BEELDTAAL

Geschikte representaties verkennen aan de hand van uitdagende situaties

[Harrie Broekman]

Vooraf

Voor het leren en gebruiken van wiskunde is het belangrijk om veelvuldig visuele representaties te hanteren[1]. Communiceren via beelden (plaatjes, diagrammen, grafieken) kan namelijk een extra ondersteuning geven bij het verwerven van zowel standaardtechnieken als het leren doorzien van wiskundige structuren.
Om het belang van visualiseren aan te geven voor het probleemoplossen in ruimere zin zullen, behalve het Kangoe-voorbeeld waaraan gewerkt werd tijdens de studiedagen van de NVvW (november 2003) en de Poolse SNM (februari 2004), nog twee andere onderwijsleersituaties beschreven worden. Daarna worden drie voorbeelden beschreven waarmee de lezer zelf kan oefenen, al dan niet met of door leerlingen.

Beeldtaal 1 - Kangoe Solitair[2]

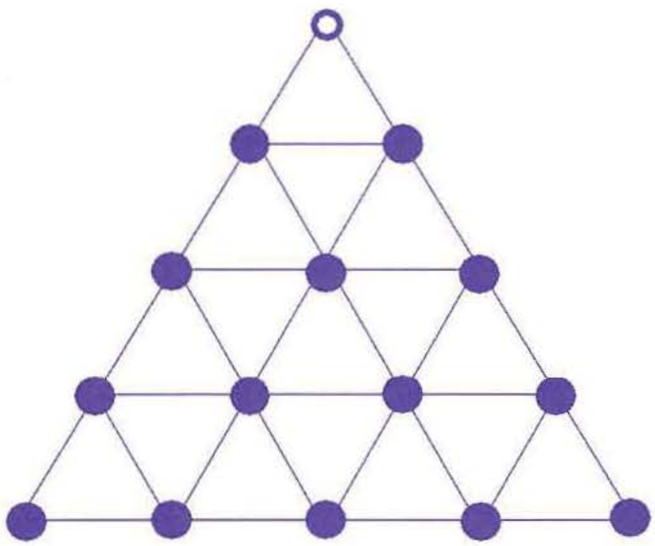
Korte spelregels: Het speelveld van Kangoe Solitair is driehoekig; zie figuur 1. Leg op elk veld een kangoe, maar laat de bovenste positie leeg. Spring steeds met een kangoe over een aangrenzende kangoe naar het veld daarachter; dat veld moet wel leeg zijn. De kangoe waar je overheen springt, neem je weg. De bedoeling is dat je uiteindelijk één kangoe overhoudt op het bovenste veld (het veld dat aan het begin leeg is).

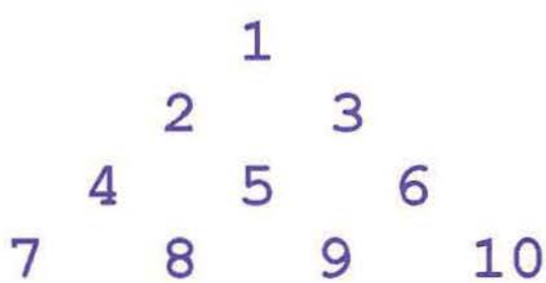
De workshops tijdens de studiedagen van NVvW en SNM startten met een 'levend' Kangoe: als fiches (kangoes) werden deelnemers geplaatst op de op de grond neergelegde 'velden'. Direct begonnen de fiches met elkaar te overleggen in sprekende taal: 'Als jij nu over mij springt dan kom jij daar en stap ik er uit', of 'Ik wil daar heen, maar dan moet hij eerst over hem heen springen', enzovoort. Vervolgens gingen de deelnemers in groepjes aan het probleem werken en kregen zij – als ze daar aan toe waren – vragen ter verdieping. Zoals we verwacht hadden, kwamen meerdere deelnemers zelf al met eigen vervolgvragen. De startvraag fungeerde daarbij als een zogenoemd 'seed problem', een probleem dat te veralgemeniseren is en zelf veel nieuwe vragen oproept.

