeven verhouding hebben, in dit geval 2 of ½. Ook suggereert de vraagstelling dat er maar één punt zou zijn dat aan de gestelde voorwaarde voldoet. Een meetkundige oplossing van deze opgave vergt de kennis van een constructie van de meetkundige plaats van alle punten A waarvoor geldt dat de afstand naar punt B tweemaal zo groot is als de afstand naar punt C. De hierna behandelde constructie van zo'n meetkundige plaats laat zien dat het mogelijk is nul, een of twee oplossingen te vinden voor een probleem zoals omschreven in vraag 22. Deze constructie is enkel gebaseerd op stellingen I en II, die in de onderbouw van het vwo al aan bod zijn gekomen, zie figuur 5.

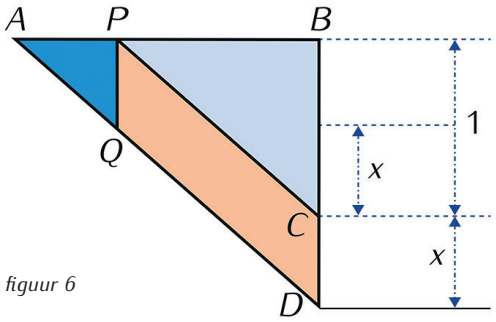


figuur 5

I Een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden is een parallellogram.
(bijvoorbeeld EFGH is een parallellogram omdat EH//FG en HG//EF)

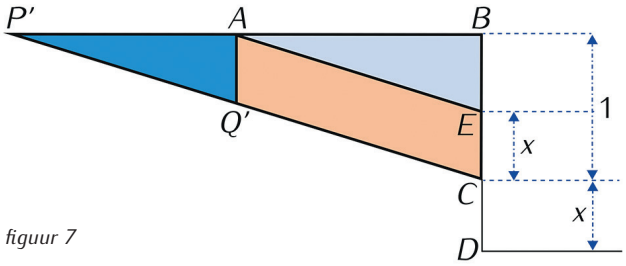
II Twee driehoeken met drie paar evenwijdige zijden zijn gelijkvormig.
(bijvoorbeeld ΔABC~ΔPQR omdat AB//PQ, BC//QR en CA//RP)

We gaan op zoek naar punten P, waarvan de afstanden naar A en B een bepaalde verhouding hebben: PA : PB = x : 1. (in eerste instantie onder de voorwaarde $x < 1$)
Uitgaande van de punten A en B, zie figuur 6, wordt allereerst het punt P op het lijnstuk AB geconstrueerd dat voldoet aan de voorwaarde: PA : PB = x : 1 ($x < 1$).
Dat gebeurt als volgt:
1 Teken het lijnstuk AB
2 Teken een willekeurige halve lijn door B
3 Kies daarop punten C en D zó dat BC : CD = 1 : x
4 Teken AD en vervolgens CP//AD met P op AB.
Als PQ//BD met Q op AD dan geldt, op basis van de stellingen I en II: vierhoek PCDQ is een parallellogram (PQ = CD) en ΔPAQ~ΔBPC met PA : PB = PQ : BC = CD : BC = x : 1. Hieruit volgt PA = x · PB.
Met $AP + PB = AB$ geeft dit: $PB = \frac{1}{1+x} \cdot AB$ en $AP = \frac{x}{1+x} \cdot AB$.



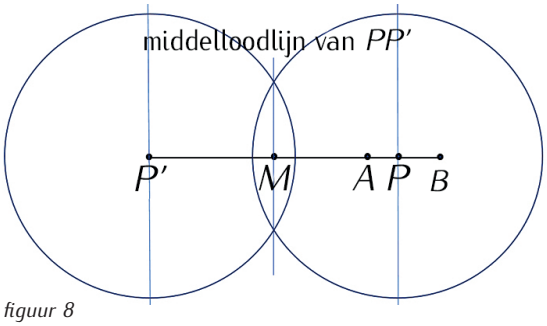
figuur 6

Als tweede construeren we een punt P' op het verlengde van het lijnstuk AB waarvoor geldt: P'A : P'B = x : 1 ($x < 1$), zie figuur 7
1 Teken het lijnstuk AB
2 Teken een willekeurige halve lijn door B
3 Kies daarop punten C en E zó dat BC : CE = 1 : x
4 Teken AE en CP'//AE met P' op het verlengde van AB
Als AQ'//BD en Q' op CP' dan geldt op basis van de stellingen I en II: AECQ' is een parallellogram (AQ' = CE) en ΔAP'Q'~ΔBP'C met P'A : P'B = AQ' : BC = CE : BC = x : 1. Hieruit volgt P'A = x · P'B. Met P'B – P'A = AB geeft dit: $P'B = \frac{1}{1-x} \cdot AB$ en $AP' = \frac{x}{1-x} \cdot AB$.



figuur 7

Hierna construeren we de middelloodlijn van het lijnstuk *PP'*. *M* is het snijpunt van lijn *AB* en de middelloodlijn, zie figuur 8.



figuur 8

Nu geldt:
MP = ½PP' = ½(P'B – PB) =
$\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}) \cdot AB = \frac{x}{1-x^2} \cdot AB$

$MA = MP - PA = \frac{x}{1-x^2} \cdot AB - \frac{x}{1+x} \cdot AB =$

$\frac{x^2}{1-x^2} \cdot AB$ $MB = MA + AB =$

$\frac{x^2}{1-x^2} \cdot AB + \frac{1-x^2}{1-x^2} \cdot AB = \frac{1}{1-x^2} \cdot AB$

Kies een punt P'' op de cirkel met M als middelpunt en P'P als middellijn, zie figuur 9. Met andere woorden:

$MP'' = MP = \frac{x}{1-x^2} \cdot AB.$

De driehoeken ΔAMP'' en ΔP''MB zijn gelijkvormig. Beide driehoeken hebben een gemeenschappelijke hoek en twee aanliggende zijden met dezelfde verhouding:

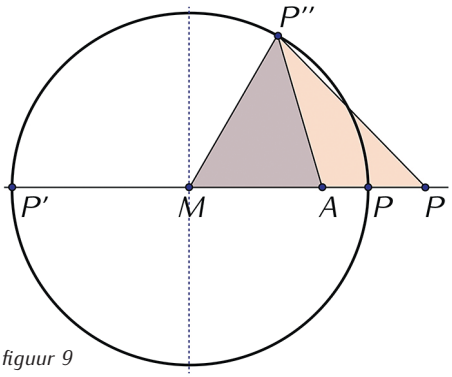
AMP'' = P''MB.

$$\frac{MA}{MP''} = \frac{\frac{x^2}{1-x^2} \cdot AB}{\frac{x}{1-x^2} \cdot AB} = \frac{x}{1} \quad \text{en} \quad \frac{MP''}{MB} = \frac{\frac{x}{1-x^2} \cdot AB}{\frac{1}{1-x^2} \cdot AB} = \frac{x}{1}$$

ofwel: MP'' : MB = x : 1.

Conclusie :

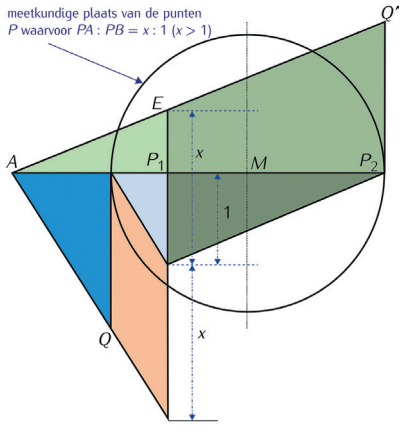
$\frac{P''A}{P''B} = \frac{MA}{MP''} = \frac{MP''}{MB} = \frac{x}{1}$ ofwel P''A : P''B = x : 1.



figuur 9

Hieruit volgt: de meetkundige plaats van alle punten P'' waarvoor geldt: P''A : P''B = x : 1 is een cirkel met middellijn P'P, waarbij P het punt op lijnstuk AB is waarvoor geldt: PA : PB = x : 1 en P' is het punt op het verlengde van AB waarvoor geldt: P'A : P'B = x : 1.

Als x > 1 dan ziet de constructie van P_1 en P_2 er als volgt uit, zie figuur 10.



figuur 10

Algebraïsche oplossing

Terug naar opgave 22, zie figuur 4.

Gegeven: B(6, 0), C(0, -4), $A(x_A, y_A)$ AB = 2·AC

Gevraagd: A

Oplossing:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - 6)^2 + (y_A - 0)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A + 3)^2}$$

AB = 2AC geeft

$$\sqrt{(x_A - 6)^2 + (y_A - 0)^2} = 2\sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A + 3)^2}$$

Dit leidt tot (de formule voor de meetkundige plaats!):

$x_A^2 + y_A^2 + 4x_A + 8y_A = 0$ (1)

$A(x_A, y_A)$ ligt op de lijn: 2x + y + 8 = 0 geeft

$y_A = -2x_A - 8$ (2)

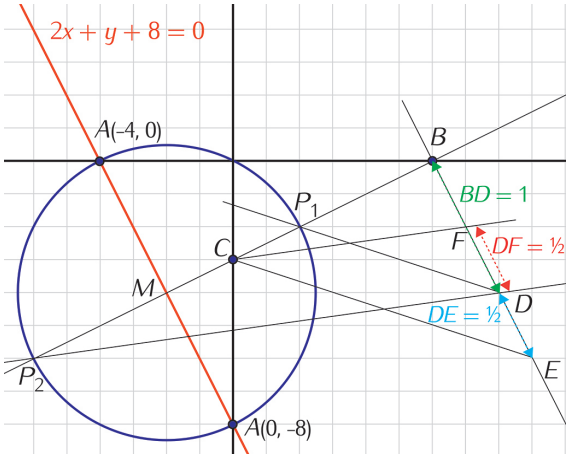
Substitutie van (2) in (1) levert:

$x_A^2 + 4x_A = 0 \rightarrow x_A(x_A + 4) = 0 \rightarrow x_A = 0$ of $x_A = -4$.

Met (2) geeft dit A(0, -8) of A(-4, 0).

Meetkundige oplossing

De cirkel met middellijn P_1P_2 is de meetkundige plaats van de punten P waarvoor geldt PC = ½·PB. De rode lijn, zie figuur 11, is de lijn waarop alle punten liggen waarvoor geldt 2x + y + 8 = 0. De snijpunten van de meetkundige plaats en de lijn '2x + y + 8 = 0' voldoen aan de eisen gesteld in opgave 22. De oplossing is dus A(-4, 0) of A(0, -8).



figuur 11

De algebraïsche oplossing geeft uiteraard de gewenste exacte oplossing. De meetkundige oplossing heeft als voordeel dat eenvoudig kan worden vastgesteld of er sowieso een oplossing is. Op weg naar het uiteindelijke exacte antwoord zullen veel leerlingen, vanwege de reeks noodzakelijke herleidingen, al gestrand zijn. De meetkundige aanpak geeft de algebraïsch opererende leerling de mogelijkheid om zich zo nodig te corrigeren. Deze mogelijkheid maakt dat de bedoelde opgave alsnog in dit hoofdstuk 'afsluitende meetkunde' op zijn plaats is. >

Noten

[1] Met dank aan de bijdrage van Martin Kindt in *Euclides* 95-4. Hier werd mij duidelijk dat deze meetkundige plaats alles te maken heeft met de cirkels van Apollonius. En met de bissectrice-stellingen uit *De Elementen* van Euclides (boek IV, propositie 3).

