

WISKUNDE DOOR HET JAAR HEEN

Spannende wiskunde-momenten inbouwen tijdens je lessen; dat motiveert!

[Rob van Oord]



FIGUUR 1

Bedoeling

In dit artikel wil ik de lezer meenemen naar een aantal van mijn jaarlijks terugkerende wiskundeactiviteiten. Sommige zijn seizoensgebonden, zoals het Zwarte Pieten Examen, andere leerstofgebonden, zoals de geboorte van het getal e .

Ik wil de lezer enthousiast maken om ook in haar/zijn lessen gedenkwaardige wiskundemomenten in te bouwen. De leerlingen zijn na het beleven van dergelijke momenten vaak weer extra gemotiveerd om de 'gewone' lesstof te lijf te gaan. Juist de krenten in de pap maken de lessen wiskunde voor de leerlingen tot een feest. Wanneer je regelmatig iets anders doet dan ze verwachten, dan blijft het spannend wat er de volgende les misschien weer kan gebeuren. Ik zeg altijd: *'Makkelijker kunnen we het niet maken, wel leuker.'*

Ik wil niet proberen, u de ideeën die ik hier aandraag, te laten nadoen. Ik zou het op prijs stellen dat u zich probeert in te leven in de manier waarop leerlingen de genoemde activiteiten zullen ervaren, dat u zich kritisch afvraagt of iets dergelijks ook voor uw lessen interessant kan zijn. Maar mijn bedoeling is vooral u een duwtje te geven om af en toe eens wat uit te proberen.

Ik ben er van overtuigd dat ieder van u een aantal terugkerende stokpaardjes heeft bij de uitleg van bepaalde stukken lesstof. Ik zal in dit artikel dan ook een aantal activiteiten beschrijven die ik met mijn

leerlingen doe, zonder de pretentie te hebben dat ik de enige ben die dit doet.

Veel van mijn activiteiten zijn in de loop van de jaren een soort traditie geworden. Soms weten de leerlingen van de verhalen van anderen wat er staat te gebeuren, en vragen ze ernaar.

Seizoensgebonden wiskunde-activiteiten

Zwarte Pieten Examen

De decembermaand is altijd vol spannende gebeurtenissen. Zo zult u mij op 5 december kunnen aantreffen uitgedost met een zwarte krullenpruik, een felgekleurde muts met grote veer, een glimmende cape en twee grote zwarte handschoenen.

Meestal moet ik 'even het lokaal uit' en dan bons ik hard op de deur. Ik kom dan binnen met een map en een grote envelop en natuurlijk een grote zak met pepernoten. Vaak heb ik van tevoren de tafeltjes al in de toetsopstelling gezet en wat lege proefwerkblaadjes uitgedeeld. Op de envelop zijn duidelijk zichtbaar de woorden MADRID en ROBERTO DI ORDO te zien. Ik lees dan de op rijm geschreven brief voor, die in de envelop zit. Sinterklaas heeft dringend hooggeschoolde Pieten nodig. Of ik ook dit jaar weer mee wil doen aan de selectie uit mijn leerlingen door het afnemen van het *Zwarte Pieten Examen*. De 4-havo-groep krijgt het hele lesuur. Bij de 4-vwo-klassen begin ik met het laten maken van een 12- tot 18-regelig rijmpje over

een wiskundig voorwerp. Aan het eind van de les lees ik het winnende gedicht voor en de winnaar krijgt een taaipop of een kleine chocoladeletter. Nadat ik de spelregels heb uitgelegd, dat met elk goed opgeschreven antwoord 5 pepernoten te verdienen zijn en er geen antwoorden door de klas geroepen mogen worden, gaan ze aan de slag. Meestal kan bij een aanvankelijk fout gegeven antwoord bij een tweede poging alsnog een deel van de 5 pepernoten verdiend worden.

Terwijl ze zo bezig zijn met de eerste vragen, zet ik in

bulk verdiende pepernoten in één keer. In elk geval verlaten ze allen met rode koontjes en een brede lach het lokaal. Ik ben trots op hen.

