Vanuit de oude doos

DE OPGAVE 2011, UITGEDEELD OP DE JAARVERGADERING

[Ton Lecluse e.a.]

Deze keer een opgave die Dick Klingens me gaf om te verspreiden op de NVvW-jaarvergadering in november j.l. Er zijn een aantal mooie en verrassend verschillende bewijzen binnengekomen, zowel synthetische als goniometrische en analytische. Allereerst de opgave zelf.

De cirkels K_1 en K_2 snijden elkaar in de punten P en Q; ***zie figuur 1***.
Een lijn door Q snijdt K_1 ook in het punt A en K_2 ook in het punt B, waarbij Q *tussen* A en B ligt.
De punten C en D zijn de middens van de cirkelbogen PA en PB waarop het punt Q *niet* gelegen is.
Het punt M is het midden van het lijnstuk AB.
Bewijs dat $\angle CMD = 90°$.

(De opgave is ook omkeerbaar: verwissel het gegeven 'M is het midden van het lijnstuk AB' met '$\angle CMD = 90°$'. Sommige inzenders gaven ook hiervoor een bewijs. Vanwege de lengte van dit artikel laten we deze bewijzen achterwege.)

Er volgen hierna enkele fraaie bewijzen, waarbij gelijkvormigheid en congruentie opvallend vaak als gereedschap worden ingezet.
De bewijzen in dit artikel zijn van Sjoerd Zondervan, Jan van der Maas, Just Bent, Henk Visser en Floor van Lamoen. Deze bewijzen gebruiken stellingen die binnen de eindtermen vallen van het huidige vwo-wiskunde-B programma, en zijn dus te gebruiken in de les.
Maar er zijn nog meer bewijzen binnengekomen: van Sjoerd Zondervan (analytisch, past nog wel binnen het wiskunde-D programma), Agnes Verweij (met machten van cirkels en de bissectrice-stelling), Floor van Lamoen (met hoeksnelheid), Aad Goddijn (met hoeksnelheid), Ton Hengeveld (met vectorrekening en goniometrie), Dick Klingens (met inversie), Quintijn Puite in samenwerking met IMO-deelnemer Merlijn Staps (synthetisch, met gerichte hoeken) en nog twee van Just Bent (met vouwen cq. met draaivermenigvuldiging). Deze bewijzen zijn pittiger en/of gaan hier en daar een stukje boven de eindtermen uit. Ze kunnen via de NVvW-website worden gedownload [1].
De bewijzen zijn tussen de inzenders onderling uitgewisseld, hetgeen levendige discussies opleverde die een *Euclides*-special zouden rechtvaardigen, maar ook (in detail) fraaie verfraaiingen van de bewijzen zelf. Jan en Henk stuurden slechts een ruwe schets in van hun bewijs, die ik zelf mocht uitpluizen… heerlijk!

Het bewijs van Sjoerd Zondervan

Synthetisch met een puntspiegeling en congruentie
Puntspiegel de hele figuur in M. De beeldpunten geven we aan met een accent; ***zie figuur 2***.
Dan is te bewijzen dat vierhoek $CDC'D'$ een ruit is, waarbij M het snijpunt van de diagonalen is en waarmee dan CM loodrecht staat op DM.
We bekijken eerst de driehoeken CPD en $C'BD$.
Door gebruik te maken van de stelling dat in dezelfde cirkel bij gelijke bogen gelijke koorden horen en door gebruik van de eigenschappen van de puntspiegeling kunnen we zeggen:

- $CP\ (= AC = A'C') = C'B$
- $PD = BD$

Verder met behulp van de hoeken in een koordenvierhoek en omtrekshoeken

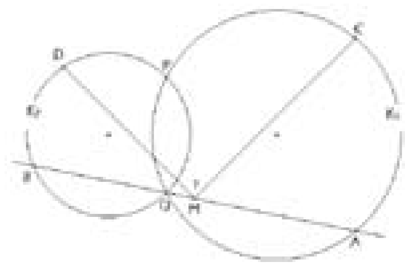
- $\angle CPD = 180° - \angle CPQ + 180° - \angle QPD = \angle CAQ + \angle QBD = \angle C'A'Q' + \angle QBD = \angle C'BD$