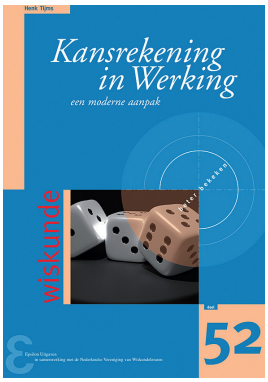
Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent. E-mailadres: *jjacvandongen@hotmail.com*

Boekbespreking

Alex van den Brandhof

Kansproblemen empirisch in actie



Titel: Zebra-reeks 52 Kansrekening in Werking
Ondertitel: een moderne aanpak
Auteur: Henk Tijms
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2018)
ISBN: 978-90-5041-171-4, 72 pagina's (softcover)
Prijs: € 10,00

Verjaardagen van voetbalsters

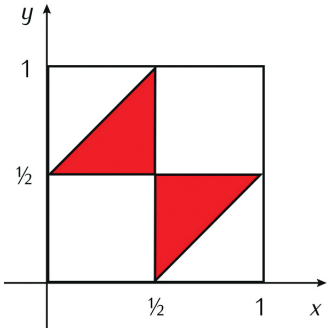
In de zomer van 2019 werd in Frankrijk het wereldkampioenschap voetbal voor vrouwen gehouden.
De oranjeleeuwinnen waren in topvorm, de oranjekoorts laaide op. Eind juni kreeg ik van Henk Tijms een e-mail met een aardige opdracht voor leerlingen. Tijms is emeritus hoogleraar Operations Research aan de Vrije Universiteit in Amsterdam en auteur van diverse boeken over kansrekening.
In zijn mail schreef Tijms hoe leuk het is om het verjaardagsprobleem tijdens het WK empirisch in actie te zien. De lezers van dit tijdschrift zullen allemaal wel weten dat in een groep van 23 personen de kans op ten minste twee samenvallende verjaardagen ruim vijftig procent is. Voor leerlingen die het probleem nog niet kennen, is het altijd weer een verrassende uitkomst. Ze willen het niet geloven, totdat ze het voorgerekend krijgen met behulp van de complementregel en wat basiskennis combinatoriek.
Laat bij voetbal het aantal spelers in een team nu precies 23 zijn: elf spelers op het veld en twaalf wisselspelers op de bank. Bevestigden de voetbalvrouwen van het WK 2019 de theoretische kans van vijftig procent op minstens twee gelijke verjaardagen in een team? Van de 24 teams waren er tien met twee spelers die tegelijk jarig zijn. In het Nederlandse team waren dat Kika van Es en Lineth Beerensteyn: allebei jarig op 11 oktober. Dit bleek een mooi voorbeeld van een real-life experiment waarbij de theorie experimenteel wordt bevestigd: de theoretische verwachtingswaarde mag 12 zijn, met een standaardafwijking van 2,45 is de uitkomst 10 prima in overeenstemming met de theorie.

Inzicht en begrip

Tijms zit vol met ideeën om kansrekening in werking te zien. Dat bewijst zijn nieuwste Zebra, waarin hij pleit voor de invoering van kansrekening als een volwaardig wiskundevak in het curriculum op de middelbare school. Enerzijds laat Tijms zien dat kansrekening een serieus vak is met een theoretische opbouw – de axioma's van Kolmogorov ontbreken niet –, anderzijds kiest hij juist voor een moderne aanpak, waarin het accent ligt op het samenspel tussen computersimulaties en kansrekening. Voor Tijms staan het bevorderen van inzicht en het vormen van begrip voorop. Wie het boekje doorbladert, ziet formules die voor veel leerlingen niet eenvoudig zullen zijn (reeksen, dubbelsommaties, de exponentiële kansdichtheid: het staat er allemaal in), maar uiteindelijk is de toepasbaarheid van die formules belangrijker dan gedetailleerde bewijzen. De vele aansprekende voorbeelden maken duidelijk dat kansen een rol spelen in het leven van alledag. Wat is de kans dat bij de kwartfinale van de Champions League geen twee Engelse teams aan elkaar gekoppeld worden? Hoe groot is de kans op een hoofdprijs bij de spelshow *Deal or No Deal* als je besluit twintig koffers te openen? Hoe waarschijnlijk is het dat een atleet die negatief op doping is getest, tóch doping heeft gebruikt? Wat is de verwachtingswaarde van de resterende levensduur van een satelliet die al twaalf jaar in gebruik is? Is iemand die zichzelf 'wijnkenner' noemt en vijf van tien wijnen correct weet te identificeren een bluffer? Wie het boekje heeft doorgewerkt, kan al deze vragen beantwoorden.

Computersimulatie

Op veel scholen is programmeren nog maar een klein onderdeel van het vak informatica. Toch zijn er veel leerlingen die zich – al dan niet in hun vrije tijd – graag verdiepen in het schrijven van computerprogramma's. Jaarlijks zijn er leerlingen die het lokale of zelfs nationale nieuws halen vanwege hun profielwerkstuk waarin voor programmeren een hoofdrol is weggelegd.
Voor dat soort leerlingen biedt het laatste hoofdstuk van *Kansrekening in Werking*, over waarschijnlijkheid en computersimulatie, een reeks mooie oefeningen. Tijms werkt ze lang niet allemaal uit; je bent aangewezen op je eigen creativiteit en vaardigheid in het programmeren. Tijms geeft een voorbeeld in de programmeertaal *Matlab*. Mijn eigen indruk is dat onder scholieren *Python* erg populair is. Deze programmeertaal is relatief makkelijk te leren en dankzij de vele ingebouwde functies kunnen programma's vaak beknopt worden weergegeven.
Dat Tijms geen voorbeelden in Python geeft, is geen bezwaar. Scholieren kopen ook geen cursusboek Python; zodra ze vastlopen, vinden ze wel ergens een oplossing op internet. Dat geldt voor de kansproblemen net zo goed. Wie googelt, vindt op zijn minst een vergelijkbaar kansprobleem met Python-script.



figuur 1

Driehoek leggen met een gebroken stok

Tot slot: hoe groot is de kans dat met de drie delen van een stok die zijn ontstaan nadat die stok op twee willekeurige plaatsen werd gebroken, een driehoek kan worden gelegd? Het is een aardige oefening om zelf na te gaan dat deze kans wordt gegeven door de oppervlakte van het rode gebied in figuur 1. En omdat we de kansrekening ook in werking willen zien, ook een screenshot van een Python-programma dat 100.000 keer een stok in drie delen breekt, zie figuur 2. Ik heb het programma vijf keer gerund, met als resultaten voor de kans op het leggen van een driehoek: 0,251430; 0,250130; 0,251080; 0,250280 en 0,248770.

```
import random as rand

def driehoekmogelijk(a, b, c):
    return a + b > c and a + c > b and b + c > a

def stoktweekeerbreken():
    x, y = rand.uniform(0, 1.0), rand.uniform(0, 1.0)
    if x > y:
        x, y = y, x
    return driehoekmogelijk(x, y - x, 1 - y)

def teldriehoeken(aantalexperimenten):
    aantaldriehoeken = 0
    for i in range(aantalexperimenten):
        if stoktweekeerbreken():
            aantaldriehoeken = aantaldriehoeken + 1
    return aantaldriehoeken

if __name__ == '__main__':
    experimenten = 100000
    driehoeken = teldriehoeken(experimenten)
    print("De kans dat een driehoek mogelijk is, is
    ongeveer {0:0.6f}".format(driehoeken/experimenten))
```

figuur 2

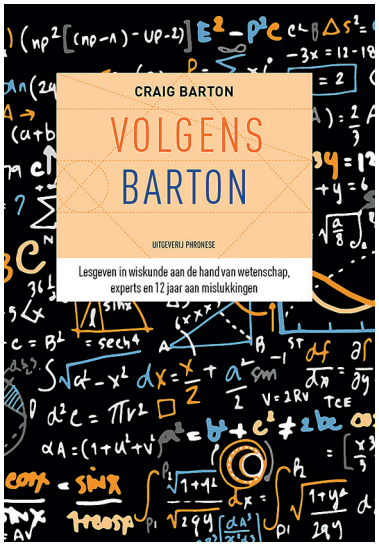
Over de recensent

Alex van den Brandhof (*www.alexvandenbrandhof.nl*) combineert zijn baan als wiskundeleraar op het Gymnasium Muttenz (Zwitserland) met wetenschapsjournalistiek. Hij schrijft onder meer over wiskunde voor *NRC*.
E-mailadres: *brandhof@gmail.com*

René Kneyber

‘De vloek van kennis’

How I wished I’d taught Maths van Craig Barton heeft veel wiskundedocenten in het Verenigd Koninkrijk beïnvloed in hun manier van lesgeven. René Kneyber, vertaler en bewerker van het boek, interviewt docenten die door Barton anders zijn gaan lesgeven. Een gesprek met Cristina Corduneanu, docent wiskunde op het Titus Brandsma Lyceum in Oss.



Beginners en experts

‘Door Craig Barton ben ik me bewust geworden van mijn “vloek van kennis”. Als leerlingen klaagden wiskunde moeilijk te vinden, deed ik dat al snel af als geklaag. Nu snap ik dat ik een expert in wiskunde ben en het daardoor lastig kan vinden om me te verplaatsen in de problemen waar beginners mee kampen, en probeer ik me bewust meer in te leven in de worstelingen van leerlingen.’

‘Door de vloek van kennis was ik ook geneigd om de zelfstandigheid van leerlingen te overschatten. Ik had met leerlingen de afspraak dat ze van iedere paragraaf de helft van de opdrachten moesten maken, maar ik merkte dat ze dan alleen de makkelijkste opdrachten maakten. En dan waren ze tot overmaat van ramp ook nog eens te snel tevreden. “Ik denk dat ik het wel kan, mevrouw”, zeiden ze dan.

Dankzij Barton begrijp ik dat het lastig is voor beginners om in te schatten welke opgave het beste past, precies omdat ze beginners zijn. Daarom kies ik nu welke opgaven gemaakt moeten worden, en dat levert de leerlingen meer rust en vertrouwen op. Het zorgde er ook voor dat sommigen niet te veel opdrachten maakten, want dat gebeurde natuurlijk ook.’

Probleemoplossen

‘De vloek van kennis speelde me ook parten bij het bespreken van wiskundige problemen. Ik deed wel voor hoe zo’n probleem opgelost moest worden, maar ik liet daarbij veel van mijn metacognitieve denkstappen achterwege.

Tegenwoordig hanteer ik de vier fases van probleemoplossen van Polya waar Barton over schrijft: 1) de probleemstelling begrijpen, 2) een plan bedenken, 3) het plan uitvoeren, en daarna 4) terugkijken. Ik doorloop deze stappen nu heel expliciet. Daardoor wordt de uitleg wel langer, maar naar mijn idee wel beter. Hopelijk zijn ze daardoor beter in staat om wat ze van een opgave leren bij een andere opgave weer toe te passen.’

