

KROMMEN VAN AGNES EN DE NEDERLANDSE WISKUNDEDAGEN 2016

Rob van Oord

'Van vlak naar volume' was de titel van de workshop die Rob van Oord samen met Marjan Botke verzorgde op de 22^e editie van de Nationale Wiskunde Dagen. De workshop bevatte een brandende kwestie die leidde tot de ontdekking van de krommen van Agnes. Daarnaast geeft Rob in dit artikel een sfeerbeeld van de NWD.

Grappig, de laatste opgave van het wiskunde B-examen 2016 tijdvak 1 heette *De kromme van Agnesi*. Op internet wordt deze kromme ook wel de heks van Agnesi genoemd, o.a. beschreven op de website van Henk Hofstede.^[1] In dit artikel wil ik het vooral hebben over de nog vrijwel onbekende krommen van Agnes, voor het eerst getoond op de NWD 2016.

Opening NWD

Frits Beukers liet in zijn openingspeech zien hoe men vroeger uit gips ruimtevlakken bij formules maakte.

De bij figuur 1 behorende formule is: $3x^2y - y^3 + 27z/2 - 3x^2z - 3y^2z + 81z^2/2 + 31z^3 = 0$.



figuur 1

Voor waarden van z kun je op verschillende hoogtes de horizontale doorsnede van dit vlak tekenen waardoor je een idee krijgt hoe het vlak er in de ruimte uit moet zien. In de tijd voor de computer was dit een goede manier om tot een betrouwbaar gipsen voorstelling van een dergelijk vlak te komen.

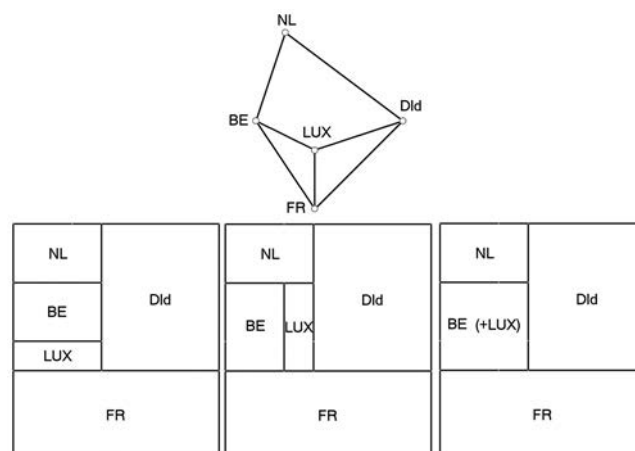
Met de huidige snelle computers kun je dezelfde vlakken in mooie kleuren op je scherm te zien krijgen. In een speciale ruimte stonden naast de gipsen voorwerpen van honderd jaar geleden, gevonden in een stoffige ruimte op het Mathematisch Instituut, grote schermen waarop je zelf formules kon invoeren om mooie krommen te zien. De citroen bijvoorbeeld, het beeldmerk van *imaginary*, zie figuur 2: $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)$.^[2] Dit soort plaatjes spreekt tot de verbeelding!

In de openingslezing vertelde professor Bettina Speckmann over het verbeelden van kaarten van gebieden, zoals landen, provincies, staten, enzovoort. Elk gebied wordt een



figuur 2 Deze citroen is een kromme die hoort bij de formule $x^2 + z^2 = y^3(1 - y)$

rechthoek waarbij de oppervlakte zo dicht mogelijk moet zitten bij de *maat* die bij het gebied hoort. De maten zijn bijvoorbeeld de oppervlakte, het aantal inwoners, aantal boerderijen, aantal kilometers snelweg. Onderlinge ligging en enigszins de geografische ligging van de gebieden moeten zo veel mogelijk behouden blijven. Via kleuringen van grafen en met veel rekenwerk, kun je komen tot een optimale voorstelling. Wanneer een gebied aan drie verschillende gebieden grenst kan het moeilijk zijn om de voorwaarde van aangrenzing te waarborgen. Daarom wordt in kaarten van Europa Luxemburg vaak weggelaten, of bij België gevoegd. Zelf even getekend (figuur 3):



figuur 3 Kaart waarbij gebieden worden voorgesteld als rechthoek, waarvan de grootte wordt bepaald door een kenmerk van dat gebied. In dit geval de oppervlakte van het gebied.