In de Poolse workshop stonden de vijf deelnemers van de basisrij met hun rug tegen het bord. En wat deden zij? Zich omdraaien en een plaatje maken op het bord en daar getallen bij zetten. 1 bij de bovenste plaats, 2 en 3 bij de rij er onder; 4, 5 en 6 bij de volgende rij, en zo verder (zie figuur 2). Even later werden pijltjes gebruikt om de bewegingen aan te geven: van 4 om 2 heen naar 1, van 6 om 5 heen naar het nu lege veld 4, enz. De bordenwisser kwam er aan te pas om de velden waar overheen gesprongen was ook werkelijk 'leeg' te maken.
Na enige tijd werd deze manier van noteren omgewerkt naar een meer compacte en abstracte notatie:
$4 \rightarrow 1; 6 \rightarrow 4; 1 \rightarrow 6; 7 \rightarrow 2; 12 \rightarrow 5; 10 \rightarrow 3; 14 \rightarrow 12; \ldots$
Het plaatje dat de Poolse deelnemers maakten van de situatie en de pijltjes die ze gebruikten om bewegingen aan te geven, waren een opstapje voor de meer abstracte notatie die de 'oplossing' aangaf.

In het nagesprek tijdens de workshops werd door middel van vragen[3] duidelijk gemaakt dat een mogelijke visualisatie van een probleem niet los gezien kan worden van het totale oplossingsproces. De vraag 'Hoe noteer je een oplossing?' gaf als belangrijk commentaar dat het niet alleen gaat om het noteren achteraf, maar vooral ook om pogingen om plaatjes te maken en notaties te zoeken die gericht waren op het beter in beeld krijgen van de situatie, dus een tekening met pijlen en getallen, en dergelijke.
De vraag 'Waarom Kangoe Solitair spelen in de klas?' heeft echter meer antwoorden dan: 'Er is een natuurlijke behoefte aan een *visualisatie* en *notatie*.' Andere mogelijke antwoorden op die vraag zijn bijvoorbeeld:
- Er is een natuurlijke behoefte aan *systematiek* die versterkt kan worden.
- Om te communiceren moet je je *redenering expliciet* maken en daartoe word je bij dit spel min of meer gedwongen.
- Onderscheid leren zien tussen 'goede' en 'slechte' zetten.
- Er ontstaat min of meer een noodzaak voor een

FIGUUR 1 en 2





bewijs waarom bijvoorbeeld het spel met 7 rijen echt niet kan.
- Gebruik van *symmetrie* in redeneringen wordt 'aangeleerd'.
- Het is een *leuke puzzel.*

Beeldtaal 2 - Lotte en haar moeder Beate[4]

Een leerlinge krijgt de volgende opgave voorgelegd: *'Lotte is 8 jaar, haar moeder Beate is 38 jaar. Hoe oud is Beate als zij drie keer zo oud is als haar dochter Lotte?'*
De leerlinge denkt even na en zegt dan zoiets als: 'Het verschil is 30 en dat blijft zo, dus als Lotte hoger komt, komt haar moeder ook... Dus die 30 is twee en moeder is dus 45 jaar'.
Terwijl die leerlinge dit zegt, schetst ze op een stuk papier figuur 3. Aan de streepjes kon ze zien dat die 30 steeds opschuift.
Het gaat beslist te ver om te zeggen, dat de schets de oplossing 'aanreikte', maar deze schets hielp zeker bij het scherper 'doorzien' van de gegevens en het daaruit concluderen dat het verschil in leeftijd altijd 30 is. Bovendien was deze leerlinge daardoor niet meer aangewezen op de aloude strategie van 'probeer en verbeter'.
(Eerlijkheidshalve moeten we zeggen dat 'vertalen in een stelsel vergelijkingen' door velen mooier gevonden wordt dan het tekenen van een plaatje. Zodra je het stelsel vergelijkingen immers hebt, kun je dit stelsel oplossen zonder te hoeven denken aan Lotte en haar moeder Beate. Dat is de kracht van algebra. Maar denken aan groei/groter worden in de jaren heeft ook wel iets, zeker voor een basisschoolleerling.)