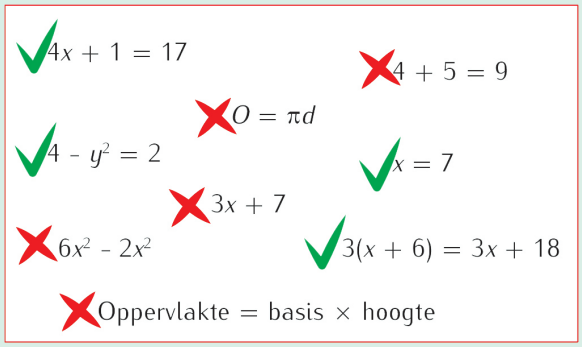
Voorbeelden

‘Door het boek ben ik erachter gekomen dat de voorbeelden die ik gebruikte niet goed waren. Ik pakte per paragraaf een paar voorbeelden, maar daar zat te veel variatie tussen. Hierdoor kunnen leerlingen geen goede voorspellingen doen, waardoor ze minder goed schema’s ontwikkelen. De slotsom is dan dat ze het minder goed leren.’

‘Ook gebruik ik nu voorbeelden van leerlingen om veelvoorkomende fouten te bespreken. Aan het einde van de les geef ik ze dan drie kleine opdrachtjes. Ik kijk welke problemen, misconcepten of misverstanden het meeste

voorkomen. Die noem ik dan 'my favourite no', en bespreek ze de volgende les.'

Voorbeelden en non-voorbeelden



In hoofdstuk 7 bespreekt Barton in zijn boek het gebruik van voorbeelden en non-voorbeelden. Hij moedigt daarin docenten aan om, naast voorbeelden, ook non-voorbeelden en drempelvoorbeelden (voorbeelden die op de grens van een bepaald concept liggen) in te zetten. In het voorbeeld van figuur 1 bespreekt Barton met de klas wat vergelijkingen zijn. Hij laat de selectie zien, en zet langzaam – in stilte – kruisjes bij wat geen vergelijking is en vinkjes bij wat wel een vergelijking is. Hierdoor ontwikkelen leerlingen een beter conceptueel begrip.

Een beter rolmodel

'Wat mij enorm geraakt heeft is het gedeelte in het boek over je liefde voor wiskunde demonstreren. Ik was heel erg geneigd om dit niet te doen. Leerlingen vinden wiskunde niet leuk en zijn bezig met andere dingen zoals gamen, voetballen en het weekend. Maar wat Barton me hielp realiseren is dat ik misschien wel de enige in hun leven ben die zich positief kan uitlaten over wiskunde. Dus als ik echt liefde heb voor wiskunde, dan moet ik dit ook laten zien. Wiskunde heeft ook hele mooie kanten die uniek zijn. Ik merk dat de leerlingen het wel een beetje gek vinden als ik daarover vertel, maar ze vinden het ook leuk dat ik zo enthousiast ben over mijn vak.'

Stil

'Waar ik aan de ene kant mijn liefde voor wiskunde meer laat zien, ben ik aan de andere kant veel stiller geworden. Door het boek ben ik me veel bewuster van de kwetsbare aard van het werkgeheugen. Als de klas stil bezig was, zou ik vroeger geneigd zijn om allerlei gesprekjes aan te kopen. Hoe gaat het met de hond of kat, dat soort dingen. Nu is er een tijd en plaats voor dit soort gesprekjes, maar dat is natuurlijk niet tijdens het zelfstandig werken waarin ze hun werkgeheugen goed kunnen gebruiken voor de wiskunde. Dat was wel even wennen voor de leerlingen. Toen ik daarmee begon vroeg een leerling aan mij of het wel goed met me ging.'

> "Als ik echt liefde heb voor wiskunde, dan moet ik dit ook laten zien."

Goed boek

'Ik heb enorm veel aan de boeken van Barton gehad. Het is vooral fijn dat hij eerlijk is over wat hij vroeger allemaal niet goed deed, dat is niet alleen herkenbaar, maar het helpt mij ook om de stap te zetten om het anders te doen. Ondanks dat Nederlands niet mijn moedertaal is, was het makkelijk en snel te lezen. Het enige minpunt is dat het soms wat in herhaling valt, maar dat neemt niet weg dat ik er superveel aan gehad heb.'

Over de auteur

René Kneyber doceerde zestien jaar lang wiskunde, schreef en vertaalde diverse boeken waaronder *Volgens Barton*. Sinds 2015 is hij lid van de Onderwijsraad.

Jacques Jansen

Uitdagende problemen

Worstelen met een integraal

Jacques Jansen lost de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$ op en komt erachter dat je eerst goed naar de integraal moet kijken, voordat je de technieken en algebraïsche vaardigheden erop loslaat.

Inleiding

Kijken we naar het vwo examen wiskunde B dan vinden we de functies $y=1+\sqrt{x-1}-x$ en $y=\sqrt{x}$ om geprimitiveerd te worden. Dat is allemaal goed te doen.

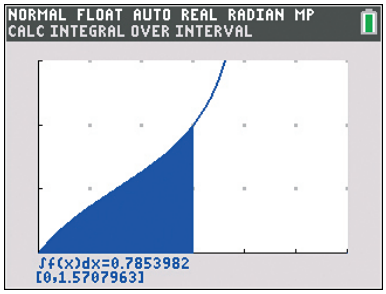
Maar hoe reken je $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$ uit?

Kan deze integraal wel voor onze leerlingen? Probeer nu, collega, zonder eerst verder te lezen, deze integraal uit te rekenen....

Een student uit Delft legde dit probleem voor aan een goede vriend van mij[1]. De student kwam er niet uit. Mijn vriend wel. In een stad wat verder op, Leiden, wordt aandacht besteed aan de algebraïsche vaardigheden van de studenten. Blijkbaar kan het beter. In de maand juni werd samen met docenten naar het vwo examen wiskunde B gekeken, met de focus op de algebraïsche vaardigheden. Is dat zinvol? Ja, maar....

Een eerste indruk

Ik dacht, wat een fraaie integrand maar wat kan ik ermee? De teller is bijna de afgeleide van de noemer. En waarom niet even met de GR verkennen? En je kunt numeriek integreren, dat leverde de schermafdruk van figuur 1 op.



figuur 1

Dat had mij op een idee moeten brengen en zeker de mooie eigenschappen van de grafieken van de sinus en de cosinus. Immers beide grafieken zijn elkaars spiegelbeeld op het interval [0, ½π]. Neen, ik koos voor al die technieken zoals substitutie, partieel integreren, overstappen op een andere variabele, enz. En rekenen maar. Een voorbeeld, maar nu wordt het meer een calculusaanpak:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{1} \frac{4t}{(-t^2+2t+1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

Ga maar na met de grafische rekenmachine en je kunt je lol op met breuksplitsing en substitutie. Ik bespaar je mijn verdere geworstel met technieken en chagrijn, zie zo nodig voor de totstandkoming van het rechterlid de noot aan het eind van het artikel.[2] Het wordt tijd voor een andere invalshoek...

Aanpak van een vriend

Mijn vriend bedacht het volgende.

Geef de integraal $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$ aan met $I(x)$.

Verander teller sin(x) van de integrand zo dat de afgeleide van de noemer erin zit maar ook dat de term -sin(x) erin voorkomt: -(-sin(x) + cos(x)) + (sin(x) + cos(x)) - sin(x).

Waarom? Dat zie je in de volgende regel:

Er geldt nu dat

$$I(x) = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x - I(x)$$

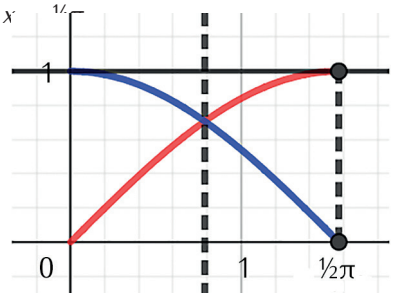
$$2\cdot I(x) = -[\ln(\sin(x)+(\cos(x))]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\cdot dx = 0+\frac{1}{2}\pi$$

Dus $I(x) = \frac{1}{4}\pi$.

Weinig rekenwerk. Toch kan ik mij voorstellen dat je denkt, 'hier gaan mijn leerlingen niet opkomen'. Dan kijken we nog eens goed naar de grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$. Ik kreeg een idee, figuur 2 had ik nog op mijn netvlies. Ik gebruikte dat plaatje vroeger om de formule van $\sin(x) + \cos(x)$, nadat bij verkenning op de GR leerlingen het als een mogelijke sinusoïde herkenden, op te stellen zonder gebruik te maken van de somformules die op het examenblad staan. Je ziet snel dat $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(x + \frac{1}{4}\pi)$.

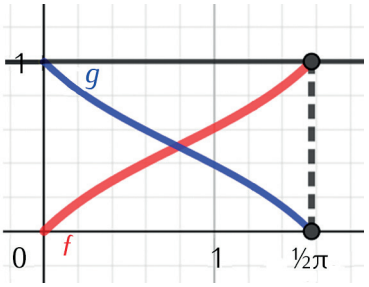
Begrijpelijke aanpak voor vwo-leerlingen

De grafieken van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ zijn elkaars gespiegelde op het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$. De symmetrieas is



figuur 2

De grafieken van $f(x)=\frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ en $g(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ zijn ook elkaars gespiegelde ten opzichte van de lijn $x = \frac{1}{4}\pi$. Bovendien geldt: $f(x) + g(x) = 1$, zie figuur 3.



figuur 3

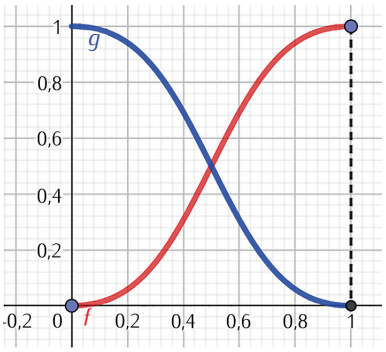
De oppervlaktes van de vlakdelen van $f(x)$ en $g(x)$ op $[0, \frac{1}{2}\pi]$ zijn dus even groot en samen gelijk aan de oppervlakte van het vlakdeel dat hoort bij somfunctie $y = 1$ en dat is de rechthoek met afmetingen van $\frac{1}{2}\pi$ bij 1.
De oppervlakte is dus $\frac{1}{2}\pi$.

Dus $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi = \frac{1}{4}\pi$.

Na een e-mailcorrespondentie met genoemde vriend kwamen we tot de vraag: 'kunnen we dit generaliseren?' En nog belangrijker: 'kunnen we leerlingen hiertoe aanzetten?' Toch ook een vaardigheid voor in de 21e eeuw?
We beginnen met het vinden van twee functies waarvan de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de verticale lijn $x = \frac{1}{2}a$ op het interval $[0, a]$ met $a > 0$.

Generaliseren

Voordat we tot een mogelijke generalisatie komen even iets uitproberen met standaardfunctie $f(x) = x^2$.



figuur 4

De grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = (1 - x)^2$ zijn elkaars gespiegelde op het interval $[0, 1]$. De symmetrieas is $x = \frac{1}{2}$. We kijken dan naar de volgende integrand: $\frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}$ en formuleren de opgave: bereken

$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}dx$. Zie figuur 4, waarin ook de grafiek te zien is van $y=\frac{(1-x)^2}{x^2+(1-x)^2}$. De bijbehorende somgrafiek is $y = 1$ en we zien dan meteen dat $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+(1-x)^2}dx = \frac{1}{2}$.

Of heb je liever: $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x+1}dx = ?$

>

Dan een generalisatie. We beginnen met een continue functie f op interval $[0, a]$ met $a > 0$. Kijk naar zijn bevriende functie $g(x) = f(a - x)$. De bijbehorende grafieken zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van lijn $x = \frac{1}{2}a$.