Welke sommen zitten er in? Een vlekkenom over de prijs van zakken pepernoten en taaipoppen, een vraag over het pakken van handschoenen in het donker, een vraag over de route waarlangs Sint en zijn gevolg moeten gaan zonder twee keer door een zelfde straat te komen. Een som over het aantal treden en de lengte van de ladder naar het dak. Een vraag naar het patroon op een zijkant van een kubusvormige surprise.

Het cadeau heeft verschillende patronen waarvan er telkens maar drie zichtbaar zijn. Een vraag over de prijs van een chocoladeletter en een suikerhart, te berekenen uit twee rekeningen met verschillende aantallen van beide lekkernijen. Kortom, wat ingeklede berekeningen, telproblemen en Pythagoras toepassen. U kunt het zelf verzinnen.

Ruimtelijke kerstkaarten

Omdat origami een hobby van me is, en in het bijzonder *origami-architectuur*, las ik af en toe een (deel van een) les in waarin we gaan vouwen. Bij De Slegte heb ik ooit 15 origami boeken gekocht met vouwmodellen voor beginners, geschikt voor de

een oogwenk achtereenvolgens mijn pruik, muts en veer op. Daarna volgen cape en handschoenen, en soms nog wat zwarte vegen of grote oorbellen. Als ik dan rondloop en overal al vast een paar aanmoedigingspepernoten uitdeel, zit de stemming er goed in. Ze werken als paarden om zoveel mogelijk goede antwoorden te vinden.

Sommige leerlingen oogsten per vraag, anderen wachten tot het eind van de les en incasseren dan de

onderbouw. In mijn kast liggen altijd pakken met gekleurde vouwblaadjes. Met de vijfde klas wordt mijn laatste les voor de kerstvakantie altijd besteed aan het maken van kerstkaarten. Ik neem dan mijn doos met zelfgemaakte modellen mee (zie figuur 1), en een aantal boeken met foto's van nog veel mooiere. Er zijn drie soorten, de modellen die resp. 90°, 180° of 360° moeten worden opgevouwen. Omdat bij de 180°- of 360°-modellen veel gesneden maar ook alles met touwtjes



Valentijnsharten

- Zorg voor twee verschillende kleuren stroken van 5 bij 15 cm (verhouding 1 : 3).
- Vouw ze beide dubbel en knip aan de kant waar de vouw niet zit, een halve cirkel.
- Knip dwars op de vouw in beide dubbelgevouwen stroken een zelfde aantal, even brede, stroken 5 cm in.
- Nu moeten de opgeknipte strookjes om en om in elkaar gevlochten worden.

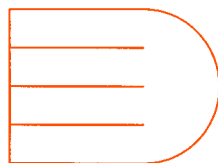


Dubbelvouwen:

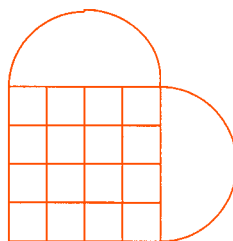


En 4 even grote stroken maken door bij de pijlen in te knippen tot de verticale lijn.

Dan krijg je twee maal deze ingeknipte dubbelgevouwen stroken.



En in elkaar gevlochten wordt het dit mooie hart.



aan elkaar geplakt moet worden, beperk ik me in deze les tot de techniek van de 90°-vouwkaarten. Het gaat dan bijvoorbeeld om het verschil tussen de dalvouw en de bergvouw, waarvoor aan verschillende kanten gerist moet worden. We maken op ruitjespapier een oefening om de techniek van origami-architectuur te begrijpen. De ontwerpen die ik gebruik, zijn speciaal gemaakt voor het formaat van correspondentiekaarten. Na het prikken met de passerpunt op de kruispunten van alle vouwlijnen, het opensnijden van de snijlijnen en het ritsen van de vouwlijnen, komt er met enig voorzichtig duwen trekwerk een prachtige kaart met vier kerstboompjes tevoorschijn. Soms is er al een boompje gesneuveld bij het snijwerk en staat alleen nog een stompje op de kaart.

Voor de liefhebbers heb ik andere voorbeeldkaarten gemaakt. Die kunnen ze dan in de vakantie proberen te maken (zie figuur 2a).