Beeldtaal 3 - Het kraaienprobleem[4]

'Een aantal kraaien gaat op de paaltjes achter mijn huis zitten, op ieder paaltje één. Er blijft precies één kraai over waarvoor geen paaltje meer is. Een moment later gaan dezelfde kraaien met z'n tweeën op een paal zitten; er is dan één paaltje waarop geen kraai zit. Hoeveel paaltjes staan er achter mijn huis?'
Een leerling reageerde als volgt: 'Als je de een door de ander deelt, is de rest 1, en als je nog een keer deelt heb je 2 tekort, dus er zijn... ja, 3 paaltjes.' Eerlijk gezegd is het niet eenvoudig om de redenering van de leerling te volgen, maar een plaatje kan ook hier veel hulp bieden; zie figuur 4. En daarmee is het probleem, door de visuele ondersteuning, opgelost.

Oefenen met beeldtaal - vouwblaadje

Dit eerste voorbeeld voor gebruik in de klas is ontleend aan Pierre van Hiele.
Vouw een vel papier eerst horizontaal dubbel en daarna nogmaals, maar dan verticaal.
Vraag: Als je van het 'vouwhoekje' een (vierdik) stukje wegknipt, welke figuur krijg je dan te zien na het weer openvouwen van het papier?
Vouw het dichtgevouwen papier nogmaals (nu weer horizontaal), knip een hoekje af en voorspel wat je te zien krijgt als je het papier weer zou openvouwen.

Vraag: Wat is een mogelijke verklaring voor het waargenomen verschijnsel?
Vervolgvraag: Bedenk die zelf, eventueel na wijziging van de instructie.

Oefenen met beeldtaal; wiskundig golfspel

Je hebt twee golfsticks tot je beschikking; met de ene kun je per slag '3 optellen' en met de ander per slag 'met 2 vermenigvuldigen'.
Vraag: Als je begint bij het getal 2, kun je dan het getal 39 bereiken door een passende combinatie van slagen?
Een leerlinge tekende twee loodrechte assen, zette bij de horizontale as '×2' en bij de verticale '+3'. Vervolgens zette ze 2 bij de oorsprong, begon wat stippen te zetten en zei peinzend: 'Nee, bij 39 kom ik niet, maar vanaf 40 krijg ik alles...'
Opdracht: Teken een assenstelsel zoals die leerlinge en kijk of het klopt wat ze zegt.
Opdracht: Teken een 100-veld (10 bij 10, met in de bovenste rij 1, 2, t/m 10; in de tweede rij 11, 12, ...). Begin met het vakje 2 in te kleuren en vervolgens elk getal dat bereikt kan worden.
Vraag: Wat is het minimum aantal slagen waarmee je bijvoorbeeld bij 79 kunt komen als je bij 2 begint? En als je bij 5 begint? ...

Als leraar sta je voor het dilemma van het *geven* of het laten *bedenken* van een acceptabele en bruikbare representatie.
Het is een dilemma, omdat wat je ook kiest, er altijd zowel positieve als negatieve consequenties zijn. Wij als docenten weten vaak welke representatie de meest bruikbare is, omdat wij weten wat 'verder op' komt. We weten ook wat acceptabel is, omdat wij weten – althans verondersteld worden te weten – welke representaties gebruikt worden door de (internationale) gemeenschap van wiskundigen. Maar omdat we leraren wiskunde zijn, weten we ook dat onze leerlingen het *belang* van representaties moeten leren, verschillende representaties moeten leren *gebruiken*, en de juiste moeten leren *kiezen*. Soms zullen wij kiezen voor het aan de leerlingen voorschrijven van de representatie, maar het is zeker zinvol om ze ook regelmatig zelf een representatie te laten kiezen of zelf te ontwikkelen.