De opgave wordt: bereken $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x$.

Kijk vervolgens naar integraal $\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x$.

De bijbehorende somintegraal is $\int_0^a 1\cdot\mathrm{d}x$.

De grafieken van $y=\frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ en $y=\frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}$ zijn ook elkaars spiegelbeeld ten opzichte van lijn $x = \frac{1}{2}a$. Dus de oppervlakten van de bijbehorende vlakdelen zijn gelijk aan elkaar. De som is gelijk aan a.

Er geldt: $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a$.

Voorbeeld. Leerlingen kunnen zelf voorbeelden verzinnen zoals $\int_0^2 \frac{2^x}{2^x+2^{2-x}}\mathrm{d}x$.

Maar voordat we het beseffen, wordt het oplossen van dit type integralen alweer een techniekje. En je zult het vast zinvol vinden om je leerlingen nieuwsgierig te maken en aan te sporen tot verder onderzoek.

Noten

[1] Samenwerking en inspirerende e-mailwisseling met oud-docent van de Open Universiteit Matthijs Wielders.

[2] Deze transitie wordt niet op het vwo behandeld. Wellicht 'kost' voor eerstejaarsstudenten die calculus volgen op een technische universiteit of op een bèta-afdeling van een andere universiteit.
Een integrand die een gebroken functie is van veeltermen in $\sin(x)$ en $\cos(x)$ kunnen we omzetten in een gebroken functie van veeltermen met variabele t. Daarbij hoort ook de vervanging van $\mathrm{d}x$ met behulp van $\mathrm{d}t / \mathrm{d}x$. We definiëren: $t = \tan(\frac{1}{2}x)$. Er geldt: $\mathrm{d}t / \mathrm{d}x = (1 + \tan^2(\frac{1}{2}x)) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + t^2)$.. We nemen het kwadraat van $\cos(\frac{1}{2}x)$ en herschrijven dat:

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)}}=\frac{1}{\frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)}}=\frac{1}{1+t^2}\cdot$$

$$\cos(x) \overset{\text{dubbelformule}}{=} 2\cos^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)-1=\frac{2}{1+t^2}\cdot-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot$$

$$\sin(x) \overset{\text{dubbelformule}}{=} 2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)=$$
$$\frac{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}\cdot\cos^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)=2t\cdot\frac{1}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

Luc Van den Broeck

Hoe dik mogen staarten zijn?

Oppervlaktes onder een grafiek die oneindig groot zijn. Of juist niet. Die vraag inspireerde Luc Van den Broeck tot het schrijven van deze bijdrage, die eerder verscheen in *Uitwiskeling*.[1]

Inleiding

Ik heb altijd al een voorliefde gehad voor paradoxen in verband met oneindig: eindige sommen van een oneindig aantal positieve getallen, eindige oppervlakten van een oneindig lang oppervlak, eindige inhouden van lichamen met een oneindige oppervlakte…

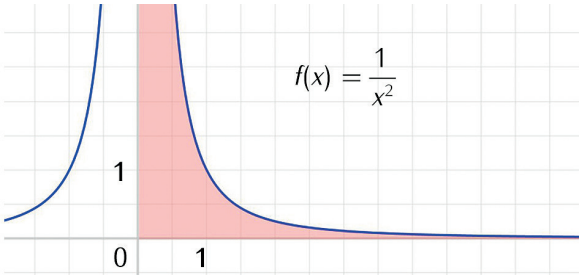
Het inzicht in het begrip *oneindig* ontwikkelt zich door de leerjaren heen. In de tweede graad[2] is het voor veel leerlingen nog verbazingwekkend dat het oneindig doorlopende getal 1,999… precies gelijk is aan 2. In de derde graad[2] wordt er intens gefocust op limieten en daardoor groeit het aanvaardingsproces van eindige grootheden bij oneindig doorlopende processen.

In het zesde jaar laat ik me bij de berekeningen van *oppervlakten onder de grafiek van functies* wel eens verleiden tot een uitstapje buiten het leerplan. Ik geef de leerlingen voorbeelden van vlakdelen met oneindig lange staarten die toch een eindige oppervlakte hebben. Wiskundig heb ik het dan over het begrip *oneigenlijke integraal van de eerste en van de tweede soort* (of in het Engels: *improper integral of the first and second kind*).

De hamvraag van deze les is: 'Hoe dik mogen oneindig lange staarten zijn om toch nog een eindige oppervlakte te hebben?'

Twee prototypes

Voor de oneigenlijke integraal van de eerste soort kies ik het prototype $f(x)=\frac{1}{x^2}$ met $x > 0$. Ik vraag de leerlingen of de gekleurde oppervlakte onder de grafiek, zie figuur 1, eindig of oneindig is.



figuur 1 Een dikke verticale en een dunne horizontale staart

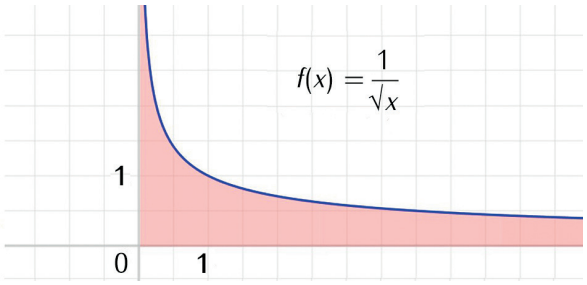
'Oneindig', luidt het antwoord. En dat is correct. Maar de oorzaak van de oneindigheid is niet meteen duidelijk. Er zijn twee oneindig lange staarten in het aangeduide vlakdeel. Hoewel het op dit moment niet meer dan een subjectief gevoel is, lijkt de verticale staart hier vrij dik en de horizontale eerder dun. Het is alleen de dikke staart die ervoor zorgt dat de oppervlakte oneindig is en niet de dunne. Een eenvoudige limiet- en integraalberekening maakt dit duidelijk.

Nemen we bijvoorbeeld x-waarden in het interval $[1, +\infty)$ dan is de oppervlakte onder de grafiek eindig. De horizontale staart heeft een eindige oppervlakte.

$$\begin{aligned} A_{[1,+\infty)} &= \lim_{r\to+\infty} \int_1^r \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^r \\ &= \lim_{r\to+\infty} \left(\frac{-1}{r}+1\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

>

Berekenen we daarentegen een integraal over het interval [0, 1] dan vinden we een oneindige oppervlakte. Voor de oneigenlijke integraal van de tweede soort neem ik het prototype $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Voor mij is het meteen duidelijk dat deze functie de inverse functie is van de vorige functie, zie figuur 2.



figuur 2 Een dikke horizontale en een dunne verticale staart

De grafiek is gelijk aan de vorige grafiek na spiegeling rond de eerste bissectrice van het assenstelsel. De horizontale staart en de verticale staart zijn nu van plaats verwisseld. Het staat dus vast dat de horizontale staart in dit voorbeeld te dik is om een eindige oppervlakte te hebben. De verticale staart is dun genoeg.
Voor de leerlingen hoort hier een berekening bij. In plaats van een limiet voor r naar 0 kunnen we ook een limiet voor $\frac{1}{r}$ naar 0 nemen. De limiet- en integraalberekening gaat nu als volgt, waarbij r naar plus oneindig gaat.

$$\begin{aligned} A_{[0,1]} &= \lim_{r\to+\infty}\int_{1/r}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_{1/r}^{1} \\ &= \lim_{r\to+\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{r}}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Waarom deze integraal gelijk is aan 2 en de vorige gelijk is aan 1, kun je makkelijk zelf inzien. Het lijkt aanvankelijk een beetje tegenstrijdig want een spiegeling van een vlakdeel rond een as behoudt de oppervlakte van dit vlakdeel. Maar als je goed kijkt, merk je dat het verschil zit in de oppervlakte van het eenheidsvierkantje [0, 1] × [0, 1]

Twee staarten tegelijkertijd

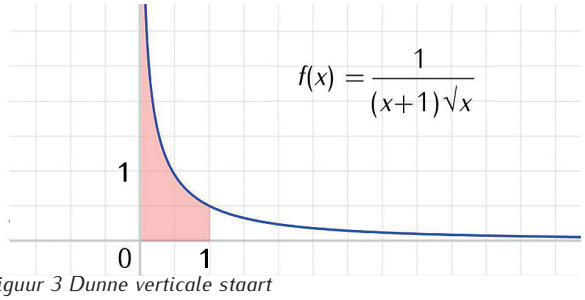
De leerlingen kunnen deze berekeningen makkelijk overdoen met andere machtsfuncties met een negatieve exponent, bijvoorbeeld voor $n = -3$ of voor $n = -\frac{3}{4}$. In het eerste geval krijgen ze een slanke horizontale staart en een dikke verticale staart. In het tweede geval is het net andersom. Ooit kreeg ik van een leerling de opmerking dat een zware horizontale staart waarschijnlijk altijd gepaard gaat met een dunne verticale staart en omgekeerd. Ik stond met de mond vol tanden want ik had hier nooit eerder over nagedacht. Het enige wat ik aanvoelde was het staartgedrag van machtsfuncties met een negatieve exponent, d.w.z. functies met een voorschrift van de vorm $f(x) = x^n$ met n negatief. Voor $n \in (-1, 0)$ is er een dunne verticale staart, zie figuur 2, en voor $n \in (-\infty, -1)$ is er een dunne horizontale staart, zie figuur 1. Na deze opmerking besefte ik dat er voor $n = -1$ twee dikke staarten zijn (reken dit na!). Maar een functie met twee dunne staarten was me helaas niet bekend... Tenzij er gewerkt mag worden met de flauwe noodoplossing van samengestelde voorschriften. Pas onlangs ontdekte ik een voorschrift van een functie met een dunne horizontale en een dunne verticale staart. Ik wil je dit voorbeeld niet onthouden. De berekeningen zijn niet veel moeilijker dan bij de twee klassieke prototypes.
De functie waar het om draait is

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \quad .$$

De primitieve functie is gelijk aan $F(x) = 2\cdot\arctan(\sqrt{x})$ want

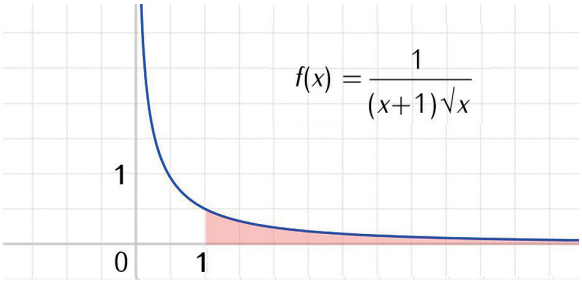
$$\begin{aligned} (2\cdot\arctan(\sqrt{x}))' &= 2\cdot\frac{1}{1+x}\cdot(\sqrt{x})' \\ &= 2\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Maar naar analogie met de vorige berekeningen, splits ik de oppervlakteberekening op in twee delen, zie figuur 3 en 4.



figuur 3 Dunne verticale staart

$$\begin{aligned} A_{[0,1]} &= \lim_{r\to+\infty}\int_{1/r}^{1}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{r\to+\infty}\left[2\cdot\arctan(\sqrt{x})\right]_{1/r}^{1} \\ &= \lim_{r\to+\infty}\left(2\cdot\arctan(1)-2\cdot\arctan(\frac{1}{\sqrt{r}})\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

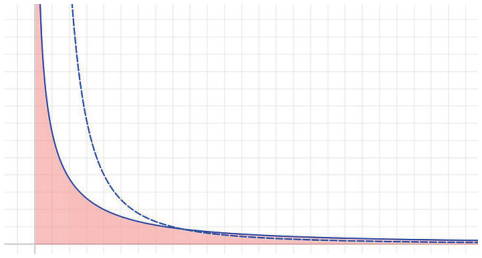


figuur 4 Dunne horizontale staart

$$A_{[1,+\infty)} = \lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\left[2\cdot\arctan(\sqrt{x})\right]_1^r$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\left(2\cdot\arctan(\sqrt{r})-2\cdot\arctan(1)\right)$$
$$= \pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Majoranten en minoranten

Blijft de vraag of je op zicht kunt zien of staarten zwaar of licht zijn. Ik vrees van niet, tenzij je vergelijkend te werk gaat. Je kunt naar analogie met majorante en minorante rijen de convergentie onderzoeken van oneigenlijke integralen als je de gepaste functies met elkaar vergelijkt. In figuur 5 vergelijken we de volle staarten van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ met de staarten (in streepjeslijn) van de functie $f(x)=\frac{1}{x^2}$. De grafieken hebben een snijpunt in (2,14... ; 0,21...). Kun je hier iets uit besluiten over de staarten van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$?

