

STRAATTEKENINGEN ONTWIKKELEN MET EEN THEEDOOSJE

Roel Zuidema

PROJECTIEVE MEETKUNDE

Roel Zuidema schreef een lessenserie waarin leerlingen een paar basisconstructies uit de projectieve meetkunde leren en daarmee praktisch aan de slag gaan. Ze ontwikkelen namelijk hun eigen straattekening op een A4'tje. Met dit project stond Roel op de Nationale Wiskundedagen 2014 omdat het hem de prijswinnende werkgroep opleverde.

Inleiding

Op de school waar ik tot voor kort werkte, wordt in de vijfde klas een periode projectieve meetkunde gegeven. Dat houdt in dat leerlingen drie weken lang twee uur per dag aan dit onderwerp werken. Toen ik in schooljaar 2011/2012 alledrie de vijfde klassen die de school telde deze periode mocht geven, was ik vrij in de invulling. Ik ben op zoek gegaan naar een mengeling uit de 'klassieke vrije-school-aanpak', zoals ik die van collega's aangereikt kreeg en een concreet project, waarin leerlingen meetkundige constructies kunnen omzetten. Dat heeft uiteindelijk geleid tot een lessenserie, die ik zelf interessant vind en waar leerlingen met veel plezier aan werkten. In dit artikel beschrijf ik de projectkant van deze lessenserie, waarin de basis wordt gelegd voor het ontwikkelen van straattekeningen. Hoewel ik terdege besef dat de projectieve meetkunde niet tot de standaardlesstof behoort, ben ik ervan overtuigd dat het inhoudelijk interessante mogelijkheden biedt voor speciale projecten of een uitgangspunt kan zijn voor profielwerkstukken.

Een concreet project

Bij het begrip *projectieve meetkunde* kwam bij mij al snel een plaatje uit het boek *Lessen in Projectieve Meetkunde* van Martin Kindt voor de geest. Hierin spelen grondvlak, tafereel, grondlijn, horizon en het centrum de hoofdrol, en delen grondlijn en horizon een blad papier in een zogenaamd drieluik. Bij projecties worden objecten uit het grondvlak op het tafereel geprojecteerd en omgekeerd. Dit beeld vind ik sterk en mijn doel voor deze lessenserie was, dit beeld concreet te verbinden met een paar standaardconstructies uit de projectieve meetkunde. Het afbeelden op het grondvlak leidde mij al snel naar het idee van straattekeningen, waarbij op straat vertekende afbeeldingen getekend worden, die vanuit een bepaald zichtpunt een driedimensionale illusie opwekken. Zulke beelden zijn in grote getalen te vinden op het internet. De betovering van deze schitterende beelden laat leerlingen, zo is mijn ervaring, zeker niet koud.

De PGC – het theedoosje

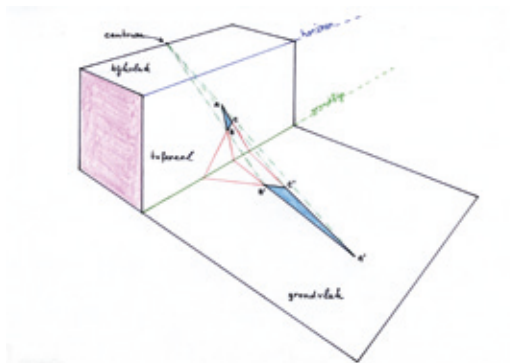
Bij het ontwikkelen van een straattekening met behulp van het drieluik van Kindt hebben we te maken met het driedimensionale object, de projectie ervan op het tafereel en de projectie ervan op het grondvlak. In eerste instantie liet ik de leerlingen met vlakke figuren het verband tussen de beide projecties ontdekken. Daarna ontwikkelden we de tekeningen tot straattekeningen: tekeningen in het grondvlak, die een ruimtelijke illusie oproepen, wanneer je ze vanuit het centrum bekijkt. Om de samenhang tussen de projecties in het tafereel en op het grondvlak te kunnen bepalen en onderzoeken, moeten de locatie van het zichtpunt (centrum) en die van het tafereel ten opzichte van het grondvlak vastgelegd worden. In deze fase heb ik een tijdje nodig gehad om een goede manier te vinden om het drieluik inzichtelijk op te bouwen en met passende oefeningen de projecties met elkaar te verbinden.

Het eureka-moment kwam toen ik een leeg theedoosje in mijn handen had. Een A4-papier past namelijk prima om zo'n doosje heengevouwen en een theedoosje tref je in elk huishouden wel aan. Het idee van de 'Projectieve Geometrie Camera', de PGC, was geboren en ontwikkelde zich toen snel. Na de bouw van de PGC heb ik de leerlingen in drie stappen laten ontdekken hoe punten en lijnen vanuit het tafereel op het grondvlak worden afgebeeld en omgekeerd. Daarmee was de basis voor het ontwerpen van een straattekening gelegd.