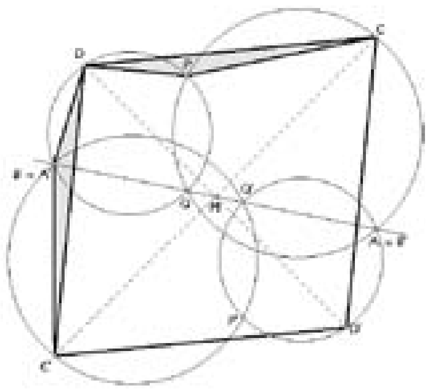
Dus zijn de driehoeken CPD en $C'BD$ congruent (*ZHZ*). Hieruit volgt dat $CD = C'D$. Vanwege de puntspiegeling geldt $CD = C'D'$ en $C'D = CD'$; dus:
$CD' = C'D = CD = C'D'$
Dus vierhoek $CDC'D'$ is een ruit.

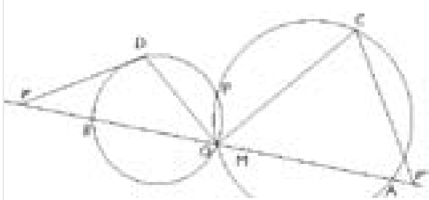
Het bewijs van Jan van der Maas

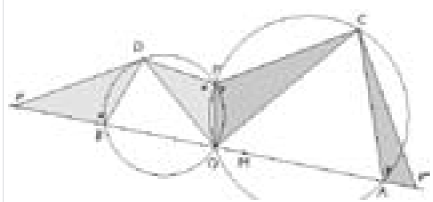
Combinatie synthetisch en analytisch
Jan splitst het probleem op in twee fraaie deelproblemen, die afzonderlijk geformuleerd kunnen worden en elk een in de klas haalbare opgave opleveren.
Kies de punten P' en P'' op de lijn door A en B, zo dat de driehoeken $P'QD$ en $P''QC$ gelijkbenig zijn met als top respectievelijk D en C; ***zie figuur 3a***.
Dan geldt: $BP' = AP''$.
Kunt u zeggen waarom?

Verklaring – We zullen laten zien dat geldt: $BP' = AP'' = PQ$; ***zie figuur 3b***.
Omdat $DP = DB$ (volgt uit het *gegeven*) en $\angle DPQ = \angle DBQ'$ (beide zijn gelijk aan $180° - \angle QBD$, *koordenvierhoek* en *gestrekte hoek*), kunnen we driehoek DPQ zó draaien om D dat PQ wordt afgebeeld op BQ'.


figuur 1


figuur 2


figuur 3a


figuur 3b

Omdat DQ' daarbij het beeld is van DQ is driehoek QDQ' gelijkbenig.
Aan de 'andere kant' doen we hetzelfde met de driehoeken CPQ en CAQ''.
Omdat $Q'B = PQ = AQ''$ is het midden M van AB ook het midden van $Q'Q''$.

Een bewijs met congruente driehoeken is ook mogelijk.
Omdat DQ en CQ binnen- en buitenbissectrice zijn van $\angle BQP$, staat DQ loodrecht op CQ. Dus kan het oorspronkelijke probleem ook worden geformuleerd als:

Gegeven twee gelijkbenige driehoeken ABC en BDE met bases AB en BD, waarbij BC loodrecht staat op BE; ***zie figuur 4a***.
Punt M is het midden van het lijnstuk AD.
Te bewijzen: $\angle CME = 90°$.

Lukt dit u?

Het kan op meerdere manieren; bijvoorbeeld als ***in figuur 4b***.
Trek in beide driehoeken hoogtelijnen uit de top: CF en EG. Dan is:
- $AD = 2AF + 2BG$
- $AM = AF + BG$ en $AM = AF + FM$

Dus is: $FM = BG$. En net zo is: $MG = FB$.
Dan geldt:
$$-\frac{CF}{FM}\cdot\frac{EG}{MG} = -\frac{CF}{BF}\cdot\frac{EG}{BG} = -1$$
Dus staat CM loodrecht op EM.