Kloostergewelf en puntzak

Er kwamen ongeveer veertig collega's naar de workshop 'Van vlak naar volume' die ik samen met Marjan Botke gaf.^[3] We startten met de vraag wie door middel van vouwen van een blanco A4-tje een vorm kon maken met een zo groot mogelijke inhoud. In mijn vwo 6-klassen had ik dezelfde vraag gesteld. Ook toen kwam de vraag of de vorm (van boven) open mocht zijn. We besloten twee categorieën te maken, met elk een beloning voor de vorm met de grootste inhoud.

Er werd geanimeerd gevouwen, nagedacht en gerekend. Vormen als rechthoekige bakjes, viervlakken, kokers (waar bij het dichtvouwen vanzelf een zogenaamd kloostergewelf ontstaat), strenden om de grootste inhoud. Een van de deelnemers had als vorm een puntzak. Ze was ervan overtuigd dat die de grootste inhoud had, met ruim 1200 cm^3 . Maar welke formule moet je daarvoor gebruiken? Ze mailde me bij thuiskomst dat ze er niet van kon slapen totdat ze in Wikipedia een formule vond. Ook heeft ze met hulp van man, kind en meel de inhoud empirisch bepaald, ruim 1400 cm^3 . Zie figuur 4.



figuur 4 Empirisch bepalen van de inhoud van een puntzak

Impressie van de workshops

Na de introductie kon men kiezen uit een aantal verschillende activiteiten. Velen kozen voor het vouwen van een hexaflexagon.^[4] Een soort peper-en-zout-vouwwerk, zoals je vroeger had met kleuren en woorden. Maar nu zijn er drie verschillende standen! Verbazing alom dus. Er was ook een bouwplaat van het kruisgewelf, de vorm die je krijgt als je twee even grote buizen in een kruis met elkaar verbindt. Ooit was het een (veel te moeilijke) opgave op het PROFi-examen wiskunde B om de inhoud te berekenen van zo'n kruisgewelf. De bouwplaat van een deel van zo'n gewelf is een sinusoïde. Het moeilijkste onderdeel was het patatzakprobleem. De oplossingen van dit probleem zijn 'de krommen van Agnes', waar het tweede deel van dit artikel over gaat.

Als workshopleider krijg je altijd een verrassend cadeau. Dit jaar een prachtig fotoboek met de geometrische zandtekeningen van Elvira Wersche en het verhaal dat erbij hoort.^[5] In het Atrium kon je haar zo'n geometrische patroon, gevuld met zand dat ze van over de hele wereld verzameld heeft, zien strooien.



figuur 5 Elvira Wersche bezig met een geometrische zandtekening

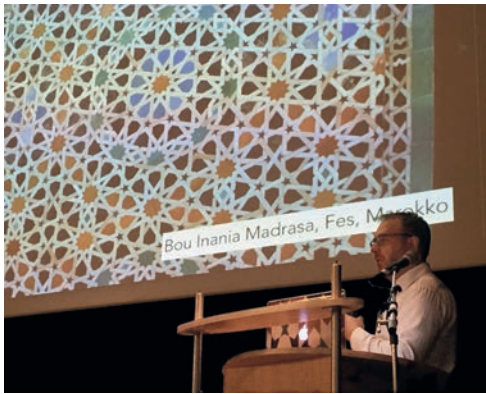
De vrijdagavondshow werd verzorgd door Mike Naylor. Een wervelend verhaal waar je vol verbazing zag hoe hij in Noorwegen wiskundeprojecten heeft opgezet waar iedereen wordt uitgedaagd creatief met wiskunde bezig te zijn. Als kunstenaar maakte hij wiskundige vormen met menselijk naakt. Op internet kun je van alles vinden over zijn werk. Kijken maar.