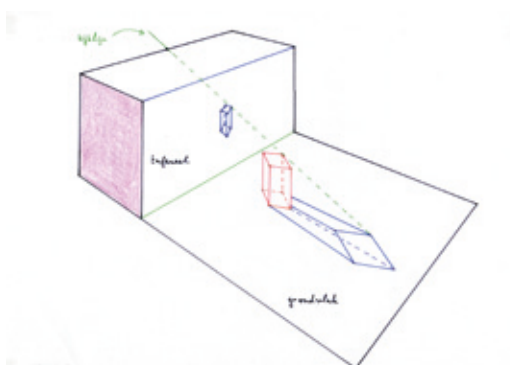
Recept: bouw van de PGC

Neem een leeg theedoosje. Knip een van de beide grootste vlakken van het doosje open: het tafereelvlak van de camera, dat verticaal opstaat wanneer je de camera neerzet. Maak in het midden van de lange bovenste ribbe, die niet in het tafereelvlak ligt, een gaatje. Begin met een passerpunt, maar vergroot het gat langzaam, totdat er een potlood doorheen kan. Dit is het kijkgat, het centrum van de PGC.

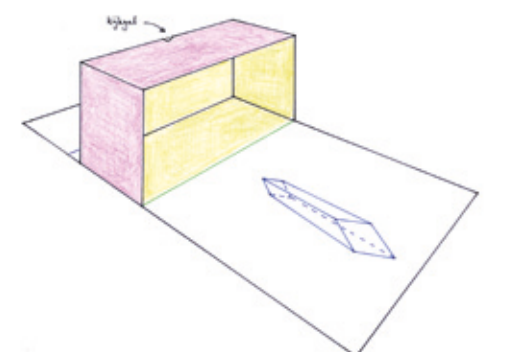
Het papier waarop je gaat tekenen moet op de afmetingen



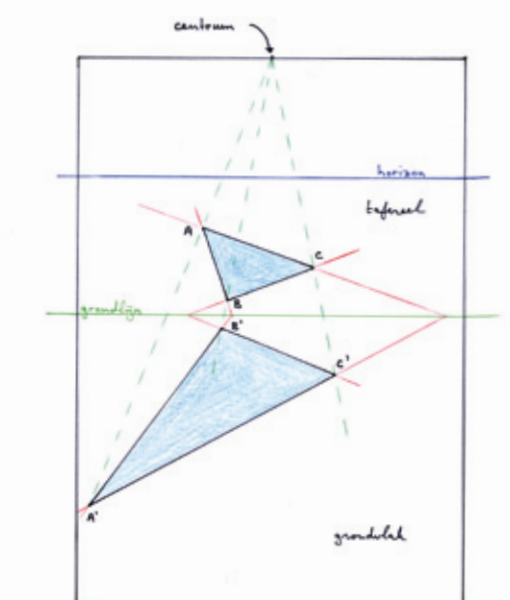
figuur 1 een centrale projectie in het drieluik met kijkvlak, tafereel en grondvlak



figuur 2 een balkje op het grondvlak met projectie op tafereel en grondvlak



figuur 3 het bekijken van de projectie in het grondvlak door de PGC levert de driedimensionale illusie van het balkje uit figuur 2



figuur 4 de stelling van Desargues en de PGC

van de camera worden afgestemd. Vouw een papier met strakke lijnen, de horizon en de grondlijn, om de camera en geef met een punt op de korte zijde het centrum aan. Het blad is nu in drie rechthoeken verdeeld: het 'kijkvlak', het tafereel en het grondvlak.

Stap 1: de verkenning – Om te ontdekken hoe tekeningen in het tafereel op het grondvlak worden afgebeeld, snijden de leerlingen uit het tafereel een driehoek ABC . Ze vouwen het papier om de PGC en kijken door het kijkgat van de camera om te kijken waar de driehoek $A'B'C'$ op het grondvlak wordt afgebeeld. Het is een uitdaging om dat zo precies mogelijk te doen. Als de beide driehoeken getekend zijn, tekenen ze op het vlak gelegde blad papier de lijnen AA' , BB' en CC' , die alledrie door het centrum gaan. Ook tekenen ze de punten $AB-A'B'$, $AC-A'C'$ en $BC-BC'$ en ontdekken, dat deze punten op de grondlijn liggen. Deze tekening is een schitterende toepassing van de stelling van Desargues:

Als van twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten (AA' , BB' en CC') door één punt (centrum) gaan, dan liggen de drie snijpunten van de overeenkomstige zijden in één lijn (grondlijn).

