HOE VAAK IS ONEINDIG?

VERSLAG VAN DE 23E NWD

Rob van Oord

Blij en met een doos vol spullen ga ik, Rob van Oord, op weg naar Noordwijkerhout. Van de organisatie mag ik tot in lengte van dagen naar de NWD. Oneindig vaak als ik wil. Ik voel me vereerd en heb zin in de vol ingetekende workshop die ik samen met Rutger Kock ga geven. Deelnemers uitdagen en inspireren, dat gaan we doen.

Henk van der Vorst opende de 23e NWD met een show van de passie die hij na zijn emeritaat heeft opgepakt: litho's ontwerpen en afdrukken. Omdat het maken van spiegelbeeld afdrukken van litho's niet mogelijk is, hergebruikt Henk eenzelfde litho door hem telkens een kwart slag te draaien. Daarna drukt hij volgende versies in andere kleuren er overheen.

figuur 1 Basistableau van zestien tegels

Door er dan zestien te combineren krijg je schitterende tableaus, zie figuur 1. Vervolgens heeft Henk banen van de basispatronen op een cirkelband getransformeerd. Tot slot werden deze banen naar binnen toe 'oneindig' vaak verkleind herhaald. Hierdoor lijken de cirkelvormige eindversies op plaatjes van Coxeter en Escher. Henk liet de op deze manier gevonden afbeeldingen op sierborden drukken. Alle sprekers kregen een van deze borden als dank voor hun inzet, zie figuur 2. Ook de poster van de NWD is een product van Henk.
De eerste lezing is een zinderend spannende presentatie waarin Mike Kestemont uitlegt dat met gebruikmaking van wiskundige vergelijkingsmethodes het Wilhelmus hoogstwaarschijnlijk niet door Marnix van St Aldegonde

figuur 2 Bord met NWD-postermotief

is geschreven. Aan de hand van een database van getelde functiewoorden in teksten kan worden beweerd dat ons volkslied het meest overeenkomt met geschriften van Petrus Datheen. ... blijf ik tot in den dood. Is dat ook tot in het oneindige?

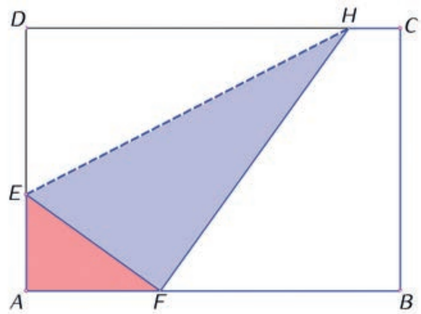
Sofia Kovalevskaya

Luuk Hoevenaars nam ons in zijn boeiende lezing mee naar het leven van Sofia Kovalevskaya (1850-1891). Deze dame van Russische komaf viel Weierstrass op toen zij in Berlijn bij hem een promotie deed. Wellicht is ze geïnspireerd door het behang in haar kamer dat bestond uit bladzijden van een boek van de wiskundige Ostrogradsy, over differentiaal- en integraalrekening. Een hint voor collega's die op het punt staan de kamer van hun dochter te gaan behangen. Maar een witte wand waarop je doorlopend wiskundige teksten laat projecteren helpt misschien ook.
Ze heeft zelfs drie proefschriften geschreven, eentje over de uniciteit van analytische partiële differentiaalvergelijkingen die aan voorwaarden moeten voldoen die al eerder door Cauchy zijn geformuleerd. Voor haar werk over de mechanische beweging van een tol heeft ze de prestigieuze prijs van de Franse academie van wetenschappen, de

'Prix Bordin' gekregen. De oplossingen convergeren met een Taylorreeks naar een limiet als x naar oneindig gaat. Hoe ver moet je daarin gaan?
Ze ontdekte ook een tegenvoorbeeld van de bewering van Weierstrass dat elke hogere orde partiële differentiaalvergelijking een particuliere oplossing heeft. De oplossing van de zogeheten temperatuurstaaf heeft een term die divergent is. De staaf zal dus als het ware ontploffen.
Na een ongelukkig huwelijk kreeg ze na de zelfmoord van haar man een aanstelling in Zweden aan de universiteit van Stockholm. Door een noodlottig voorval kreeg ze bij terugkeer van een vakantie de griep waaraan ze stierf op 41-jarige leeftijd.