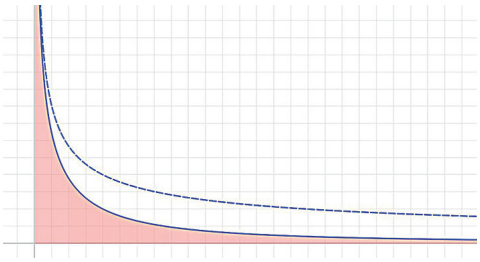


figuur 5 Vergelijking met de functie $f(x)=\frac{1}{x^2}$

Daarna vergelijken we in figuur 6 de volle staarten van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ met de staarten (in streepjeslijn) van de functie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. De grafieken hebben geen snijpunt. Werpt deze figuur licht op de oppervlakte onder de staarten van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$?

Antwoorden

In het geval van figuur 5 kunnen we niets concluderen over de oneigenlijke integralen van de eerste soort en van



figuur 6 Vergelijking met de functie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

de tweede soort van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Een staart die dunner is dan een staart met een oneindige oppervlakte heeft niet noodzakelijk een eindige oppervlakte. Een staart die dikker is dan een staart met een eindige oppervlakte heeft niet noodzakelijk een oneindige oppervlakte. In het geval van figuur 6 kunnen we zonder rekenwerk iets besluiten over de integraal van de tweede soort van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$. De verticale staart is dunner dan die van de functie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

En deze laatste heeft een eindige oppervlakte.

De verticale staart van $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ heeft dus ook een eindige oppervlakte.

Kun je nu zelf een machtsfunctie bedenken die je in staat stelt om zonder integraalberekening te bewijzen dat de horizontale staart van de functie $f(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ een eindige oppervlakte heeft?

Noten

[1] *Uitwiskeling* is een van de Vlaamse zustertijdschriften van *Euclides*. Deze bijdrage van Luc Van den Broeck verscheen in *Uitwiskeling* 35/2, lente 2019. Zie *https://www.uitwiskeling.be*

[2] De tweedegraad in Vlaanderen is te vergelijken met vwo 3 en 4, derdegraad is te vergelijken met vwo 5 en 6. Een overzicht van het Vlaamse onderwijssysteem: *https://onderwijs.vlaanderen.be/het-voltijds-gewoon-secundair-onderwijs*

Over de auteur

Luc Van den Broeck is al dertig jaar docent wiskunde op een middelbare school in de buurt van Gent, EDUGO campus De Toren. In zijn vrije tijd is hij redactielid van het tijdschrift *Uitwiskeling* en maakt hij deel uit van het redactieteam dat de vragen bedenkt voor de Vlaamse Wiskunde Olympiade (VWO en JWO).

Ed van den Berg
Helti Lygia Mampouw

Visualiseren van rekenen en wiskunde in Indonesië

Lesmateriaal

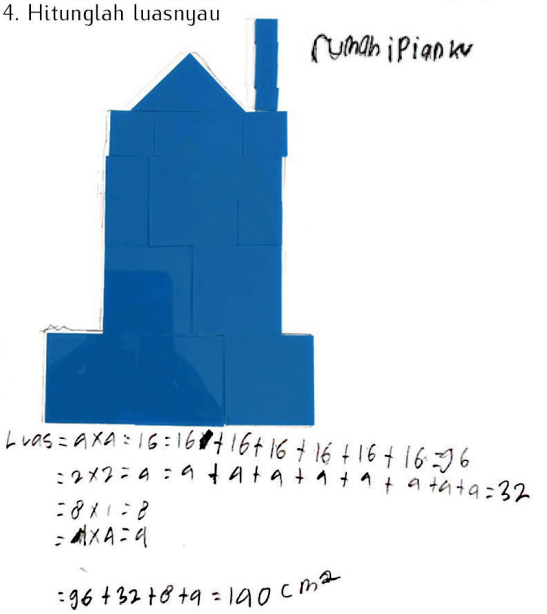
De afgelopen maanden heeft het Wereldwiskunde Fonds een project gesteund in Indonesië. De bedoeling was om ervaring op te doen met het ontwikkelen van lesmateriaal dat op den duur ook breder ingezet kan worden op scholen die afgelegen liggen. Voor het testen van het materiaal is gekozen voor scholen in en rond Salatiga op Java.

Zes lerarenopleiders/ontwikkelaars van Satya Wacana Christian University zijn aan de gang gegaan met het maken van werkbladen en docentinstructies, vooral gericht op het visualiseren van de lesstof. Er is 2-dimensionaal en 3-dimensionaal materiaal gemaakt van acryl met behulp van een lasercutter en een 3D-printer om oppervlakte en inhoud 'tastbaar' te maken. Ook is digitaal materiaal ingezet, en deels ook zelf geprogrammeerd.

Het gemaakte materiaal is getest op acht basisscholen en vier middelbare scholen, in totaal 424 leerlingen uit Salatiga en dorpen in de buurt.

MENDISAIN DAN MENGHITUNG LUAS DAERAH
BAGIAN A

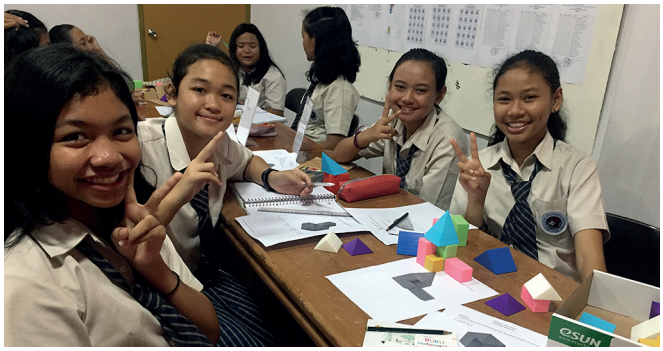
1. Rencanakan disain sebuah daereh.
2. Ceritakan tentang apa yang akan didisain.
3. Ambillah selembar kertas HVS, letakkan bahan-bahan berbent persegi dan segitiga sesuai disain daereh yang dikehendaki.
4. Hitunglah luasnyau



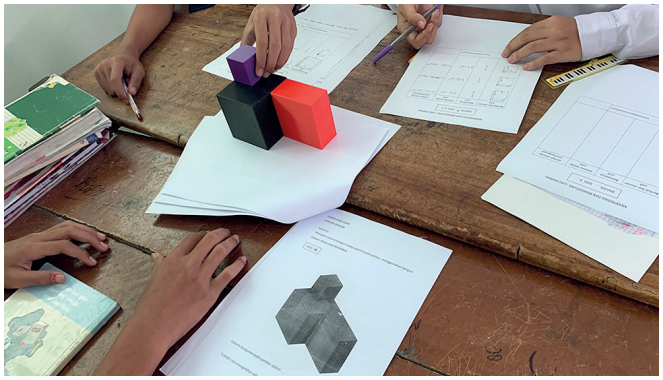
figuur 1 Oppervlakteberekening door het leggen van vierkanten en driehoeken op een figuur

Oppervlakte berekenen

In een land waar oppervlakte en inhoud vaak abstracte formules zijn, buigen de kinderen zich over getekende figuren en beleggen ze die met grotere en kleinere vierkantjes en driehoeken om daarmee de oppervlakten te bepalen (groep 7). Oppervlakte wordt daarmee gekoppeld aan concrete figuren en eenheden en er wordt hard gerekend bij het optellen, figuur 1.



figuur 2 Bepalen van inhoud met gekleurde kubussen, piramides, en andere vormen die leerlingen samenvoegen. © foto's: Helti Lygia Mampouw



figuur 3 Nabouwen van een driedimensionale figuur aan de hand van een bouwplaat

Inhoud

Bij het bepalen van inhoud (groep 8 en middelbaar onderwijs) zijn er aantrekkelijk gekleurde kubussen, piramides, en andere vormen die leerlingen samenvoegen, zie figuur 2. Leerlingen krijgen een 2-dimensionaal plaatje van een bouwwerk, bouwen het in drie dimensies (figuur 3) en berekenen vervolgens de inhoud van de onderdelen en het complete bouwwerk. De plaatjes worden steeds ingewikkelder. Ten slotte bouwen de leerlingen een droomhuis

en berekenen de inhoud ervan. Dat rekenen geeft nog best problemen, vooral in groep 8. Bijvoorbeeld, wat is de inhoud van ⅓ van een kubus met zijde 8 cm? Daar kwamen nogal verschillende antwoorden uit. Leerlingen zijn enthousiast bezig en bij oppervlakte en inhoud lukt het 80% van de leerlingen de eindopdrachten correct te maken. Bij de laatste school werden verbeteringen van het materiaal gebruikt.

Algebra

In een andere les zijn leerlingen bezig met algebra, hoe vereenvoudig je $3x + 2y + 2x$ en hoe kun je je daar een beeld bij vormen? Er zijn figuren in vier verschillende vormen, elk in een verschillende kleur. De x kan een rondje zijn, de y een vierkant. Je kunt dus niet zomaar rondjes bij vierkanten optellen. De kleine figuren voor de leerlingen hebben een + aan de ene kant en een – aan de andere kant. Zo kun je dus optellen en aftrekken en ook met negatieve getallen werken, zie figuur 4.

figuur 4 Materialen om algebraïsche uitdrukkingen mee te vereenvoudigen

De docent heeft grote versies van de figuren voor op het bord en schrijft de + en – daar zelf op met uitwisbare viltstift. Er is een aantal werkbladen. Een eindopdracht in het eerste jaar van de middelbare school is bijvoorbeeld het vereenvoudigen van: $-4(3k - p) - 3(4k + 3p) + 4$.
Zoals verwacht correleerde de moeilijkheidsgraad sterk met het aantal negatieve getallen in de opgave. Bij eenvoudige opgaven wilden snelle leerlingen dat zonder de figuren doen om vervolgens vast te lopen bij de meer ingewikkelde opgaven. In groep 8 van de basisschool gebruikt men dezelfde figuren maar dan van een geometrische vorm om het optellen en aftrekken van positieve en negatieve gehele getallen aan te leren.