Het bewijs van Just Bent
Synthetisch met (omtreks)hoeken en congruentie
DM snijdt K_2 in R. De lijn door P en R snijdt K_1 in E. De lijn door D, R en M snijdt AE in F; ***zie figuur 5***.
Bewijs – De hoeken A en B zijn gelijk, immers:
$\angle B$ (= $\angle P$) = $\angle A$ (twee keer de *constante hoekstelling* met natuurlijk $\angle QPR = \angle QPE$)
Dan is: BR evenwijdig met EA (*Z*-hoeken).
Voorts is: $AM = BM$ (*gegeven*). Met $\angle BMR = \angle AMF$ blijkt dan dat de driehoeken BMR en AMF congruent zijn (*HZH*).
De volgende hoeken zijn gelijk:
- $\angle R_4 = \angle R_1$ (*overstaand*);
- $\angle R_1 = \angle R_2$ ('kijken' op *gelijke bogen*);
- $\angle R_2 = \angle F_2$ (dit zijn *F-hoeken*).

Dus is driehoek RFE een gelijkbenige driehoek met top E. Dán zijn we er, want in die driehoek vallen zwaartelijn, hoogtelijn en bissectrice van de tophoek samen.
En M is het midden van RF, dus komt EM uit in C (want EM is bissectrice van hoek E) en dus staat EM loodrecht op DM (want EM is hoogtelijn in driehoek RFE).

Het bewijs van Henk Visser
Synthetisch
Henk vertaalde het gegeven dat C en D middens van bogen zijn in 'driehoeken BPD en APC zijn gelijkbenig'. Immers, D ligt op de middelloodlijn van BP en C op die van AP; ***zie figuur 6a***.
In een voorbereidende stap wordt u gevraagd te bewijzen dat de driehoeken BDE en PGC *gelijkvormig* zijn. Lukt het u? (Een prachtsom trouwens voor 6-vwo bij wiskunde-B.)

Zelf zeg ik altijd tegen mijn leerlingen: bij gelijkbenige driehoeken teken je *altijd* de symmetrieas, en bij elkaar snijdende cirkels *altijd* de gemeenschappelijke koorde. Die assen stonden er al, en vandaar dat in figuur 6a ook PQ erbij getekend is.
Stel $\angle BQP = q$. Druk nu hoeken uit in q.
Welnu. De bogen BD en PD zijn elk de helft van boog BP, waarop $\angle BQP$ staat.
Dus is $\angle DBE$ (= $\angle DBP$) = ½q.
$\angle AQP = 180° - q$ (*gestrekte hoek*), en deze hoek staat op boog AP, die door C in twee gelijke delen wordt verdeeld; dus:
$\angle APC = ½\angle AQP = ½(180° - q) = 90° - ½q$
Omdat (vanwege de symmetrieassen) $\angle PGC = 90°$ is, is dus $\angle GCP = ½q$.
Dus bevatten de driehoeken BDE en CPG een hoek ter grootte ½q en een rechte hoek, en zijn deze driehoeken dus gelijkvormig.

We gummen nu PQ uit (***zie figuur 6b***), voegen het midden M van AB toe, en nemen mee dat de driehoeken BDE en CPG gelijkvormig zijn.
In deze figuur zijn de driehoeken MED en MGC gelijkvormig. Kunt u zeggen waarom?

Allereerst, en zie nu ***figuur 6c***, zijn ME, MG en EG middenparallellen in driehoek ABP, waaruit de gelijke hoeken aangeduid met p en q in die figuur volgen.
Het parallellogram $EMGP$ heeft zijden x en y.
We zien nu in driehoeken DEM en MGC al dat geldt:
(1)… $\angle MED = \angle MGC = p + q + 90°$
Verder geldt $DE : EM = DE : PG$ en $MG : GC = BE : GC$.
Uit de eerder aangetoonde gelijkvormigheid van de driehoeken BDE en CPG volgt dat $DE : PG = BE : CG$.
Dus is:
(2)… $DE : EM = MG : GC$
Met de betrekkingen (1) en (2) blijkt dus dat de driehoeken MED en CGM gelijkvormig zijn (*zhz*).

We laten een aantal 'overtollige' zaken uit de tekening weg, ***zie figuur 6d***, en kijken naar de hoeken bij M:
- $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle MGC - 90°$ (***zie figuur 6c***);
- $\angle M_3 + \angle M_4 = \angle MCG + \angle M_4 = 180° - \angle MGC$ (gelijkvormigheid en *hoekensom* in driehoek MGC).

Dus: $\angle M_5 = 180° - (\angle MGC - 90°) - (180° - \angle MGC) = 90°$.