Stap 2: kalibratie van de PGC – Zodra de stelling van Desargues door de leerlingen begrepen is, merkt men het volgende op: Wanneer in een constructie het centrum en de grondlijn vastgelegd zijn, heeft men slechts één puntenpaar (A in het tafereel en de afbeelding A' in het grondvlak) nodig om andere punten uit het tafereel in het grondvlak en omgekeerd vanuit het grondvlak in het tafereel af te beelden. Men hoeft dus geen hele driehoek uit te snijden om te weten hoe deze wordt afgebeeld op het grondvlak. Het volstaat om een punt af te beelden. Dat punt is eenvoudig af te beelden, door met een passerpunt een klein gaatje in het tafereel (punt A) te prikken en vervolgens door de PGC de afbeelding (punt A') te zoeken. Wanneer de leerlingen nu een blad maken, waarop het centrum, de horizon, de grondlijn en het puntenpaar A en A' zijn ingetekend, hebben ze als het ware een kalibratieblad, dat bij hun eigen PGC hoort. Nu kunnen ze elk punt uit het tafereel in het grondvlak afbeelden (mits het binnen het blad papier valt). Een goede oefening is die waarbij in het tafereel een vierhoek wordt getekend waarbij de tegenoverliggende zijden elkaar op de horizon snijden. Ontdekken de leerlingen, dat de afbeelding in het grondvlak een parallellogram is? En waarom dat zo is? Men kan in deze fase natuurlijk bespreken, waarom die ene lijn in de tekening de horizon wordt genoemd. Ook is het leuk om bij het bespreken van de horizon een paar mooie vakantiefoto's aan de kust te laten zien, waarbij de horizon zo mooi zichtbaar is. Een andere interessante oefening is het laten afbeelden van verschillende cirkels in het tafereel en dit

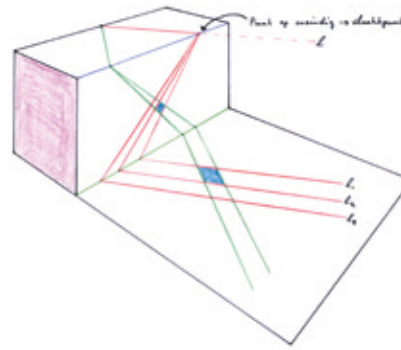
te verbinden met kegelsneden. Daarop ga ik in dit artikel niet verder in.

Stap 3: weg met de gaatjes – De afmetingen van het theedoosje leggen de *homologie* van het drieluik volledig vast. Men kan zich afvragen of het dan wel nodig is een puntenpaar $A - A'$ met behulp van een passergaatje in het tafereel te bepalen. Het antwoord op die vraag is, dat het inderdaad overbodig is. En met de voorafgaande oefeningen kunnen de leerlingen ook begrijpen waarom. Twee evenwijdige lijnen in het grondvlak l_1 en l_2 hebben één punt gemeenschappelijk: een punt op oneindig. In het tafereel wordt dit punt zichtbaar als vluchtpunt op de horizon. Een derde lijn l_0 , evenwijdig aan de eerste twee maar niet in het grondvlak gelegen, gaat door hetzelfde oneigenlijke punt en zodoende in het tafereel door hetzelfde vluchtpunt. Dat betekent dat een lijn l_0 in het kijkvlak en door het centrum, in het tafereel het vluchtpunt bepaalt van alle afbeeldingen van aan l_0 evenwijdige lijnen l_i in het grondvlak. Een lijn a door het centrum legt nu elk willekeurig puntenpaar $A - A'$ vast.

Straattekeningen

Nu de leerlingen probleemloos punten uit het tafereel in het grondvlak en in omgekeerde richting kunnen afbeelden, wordt het tijd om een eerste straattekening te maken. Een goede oefening daarbij is het construeren van een kubus. De kubus kan daarna als basis voor vele andere tekeningen dienen. In het volgende voorbeeld beschrijf ik de stappen van de constructie, waarbij één hoekpunt van de kubus op de grondlijn ligt. Daarbij laat zich de hoogte van de kubus iets aanschouwelijker bepalen.