Classificeren

In groep 3 wordt gewerkt aan classificatie van allerlei figuren en voorwerpen op een tablet en koppeling van figuren en voorwerpen aan geschreven taal, zie figuur 5.

Bij gebrek aan tablets werd een klassikale uitvoering bedacht waarbij toch alle leerlingen werden betrokken. Naar aanleiding van de ervaringen bij het testen, zijn verbeteringen aangebracht.

figuur 5 Classificatie van figuren en voorwerpe

Doel

Wat is de bedoeling van al die beelden? Het abstracte karakter van wiskunde onderuithalen? Nee, visualisaties zijn bedoeld als een tijdelijke ondersteuning ('scaffold') bij begripsvorming, een ondersteuning die later weggehaald kan worden wanneer het begripsgebouw stevig staat.
Ook dan is het trouwens nog wel eens handig om terug te denken aan visualisatie, bijvoorbeeld als je iets moet uitleggen aan anderen.
De subsidie voor het project was € 2.673,-. Voor dat geld heeft men heel veel gedaan met veel leerlingen in verschillende scholen zowel in de stad als in de armere dorpen. Gelukkig waren de projectlessen net afgelopen toen corona toesloeg in Indonesië. Helti en haar team documenteerden de lessen uitgebreid met videofragmenten van lessen, foto's van leerlingen en hun werk, lesmateriaal en verslagen.

Over de auteurs

Ed van den Berg gaf onder andere natuurkunde en vakdidactiek in VU-projecten voor de lerarenopleiding in Indonesië en de Filipijnen.
E-mailadres: *e2.vanden.berg@vu.nl*. Helti Lygia Mampouw was een van zijn studenten die inmiddels zelf wiskunde en vakdidactiek geeft aan de lerarenopleiding van Satya Wacana Christian University in Salatiga en in 2019 promoveerde.

Vastgeroest

Een zomer in Nederland

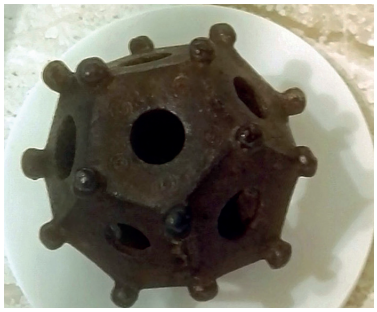
Ab van der Roest

Zomervakantie in Nederland is helemaal geen straf. Je moet natuurlijk wel je ogen goed open houden, want er is veel te zien. Uiteraard beperk ik me voor *Euclides* tot zichtbare wiskunde. Soms loop je er zomaar tegenaan. Bij een wandeling in mijn eigen omgeving zag ik het volgende kunstwerk (figuur 1).

figuur 1

Dodecaëder

Een dodecaëder. Enig zoekwerk op het internet geeft de volgende beschrijving: 'Het kunstwerk 'Oneness of all' maakt deel uit van Beeldenroute 2017 langs de Grebbelinie. Het kunstwerk is gemaakt door Ton Kroes en heeft de vorm van een dodecaëder, een wiskundige vorm die is opgebouwd uit twaalf gelijkvormige vijfhoeken. Als een kazemat staat het object op de wal van het Fort aan de Buursteeg en ziet het uit naar samenwerking ongeacht ras, geaardheid of geloof. De dodecaëder, eigenlijk het kleine broertje van de geodetische koepel, is opgebouwd uit houten ribben met daarop een OSB-plaat. Het is bekleed met zeil en zink.' Het deed me denken aan een andere toevalligheid die ik zag in het Rijksmuseum van Oudheden in Leiden (figuur 2).



figuur 2 Dodecaëder uit de Romeinse tijd. Gevonden bij Elst.

Ook een dodecaëder, maar wel uit een totaal andere tijd. Het is uit de Romeinse tijd en gevonden bij Elst in de Betuwe. De functie is onbekend. Er zijn verschillende vindplaatsen, maar die liggen allemaal ten zuiden van de Alpen. Een hypothese is dat het een instrument is om de zaaidatum van wintertarwe te bepalen.

Band van Möbius

Waar ik ook toevallig tegen aanliep was het sieraad in figuur 3. Het was in het Designmuseum in Den Bosch en je ziet een kunstzinnige band van Möbius. Maakster is Emmy van Leersum. Ik had nog nooit van haar gehoord, ik ben niet zo van de design, maar ook hierbij helpt het internet: 'Van Leersum volgde een opleiding aan het Instituut voor Kunstnijverheidsonderwijs te Amsterdam (1958-1962), waar ze les kreeg van onder meer Marinus Zwollo, en aan de University College of Arts, Craft and Design te Stockholm (1962-1963).' Het werk van Van Leersum moest autonoom zijn en daarom gebruikte ze meetkundige vormen. Een sieraad wordt zo een kunstwerk op zichzelf, zonder dat het gedragen wordt.

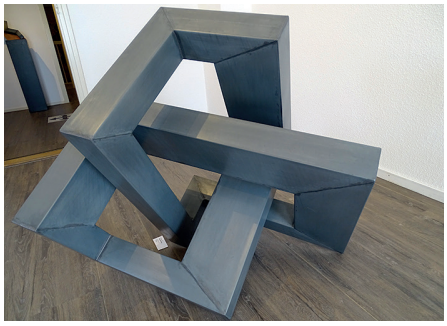
figuur 3

Strakke vormen

Deze zomer ging ik soms ook bewust op zoektocht. Naar aanleiding van de nieuwsbrief van *Ars et Mathesis*[1] bezocht ik Bredevoort. Daar in de Koppelkerk, op de bovengalerij, was een mooie tentoonstelling *Beauty & Geometry* met werk van Han Lammers. Een beeldend kunstenaar die geïnspireerd is door strakke vormen, zie figuur 4.

figuur 4

Prachtig hoe hij de icosaëder plaatst in het centrum van de kubus. Daarnaast de *Imploded Cube* waarbij twee imploded piramides afgezaagd zijn. De kunstenaar schrijft zelf: 'De *Imploded Cube* is mijn voorstelling van een geïmplodeerde kubus waar twee hoeken vanaf zijn en ernaast liggen. Het ontwerp is overduidelijk een kubus terwijl er weinig hoeken van 90° inzitten.'



figuur 5

Knopen

Figuur 5 is de brug naar de volgende wiskunstontmoeting. Een klaverbladknoop. Een knoop is een gesloten kromme in de ruimte. Hier (figuur 5) is de kromme gemaakt van zinken koker profiel 100 × 100 mm. Knopen zijn wiskundig interessant, maar ook erg kunstzinnig. Dat was de reden dat ik naar Baarlo in Limburg ging. Op Hoog Catharijne staat een knoop en met wat zoekwerk vond ik de naam van Shinkichi Tajiri. Daarna kwam Baarlo in beeld, want in dat dorp heeft de Japanse kunstenaar gewoond. Hij heeft veel kunstwerken gemaakt, geïnspireerd op knopen. Hij schonk dan een tweede exemplaar aan het dorp. Er staat nu een achttal knopen opgesteld (figuur 6).

figuur 6

Het verschil tussen de platte knoop en de oudewijvenknoop. Als we een echte wiskundige knoop willen hebben, moeten we de knoop natuurlijk wel sluiten. In gedachten maak ik dus een paar extra verbindingen.
Bij het inrijden en bij het uitrijden van Baarlo zijn de knopen nauwelijks te missen (figuur 7).

figuur 7

Moet je nu helemaal naar Baarlo, of naar een tentoonstelling om knopen te zien? Nee hoor, houd je ogen maar open. Deze zag ik in Apeldoorn (figuur 8).

figuur 8

figuur 9

En toen we 's avonds uit eten gingen op de Markt van Terborg, zag ik, vlak voor het nagerecht, aan de overkant van de straat de knoop van figuur 9. Dit kunstwerk heeft als titel De Knup en werd vervaardigd door Bernard Engelbarts. Vakantie in eigen land is dus helemaal geen straf als je je ogen goed openhoudt.

Noot

[1] Zie *www.arsetmathesis.nl*. De *Ars et Mathesis*-dag 2020 is onder voorbehoud van coronamaatregelen op zaterdag 21 november in de Cleveringazaal in het Kamerlingh Onnes Gebouw van de Universiteit van Leiden. Programma en aankondigende nieuwsbrief volgen op de website.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

Wis en Waarachtig

De strijd tussen π en τ

Elk jaar vieren wiskundigen op 14 maart π-dag met taart (Engels: pie) en pizza. Maar 28 juni is de dag van π's concurrent: τ (≈ 6,28). De twee wiskundige constanten π en τ zijn sterk met elkaar verbonden. Het getal π is de constante die de verhouding van de omtrek en de diameter van een cirkel aangeeft. τ geeft daarentegen de verhouding van de omtrek en de straal van een cirkel aan en is daarom 2π.

Het idee om π te vervangen voor een andere constante is afkomstig van hoogleraar Bob Palais van Utah Valley University. Zijn grootste bezwaar tegen π is dat het onhandig is om hoeken van cirkels aan te geven in π radialen. Op school leren kinderen dat de hoek van een hele cirkel 360° is en dat deze graden ook kunnen worden uitgedrukt in radialen. Dan is de hoek van een hele cirkel 2π. Verder is een kwart van een cirkel een 0,5π, een halve cirkel 1π en driekwart cirkel 1,5π. Het zou veel makkelijker zijn als één omwenteling van een cirkel wordt aangeduid met één symbool. Dit is precies hoe τ is gedefinieerd, namelijk als $\tau = 2\pi$. Dan is de hoek van de hele cirkel 1τ radialen in plaats van 2π radialen. En dan volgt dat een kwart cirkel een kwart τ is, een halve cirkel een half τ en driekwart cirkel is driekwart τ. Die regelmaat is een stuk natuurlijker en logischer dan dezelfde hoeken uitgedrukt in π. Er zijn nog veel meer functies en formules die logischer, mooier of handiger worden als je 2π vervangt door 1 tau. Behalve dat er ook veel argumenten zijn voor het gebruik van π, is τ's grootste probleem waarschijnlijk dat π al ruim 250 jaar dé standaard is. π vervangen door τ zou dus een helse klus zijn. Misschien is het al een mooie eerste stap als leerlingen überhaupt leren over τ. Ze kunnen het bestaande lesmateriaal blijven gebruiken, maar leren ook te rekenen met de mooie regelmaat die tau biedt.

Bron: nu.nl

Prijsuitreiking OnderbouwWiskundeDag en Wiskunde B-dag

Eind juni vonden de online prijsuitreikingen van de OnderbouwWiskundeDag en de Wiskunde B-dag plaats. Het waren twee zeer geslaagde bijeenkomsten met het neusje van de zalm, wat betreft wiskundeleerlingen in Nederland.

