

3e Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 1997

Jacob Perrenet

Inleiding

Op zaterdag 31 januari 1998 wordt voor de vierde keer de Mathematische Modelleercompetitie Maastricht gehouden. In dit artikel staan de opgaven en beknopte uitwerkingen van de derde Mathematische Modelleercompetitie. In de toekomstige Tweede Fase zouden dergelijke opgaven misschien wel een rol kunnen gaan spelen als praktische opdrachten.

De wedstrijd wordt georganiseerd door de verantwoordelijken voor de opleidingen Kennistechnologie en Econometrie van de Universiteit Maastricht. Gedurende twee-en-een-half uur bogen 100 scholieren zich in teams over vijf opgaven. De deelnemers waren vijfde- en zesdeklassers vwo, afkomstig van 17 scholen uit Nederland en België. Er waren in totaal 24 teams. De begeleidende leerkrachten werden onthaald op een programma met lezingen over onderwerpen uit de Econometrie en de Kennistechnologie, gegeven door docenten van deze beide exacte opleidingen van de UM. De voordrachten behandelden de volgende onderwerpen: toepassingen van de besliskunde, automatisch modelleren, verdelingen en kostenallocaties, evolutie en evenwicht. In vergelijking met de vorige keer was er vooral een toename van de deelname uit België. Dit ondanks het feit dat het toegepaste karakter van de meeste opgaven voor de Belgische deelnemers een extra moeilijkheid betekent: het Belgisch wiskundeonderwijs is veel meer theoretisch gericht dan het Nederlandse. Beide landen leverden nu eenzelfde aantal teams.

Winnaar werd, evenals het laatste jaar, het Katholiek Gelders Lyceum uit Arnhem, ditmaal met een team bestaande uit Pieter Eendebak (ook vorig jaar bij de winnaars), Muriel Poelman en Pepijn Tiggeleloven. De tweede prijs was voor het St. Janscollege uit Hoensbroek.

Hieronder geven we eerst de vijf opgaven en daarna bespreken we globaal de oplossingen die werden geproduceerd.

De opgaven

opgave 1: ordenen

De getallen 1, 2, 3, ..., 10 moeten opgeschreven worden, elk in een leeg vakje van de rij.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Figuur 1 Rij voor opgave 1

Eerst moet getal 1 in een willekeurig vakje geschreven worden, dan moet getal 2 in een aangrenzend vakje geschreven worden. Vervolgens moet getal 3 in een vakje grenzend aan één van de bezette vakjes geschreven worden, enzovoorts.

Hoeveel permutaties (d.w.z. ordeningen, volgorden) van de 10 getallen kunnen op deze manier verkregen worden?

opgave 2: schaaktoernooi

Tussen de vijf spelers A,B,C,D en E wordt een schaaktoernooi gespeeld. Iedere speler speelt precies één keer tegen elke andere speler. De einduitslag is A,B,C,D,E waarbij de spelers allen verschillende scores behaald hebben. Na afloop bespreken ze hun ervaringen. Speler B merkt op dat hij de enige speler is die geen enkele keer verloren heeft. Speler E merkt op dat hij de enige speler is die geen enkele keer gewonnen heeft. (Winst levert 1 punt op, verlies 0 punten, en remise 1/2 punt.) Reconstrueer de volledige uitslagentabel.

opgave 3: indeling krantenpagina

De voorpagina van universiteitsblad "Observant" moet gevuld worden met artikelen en eventueel foto's. Deze pagina bestaat uit zes kolommen. Iedere kolom is 100 centimeter lang. De beschikbare artikelen en foto's hebben een breedte (gemeten in kolommen) en een lengte (gemeten in centimeters). Daarnaast hebben ze ook nog een prioriteit. In de tabel op pagina 101 staan deze

waarden voor een aantal artikelen.

Maak nu een keuze uit de genoemde artikelen, zó dat de som van de prioriteiten van de gekozen artikelen zo groot mogelijk is. Laat zien dat alle artikelen en foto's ook werkelijk op de pagina passen door een lay-out te maken. Gebruik hiervoor de bijgevoegde lay-out pagina. Denk daarbij aan het volgende: Een artikel heeft een breedte van één kolom en moet ononderbroken in de gekozen kolom geplaatst worden. Ook de foto's moeten in hun geheel worden geplaatst.