figuur 6 Kunstenaar Mike Naylor maakt wiskundige vormen met menselijk naakt

Zaterdagochtend volgde ik de workshop van Jan Aarts over de cycloïde in de slinger van de klok. Een mooi verhaal hoe Huygens de tautochronie (slingertijd onafhankelijk van uitwijking) van die slinger bewerkstelligt, maar vooral ook meetkundig bewijst, door de slinger in de juiste baan te dwingen tussen cycloïdevormige 'wangen'. Eeuwenlang waren deze Haagse klokken de nauwkeurigste die er bestonden, die vooral voor de scheepvaart onmisbaar waren. Jan Aarts heeft het boek van Huygens uit het Latijn in het Nederlands vertaald.^[6] In de tweede sessie zaterdag was ik bij Eric Broug. Een man die gegrepen is door de islamitische kunst. Hoe kun je die fraaie patronen zelf maken? Eric geeft workshops waarin hele klassen aan de slag gaan voor een prachtig resultaat.^[7] Verbazingwekkend!

De slotlezing op zaterdag was een inspirerend verhaal van Bennie Mols, over Alan Turing, zijn rol bij het ontcijferen van Enigma, het Duitse codesysteem in WOII, maar ook over het tragische einde van zijn leven. Deze wiskunde virtuoos had ook een theorie ontwikkeld over



figuur 7 Eric Broug gaf een lezing over patronen in islamitische kunst

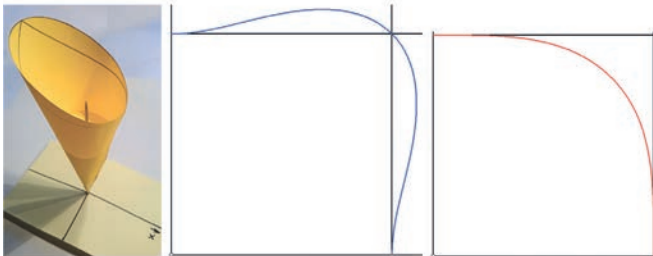
biologische patroonvorming. Op de vrijdagavond werd de film *The Imitation Game* over Alan Turing vertoond, prachtige film.

Hoe kom ik aan de krommen van Agnes?

Eerst maar eens een formule.^[8] In parametervorm wordt de

kromme gegeven door $x(t) = \frac{(4-2\sqrt{2})\cos t}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4t)}$ en $y(t) = \frac{(4-2\sqrt{2})\sin t}{1+(3-2\sqrt{2})\cos(4t)}$. Als je deze in je GR invoert

dan krijg je de kromme van figuur 8 (midden). Het is al vele jaren geleden dat ik mezelf de vraag stelde hoe je een patatzak een eerlijkere rand kan geven.



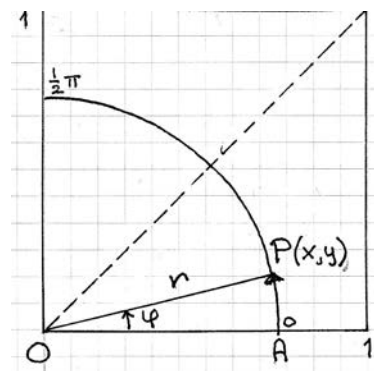
figuur 8 Hoe ontwerp je een patatzak die je omgekeerd op tafel kunt zetten?

Normaal liggen de patatzakken in de cafetaria's klaar als over een diagonaal dubbelgevouwen vierkanten. Maar als je de platte driehoek openmaakt tot een puntzak (een kegelvorm), dan ligt de bovenrand van de puntzak niet in een vlak. Ik zocht naar een formule van een stukje extra op het vierkant waardoor de patatzak een rand heeft waarop je hem omgekeerd wel op tafel kunt zetten, dus de vorm heeft van een schuin afgeknotte kegel. In de hand-out van de NWD kun je het bewijs zien. De formules heb ik te danken aan Agnes Verweij. Ze loste dit probleem al in de jaren '80 van de vorige eeuw op, toen ik met de hele vaksectie bij haar de HEWET-nascholing volgde. (Voor de jongere collega's onder ons: toen is

wiskunde A bedacht en ingevoerd, met contexten en formules die ergens over gingen). Er is nog een tweede oplossing van het probleem: je kunt ook een stukje van het vierkant afknippen waardoor na het openvouwen een afgeknotte kegel ontstaat, zie figuur 8 (rechts). Daar kan dan wel wat minder in natuurlijk... Onlangs heeft Agnes mij uitgelegd hoe ze tot de formules is gekomen. Ik wilde dit probleem namelijk als onderdeel van mijn NWD-workshop opnemen. Als dank wil ik de oplossing dan ook 'De krommen van Agnes' noemen.