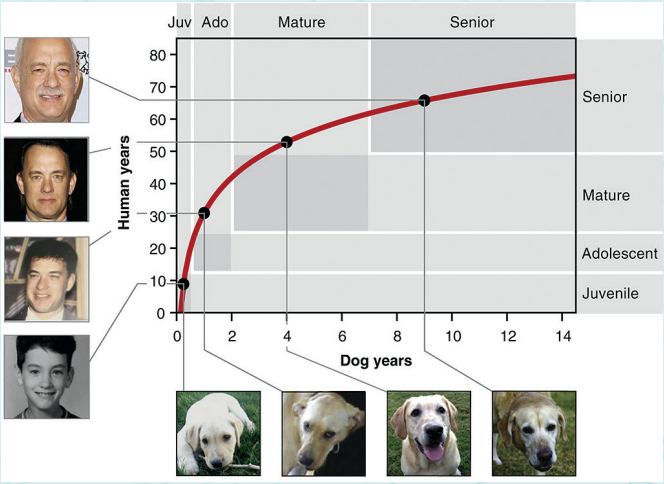
Tijdens de OnderbouwWiskundeDag gingen leerlingen aan de slag met de concrete vraag: Hoe bouw je in je wijk 200 aantrekkelijke nieuwe woningen voor gezinnen, en zorg je er tegelijkertijd voor dat de wijk groen blijft en het 'hitte-eiland-effect' zo klein mogelijk wordt? Hiervan maakten ze een promotiefilmpje voor de opdrachtgever (de gemeente). De eerste prijs ging naar de leerlingen van het St. Michael College te Zaandam, die een eenvoudig, doch doeltreffend filmpje hebben gemaakt, waarbij aan de hand van de plattegrond helder uitleg wordt gegeven.

De Wiskunde B-dag ging dit jaar over het spel 'sprouts'. In hun werk lieten de leerlingen zien dat ze zowel speltheorie, als het begrip 'invariantie', konden inzetten om het spel te winnen. De eerste prijs ging dit jaar naar de leerlingen van het Christelijk Lyceum in Delft, die indruk maakten met hun theoretische benaderingen en *Latex*-vaardigheden.

Meer over deze wedstrijden is te vinden op *http://www.wiskundeinteams.sites.uu.nl*

Bron: Wiskunde PersDienst

Hoe oud is een hond nou echt in 'mensenjaren'?



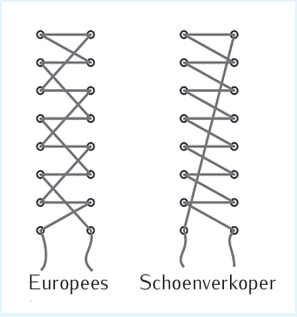
Jeugdig, jongvolwassen, volwassen en senior in zowel mensen als honden. (Foto: Cell Press) Bron: nu.nl

Als mensen willen uitrekenen hoe oud een hond nou 'echt' is, dan vermenigvuldigen ze vaak de leeftijd van hun viervoeter met 7. Een 3 jaar oude hond zou 21 jaar zijn in mensenjaren. Toch is deze berekening niet helemaal correct, stellen wetenschappers in het vakblad *Cell Systems*. Honden kunnen vaak al puppy's krijgen wanneer ze nog geen jaar oud zijn, maar een 7 jaar oude mens kan dan nog lang geen kinderen krijgen. De onderzoekers bedachten een techniek om de scheikundige veranderingen

in DNA te bekijken en zo de leeftijd van een organisme te kunnen bepalen. De auteurs van dit onderzoek wilden echter eens iets anders proberen dan onderzoek op mensen en besloten hun 'genetische klok' op honden uit te testen. Uit het onderzoek zou blijken dat een lineaire vergelijking tussen mens en hond onmogelijk is. Je kunt een leeftijd dus niet zomaar met een getal vermenigvuldigen om tot de juiste leeftijd te komen.
Wat blijkt: een labrador veroudert in zijn eerste jaren vrij snel, waarna de verjaring begint te vertragen. Een hond van 1 jaar oud is 30 in mensenjaren, een hond van 4 is 52 in mensenjaren en vanaf 7 jaar oud begint het weer te vertragen. Bij het huidige onderzoek is alleen gebruikgemaakt van het DNA van labradors, maar het ene hondenras wordt ouder dan het andere. Dat betekent dat de formule ($\textit{mensenleeftijd} = 16 \times \ln(\textit{hondenleeftijd}) + 31$) nog iets aangepast zou moeten worden, maar volgens de wetenschappers is hun 'genetische klok' behoorlijk goed afgesteld en zou die op alle hondensoorten toepasbaar kunnen zijn. Toch willen ze nog onderzoek doen naar andere hondenrassen, om te kijken of er verschillen zijn.
Bron: www.nu.nl

WiTje: Hoe lang moet een veter zijn?

Wiskunde in teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Alympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).[1]

Er zijn allerlei manieren om je veters in een schoen te rijgen.

Opdracht 1

Onderzoek hoeveel echt verschillende manieren er zijn om een veter in een schoen met twee rijtjes van drie gaatjes te rijgen. Ga daarbij uit van de volgende eisen:

- de twee uiteinden van de veter zitten beide aan de bovenkant van de schoen;
- de twee uiteinden moeten aan verschillende kanten zitten;
- de schoen moet echt dichtgaan;
- je mag geen gaatjes overslaan;
- elk gaatje mag maar één keer worden gebruikt.

Let op: of je een veter van bovenaf of van onderaf door een gaatje rijgt maakt niet uit (dat vinden we níet verschillend). Maak een tekening (zoals je die hiernaast ziet) van elke manier die je vindt.

Opdracht 2

Bij welke manier van rijgen (uit opdracht 1) heb je de langste veter nodig? En bij welke manier de kortste? Laat dit zien met berekeningen of formules. Gebruik de volgende gegevens: de twee rijen met gaatjes zitten 4 cm uit elkaar, en de afstand tussen twee gaatjes onder elkaar in een rij is 2 cm.

Je kunt nog veel meer wiskundig onderzoek doen naar het rijgen van veters. Veel plezier!
Dit WiTje is gebaseerd op de opdracht van de Onderbouw Wiskundedag 2018.
https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28633/

De inschrijving voor editie 2021 van de Onderbouw Wiskundedag is geopend!

Notulen NVvW-jaarvergadering 2019

Opening

De jaarvergadering vindt plaats op zaterdag 2 november 2019 in Veenendaal. Voorzitter Ebrina Smallegange opent de jaarvergadering en heet de leden, ereleden en genodigden welkom. Jan Maassen heeft zich bij de secretaris schriftelijk afgemeld. Bij aanvang van de jaarvergadering zijn circa 200 leden aanwezig.

Jaarrede

Vanuit de gedachte dat er voor goed wiskundeonderwijs overleg en communicatie nodig is, benoemt de voorzitter diverse zaken, zoals ons vakblad *Euclides* waarvan onlangs het 750e nummer verscheen. In dat kader bedankt de voorzitter Harm Jan Smid, die de archivering van ons blad op orde heeft gebracht. Ook diverse digitale communicatiemiddelen om binnen de vereniging met elkaar in contact te treden worden genoemd, waaronder de pogingen die het bestuur heeft ondernomen voor het opzetten van een digitaal platform voor het uitwisselen van vakinformatie. Steun vanuit de overheid hiervoor ontbreekt tot dusver.
De voorzitter spreekt haar waardering uit voor de inzet van de leden van de werkgroepen die, met adviezen aan het bestuur en het organiseren van bijeenkomsten en symposia, kleur geven aan de vereniging. De NVvW beziet ontwikkelingen op het gebied van veranderingen in het bevoegdhedenstelsel vanuit de gedachte dat leerlingen recht hebben op wiskundelessen van goed opgeleide wiskundedocenten. Het lidmaatschap van FvOv en Platform VVVO geeft ons de mogelijkheid onze opvattingen over diverse onderwerpen, waaronder curriculumherziening, naar voren te brengen. Curriculum.nu heeft afgelopen jaar veel tijd van het bestuur en werkgroepen gevraagd. Het project krijgt komend jaar zijn vervolg. De vmbo vakvernieuwing zal in ieder geval in het komende verenigingsjaar van start gaan. Afgelopen jaar is er duidelijkheid gekomen over rekenen voor leerlingen die wiskunde als examenvak hebben. Voor leerlingen zonder wiskunde wordt door de overheid nog naar een middel gezocht om de rekenvaardigheid te toetsen.
Berichten en opvattingen die via social media geuit worden of via andere kanalen tot ons komen, worden ter harte genomen en in breder perspectief binnen diverse gremia besproken (bijvoorbeeld in het jaarlijks overleg met CvTE over examenzaken).
Ten slotte meldt de voorzitter dat er nagedacht wordt over het opzetten van een projectfonds om initiatieven van leden te ondersteunen en wordt aandacht gevraagd voor de eerste publicatie in de 'Giraf'-reeks.

Notulen van de jaarvergadering van 3-11-2018

De notulen worden goedgekeurd, met dankzegging aan de secretaris.

Jaarverslagen 2018/2019

Het jaarverslag van de NVvW en het jaarverslag van *Euclides* worden goedgekeurd. De hoofdredacteur van *Euclides*, Tom Goris, geeft uitleg over de visualisatie die de kaft van de 750e *Euclides* siert. Ook wordt aandacht gegeven aan het spel '30 seconden wiskunde', dat door de redactie van *Euclides* is geproduceerd en voor de leden gratis te verkrijgen is.

Financiën

De penningmeester geeft een toelichting op de balans per 31 juli 2019, de specificatie van het vermogen en op de exploitatierekening 2018-2019 en begroting voor de boekjaren 2019-2021.
Vanwege een incidentele verlaging van de bijdrage die NVvW via de vakbond FvOv afdraagt aan de overkoepelende organisatie CMHF is er dit boekjaar een financiële meevaller. 20.000 euro wordt toegevoegd aan het eigen vermogen t.b.v. een studiefonds, een nieuw initiatief van de NVvW. Hierbij wordt benadrukt dat met behulp van dit fonds initiatieven van leden ondersteund kunnen worden die ten goede komen aan alle leden. Ook wordt een deel gereserveerd voor een *Euclides*-special en wordt gespaard voor het 100-jarig jubileum.
De energie die gestoken wordt in het innen van contributies loont. De verkoop van Zebra-boekjes levert de vereniging per boekje 1 euro op. Een deel van de lasten voor schoolvoorlichting en symposia wordt door de inschrijfkosten voor deelnemers gecompenseerd. Peter en Heleen van der Ree worden bedankt voor de zorgvuldige financiële administratie. De kascommissie, bestaande uit de heren P. Kop en J. van Mourik, hebben de jaarrekening over het boekjaar 2018-2019 gecontroleerd en geconstateerd dat het geheel op de juiste wijze is verantwoord.
De voorzitter vraagt de vergadering de penningmeester te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. Hiermee wordt met applaus ingestemd. De nieuwe kascontrolecommissie wordt gevormd door de heer J. van Mourik en de heer J. Pil. De contributie wordt niet verhoogd.

Wel stelt het bestuur voor om de contributie voor leden die voor de jaargang 20-21 *Euclides* niet op papier maar uitsluitend digitaal wensen te lezen, te verlagen met €14,50. Dit is het bedrag dat voor druk- en verzendkosten uitgespaard wordt. Leden die hiervan gebruik willen maken moeten dit voor 1 mei 2020 kenbaar maken bij de ledenadministratie. Het voorstel wordt aangenomen.

Bestuursverkiezing

Erik van den Hout treedt af als bestuurslid en wordt bedankt voor zijn inzet en werkzaamheden t.b.v. de website en andere digitale zaken. Desiree van den Bogaart wordt herkozen voor een volgende termijn. De leden Sharon Calor, Joanne de Jager, Corwin van Schendel en Jörgen van Remoortere worden in het bestuur verkozen.