Valentijnsdag

Toen ooit mijn dochter thuis kwam van de basisschool met een gevlochten hart, heb ik deze techniek meteen ingezet om op valentijnsdag met zijn allen *valentijns-harten* te gaan vlechten (zie kader op pag. 230). Voor leerlingen die vergeten zijn om gekleurde vouwblaadjes mee te nemen, liefst rood en wit, heb ik altijd wel een paar blaadjes in de kast. Omdat ik bij wiskunde A rond die tijd altijd met matrices bezig was, verzond ik geheime *valentijnsberichten* ('ik hou van je', e.d.) waarvan ik ofwel de decodeermatrix ofwel de codeermatrix prijs gaf, al naar gelang de stand van zaken in de les. Dan moesten de leerlingen eventueel eerst de decodeermatrix berekenen. Of ik liet hen zelf geheime briefjes maken via een bepaalde codeermatrix, verzamelde die vervolgens en deelde ze daarna random weer uit in de klas. Moesten ze zien te achterhalen van wie het berichtje was.

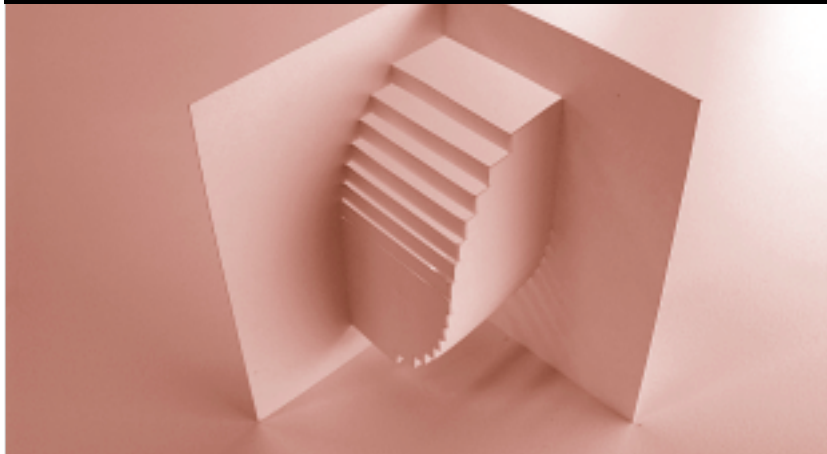
Paaseieren vouwen

Zo zal ik rond Pasen in menige klas bezig zijn met het vouwen van paaseieren (zie figuur 2b), in het Chinese vouwboek bekend als '*papieren bal*'. Na het vouwen mogen ze worden gekleurd en hang ik ze met paperclips op aan een touw. In de onderbouw kun je ook een paashaas laten vouwen.

In de clustergroepen B2 van 5- en 6-vwo maak ik meteen gebruik van de situatie om *ellipsen* te gaan vouwen. Ik deel A4-bladen uit waarop een grote cirkel staat (straal 10 cm). Eerst knippen we de cirkel uit, we zoeken naar het middelpunt ('hoe moet dat ook al weer?') en zetten ergens op zo'n 3 cm van de cirkelrand een stip. Vervolgens vouwen we telkens de cirkelrand om naar die stip. Zo verschijnen er op het blaadje allemaal lijntjes, maar er blijft een ovaal stuk (paasei) over zonder vouwlijntjes. Al naar gelang het niveau (5v of 6v) ga ik dan verder in op de verkregen figuur. De lijntjes zijn allemaal raaklijnen aan een ellips. Kun je dat bewijzen? Enzovoorts.

Tenslotte knipt wie dat wil het gaaf gebleven deel uit (het ei), en kleurt het met mooie bandversieringen en dergelijke.

FIGUUR 2a en b



- Miranda verdeelt haar zakgeld als volgt:
 $\frac{1}{5}$ besteedt ze aan geurtjes en deo
 $\frac{1}{3}$ aan kadootjes en sieraden
 $\frac{1}{4}$ verder aan snoep
 Ze houdt nog € 3,90 over.
 >> Hoeveel zakgeld heeft ze?
- Koos zwemt 100 meter in 58,12 seconden.
 >> Hoeveel km/uur is dit?
 Schakking vooraf: (omraken)
 0-5 of 5-10 of 10-15 of 15-20

FIGUUR 3, 4

Leerstofgebonden wiskunde-activiteiten

Ik vind het didactisch beter om – waar mogelijk – de leerstof te ondersteunen met experimenten die de leerlingen zelf moeten uitvoeren.