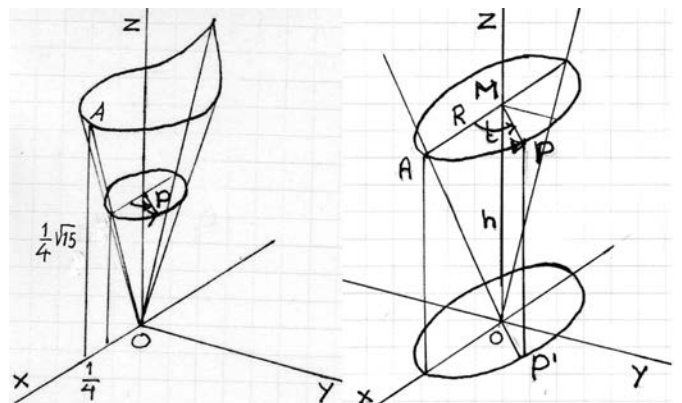
Afleiding Krommen van Agnes

- 1 Zet langs de randen van een vierkant blaadje het assenstelsel Oxy . Zet ergens op het blaadje een punt P , zie figuur 9. In poolcoördinaten ligt P op een cirkelboog met straal $r = OA$: $P(x, y) = P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. De cirkelboog is een kwartcirkel, met lengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r$. Deze kwartcirkel wordt bij het dichtvouwen een hele cirkel (met straal R). Stel de zijde van het blaadje 1, dan is $(0,1)$ het hoekpunt linksboven.



figuur 9

- 2 Vouw het blaadje dubbel (platte patatzak) en plak de verticale rand dicht. A ligt nu op de plakrand. P komt nu binnen in de puntzak. Teken de plaats van P nu op de buitenkant.
- 3 Duw de aan één kant dichtgeplakte driehoek open tot een deel van een kegel, zie figuur 10 (links). P ligt nu op een cirkel met straal R waarvoor geldt: $2\pi R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$, ofwel $R = \frac{1}{4} r$.



figuur 10

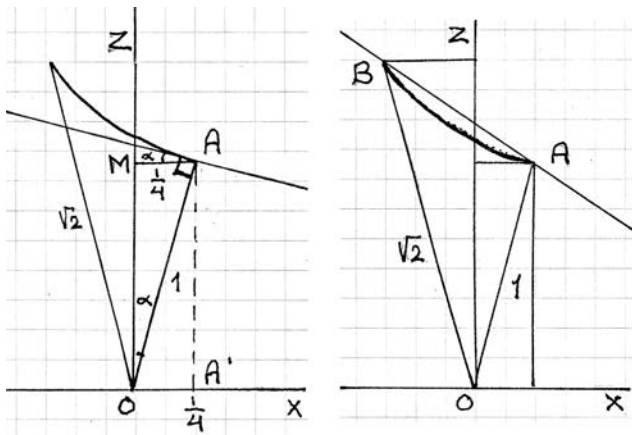
- 4 Zet de kegel in een ruimtelijk assenstelsel met de top in O , de kegelas langs de z -as en de plaknaad boven de x -as, zie figuur 10 (rechts). P komt nu op een cirkel met straal R op hoogte h terecht. Voor de halve tophoek α geldt: $\sin \alpha = R/r = \frac{1}{4}$, dus $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. Even toelichten:

$$h = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}r^2} = \frac{1}{4}r\sqrt{15},$$

$$\text{dus } \tan \alpha = \frac{AM}{h} = \frac{\frac{1}{4}r}{\frac{1}{4}r\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}. \text{ De ruimtecoördi-}$$

naten van P zijn: $P(R\cos(t), R\sin(t), h)$. Punt $(0,1)$ van het vierkante blaadje komt nu in $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$ terecht.