Presentatie nieuwe publicatie: Giraf

In navolging van de Zebra-reeks voor havo/vwo bovenbouw presenteert de vereniging vandaag de eerste uitgave ten behoeve van leerlingen en docenten vmbo en onderbouw havo/vwo onder de naam 'Giraf'. Het statistiekspel is een uitgave van Epsilon en NVvW. De leden worden opgeroepen om met ideeën te komen voor volgende uitgaven.

Rondvraag

Er zijn geen vragen voor de rondvraag binnengekomen.

Sluiting van de vergadering

De voorzitter sluit de jaarvergadering en wenst de aanwezigen een prettige en leerzame studiedag toe.

Jaarverslagen NVvW en *Euclides*

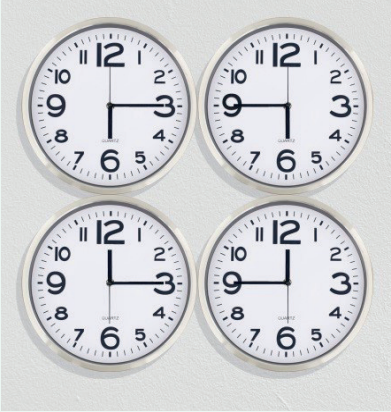
Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 7 november 2020** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 96 nummer 2.

vakbladeuclides.nl/962nvvw

vakbladeuclides.nl/962euclides

'A one minute square in 12 hours'

Henk Rozenhart



Dit kunstwerk is nog tot 22 november te zien op de tentoonstelling 'On the move' in het Gorcums Museum. Het heet 'A one minute square in 12 hours' en is van Cas Beijers.
Bij mij komen er bij het zien van dit werk ogenblikkelijk een aantal vragen op. Is deze stand bij normaal gelijklopende klokken wel mogelijk? Als ik de wijzers in zo'n vierkant neerzet en de klokken laat lopen, staan ze dan over 12 uur weer zo? Krijg je bij vier klokken vaker zo'n vierkant? Enzovoort ...
Het kan natuurlijk met vier klokken die tegelijk 3 uur aangeven, maar dan moet je ze wel anders ophangen.

Bronnen:
www.casbeijers.nl en *www.gorcumsmuseum.nl*

Puzzel 96-2

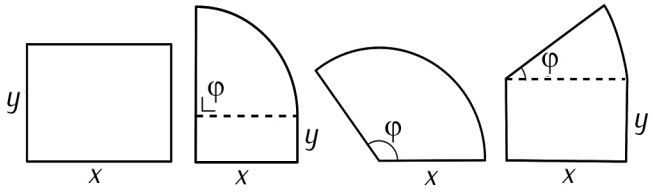
Twee verrassende stellingen

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

We hebben deze keer twee mooie stellingen uitgekozen, een meetkundige en een algebraïsche.

De meetkundige stelling

Deze stelling gaat over figuren met omtrek O, die bestaan uit een rechthoek met zijden x en y, met een aangeplakte cirkelsector met hoek φ langs een zijde met lengte x, zie figuur 1.



figuur 1

De bedoelde stelling zegt iets over het verband tussen x, y, φ en het maximale oppervlak S als de omtrek O is gegeven. Je kunt je leerlingen verrassen door ze bijvoorbeeld een waarde voor de omtrek O te laten kiezen en dan vervolgens direct een of meer van de bovengenoemde waarden x, y, φ of het maximale oppervlak S te voorspellen. En differentiëren of integreren is niet nodig. In de eerste twee plaatjes geldt van links naar rechts: $\varphi = 0^o$ en $\varphi = 90^o$. In het derde plaatje geldt $y = 0$ en in het vierde plaatje staat alles nog open.

Opgave 1: Bepaal de maximale oppervlakte S voor de eerste drie plaatjes, als de oppervlakte $O = 8$ en bepaal ook de exacte waarden van x, y, φ die daarbij horen.

Opgave 2: Bepaal ook voor het vierde plaatje de maximale waarde van oppervlak S als $O = 8$ en geef het verband tussen x, y en de hoek φ die bij die maximale oppervlakte horen.

Opgave 3: Formuleer met de gevonden eigenschappen de bedoelde stelling, in het algemene geval, dus met gegeven omtrek O.

De algebraïsche stelling

Deze zou in een iets andere vorm bekend kunnen zijn, en dat is eigenlijk tegen onze principes in onze puzzels. Maar we vinden die stelling zo leuk dat we het toch (nog een keer) onder de aandacht willen brengen en we hebben er wel iets aan toegevoegd. De stelling luidt:

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3m}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(n-1)m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{m} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{(m-1)n}{m} \right\rfloor$$

Of kort genoteerd:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{im}{n} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} \left\lfloor \frac{in}{m} \right\rfloor$$

Daarbij zijn m en n gehele positieve getallen en relatief priem, dus er is geen gemeenschappelijke deler >1. De haakjes $\lfloor\ \rfloor$ betekenen dat er naar beneden wordt afgerond, ook wel aangeduid met 'floor'.
Om er in te komen:

Opgave 4a: Toon aan dat dit klopt voor $m = 7$ en $n = 4$ en geef de uitkomsten van de sommaties.

Opgave 4b: Bewijs deze stelling met m en n relatief priem, en geef de uitkomsten van de sommaties als een eenvoudige formule in n en m.

En dan beweren wij dat de vergelijking ook geldt als m en n wel een gemeenschappelijke deler hebben groter dan 1. Wel moet dan de formule voor de uitkomst van de sommaties in n en m worden aangepast.

Opgave 5: Toon dit aan door eerst zelf een voorbeeld te kiezen en vervolgens voor het algemene geval. Geef ook een formule voor de uitkomst van de sommaties.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.

Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij jouw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.

Top 10 ladderstand

De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen!
Inzendingen moeten uiterlijk op 16 december 2020 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 95-7:

vakbladeuclides.nl/962puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerking van de eerdere puzzels: *https://nvvw.nl/euclides/puzzel/*

We feliciteren Ruud Stolwijk van harte met de ladderprijs.

Tot en met puzzel 95-5		
1	R. Stolwijk	122
2	H. Linders	117
3	F. Göbel	114
4	B. Groot	113
5	J. Remijn	112
6	H. Huisman	100
7	M. Woldinga	76
8	S. Zondervan	73
9	J. Meerhof	64
10	L. Cizkova	61

De Matheonkalender 2020

Vanaf 1 november a.s. kun je je weer inschrijven voor de digitale adventskalender: de *Matheonkalender*. Tijdens de advent (1 december tot en met 24 december) verschijnt er dagelijks[1] een uitdagend wiskundevraagstuk dat je alleen, in een groepje of met de hele klas kunt proberen op te lossen. Om in de stemming te komen vast een voorbeeldopgave.

Soccer

Four soccer teams from the cities Icetown, Frostville, Glacierhampton and Coldbury have participated in the Christmas soccer tournament. During this tournament, each team played exactly one match against each of the other three teams. A win brings three points, a draw one point,- mand a loss brings nothing. No two of these six matches ended with the same result. (For example: If some match ended in 3:2, then none of the other five matches ended with 2 goals for one team and 3 goals for the other team. Here is the final table of the tournament:

team	W	D	L	goals	points
Icetown	2	0	1	5 : 1	6
Frostville	2	0	1	3 : 5	6
Glacierhampton	1	0	2	5 : 6	3
Coldbury	1	0	2	4 : 5	3

Which of the following statements is true?

1. Coldbury has won its match against Glacierhampton 1 : 0
2. Coldbury has lost its match against Glacierhampton 0 : 1
3. Coldbury has won its match against Glacierhampton 2 : 0
4. Coldbury has lost its match against Glacierhampton 0 : 2
5. Coldbury has won its match against Glacierhampton 3 : 0
6. Coldbury has lost its match against Glacierhampton 0 : 3
7. Coldbury has won its match against Glacierhampton 2 : 1
8. Coldbury has lost its match against Glacierhampton 1 : 2
9. Coldbury has won its match against Glacierhampton 3 : 1
10. Coldbury has lost its match against Glacierhampton 1 : 3

[1] *www.mathekalender.de*

Informatie over deelname en aanmelding, te winnen prijzen, oude opgaven met oplossingen etc. vind je op de Nederlandse site van de MatheKalender: *www.4tu.nl/ami/en/Mathekalender/*

Meer informatie: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven). E-mailadres: *H.G.terMorsche@tue.nl*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2020

Vr 06/11 — Eindhoven
Prijsuitreiking Wiskunde Olympiade 2020

Za 07/11 — ONLINE
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

2021

Ma 18/01 Do 28/01 — Eindhoven
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2020

Vr 29/01 Za 30/01
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 96

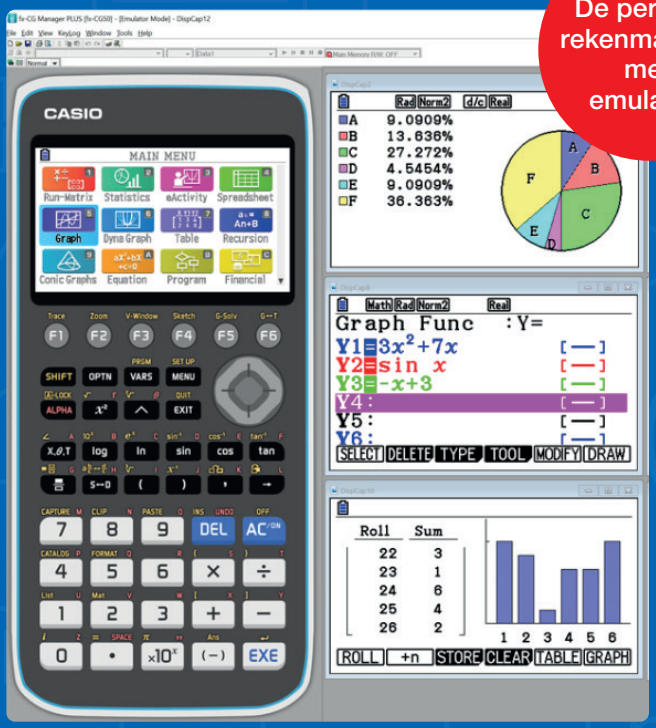
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	16 december 2020	12 oktober 2020
4	27 januari 2021	16 november 2020
5	17 maart 2021	04 januari 2021
6	05 mei 2021	01 maart 2021
7	23 juni 2021	26 april 2021

CASIO

Op Casio kunt u rekenen

Casio fx-CG50

- Betrouwbaar
- Bewezen
- Betrokken



fx-Workshop

Wilt u meer informatie of een GRATIS workshop?
Neem contact met ons op via educatie@casio.nl

ClassPad.net

Classpad.net is een online platform van CASIO waarmee de wiskundeles wordt verdiept en verbreed. Je kunt lesstof op een praktische en aansprekende manier presenteren en door leerlingen laten oefenen en testen. Zelfs digitaal huiswerk maken is mogelijk.

MODERNE WISKUNDE

NIEUW!
Moderne Wiskunde 12e editie havo/vwo bovenbouw

- Ontwikkelt wiskundig inzicht en begrip bij leerlingen
- Volledig nieuwe digitale omgeving met online statistiekprogramma
- Met leerdoelen en leerroutes gericht naar het examen
- Uitgebreide examentraining en oneindig oefenen met Examensprint

Vraag nu gratis beoordelingsmateriaal aan op **modernewiskunde.noordhoff.nl/hvbb**

Noordhoff

Brengt je verder