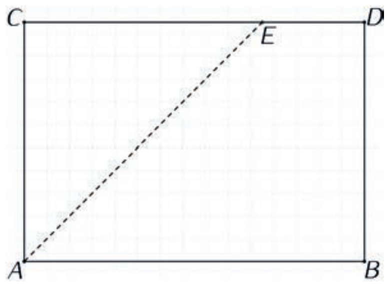
Leuke les bij opgave uit het boek

In de tweede ronde moest ik zelf aan de bak. In deze ronde draaiden allemaal workshops waar de deelnemers zelf aan de slag konden. Ook Rutger Kock en ik daagden de deelnemers uit om zelf actief te worden. *Van een som uit het boek naar een leuke les, hoe doe je dat?*

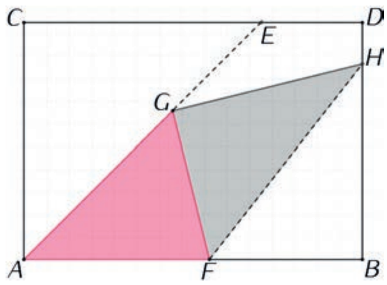


figuur 3 *Getal & Ruimte* vwo B deel 4 H14, opgave A28, blz 118

Het is veel leuker als je het verhaal bij een opgave in het boek eerst zelf gaat beleven. Wanneer er sprake is van een vouw in een blaadje waardoor er een driehoek ontstaat, dan moet je dat ook eerst laten doen. Je laat de klas dan willekeurige driehoeken omvouwen. In het voorbeeld in figuur 3 wordt hoekpunt D naar F op zijde AB gevouwen. Daarna moeten de leerlingen, door opmeten van de zijden, de oppervlakte van driehoek ΔAFE berekenen. Wie de grootste oppervlakte heeft gevonden krijgt wat lekkers. Je ziet dan bij de gegeven antwoorden (wie heeft een nog grotere oppervlakte?) ook meteen wie de factor ½ is vergeten. Omdat blijkt dat er allemaal verschillende antwoorden tevoorschijn zijn gekomen kun je met de klas er dieper op in gaan. Het lijkt wel of er een grootste is. Waar denk je dan aan? Welke vraag zou je kunnen stellen? Dan zet je ze, liefst in groepjes, aan het werk. Ze zullen zelf een onbekende zijde x moeten stellen. In het boek wordt al aangegeven welke zijde je x moet stellen. Dan is het denkwerk al gedaan. Bovendien zijn er verschillende zijden die je x kunt stellen die allemaal wel tot hetzelfde antwoord leiden. Leuk om te zien dat leerlingen ook op verschillende manieren het antwoord vinden.



figuur 4



figuur 5

Driehoek naar y = x

Naast de opgaven uit het boek kwamen er ook zelfbedachte vouwsels op tafel, vergelijkbaar met de opgave uit het boek.[1] Een uitdaging voor de deelnemers was de opgave *driehoek naar* $y = x$. Neem een A4-tje. Ga voor het gemak uit van afmetingen 21 × 30 cm. Leg het blaadje dwars voor je. Vouw de bissectrice van de rechte hoek linksonder. Leg het blaadje weer open, zie figuur 4. Vouw het hoekpunt rechtsonder naar de schuine vouw, dus naar de zojuist gevouwen bissectrice. Onder de omgevouwen onderkant zie je een driehoek ΔAFG ontstaan met de gevouwen bissectrice en de onderkant van het blaadje, zie figuur 5.
Hoe zou je door meten de oppervlakte kunnen berekenen? Stel een formule op van de oppervlakte van de (roze) driehoek. Bereken de maximale oppervlakte van de op deze manier verkregen driehoek. Aan de lezer om eerst eens zelf te gaan vouwen en de maximale oppervlakte te vinden.
Het antwoord kan als volgt gaan. Stel $AF = x$.
Dan is $BF = FG = 30 - x$.
Neem AG als basis van driehoek ΔAFG, dan is de hoogte de loodlijn uit F op $AG = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
Je kunt AG uitdrukken in x met behulp van de cosinusregel: $FG^2 = AF^2 + AG^2 - 2 \cdot AF \cdot AG \cdot \cos\angle GAF$;