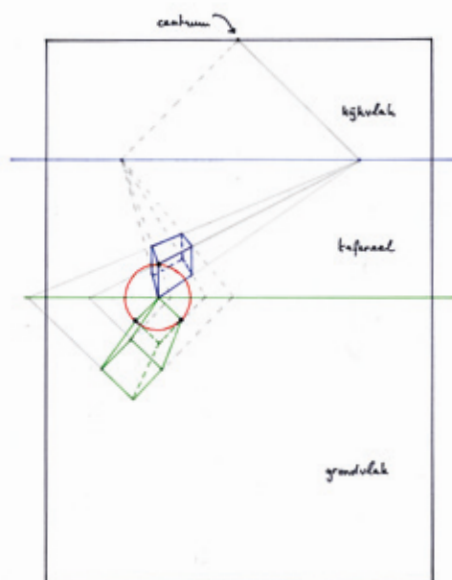
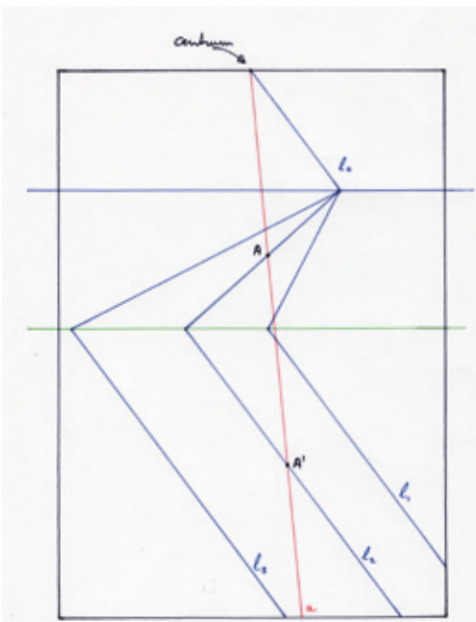
Een kubus construeren – Teken in het grondvlak de plattegrond van de kubus (vierkant) en vervolgens de bijbehorende afbeelding in het tafereel. Wanneer een dobbelsteen op het grondvlak tegen het tafereel aange-



figuur 5 het gemeenschappelijke punt van parallelle lijnen in het kijkvlak en het grondvlak is in het tafereel zichtbaar als vluchtpunt op de horizon

legd wordt, is eenvoudig in te zien dat de hoogte van de zijden boven de grondlijn in het tafereel gelijk is aan de vierkantszijden van de plattegrond. Construeer met dit inzicht en met behulp van een passer de hoogte van de kubuszijde boven de grondlijn en vervolgens de rest van de kubus in het tafereel. De vier punten in het bovenvlak van de kubus kunnen nu vanuit het tafereel in het grondvlak afgebeeld worden, waarmee de afbeelding van de kubus in het grondvlak volledig is. Niet veel ingewikkelder is het de kubus op een andere plaats op het grondvlak te construeren. Daarbij moet ook weer de zijdelengte vanuit het grondvlak met passer op het tafereelvlak worden overgedragen. Die stap laat ik graag aan de lezer over.

Door de PGC kijken – Bij de constructie van de kubus is de PGC niet gebruikt, behalve dat de afmetingen van het doosje de locatie van de horizon en de grondlijn ten opzichte van het centrum hebben bepaald. Nu de tekening af is, kunnen we haar door de PGC bewonderen en de ervaring van een driedimensionaal object beleven. Daartoe moet de PGC zodanig op het blad papier gezet worden, dat het kijkgat samenvalt met de locatie van het centrum, wanneer het blad om de camera heen gevouwen zou zijn. De grondlijn van de camera valt daarbij precies samen met de grondlijn op de tekening. In de situatie van figuur 3 is door het kijkgat het rode balkje uit figuur 2 te zien. Zonder camera kun je met het oog het kijkpunt zoeken en

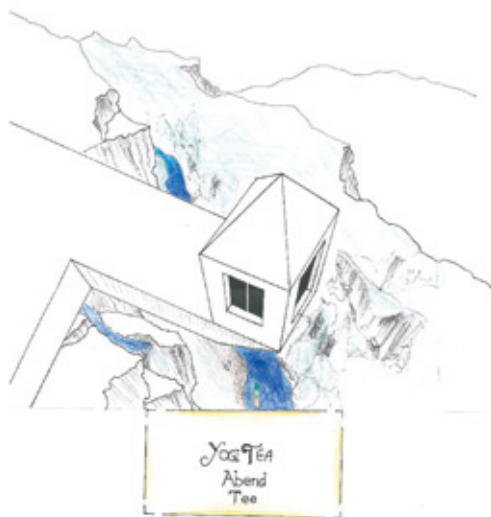


figuur 6 met behulp van parallelle lijnen in kijkvlak en grondvlak kan men punten uit het tafereel in het grondvlak afbeelden en omgekeerd.

figuur 7 de drie even lange kubus-zijden in de drie richtingen zijn eenvoudig te construeren wanneer een hoekpunt van de kubus op de grondlijn staat

de kubus of balk driedimensionaal zien. Het kijken door de PGC versterkt echter het effect, doordat het kijkpunt vastligt. Daarbij voegt het kijken door de camera een speciaal belevingseffect toe, mede doordat het zichtveld zich tot de tekening beperkt. De ervaringen zijn overvloedig.

Een rijke speeltuin – Met de kubus als basis kan de creativiteit van de leerling nu zijn weg gaan. Tekent hij verschillende blokken naast en achter elkaar? Probeert hij een huis te tekenen? Of gaat hij experimenteren met het tekenen van schaduwen? In de creatieve wereld liggen tal van mogelijkheden open. In figuur 8 ziet u een tekening van een leerling, die geëxperimenteerd heeft met een wiskundige vorm in een natuurlijke omgeving.



figuur 8 het werk van een leerling: een blokvormige woning boven een ravijn

Ervaringen uit de les

De leerlingen vinden het heerlijk om met deze stof aan de slag te gaan. Ze worden uitgedaagd over de verschillende elementen (punten, lijnen en vlakken) in de ruimte na te denken, precies te tekenen en veel geduld te hebben. Hoe makkelijk alles er ook uitziet, het vergt een nauwkeurige werkhouding. De frustratie soms een paar keer opnieuw te moeten beginnen, kan dan ook erg groot worden, maar de voldoening als het lukt, maakt veel goed. Een enkele leerling beweert ineens veel liever algebraïsch te werken, maar de meesten genieten van de vrije creatieve ruimte en de uitdaging iets moois te maken. Wie de tijd heeft de camera grondig bij de leerlingen te introduceren, heeft daarna gegarandeerd een serie lessen waarbij stil en geconcentreerd gewerkt wordt.

Literatuur en referenties

Stolzenburg, A. (2009). *Projective Geometrie, 1. Druck*, Stuttgart: edition waldorf.
 Kindt, M. (1996). *Lessen in Projectieve Meetkunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven.
 Edwards, L. (2003). *Projective Geometry*. Floris Books.
 zie ook www.fisme.science.uu.nl/nwd voor de workshop tijdens de NWD 2014

Over de auteur

Roel Zuidema is tijdens zijn studie aan de TU Delft begonnen met lesgeven aan het Stanislascollege Pijnacker (2004-2008). Aansluitend heeft hij tweeënhalf jaar lesgegeven aan de Vrije School Den Haag. Januari 2011 verhuisde hij naar Zwitserland, waar hij tweeënhalf jaar aan de Atelierschule Zürich werkzaam was. Vanaf schooljaar 2014/2014 geeft hij les aan de Kantonschule Alpenquai in Luzern. E-mailadres: ZuidemaCH@gmail.com

KLEINTJE DIDACTIEK

ALGEBRAISCHE VAARDIGHEDEN OEFENEN

$$\begin{aligned} (3x-1)(5x-3) &= (3x-1)(6x+5) \\ 15x^2 - 9x - 5x + 3 &= 18x^2 + 15x - 6x - 5 \\ 15x^2 - 14x + 3 &= 18x^2 + 9x - 5 \\ -3x^2 - 23x + 8 & \\ x(-3x - 23) &= -8 \\ x \cdot 8 \vee x \cdot -3x - 23 &= -8 \\ -3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

figuur 1 voorbeeld van een uitwerking van een leerling uit 6 vwo wiskunde A. De uitwerking is zowel fout als omslachtig.

In *Getal en Ruimte* staan veel oefenopgaven om de algebraïsche vaardigheden van leerlingen te trainen en verbeteren. Tot mijn grote frustratie hielp al dat eindeloos oefenen (en fouten verbeteren!) nauwelijks. Op korte termijn leidt het wel tot enig resultaat, maar een maand later op de toets is veel weer vergeten. Dit jaar doe ik het anders. Eenmaal per week laat ik leerlingen in tweetallen één opgave uitwerken en inleveren. De les erna staan deze in een PowerPoint. De vraag aan de leerlingen: is deze uitwerking goed en zo nee, wat is er dan niet goed? Ik zorg dat er altijd minstens één correcte uitwerking tussen zit.

De eerste week kreeg ik acht briefjes terug met zeven foute of onvolledige uitwerkingen, zie figuur 1. De tweede week kreeg ik negen briefjes terug met drie foute of onvolledige uitwerkingen. Op korte termijn lijkt het dus te werken. Tegen het einde van het schooljaar kan ik u vertellen of het ook op lange termijn werkt. Met dank aan mijn collega Inge Verhoev voor het idee.

Lonneke Boels