Oefenen met beeldtaal - stippenprobleem

Zie figuur 5. Op een gestippeld vel papier kun je een vierkant zien met 1 als de lengte van een zijde, met 4 stippen als hoekpunten en geen enkele stip 'binnenin'. Vervolgens kun je een vierkant zien met 2 als de lengte van een zijde, met opnieuw 4 stippen als hoekpunten, nu met 8 stippen op de zijden en 1 'binnenin'. Een zelfde type vierkant heeft 12 'zij-stippen' en 4 'binnenin-stippen' en met lengte zijde 3.
Vraag: Hoeveel 'zij-stippen' en 'binnenin-stippen' heeft een vierkant met lengte zijde 4? En lengte 5? En lengte 25?
Voor veel brugklasleerlingen is het niet vanzelfsprekend dat de gegevens eerst maar eens in een tabel gezet worden om een wat abstracter 'beeld' te creëren van de situatie. Ook dat moet geleerd worden! Door het in een tabel zetten kan de structuur van een probleem duidelijk worden, mede omdat hierdoor een aantal oppervlaktekenmerken van de probleemsituatie weggelaten worden.

Lengte zijde	Aantal zij-stippen	Aantal binnenin-stippen
1	4	0
2	8	1
3	12	4
4	??	??
5	??	??
...		
25	???	???
...		

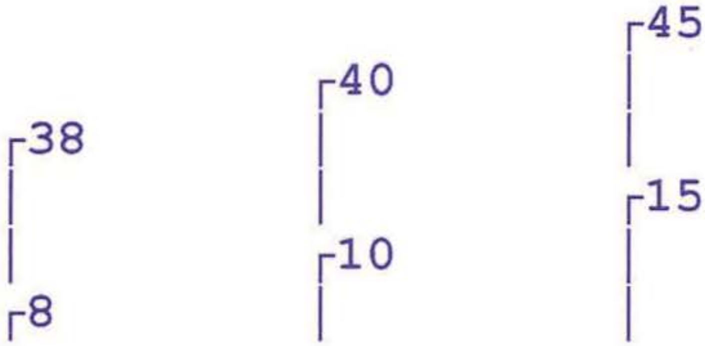
Reflectie

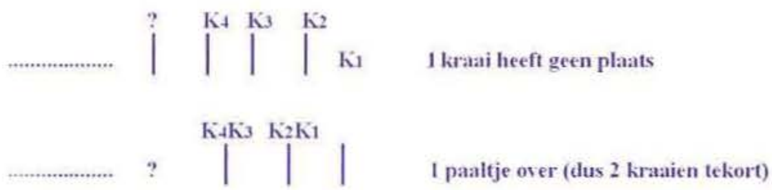
In workshops voor leraren zoals die voor de NVvW en de Poolse SNM, maar ook bij het werken met leerlingen, wordt duidelijk dat het maken van een tabel als een manier om data te organiseren (beeldtaal!) deel uitmaakt van de hedendaagse realiteit met kranten en tv-nieuwsrapportages. Het wordt daarbij telkens opnieuw duidelijk dat het, zoals bij het voorgaande voorbeeld, voor veel leerlingen en volwassenen moeilijk is om van *verticaal lezen* over te gaan naar *horizontaal lezen* van een tabel.
En dat is precies de stap van lengte 5 naar lengte 25 als je niet eerst naar 6, 7, 8, enzovoorts wilt gaan. Het is de stap van een *recursieve* naar een *functionele* of *expliciete* formule, en een verandering van focus: van een *operationele* naar een *structurele*.
Een manier om leerlingen daarbij te helpen is het expliciet bespreken van het gegeven dat dit niet eenvoudig is en dan eventueel per situatie proberen de leerling zichzelf hulpvragen te laten stellen. Het zoeken naar eenvoudige verbanden kan altijd beginnen met de vraag: 'hoeveel heb ik bij de lengte opgeteld?', of: 'met welk getal heb ik vermenigvuldigd?' Kortom: is er een eenvoudig patroon te onderkennen? Ook het herkennen van kwadraten dient daarbij tot het basisrepertoire te gaan horen. Maar vooralsnog is het benutten van een visuele representatie altijd aan te raden.
Een volgende stap is het vragen naar een mogelijke combinatie van eenvoudige patronen. Oefening in het herkennen van basispatronen of getalrelaties speelt daarbij zeker een rol, maar niet onder dwang, wel door middel van speelse uitdagingen. Proberen en controleren zijn daarbij sleutelwoorden.