$\angle GAF = 45^o$, dus krijg je $(30 - x)^2 = x^2 + AG^2 - 2 \cdot x \cdot AG \cdot ½\sqrt{2}$ oftewel $AG^2 - x \cdot \sqrt{2} \cdot AG + 60x - 900 = 0$. Met de abc-formule is nu $AG = ½(x \cdot \sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600)}$; de oppervlakte van ΔAFG is nu

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \ (x\sqrt{2} + \sqrt{(2x^2 - 240x + 3600)}).$$

De afgeleide nul stellen levert een onprettige vergelijking op. Met de GR vind je $x = 15$ (dus precies als je op het midden van de onderkant zit) met een maximale oppervlakte van 112,5.
Wie kan het berekenen van de waarde van x waarbij de oppervlakte maximaal is exact oplossen?
Aan het eind van de workshop kon iedereen aangeven wat men ervan vond. Wij vroegen wie van de deelnemers van plan was ook echt van een som uit het boek een leuke les te gaan maken. Vrijwel iedereen stak zijn vinger op. We stellen het op prijs als degenen die dit ook hebben gedaan ons hierover een mailtje sturen.

Wiskundige verrassingen

Het avondprogramma werd verzorgd door Albrecht Beutelspacher. Hij is de directeur van het Mathatikum in Gießen.[2] Dit museum trekt sinds de opening in 2002 jaarlijks vele bezoekers, jong en oud. Het is een interactief museum waarin allerlei spelletjes en puzzels gedaan kunnen worden met wiskundige principes en verrassingen. De reizende tentoonstelling was op de NWD te zien.
Hij maakte indruk met een getallentrucje waarmee je zonder gebruik van een rekenmachine eenvoudig twee grote getallen kunt vermenigvuldigen. Bijvoorbeeld 996×885.
Bij een ander trucje liet hij zien hoe je vermenigvuldigen van grote getallen eenvoudig en snel kunt berekenen door wat aftrekkingen en een kleine vermenigvuldiging. Bijvoorbeeld 996×885 doe je als volgt: $996 = 1000 - 4$, $885 - 4 = 881$; de eerste drie cijfers van het antwoord zijn nu 881, $885 = 1000 - 115$, doe nu $4 \times 115 = 460$, dit zijn de laatste drie cijfers van het antwoord. Reken maar na: $996 \times 885 = 881460$. Hoe werkt de truc? Even uitgezocht.
$x = 996$ geeft $1000 - x = 4$, $y = 885$ geeft $1000 - y = 115$.
Dan is $y - (1000 - x) = x + y - 1000$ (dit is die 881); dus $(y - (1000 - x)) \cdot 1000 + (1000 - x)(1000 - y) = (x + y - 1000) \cdot 1000 + 1000000 - (x + y) \cdot 1000 + 1000000 + x \cdot y = x \cdot y$. Dit is dan $881 \times 1000 + 4 \times 115 = 881460$.
Het meest interessante trucje was het plakken en doormidden knippen van twee dwars op elkaar geplakte tegengesteld gedraaide Möbiusbanden. Je krijgt dan twee in elkaar gestrengelde harten.
's Nachts op mijn kamer meteen maar uitgeprobeerd. Gelukt! Zie figuur 6. Leuk om met Valentijnsdag in de les te doen.

figuur 6 Twee dwars op elkaar geplakte tegengesteld gedraaide Möbiusbanden

Voordat ik mij op de dansvloer waag probeer ik altijd een van de (nieuwe) spellen uit die elk jaar klaar liggen in de hal. Dit keer speelde ik een paar potjes Tzaar met Peter Donkelaar, een van de vrienden die ik ken van de staatsexamens. Het is een zogenaamd abstract gezelschapsspel voor twee personen. Het is de bedoeling dat je als eerste van de tegenstander alle tzaren, tzarra's of totts van het veld hebt geslagen. Dit zijn allemaal ronde schijven met nul, een of twee ringen. Het lijkt op een veredeld dammen waarbij je naar hartenlust mag stapelen 'tot in het oneindige'.

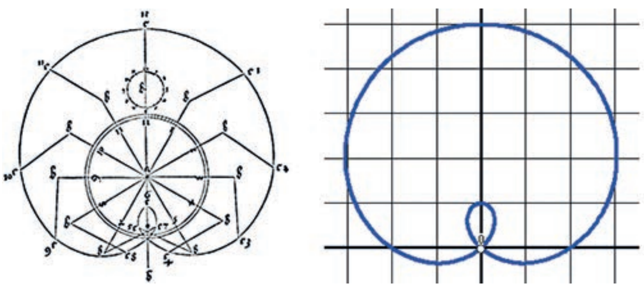
figuur 7 Tzaar, een abstract spel voor twee personen

Avondprogramma

's Avonds werd de film *The man who knew infinity*, over het leven van Srinivasa Ramanujan, getoond. In de krant las ik er niet zulke goede recensies over. Maar collega's die ik sprak die hem gezien hadden vonden hem wel indrukwekkend.
Op het eind van de avond de beentjes van de vloer. Volgend jaar komt er waarschijnlijk een Latin bandje. Ik ben van plan voor liefhebbers dan van tevoren samen met Marjan Botke een workshop *Chachacha*, *Rumba* en *Mambo* te geven. Dan kan het geleerde meteen in de praktijk worden gebracht.

Krommen van Dürer

Voor de ochtendlezing op zaterdag ging ik naar Martin Kindt. Op 27 januari werd Martin aan het eind van een symposium ter gelegenheid van zijn 80ste verjaardag benoemd tot officier in de orde van Oranje-Nassau. Zo de koning het heeft behaagd. Ik ben al vele jaren fan van Martin. Ook vandaag verraste hij ons weer met een mooi verhaal over de krommen van Dürer.
Uit een dik boek in het Duits in Gothische letters met de vertaling in het Engels ernaast heeft Martin uit dit leerboek voor kunstenaars over de drie dimensies en perspectief tekenen enkele krommen gehaald en aan ons uitgelegd. De slakkenspiraal, de Archimedische spiraal en de helix (trappenspiraal) werden getoond en uitgelegd. De limaçon van Pascal werd al door Dürer geconstrueerd als een spinkromme (1525). Hij tekende de hulplijntjes van de geconstrueerde punten er ook bij: een straal met bijbehorend stukje raaklijn. Op die manier lijkt het geheel op een spin met pootjes. Met $x = 3\sin(t) + 2\sin(2t)$ en $y = 3\cos(t) + 2\cos(2t)$ krijg je deze kromme op je scherm. Zie figuur 8.
In de voor Martin typerende stijl, rustig en bescheiden, liet hij ons zien hoe Dürer bewees dat de 'eikromme', die je krijgt bij het doorsnijden van een kegel, ook echt een ellips is. Al is het bewijs van Dandelin met de bollen in een kegel die onder en boven aan het doorsnijdingsvlak raken natuurlijk van een andere orde en eenvoud. Dürer was niet alleen een begenadigd schilder, maar had ook veel wiskundige kennis in huis. Dat is nu wel duidelijk.



figuur 8 Spinkromme van Dürer (l) en de limaçon van Pascal (r)

Bewegende 3D-plaatjes

De laatste bloklezing die ik bijwoonde was van Jos Leys.[3] Sinds 1980 bij de intrede van de eerste computers is Jos gefascineerd door plaatjes op het scherm. Immer nog maakt hij met behulp van eenvoudige formules met complexe getallen de mooiste bewegende '3D'-plaatjes van bijvoorbeeld Mandelbrotverzamelingen. Je kunt zien wat er gebeurt als je oneindig vaak inzoomt. Net als het Droste-effect waar bij het inzoomen ook nog eens gedraaid wordt. Jos gebruikt matrixtransformaties en groepentheorie om complexe vlakken af te beelden. Net als bij Henk van der Vorst worden stroken tot cirkels gemaakt en cirkels tot bollen. Met de duizelingwekkende beelden en een gevoel van bewondering, van zou ik dat ook ooit kunnen, verlaat ik de zaal.

Na de lunch vertrok ik met een halflege big shopper maar wel gevuld met mooie aandenken aan deze NWD voldaan naar huis.

Noten

[1] Zie *www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen* Archief, Slides/handouts
Ik ben bereid om bij secties die dat willen langs te komen en samen aan de slag te gaan om een leuke les bij opgaven uit het boek te maken.
[2] Zie *www.Mathematikum.de*
[3] Zie *www.josleys.com*

Over de auteur

Rob van Oord was sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Vorig jaar heeft hij ingevallen op Lyceum Ypenburg. Dit jaar deed hij dat op Gymnasium Novum in Voorburg. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*