Parabool vouwen

Al eerder had ik het over het vouwen van een ellips. Bij dezelfde lesstof (6-vwo B2) horen ook parabolen. Ik vind dat elke vwo-B-leerling in zijn schoolloopbaan ook een keer een parabool heeft moeten vouwen en heeft moeten beleven dat de parabool bij een tweede-graads functie hoort. Ik deel ruitjesbladen uit, laat het onderste randje tot een ruitjeslijn afknippen, laat ongeveer in het midden 4 cm boven de rand een stip zetten, dan de onderrand van het blaadje telkens naar de stip vouwen. Zo krijg je de omhullende van een parabool. Maar doordat je met ruitjes werkt kun je ook de formule gaan zoeken. Ik kies de x -as midden tussen de onderrand van het papier en de stip (het brandpunt), en de y -as verticaal door de stip. Dan maak ik met de klas een tabel van de (in eerste instantie gemeten) hoogte van de parabool tegen verschillende gehele waarden van x en daarbij de kwadraten van de x -waarden.

Altijd succes. Je kunt ook de raaklijneigenschap van de parabool mooi laten zien met de op deze manier gevouwen parabool.

Dobbelstenen gooien

Een ander voorbeeld van experimenteren is het gooien van dobbelstenen. Bij een dobbelsteen is de kans op een zes wel 1 op 6, maar bijna nooit is bij 60 keer gooien er 10 keer een zes gegooit. Wanneer in de vierde klas de kansrekening aan bod komt, dan is het leuk om de zweetkansen daadwerkelijk met de klas uit te voeren. In mijn lokaal staat een doos met pakweg 100 dobbelstenen. Ik kan op elk moment de hele klas aan het dobbelen zetten. In tweetallen laat ik ze elk 20 keer met 4 dobbelstenen gooien en tellen hoe vaak er *minstens één zes* bij zit, een bekend historisch probleem. Vaak kom je met de hele klas samen (tabel op het bord) tot ongeveer 50/50. Als je daarna het resultaat theoretisch gaat verklaren, dan leeft het probleem inmiddels veel meer bij de leerlingen. Ook leuk om dan nog iets te simuleren op de grafische rekenmachine, bijvoorbeeld hoe vaak wordt 7 gegooit met twee dobbelstenen (op de TI-83 met `randInt(1,6,2)`), en met de klas op het bord te turven. Daarna weer de theorie.

Minilotto

Bij de uitleg van trekken zonder terugleggen maak ik gebruik van de lottotrommel die in mijn kast staat. Ik speel dan minilotto met de klas (zie figuur 3): drie balletjes trekken uit een trommel met 10 genummerde balletjes. Iedere leerling (die dat wil) zet bijvoorbeeld 10 eurocent in. Ze mogen dan op een briefje 10 rijtjes met drie getallen van 1 t/m 10 invullen. Er mogen geen cijfers worden doorgekrast. Omdat het een trekking zonder terugleggen is, moeten ze op het idee komen dat ze geen drie getallen opschrijven waar dezelfde bij

zitten. Ook doet de volgorde er niet toe. (Voor sommigen is dit niet direct duidelijk.) Dan wijs ik een paar assistenten aan die een deuntje moeten zingen, terwijl ik de trommel rond laat draaien om te mixen, en een assistent(e) die 'stop' moet zeggen. Op dat moment laat ik de trommel een balletje trekken. Ik laat de leerlingen in al hun rijtjes dit getal dan omcirkelen. Daarna volgen de volgende twee trekkingen. Ook dan laat ik de getrokken getallen omcirkelen. Later zal ik deze omcirkelingen gebruiken om de zweetkans te vergelijken met de theorie. Onder degenen met het winnende drietal getallen wordt de pot verdeeld. De kans op succes is 1 op 120, dus meestal zijn er bij een groep met 20 leerlingen wel een of meer die de pot winnen. Dan komt de theorie. Hoe groot is de kans op drie goed? En op twee, één of nul goed? Door de spannende trekking blijft dit stukje kansrekening hopelijk goed in hun geheugen, en snappen ze beter hoe je dergelijke lotingen moet simuleren.

Wedstrijdjes

Ter afwisseling van het gewone lespatroon waarin de leerlingen een groot deel van de les sommen uit het boek zitten te maken doe ik regelmatig wedstrijdjes (zie figuur 4). Vooral een geschikte uitdagende activiteit als je een blokkur 4-havo wiskunde-A hebt. Ik laat de leerlingen in groepjes van liefst vier leerlingen bij elkaar zitten, leg een white-board in het midden, deel blaadjes met enkele korte vragen uit en geef elke leerling een stift. Het groepje dat aan het eind van de les de meeste vragen goed beantwoord heeft, wordt getrakteerd. Ze mogen zelf een strategie bepalen hoe ze het aanpakken, maar het moet wel zo zijn dat elk lid van het groepje de antwoorden op de vragen kan vertellen. Ze moeten elkaar dus helpen en overtuigen van de juiste oplossing. Ik gebruik wedstrijdjes als inleiding bij nieuwe onderwerpen en als afsluiting van een stuk behandelde wiskundige vaardigheden. Rekenproblemen en telproblemen, maar ook vaardigheidsoefeningen met differentiëren en integreren, zijn geliefde onderwerpen voor dergelijke wedstrijdjes.

Bakje vouwen

Formules, functies, vergelijkingen oplossen, waar heb je dat voor nodig? Gelukkig komt in klas 4 een moment waarop je deze vragen aan de orde kunt stellen, laten zien dat je met de wiskunde een probleem kunt oplossen.

Zeker met de grafische rekenmachine bij de hand kun je snel ter zake komen.

Op een moment komt de opgave waarin uit een rechthoekig blaadje vier (vierkante) hoekjes moeten worden geknipt. Dit wordt de bouwplaat van een doosje zonder deksel. Dan moet de inhoud worden berekend. Gevraagd: de afmetingen van het bakje met de grootste inhoud.

Dit is een prachtig moment. Ik deel alle leerlingen een (gekleurd) A4-tje uit en laat ze een bakje vouwen, zonder deksel. Wie het bakje heeft met de grootste inhoud, krijgt een beloning. Intuïtie en geluk spelen

hierbij een rol. Ik heb ook wel een hele klas bakjes laten vouwen met voor iedere leerling een andere hoogte van de opstaande rand. Je krijgt dan een heel nest bakjes. Dan zie je meteen dat de lage randjes weinig inhoud geven, maar de hoge randen ook. Er wordt ook duidelijk tot hoever je nog een echt bakje kunt krijgen.

Spelenderwijs zijn ze met toepassingen van wiskunde bezig. Het model wordt losgeweekt.

Daarna gaan we proberen met formules en tabellen op de grafische rekenmachine het bakje met de grootste inhoud te berekenen. Uiteraard kunnen ze nog niet differentiëren, maar daarmee kun je dit probleem of een vergelijkbaar probleem in de vijfde klas nog eens opnieuw aanpakken. De inhoud is $x \cdot (L - 2x)(B - 2x)$. Haakjes uitwerken en differentiëren, gebruik van de *abc*-formule, uiteindelijk komt het beste antwoord. In 5v neem ik de cellofaanverpakking van koffie. Op zich al interessant hoe die gevouwen en geplakt is. Je kunt ook andere eisen stellen aan de bakjes, bijvoorbeeld dat ze een vierkante bodem moeten hebben of dat de inhoud 1 liter moet zijn. Laat ze eerst maar eens vouwen en knippen en plakken.

Geboorte van het getal *e*

Het is altijd een spannend moment in de lesstof (5-vwo B) als het getal *e* wordt 'geboren'. In de lessen voorafgaand aan deze gebeurtenis (die ook aldus in de werkwijzer staat), voer ik de spanning een beetje op, als zou het een heuse bevalling betreffen.

De grafiek van de 'vader' van *e*, $f(x) = 2^x$, wordt getekend. Iedereen doet mee in zijn schrift. Dan wordt de hellingfunctie van *f* afgeleid via metingen met behulp van de geodriehoek (van de hellingen in punten op de grafiek bij $x = 3, 2, 1, 0, -1, -2$) en via

berekeningen op de GR (met $\frac{2^{3,001} - 2^3}{0,001}$, enzovoort).

Op bord verschijnt een grote tabel die samen wordt ingevuld. Iedere rij leerlingen zorgt voor een van de hellinggetallen, eerst door meten (gemiddelde nemen), dan met de grafische rekenmachine (kijken of ze de benaderingsmethode nog kennen). In de laatste rij op bord laat ik 'helling gedeeld door functiewaarde' berekenen. Hier komt steeds 0,693 uit. Zo blijkt de hellingfunctie van 2^x ongeveer 0,693 maal de functie zelf te zijn, dus de helling is overall ongeveer 70% van de functiewaarde. Daarna wordt hetzelfde nog eens gedaan met $g(x) = 3^x$, de 'moeder' van *e*. Van deze functie is de helling 10% groter dan de functie zelf. En dan is *e* het getal waarbij de hellingfunctie precies gelijk is aan de functie zelf. Nu wordt de geboorte gevierd met beschuit met muisjes, in een *e* op een groot blad neergelegd, en een foto van de hele klas eromheen.

Slotwoorden, een hart onder de riem

Regelmatig komen we in Euclides en de Nieuwe Wiskrant artikelen tegen waarin LIO-stagiaires, superenthousiaste (jonge) docenten of promovendi beschrijven welk experiment ze hebben uitgevoerd in een bepaalde klas of leerlaag. Niets dan lof voor al

deze experimenten. Maar de gewone leraar heeft niet vanzelf de energie en de tijd om dergelijke uitgebreide sessies op te zetten en te evalueren. Ook is er niet direct de ondersteuning van een universiteit of het Freudenthal Instituut voorhanden. Toch denk ik dat je altijd wel iets kunt proberen. Al is het maar om zelf uit de sleur te blijven. Een beetje durf en een beetje fantasie kunnen al snel tot leuke resultaten leiden - vooral als je met kleine directe beloningen werkt. Niet elke les, maar ineens is er weer een dropje te verdienen. Op zijn tijd een fles wijn of een appelflap bij de koffie, bijvoorbeeld van de schoolleiding, vinden wij zelf toch ook een opsteker?

We hebben niet meer te maken met leerlingen die 'vanzelf' wiskunde nog leuk vinden, behalve misschien in de brugklas. We moeten mee in de stroom van de Veronica- (of is het nu BNN-)maatschappij: sneller, spannender, wilder. Er zijn veel meer 'leuke' vakken die op de lessentabel staan. Het aantal uren wiskunde loopt ook steeds verder terug, zeker als de plannen van de minister doorgaan.

Zorg voor een uitgebreid scala aan materialen in je lokaal waaruit je zo kunt pakken. Speel in op de actualiteit, het nieuws; maak er een feest van.

In dit artikel heb ik geprobeerd iets van mijn enthousiasme over te brengen waarmee ik als wiskundedocent nog steeds aan het werk ben. Aanvaard nieuwe uitdagingen. Probeer eens wat uit.

Noot van de redactie

In een workshop met de titel 'Makkelijker kunnen we het niet maken, wel leuker' heeft Rob van Oord het bovenstaande eveneens aan de orde gesteld op de Nationale Wiskunde Dagen, NWD10, op 6 en 7 februari 2004.

Over de auteur

Rob van Oord (e-mailadres: r.van.oord@coenecoopcollege.nl) is sinds 1974 docent wiskunde op het Coenecoopcollege te Waddinxveen, de laatste jaren vooral werkzaam in de bovenbouw (4 havo-A en 4,5,6 vwo-B). Hij is sectievoorzitter van de sectie die nu 17 leden telt, fervent bezoeker van de studiedagen van de Vereniging, en - als het kan - aanwezig op de Nationale Wiskundedagen. Rob is tevens lid van de werkgroep havo/vwo van de NVvW.