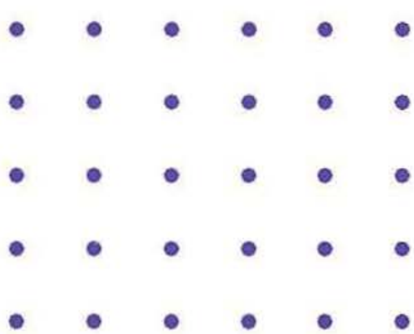
Slotopmerking

Er is een behoefte aan 'voorspellen' en 'controle', niet alleen van de kant van de leraar, maar juist ook van die van de leerling. Het is daarom van belang dat we ons blijven afvragen waar we als leraar aandacht kunnen blijven besteden aan ons streven ervoor zorgen dat de leerlingen een aantal standaardtechnieken leren die wezenlijke betekenis voor hen hebben. Een van die basistechnieken is dan

FIGUUR 3, 4 en 5







zeker de techniek van het kiezen en gebruiken van diverse methoden om situaties te visualiseren.
Als de lezer dit wil opvatten als een aanbeveling om er voor te zorgen dat de leerlingen in de loop der jaren in hun wiskundelessen een 'gereedschapskist' vullen, dan ga ik daar graag in mee. En 'beeldtaal' hoort tot de standaarduitrusting van elke volwassene en verdient het daarom, in die gereedschapskist een volwaardige plaats te krijgen.
Puzzels en spellen zijn daarbij als uitdaging te benutten. Maar zeker dient aandacht besteed te worden aan de beelden die al onze leerlingen ongetwijfeld in hun hoofd hebben als ze denken aan een probleemsituatie die wij of het boek hen voorleggen.
Daarnaast kunnen we ze waar mogelijk in situaties plaatsen waar het zeker is dat beeldtaal helpt of zelfs nodig is om tot een resultaat te komen. Ook dat kan uiteraard gewoon binnen de wiskundeles, maar het wordt zeker gestimuleerd door het voorbereiden op en meedoen aan de Kangoeroewedstrijd. Vragen zoals hierboven komen daarin namelijk in groten getale voor. Daar zijn vrijwel alle problemen oplosbaar zonder algebra, maar in beeldtaal. De ervaring leert dat dit zeer motiverend en inzichtverschaffend werkt voor alle leeftijden van 9 tot 18 jaar (en misschien ook daarna).

Met dank aan Leon van den Broek.

Noten

[1] Zie ook 'Visualiseren helpt!' In: Euclides 59 (6), pp. 279-289 (februari 1984).

[2] Dit spel is als aandenken aan alle deelnemers van de Kangoeroe wiskundewedstrijd van 2003 aangeboden.
Je kunt het spelen op de website: www.math.kun.nl/kangoeroe/kangoe_solitair. Daar kun je de grootte van het speelbord kiezen: 3 t/m 12 rijen. Daar wordt ook onderstaande uitleg interactief begeleid.
Prof. Frans Keune (KUN) heeft laten zien dat het spel niet oplosbaar is voor 4, 7, 10, 13, ... rijen, maar wel voor 5, 6, 8, 11, ... rijen door gebruik te maken van drie kleuren.
Zie ook het artikel Kangoe Solitair in het novembernummer van Pythagoras (2003).

[3] - Welke strategie is gevolgd? / Waar let je op?
- Hoe noteer je een oplossing?
- Is er natuurlijke behoefte aan een redenering waarom iets niet kan?
- Wordt er gebruik gemaakt van symmetrie in het redeneren?
- Als de spelers communiceren hoe maken ze hun redenering dan expliciet?
- Waardoor gaan spelers vragen formuleren, zoals: Is er wel een oplossing? / Hoe breng ik systematiek aan in mijn proberen? / Hoe noteer ik mijn zetten? / Wat zijn 'slechte' zetten?

[4] Ontleend aan een voordracht mijn Duitse collega H. Bauersfeld.

Over de auteur

Harrie Broekman (e-mailadres: H.G.B.Broekman@phys.uu.nl) was, tot zijn pensionering in februari 2003, lerarenopleider en vakdidacticus aan het IVLOS (Interfacultair Instituut voor de Lerarenopleiding, Onderwijsontwikkeling en Studievaardigheden) te Utrecht.