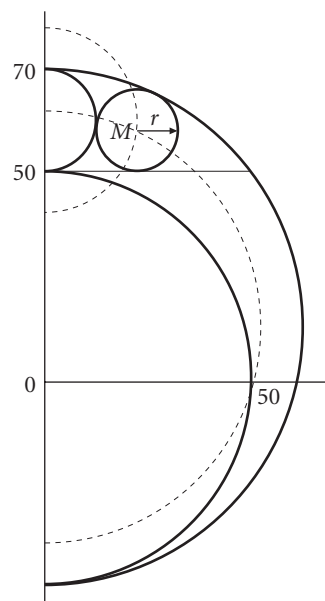
art.	breedte	lengte	prioriteit
1	3	20	60
2	3	25	70
3	3	15	40
4	2	37	75
5	2	37	75
6	2	46	80
7	1	48	55
8	1	48	50
9	1	48	45
10	1	43	45
11	1	37	40
12	1	32	30
13	1	28	30
14	1	28	25
15	1	26	25
16	1	26	25
17	1	26	30
18	1	23	20
19	1	15	15
20	1	15	15

Figuur 2 Tabel bij opgave 3

opgave 4: Alladin's zwaard

De schede van Alladin's zwaard heeft een vorm die begrensd wordt door drie krommen, zoals aangegeven in de figuur hieronder. De krommen AB, AC en BC zijn alle drie halve cirkels die elkaar raken in A, B en C. De halve cirkel door A en C heeft een straal van 60 cm, en de halve cirkel door B en C heeft een straal van 50 cm. De lijn BD, die een zilveren versiering voorstelt, raakt aan beide halve cirkels door B. De cirkel met middelpunt M en straal r stelt een gouden versiering voor, die raakt aan de lijn BD en aan twee halve cirkels. Bepaal de straal r van deze cirkel.

N.B. Een cirkel met straal r en middelpunt (a, b) heeft als vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.



Figuur 3 De schede van Alladin's zwaard (opgave 4)

opgave 5: Van Slag hagelslag

Hagelslagfabrikante Jacqueline Van Slag heeft een goedkope partij op de kop weten te tikken van tienduizend kartonnen vellen van 20 cm bij 32 cm. De kartonnen vellen kan zij gebruiken voor het maken van de pakken waarin de hagelslag verpakt wordt. Om de pakken uit één stuk te kunnen vouwen, snijdt zij rechthoekige stukken uit deze vellen karton weg. Vervolgens plakt zij de gevouwen vellen met een speciaal plakband dicht.

a Geef in een schets weer, hoe je uit de vellen een pak van hoogte h , breedte b en dikte d kunt snijden.

b Wat is de inhoud van een pak, geschreven als functie van de dikte d van het pak?

Veronderstel dat 1 dm^3 hagelslag 600 gram weegt.

c Hoeveel kilogram hagelslag kan Van Slag maximaal in de tienduizend pakken verpakken? N.B. Je mag er vanuit gaan dat de pakken geheel gevuld zijn met hagelslag.

Van Slag houdt wel van wat variatie. Zij wil de hagelslag in een cilindervormige verpakking verkopen.

d Hoeveel kilogram hagelslag kan Van Slag nu maximaal in de kartonnen vellen verpakken?

De uitwerkingen

uitwerking 1: ordenen

Een belangrijk inzicht bij de aanpak van deze opgave is, dat wanneer de 1 ergens geplaatst is, de getallen links en rechts van 1 oplopen en dus met de keuze voor een rij linkergetallen de rij rechtergetallen vast ligt. Met k getallen links van 1 zijn er $9!/k!(9-k)!$ mogelijkheden. Dit levert uiteindelijk een totaal van 2^9 aan mogelijkheden.

20% van de deelnemende teams kwam tot een foutloze oplossing, even zoveel teams wist er totaal geen weg mee. Meestal werd er per waarde van k gerekend en de meeste teams ontdekten daarbij de symmetrie van het probleem: na $k = 0, \dots, 4$ weet je genoeg. De rekenfouten waren talrijk.

uitwerking 2: schaaktoernooi

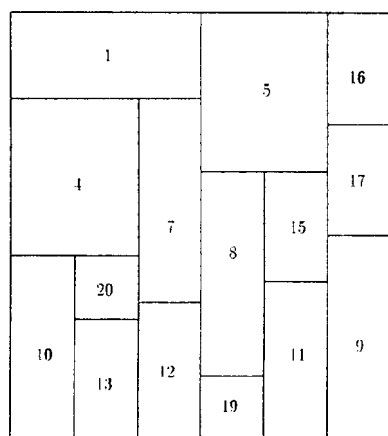
Deze opgave is een kwestie van stapsgewijs logisch redeneren. Dit resulteert in de volgende unieke oplossing.

