

UITDAGENDE PROBLEMEN

TWEE DENKACTIVITEITEN

Jacques Jansen

In dit artikel gaat Jacques Jansen met havo 4 wiskunde B op zoek naar het plaatje achter een formule: hoe ziet een koppelingsplaat eruit? En met vwo 5 wiskunde D wordt er gerekend aan een ander tastbaar probleem: een gevouwen A4'tje.



Koppelingsplaat

'Hoe ziet een koppelingsplaat eruit, jongens?' vraag ik aan havo 4 wiskunde B, bij de bespreking van een huiswerkopgave over een koppelingsplaat. Tot mijn grote ontsteltenis reageert niemand. Dat had ik niet verwacht. In zo'n groep zou je toch minstens een paar bromfietsmon-teurs moeten aantreffen. Mooi niet dus.

De opgave, zie figuur 1, staat in de tiende editie van *Moderne Wiskunde* bij de gemengde opdrachten in het allereerste hoofdstuk over het opstellen van verge-lijkingen. Ik behandelde deze echter al verschillende keren bij de negende editie. De opgave stond toen in hoofdstuk 2, *Algebra of rekenmachine*, bij de paragraaf *Wortelvergelijkingen oplossen*. De context en de vragen zijn bij de tiende editie hetzelfde gebleven. De formu-lering van de vragen is wat bijgesteld. Bij beide edities staat geen foto van een koppelingsplaat. We zien bij het begin van het jaar in havo 4 dat een formule meteen in de stam van een opgave gepresenteerd wordt. Als ik in de les naar het gemaakte huiswerk kijk, zie ik dat er van deze opgave niet veel terecht is gekomen. Ze vinden het erg moeilijk. Maar waarom eigenlijk?

Om mijn leerlingen te motiveren voor deze lastige vraag, vertel ik hen in mijn klassengesprek dat je een voorstel-ling van een koppelingsplaat kunt krijgen door de formule te herschrijven. Eigenlijk is dat onderdeel c al. Daar

doe je een aantal stappen, die je heel zorgvuldig moet uitvoeren. Dat kan met een *uitlegmatrix*, waarbij ik de rechterkolom deels heb ingevuld. Leerlingen krijgen dat van mij op papier uitgereikt, zie figuur 2. Alle acties laten we vergezellen door de vraag: waarom doen we dit? Leerlingen noteren dat in de rechterkolom.

Formule/resultaat	Actie	Waarom doe je dat?/Reflectie
$r = \sqrt{\frac{O}{\pi} + 9}$	Kwadrateren	Wortel wegschrijven
$r^2 = \frac{O}{\pi} + 9$	Linker- en rechterlid verwisselen	
$\frac{O}{\pi} + 9 = r^2$	9 aan beide kanten aftrekken	Proberen om oppervlakte O links van het gelijkteken vrij te krijgen
$\frac{O}{\pi} = r^2 - 9$	Vermenigvuldigen met factor π	
$O = \pi(r^2 - 9)$	Haakjes verdrijven	
$O = \pi r^2 - \pi \cdot 9$	9 als een kwadraat schrijven	
$O = \pi r^2 - \pi \cdot 3^2$	Interpretëren	

figuur 2 De uitlegmatrix bij deze opgave

figuur 1 Opgave uit het boek over een koppelingsplaat

- 54 Voor het verband tussen de straal r in cm en de oppervlakte O in cm^2 van de koppelingsplaat van een motor geldt de formule $r = \sqrt{\frac{O}{\pi} + 9}$.
- Van een motor heeft de koppelingsplaat een oppervlakte van 50 cm^2 . Bereken hoe groot de straal is van deze koppelingsplaat.
 - Van een andere motor is de straal van een koppelingsplaat gelijk aan $6,23 \text{ cm}$. Bereken hoe groot de oppervlakte van deze koppelingsplaat is.
 - Herleid de formule waarbij je O in r uitdrukt.
 - De koppelingsplaat van een auto heeft een oppervlakte die twee keer zo groot is als die van een bromfiets. Beredeneer met behulp van de formule of de straal ook twee keer zo groot is.



figuur 3 Vorm koppelingsplaat

Maar naast de algebraïsche verrichtingen willen we nu door de formule heen kijken. We vervolgen het klassengesprek. 'Zie je nu aan de geschreven formule $O = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot 9$ hoe die koppelingsplaat eruit moet zien?' Nee dus, niet iedereen herkent de oppervlakte van een cirkel. Verder was voor de leerlingen de formule nog niet voldoende herleid. Er was nog één stap nodig met als resultaat: $O = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot 3^2$. De plaat is dus ringvormig met een diameter groter dan 6 cm maar wel met steeds een

zelfde ronde opening met een diameter van 6 cm. We gaan *GeoGebra* inzetten met schuifparameter r om de leerlingen inlevingsgevoel te geven voor de onderdelen a en b, zie figuur 3. Er zijn blijkbaar koppelingsplaten van verschillende grootte.