Het bewijs van Floor van Lamoen
Met de cosinusregel en de stelling van Thales
We beginnen de oplossing met een lemma over twee driehoeken in een cirkel. Zij hebben een overeenkomende hoek en twee overeenkomende zijden, maar zijn desalniettemin niet congruent.

Lemma 1 – Laat PQR een driehoek en punt S het punt op zijn omgeschreven cirkel zodat QS de bissectrice is van hoek Q (met grootte q). Dan geldt dat:
$PQ + QR = 2 \cdot QS \cdot \cos(½\, q)$

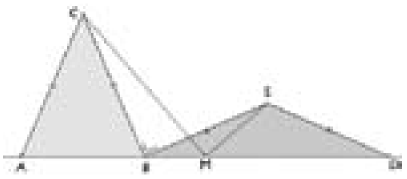
Bewijs – Laat $PS = RS = k$ (bij gelijke bogen horen gelijke koorden). We zien ***in figuur 7a*** met de cosinusregel dat:
$$k^2 = QS^2 + QR^2 - 2 \cdot QS \cdot QR \cdot \cos(½q)$$
en dat:
$$k^2 = QS^2 + PQ^2 - 2 \cdot QS \cdot PQ \cdot \cos(½q)$$
Dus zijn PQ en QR oplossingen zijn van de kwadratische vergelijking:
$$X^2 - 2 \cdot QS \cdot \cos(½q) \cdot X - k^2 + QS^2 = 0$$
De som van die twee oplossingen is inderdaad gelijk aan $2 \cdot QS \cdot \cos(½q)$.

De betekenis van dit lemma is dat de som van PQ en QR kennelijk alléén afhangt van de lengte van de bissectrice en van de hoek, en *niet* van de straal van de cirkel.

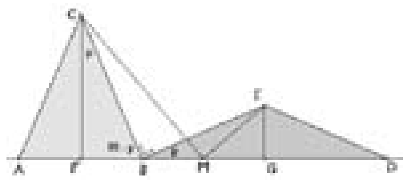
Lemma 2 (uitbreiding) – Nemen we in plaats van bissectrice QS de buitenbissectrice QS' van hoek Q, dan geldt met P en S aan dezelfde kant van QR en met $½q' = \angle RQS'$ dat:
$$QR - PQ = 2 \cdot QS' \cdot \cos(½q')$$

In dat geval is, als P' het spiegelbeeld van P is in Q, QS' de 'echte' bissectrice van $\angle RQP'$; ***zie figuur 7b***. Ook nu is het bewijs hiervan een invuloefening van de cosinusregel, met de opmerking dat:
$$\cos(\angle PQS') = \cos(180° - ½q') = -\cos(½q')$$

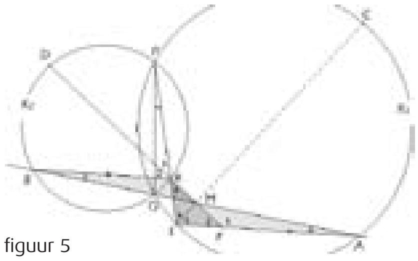
Nu de oplossing van de eigenlijke opgave; ***zie figuur 8***.
We bekijken de situatie zonder het punt M.
Omdat DQ de bissectrice is van $\angle BQP$ en CQ die van $\angle AQP$ geldt dat $\angle DQC$ recht is (de helft van een gestrekte hoek).
We kiezen het punt E zodat $DQCE$ een rechthoek is, met een omgeschreven cirkel (middelpunt F, het midden van CD). Die cirkel snijdt PQ naast Q ook in G. Uit de stelling van Thales blijkt daarnaast dat het voetpunt V van E op AB op deze cirkel ligt.