	A	B	C	D	E
A	-	0	1	1	1
B	1	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
C	0	$\frac{1}{2}$	-	1	$\frac{1}{2}$
D	0	$\frac{1}{2}$	0	-	1
E	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-

Figuur 4 Oplossing schaaktoernooi (opgave 2)

Deze opgave bleek de eenvoudigste. Opnieuw kwam zo'n 20% van de deelnemende teams tot een foutloze oplossing. Maar in tegenstelling tot bij de eerste opgave was ieder wel enigszins op weg gekomen. Bij een aantal goede eindantwoorden miste de uitwerking. Bij de onjuiste antwoorden werd niet aan alle voorwaarden voldaan.

uitwerking 3: indeling krantenpagina



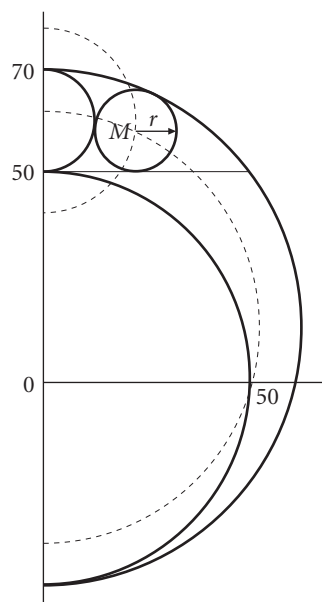
Figuur 5 Een optimale indeling van de pagina (opgave 3)

Toch nog zeven van de 24 teams kwam op het idee de items (artikelen en foto's) te ordenen op belangrijkheid (= prioriteit per oppervlakte eenheid). Dan vallen de items 2, 3, 6, 14, 18 in eerste instantie af. De overgebleven 15 hebben samen een oppervlak van 600 en passen bovendien precies op de pagina (zie figuur 5).

Deze toegepaste opgave bleek voor Nederlandse deelnemers duidelijk eenvoudiger dan voor de Belgische.

uitwerking 4: Aladdin's zwaard

Verreweg de zwaarste opgave; geen wonder, gezien het type. De aanwijzing met de algemene vorm van de cirkelvergelijking bracht geen enkel team veel verder dan het opstellen van een paar specifieke cirkelvergelijkingen. Een uitwerking als hieronder bleek onhaalbaar.



Figuur 6 Aladdin's zwaard met hulpcircels

De kleine en de grote gestippelde cirkel gaan door M .

De bijbehorende vergelijkingen zijn:

$$x^2 + (y - 60)^2 = (r + 10)^2 \text{ en}$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = (60 - r)^2.$$

In deze vergelijkingen invullen van $y = 50 + r$ levert na wat rekenwerk de waarde voor r van $8\frac{1}{3}$.

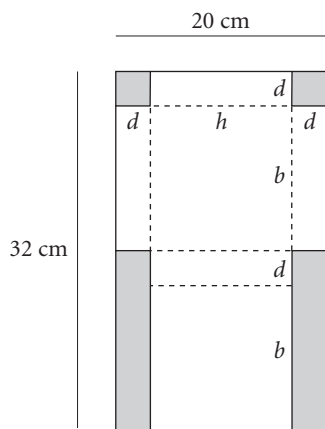
uitwerking 5: Van Slag hagelslag

Ruim de helft maakte het deel met het rechthoekig vouwen zoals bedoeld (zie figuur 7).

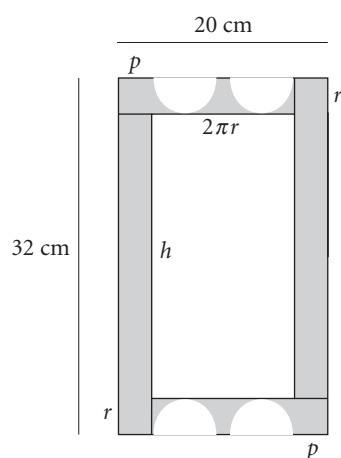
Fouten zaten er meer in het opstellen van de formule voor de inhoud - men zag niet precies hoe het papier tot een doos gevouwen werd - dan in het differentiëren van $I(d) = h \times b \times d = (20 - 2d)(16 - d)d = 2d^3 - 52d^2 + 320d$.

De maximale waarde wordt gevonden bij $d = 4$, dus 3456 kg.

De cilindervormige verpakking was moeilijker: niet meer dan een kwart bracht dit deel tot een goed einde. Bij de fouten weer dezelfde soort als bij het rechthoekig deel. Bovendien zagen weinigen dat met aansluitende halve deksels de beste oplossing wordt verkregen. Zie de schets in figuur 8.



Figuur 7 Uitslag rechthoekige verpakking (opgave 5)



Figuur 8 Schets voor cilindervormige verpakking (opgave 5)

Ook deze toegepaste opgave stelde de Belgische deelnemers voor de meeste problemen. Echter, enkele dagen later kwam er wel een brief van Dries Schellekens van het Sint-Jozefcollege te Turnhout met een betere oplossing voor de rechthoekige variant dan de bedenkers hadden bedacht: door het wegsnijden van kleinere stukken (d bij $1/2d$) wordt een optimale dikte bereikt van ongeveer 5,9 cm en dus een maximum van ongeveer 5041 kg.

In de na afloop ingevulde enquêtes bleek de Maastrichtse Modelleercompetitie hoog te scoren op aantrekkelijkheid. Bijna alle vijfdeklassers onder de deelnemers gaven dan ook aan de volgende keer graag opnieuw mee te doen.

40 jaar geleden

Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde
door Dr. P.M. van Hiele en Dr. D. Van Hiele-Geldof

In hoofdstuk II van “L’enseignement des mathématiques” geeft E.W. Beth zijn visie op doel en betekenis van het wiskundeonderwijs. Zeer belangrijk daarin is zijn uitspraak: “Le rôle de la formation mathématique dans l’enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive.”

Het komt mij voor, dat wij bovengenoemde tese niet klakkeloos mogen aanvaarden. Wat nader bekeken moet worden is niet zozeer de betekenis van de deductieve methode, als wel de vraag, of de vormende waarde van de wiskunde vrijwel uitsluitend of zelfs maar hoofdzakelijk in die deductieve methode gezocht moet worden.

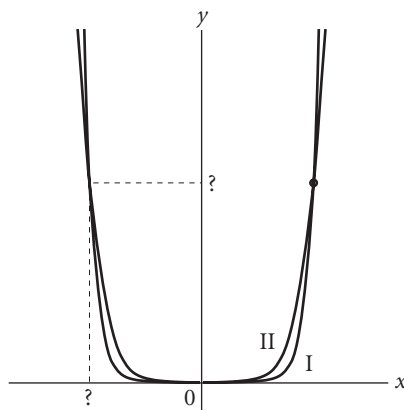
De wijze, waarop Beth zijn betoog houdt, kan zelf al als argument gebruikt worden tegen de genoemde stelling. Beth begint namelijk in genoemd hoofdstuk met een aantal postulaten, waarvan de beide eerste een relatie vermelden, die beperkt wordt door de uitdrukking “onder andere”. Hij konkludeert uit deze postulaten, dat men een *vrij* intensieve wisselwerking zal mogen *verwachten* tussen de wiskunde-programma’s der instellingen van het middelbaar en van het hoger onderwijs.

Het feit, dat de premissen geen logische relaties zijn, maakt, dat Beth zich in zijn konklusie voorzichtig uitdrukt. De suggestie, die in de verwachting besloten ligt, wordt niet door de logika gerechtvaardigd, ook al kiest Beth voor zijn redenering de vorm van een syllogisme. Hier nu ligt het gevaar van de door Beth geponeerde tese. Immers de bekendheid met de deductieve methode mag er niet toe leiden, dat men, door zijn redenering in de *vorm* van syllogismen in te kleden, ten onrechte de indruk wekt, dat de konklusies exact zijn.

Wij hoeven er dus niet aan te twifelen, dat er een zekere, belangrijke vormende waarde in gelegen is, dat de leerlingen vertrouwd zijn met de deductieve methode. Deze vertrouwdheid kan hun in tweeërlei opzicht nuttig zijn: ten eerste om zich van deze methode in passende gevallen te kunnen bedienen en ten tweede om anderen halt te kunnen toeroepen, wanneer zij zich ten onrechte van deze methode bedienen.

Uit: Euclides 33 (1957-1958)

Machtsfunctie



1 Hierboven zie je de grafieken getekend van $y = x^{10}$ en $y = 2x^6$.

Welke formule hoort bij grafiek I? Geef duidelijke uitleg!

2 In de tekening zie je een paar vraagtekens staan.

Welke getallen horen er op de plaats van die vraagtekens te staan? Geef je antwoord eerst *exact* en daarna afgerond op *twee decimalen*.

3 Een horizontale lijn op hoogte 40 (dus $y = 40$) snijdt de grafieken in totaal in vier punten, van links naar rechts: A, B, C en D.

Benader de afstand tussen A en B en ook de afstand tussen B en C. Rond af op *twee decimalen*.

Werkblad

Formules uitpluizen

Hieronder zie je de algebra-prijstabel.

Prijslijst

basisbewerkingen $+$, $-$, $\times$, $:$, $/$	1 punt per keer
kwadrateren 2 punten per keer	
variabelen aanroepen	1 punt per keer
haakjes en gewone getallen	gratis
n -de macht nemen	n punten per keer

Bekijk het substitutieschema

Substitutieschema

$$u = x^2$$
$$v = (x - 1)$$
$$v^3 + ux + 1$$

Standaardvorm

Hornervorm

- 1 Laat zien dat de standaardvorm $2x^3 - 4x^2 + 3x$ is.
- 2 Geef nu de Hornervorm.
- 3 Is het in dit geval goedkoper om volgens het schema, volgens de standaardvorm of volgens Horner te rekenen?