'Is dat gat met diameter 6 cm altijd even groot?' vraag ik aan de leerlingen. Gezien vraag 54d denken de auteurs in elk geval dat die 6 cm onafhankelijk is van of de motor in een auto of bromfiets zit. In de klas wordt hier verschillend over gedacht.

Uitdaging voor de lezer

Het is van belang dat een leerling niet alleen algebraïsche verrichtingen kan doen met een formule, maar ook door een formule kan heen kijken, of anders gezegd de formule kan interpreteren. Als je puur algebra wilt doen, kun je net zo goed de context weglaten. Daarom de volgende uitdaging voor u als lezer: schrijf een opgave met *koppelingsplaat* als context en met de volgende vier voorwaarden:

- geschikt voor havo 4 wiskunde B;
- intro met eventueel een kort filmpje;
- de formule wordt niet meteen gepresenteerd, maar leerlingen gaan zelf een formule opstellen;
- de vragen moeten betrekking hebben op de context. Wellicht kan ik de mooiste inzending presenteren in ons vakblad.

A4'tje vouwen

We bekijken het volgende probleem:

De lange zijde van een A4'tje is $\sqrt{2}$ maal zo groot als de lengte van een korte zijde. Neem voor de lengte van de korte zijde 21 cm.

Een A4'tje wordt gevouwen langs één van de diagonalen. Er ontstaat een symmetrische figuur met twee toppen die dezelfde afstand hebben ten opzichte van de vouwlijn, zie figuur 5. Er is een vijfde hoekpunt bijgekomen.

- Schat hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is.
- Bereken exact hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is.

Dit probleem had ik als denkactiviteit aan mijn 5 vwo-leerlingen wiskunde D aangeboden, met een kleine aanpassing. Ik had letters bij de vijf hoekpunten gezet. Linksonder B , rechtsonder D . De bovenste hoekpunten van links naar rechts A , S en C . Vervolgens onderstaande vragen:

- bereken de afstand van punt S tot vouwlijn BD ;
- bereken de grootte van hoek ASC ;
- onderzoek hoeveel procent van het papier na het vouwen nog zichtbaar is;
- bedenken nog een andere vraag en los die op.



figuur 4 Een gevouwen A4'tje

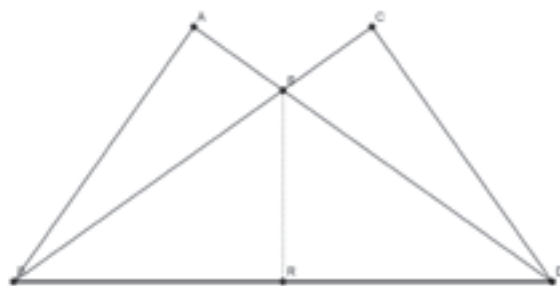
Het zou leuk zijn om een elegante oplossing te krijgen bij deze denkactiviteit.

Strategie Jeroen uit 5 vwo

Hieronder volgt de uitwerking van Jeroen in zijn eigen taalgebruik. Jeroen ziet er een goniometrie probleem in. Zie ook figuur 5. Op de notaties en tussentijdse afrondingen valt wel wat af te dingen, maar het is wel heel overzichtelijk. Het rekenwerk is wellicht ingegeven door mijn eigen vraagstelling.

- de korte zijde = 21 cm;
- lange zijde = $21\sqrt{2} = 29,7$ cm;
- de diagonaal = $\sqrt{21^2 + 29,7^2} = 36,4$ cm;
- je hebt de lijn loodrecht op BD dat punt S snijdt. Die lijn snijdt BD op een punt (laat zeggen punt R);
- de figuur is symmetrisch;
- dus $RB = \frac{1}{2}DB = 18,2$ cm;
- hoek CBD is in dit geval $\tan^{-1}(DC/CB)$;
- $DC/BC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is hoek CBD , $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 35,3^\circ$;
- SR is dan $18,2 \cdot \tan(35,3) = 12,9$ cm.
- hoek $CBD = 35,3^\circ$. Hoek $BRS = 90^\circ$;
- dus hoek $BSR = 180 - 90 - 35,3 = 54,7^\circ$;
- driehoek BRS is congruent met driehoek DRS . Dus hoek $DSR = 54,7^\circ$;
- punt S : X -hoeken, hoek $ASC = 2 \cdot 54,7 = 109,5^\circ$.