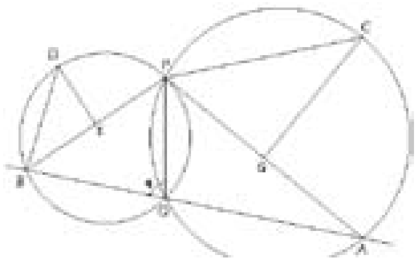
figuur 4a



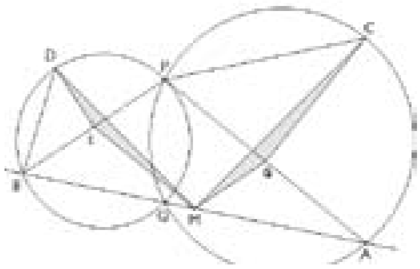
figuur 4b



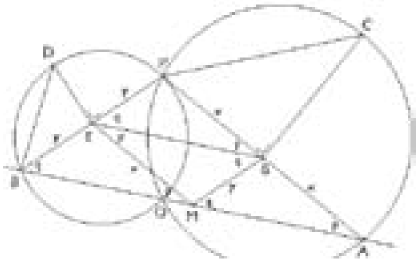
figuur 5



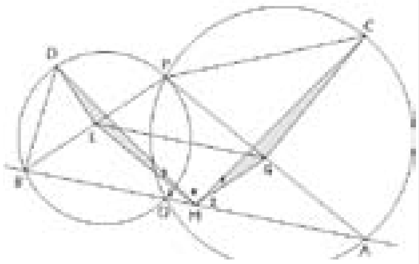
figuur 6a



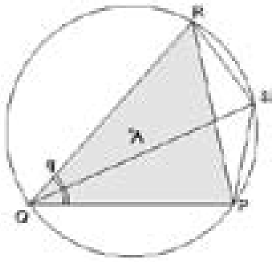
figuur 6b



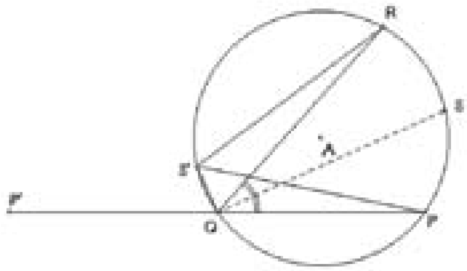
figuur 6c



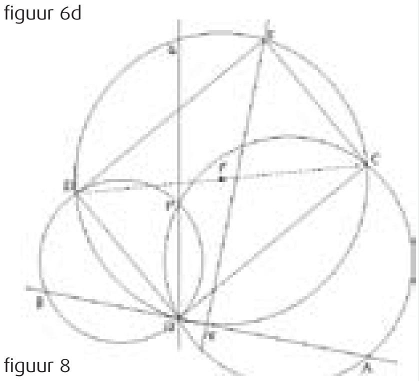
figuur 6d



figuur 7a



figuur 7b



figuur 8

We gaan er gemakshalve van uit dat V aan dezelfde kant ligt van Q als A (als V aan dezelfde kant ligt als B verloopt het bewijs analoog).
Uit lemma 1 volgt dat $GQ + QV = PQ + QA$.
Uit lemma 1 en 2 gecombineerd volgt bovendien dat $GQ - QV = PQ + QB$.
Hieruit leiden we af dat:
$AV = QA - QV = GQ - PQ = QB + QV = VB$
Dus is V het midden van het lijnstuk AB.
V valt dan samen met het punt M uit de opgave. Met de stelling van Thales volgt nu dat $\angle DVC$ recht is.

Noot

[1] Andere bewijzen van de opgave (negen stuks) staan in PDF-formaat in een ZIP-bestand van 2,8 Mb op de NVvW-website: *www.nvvw.nl/media/downloads/najaar2011.zip*

Over de auteurs

Sjoerd Zondervan was docent wiskunde aan het Bornego College te Heerenveen.
Jan van der Maas is docent wiskunde aan het Jac.P. Thijsse College te Castricum.
Henk Visser, oud-docent wiskunde, was ook verbonden aan de universiteiten van Maastricht, Tilburg en Rotterdam.
Just Bent is docent wiskunde aan het Stedelijk Gymnasium te Haarlem.
Floor van Lamoen is docent wiskunde aan het Ostrea Lyceum te Goes.
Agnes Verweij was docent wiskunde en didactiek aan de Technische Universiteit Delft.
Aad Goddijn is verbonden aan het Freudenthal Instituut te Utrecht.
Ton Hengeveld is docent wiskunde aan het Murmelliusgymnasium te Alkmaar.
Dick Klingens was docent wiskunde aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.
Quintijn Puite is als lerarenopleider verbonden aan de Hogeschool Utrecht (Instituut Archimedes) en voor de Wiskunde Olympiade verbonden aan de Technische Universiteit Eindhoven.
Merlijn Staps nam afgelopen zomer namens Nederland deel aan de IMO en studeert nu wiskunde in Utrecht.
Ton Lecluse (e-mailadres: *alecluse@casema.nl*) is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.