- 5 Voor de hoek t die P nu in de ruimte maakt ten opzichte van het Oxz -vlak geldt $t = 4\varphi$. Immers: φ gaat van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$, terwijl t van 0 tot 2π gaat. $P(R\cos(t), R\sin(t), h)$ geeft $P(\frac{1}{4}r\cos(4\varphi), \frac{1}{4}r\sin(4\varphi), \frac{1}{4}r\sqrt{15})$.
- 6 We gaan de kegel snijden met het vlak door $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$, loodrecht op OA , evenwijdig aan de y -as. Draai de tekening naar het vooraanzicht in het Oxz -vlak. De doorsnede is dan een (dalende) lijn, zie figuur 11 (links).



figuur 11

- 7 Vlak $z = ax + b$ heeft helling $a = -\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$;

$$z = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + b; \text{ door punt } A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15}) \text{ geeft}$$

$$b = \frac{4}{\sqrt{15}}. \text{ Dus de vergelijking van het vlak wordt:}$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{15}}x + \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

- 8 Dit vlak snijden met de kegel waar $P(\frac{1}{4}r\cos(4\varphi), \frac{1}{4}r\sin(4\varphi), \frac{1}{4}r\sqrt{15})$ op ligt:

$$\frac{1}{4}r\sqrt{15} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{4}r\cos(4\varphi) + \frac{4}{\sqrt{15}}; \text{ dit geeft}$$

$$r = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}.$$

- 9 Terug naar het vierkant:

$$x_P = r\cos\varphi = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}\cos\varphi$$

$$\text{en } y_P = r\sin\varphi = \frac{16}{15 + \cos(4\varphi)}\sin\varphi. \text{ Met deze formules}$$

krijg je de kromme van figuur 8 (rechts). Voor het vinden van de kromme uit figuur 8 (midden) gebruik je dezelfde stappen.

Het vlak waarmee je de kegel snijdt gaat nu door $A(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{15})$, het beeld van $(0,1)$ op de kegel, en $B(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{4}\sqrt{30})$, het beeld van $(1,1)$ op de kegel, waarbij $OB = \sqrt{2}$, de lengte van de diagonaal van het vierkante vouwblaadje. Zie figuur 11 (rechts).

Ik wil Agnes bedanken voor haar mooie krommen. Ik hoop dat u als lezer ook geïnspireerd bent door dit artikel en op zoek gaat naar nog meer mooie krommen. Wie weet tref ik u op de volgende NWD in februari 2017.

Noten

- [1] <http://www.hhofstede.nl/modules/parametersnelheid.htm> zie opgave 4
- [2] De citroen is het beeldmerk van de reizende wiskundetentoonstelling 'Imaginary'. Zie: <https://imaginary.org>
- [3] De presentatie en de werkbladen zijn te downloaden op <http://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskundedagen/slides-en-handouts-nwd2016>
- [4] <http://slimme-handen.nl/2013/02/hexaflexagons-wiskunde-origami-vouwen/>
- [5] Wersche, E. (2015). *Sammlung Weltensand. The Journey*. Haarlem: 99 Uitgevers.
- [6] Aarts, J. (2015). *Christiaan Huygens: Het Slingeruurwerk. Een studie*. Amsterdam: Epsilon uitgaven.
- [7] Eric Broug's website: <http://www.broug.com/education>
- [8] Zie ook Muijters, F. (2014). Kegelsneden op echte kegels, *Euclides* 90-2, pp 31-33.

Over de auteur

Rob van Oord is sinds 1974 werkzaam als eerste-graads docent wiskunde aan het Coenecoopcollege te Waddinxveen en is sinds 2014 met pensioen. Vorig jaar heeft hij ingevallen op Lyceum Ypenburg. Dit jaar deed hij dat op Gymnasium Novum in Voorburg. E-mailadres: robvanoord@tiscali.nl