figuur 5



- zichtbaar: totale opp. van A4 – opp. BSD;
- totale opp. = $21 \cdot 21\sqrt{2} = 623,7 \text{ cm}^2$;
- opp. driehoek BSD = (basis $\times$ hoogte)/2 = $(36,4 \times 12,9)/2 = 234,8 \text{ cm}^2$;
- dus na vouwen nog $623,7 - 234,8 = 388,9 \text{ cm}^2$ zichtbaar;
- $(388,9/623,7) \cdot 100\% = 62,4\%$.

Strategie collega

Een bevriende collega offert zich op, maakt de vouwopgave en heeft de volgende strategie bedacht met behulp van het opstellen van vergelijkingen. Hieronder zijn eigen tekst:

- probleem is simpel, reduceer alles met een factor 21;
- trek de lijnen BC en AD. Stel $SC = x$;
- verder is $BD = \sqrt{3}$;
- nu: $SD = \sqrt{x^2 + 1} = BS = \sqrt{2} - x$, vervolgens kwadrateren;
- conclusie $x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, in werkelijkheid $x = \frac{21}{4}\sqrt{2}$;
- opp. zichtbaar stuk = opp.(BCD + BSA) =

$$21 \times 21 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) = 21 \times 21 \times \frac{5}{8} \times \sqrt{2};$$

- opp. A4 is $21 \times 21 \times \sqrt{2}$. Dus zichtbare stuk is $\frac{5}{8} \times 100\% = 62,5\%$;
- $\tan(\angle ASB) = 2\sqrt{2}$ dus $\angle ASB \approx 71^\circ$;
- $\angle ASC \approx 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$.

Reflectie

Ik vind het achteraf gezien belangrijk om het vouwprobleem zo open mogelijk aan te bieden. Alleen die twee vragen a) en b) dus, om onnodige berekeningen zoveel mogelijk te voorkomen. Het is belangrijk dat leerlingen zelf tot modelleren komen, een schets maken van de vijfhoek en letters zetten bij de vijf hoekpunten. Inderdaad, dat doen ze niet gauw uit zichzelf. Stimuleren dus en leerlingen voldoende tijd geven. Veel leerlingen hebben een aanpak die op die van Jeroen lijkt. Ze hebben niet de neiging om een variabele in te voeren en vergelijkingen op te stellen. Maar het kan ook anders.

Eerst het schatten. Als je het gevouwen papier goed bekijkt, zie je dat het zichtbare deel het halve A4'tje is met een uitsteeksel in de vorm van een rechthoekige driehoek (SCD). De schatting is dan gauw gemaakt: 50% én een deel van 50%. Je hoeft alleen te schatten hoeveelste deel SC is van lange zijde BC. Driehoek SCD heeft immers dezelfde hoogte als driehoek BCD. Laten we zeggen een kwart (met vouwen zie je dat al gauw), dus de zichtbare oppervlakte wordt dan 50% en een kwart van 50%, totaal 62,5%.

Nu nog de exacte berekening:

- korte kant als eenheid nemen, dus $CD = 1$ en $BC = \sqrt{2}$;

- driehoek BRS is gelijkvormig met driehoek BCD (gemeenschappelijke hoek en een rechte hoek), dus geldt $\frac{BS}{BR} = \frac{BD}{BC}$;
- invullen geeft $\frac{BS}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ dus $BS = \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{3}{4}BC$ en dus $SC = \frac{1}{4}BC$;
- oppervlakte in procenten van zichtbare deel = $50\% + \frac{1}{4} \cdot 50\% = 62,5\%$.

Bij de hele wiskundige actie is het belangrijk om het papier ook daadwerkelijk in je handen te hebben. Bij de nabespreking van het vouwprobleem vind ik het betekenisvol om de verschillende strategieën te bekijken en leerlingen te laten bepalen wat een elegante oplossing is. Eerst goed kijken en niet meteen gaan rekenen.

Tot slot

Kijken we naar het toekomstige wiskunde B-programma, dat vanaf september 2015 in werking gaat, dan is het interessant om een strategie te bedenken voor het vouwprobleem met behulp van analytische meetkunde. Probeer u maar om met een geschikt assenstelsel tot een oplossing te komen. Hebt u zelf ook een uitdagend vouwprobleem, met een interessante didactische ervaring? Laat het ons weten.

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar wiskundedocent. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. Hij heeft speciale belangstelling voor de wiskundendidactiek. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl