● Serie ● ● ● ● ●

'Ontwikkelingen in de didactiek'

▶ Leren en Helpen Leren (I)

Bram Lagerwerf)*

In 1993 komt er met de invoering van de basisvorming een nieuw leerplan voor alle leerlingen van mavo en vbo, en van de onderbouw van havo en vwo. Naast veranderingen in de leerstof gaat het daarbij ook om andere werkwijzen. Docenten en leerlingen zullen zich op een andere manier met de wiskunde gaan bezighouden. Zo'n andere werkhouding verwerft een docent niet van de ene op de andere dag, dat is een ontwikkelingsgang. Die ontwikkeling is trouwens voor veel docenten al aan de gang. Net zoals in de leerboeken al jaren elementen van het nieuwe programma te zien zijn.

Ontwikkelingen in de didactiek *is een serie van 10 artikelen waarin verschillende aspecten van die nieuwe manier van werken worden beschreven. Dit vierde artikel en het vijfde gaan over de leertheorie achter de veranderingen.*

Leren en Helpen Leren

Wiskundedocenten helpen leerlingen die wiskunde leren. Dat kan beter gaan wanneer de docent zo'n beetje weet hoe dat leren bij de leerlingen verloopt. Daar zijn allerlei theorieën over. In dit artikel en het volgende in de serie vindt u een beschrijving van denkbeelden die de vernieuwingen in het wiskundeonderwijs ondersteunen, en consequenties daarvan voor het onderwijzen van wiskunde op school. Uitgangspunt is dat we de leerlingen bruikbare wiskunde leren, dat betekent dat we moeten uitgaan van problemen in contexten die de leerlingen aanspreken.
In dit artikel staan vooral de voorbeelden, het volgende is meer theoretisch van aard.

VOORBEELDEN

Structureren

U staat voor een vbo-klas vol leerlingen die nog niet zo lang geleden van de basisschool zijn gekomen; het lijkt wel of ze elk jaar kleiner worden en hun tassen groter. Wat zijn ze in het begin nog enthousiast. U wilt beginnen. Vandaag is de rechthoek aan de orde. Die is overvloedig in het lokaal aanwezig: de ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels. U krijgt een andere kijk op de klas voor u. Uw aandacht is anders gericht; niet meer zozeer op de leerlingen waar u een les mee wilt beginnen, maar op al die rechthoekige dingen die er in de klas te zien zijn en die u als voorbeeld wilt gaan gebruiken. U heeft uw situatie opnieuw *gestructureerd*: u heeft verandering gebracht in wat uw aandacht heeft en wat u daarmee wilt gaan doen.

Beeldvorming

Ook de leerlingen moeten al die rechthoekige dingen onder een noemer gaan brengen. Dat kan heel snel, want natuurlijk is de rechthoek voor hen een bekende vorm. U geeft wat voorbeelden en dan begrijpen ze het al. Ze kunnen zelf nog wel meer voorbeelden aanwijzen.
Tot zover is het alleen repeteren van wat al bekend was voor de leerlingen; u wilt verder gaan.

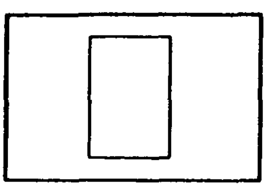
Schematiseren

Daarvoor is nodig dat ze zelf gaan structureren: de aandacht richten met het oog op wat ze willen doen. En u geeft bijvoorbeeld deze opdracht:

De ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels hebben allemaal dezelfde rechthoekige vorm. Probeer eens te vertellen wat een rechthoek is, zonder een voorbeeld aan te wijzen.

De leerlingen hebben dan aanleiding om anders naar hun omgeving te gaan kijken; ze richten hun aandacht op al die rechthoekige dingen om er woorden voor te vinden. Problemen vragen om actie, ze stimuleren het opnieuw structureren van de probleemsituatie.

De ramen, de deuren, de tafelbladen, de affiches aan de muur, de boeken en schriften op de tafels worden onder een noemer gebracht. Uit die concrete dingen ontstaat het abstracte beeld *rechthoek*, de rechthoekige vorm. De leerlingen proberen nu die vorm expliciet te maken.
Ze komen met verschillende beschrijvingen; er zijn mogelijkheden bij waar u zelf niet aan had gedacht. Een leerling zegt: Je tekent twee lijntjes zo: | |, en dat maak je van boven en van onderen dicht. Anderen doen het met hun handen: eerst zo: = , dan zo: | |. Dat komt op hetzelfde neer. Belangrijk is dat ze zien dat al die rechthoekige dingen dezelfde vorm hebben, en dat ze die vorm op de een of andere manier onder woorden kunnen brengen.



Figuur 1

Figuur 1 is een geschematiseerde tekening van een raam, een deur, een tafelblad, een affiche, een boek, of een schrift. Het is een 'uitgeklede' tekening: geen kleur, de afrondingen van de hoeken van de tafel zijn verdwenen, je ziet geen letters van het boek, de spiegeling van de ruiten is weg.
Het gaat alleen om de vorm. Zelfs de afmetingen doen er even niet toe.

Wanneer blijkt dat de leerlingen inderdaad met dit globale beeld vertrouwd zijn, kunt u met hen wat preciezer gaan kijken. U geeft een nieuwe opdracht:

Neem je schaar en een stuk papier; knip zo goed mogelijk een rechthoek uit dat papier.
Hoe kun je nu weten of wat je geknipt hebt wel precies een rechthoek is?

De leerlingen gaan opnieuw structureren, en er komen nieuwe beelden aan bod, nu van 'details' in het beeld:

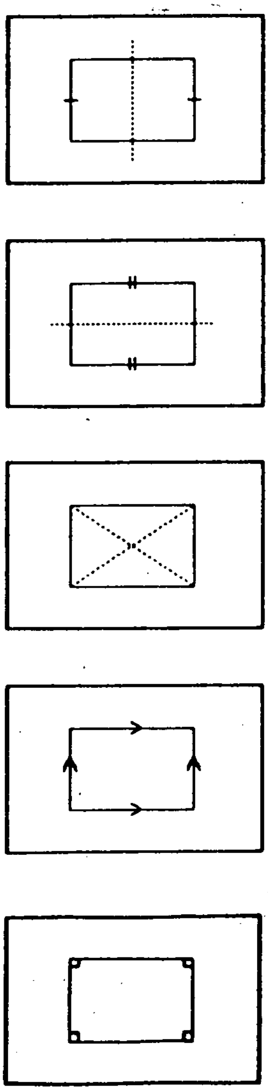
- het moet links en rechts hetzelfde zijn, en onder en boven ook, net als bij een vlinder, dat kun je zien door te vouwen,
- je moet schuin meten van de ene hoek naar de andere; dat moet twee keer hetzelfde zijn,
- het moet goed recht zijn,
- de hoeken moeten haaks zijn.

Die opmerkingen zijn niet allemaal zonder meer bruikbaar. U laat wat er gezegd wordt illustreren aan de hand van verschillende rechthoeken in de klas en in de schriften. Verder vragen de begrippen symmetrie, diagonaal, evenwijdig en rechte hoek nog wel wat werk van de leerlingen en van u. De taal speelt daarbij een belangrijke rol. Namen voor zaken die al wel te zien waren maar nog niet goed benoemd: hoeken, hoekpunt, zijde, gelijke lijnstukken, evenwijdig. Maar ook nieuwe begrippen die een naam moeten hebben, zoals de diagonaal.
Het benoemen en beschrijven maakt het voor de leerlingen gemakkelijker te zeggen wat ze bedoelen. Het beeld wordt daardoor toegankelijker.

Dan kunnen ook de detailbeelden geschematiseerd worden weergegeven: figuur 2 t/m 6 (blz. 120).

Wiskundige structuren

Zo ontstaat voor de leerlingen langzamerhand een *wiskundige* structuur die niet meer aan een concreet probleem gebonden is; figuur 7. Zonodig kunnen ze die structuur in een concrete situatie van stal halen als dat kan helpen voor de oplossing van het probleem. Zo'n wiskundige structuur hebben de leerlingen als het ware achter de hand; daardoor hoeven ze problemen zoals die hierboven staan niet steeds opnieuw op te lossen. Later wordt deze structuur verder uitgebreid.



Figuren 2 t/m 6

Logische bewijzen

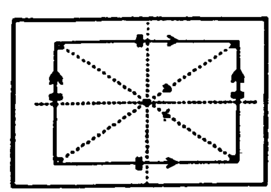
De echte wiskundige gaat natuurlijk verder. Die ontwerpt axioma's, definities en stellingen, en die wil bijvoorbeeld *bewijzen,* dat als in een vierhoek de overstaande zijden twee aan twee evenwijdig zijn, ze logischerwijze ook gelijk zijn. En die betoogt dat een vierhoek met drie rechte hoeken al een rechthoek is; meer hoeft niet. Dat soort zaken noem ik *theorie.* De meeste leerlingen komen daar nooit aan toe.

Nog een voorbeeld

De *lineaire vergelijking*

Beeldvorming
Aan de leerlingen worden allerlei herkenbare problemen voorgelegd, waarin twee lineaire verbanden met elkaar worden vergeleken: welk gastarief is voordeliger?, welke huurauto is voordeliger?, waar ontmoeten twee fietsers elkaar?, enzovoort. Voor de leerlingen ontstaat daaruit dit beeld van de aanpak:
– er zijn telkens twee eenvoudige berekeningen die beginnen met het zelfde begingetal,
– je vergelijkt de uitkomsten van die twee berekeningen, meestal zijn ze verschillend,
– vaak kun je een begingetal vinden waarbij de twee berekeningen dezelfde uitkomst hebben,

Dit is niet zozeer een visueel beeld; de leerling staat echter duidelijk voor ogen wat er in al die situaties hetzelfde was. Ik beschrijf dit beeld met voor de leerling alledaagse woorden, met actietaal. Met dit soort taal is het voor de leerlingen gemakkelijker de



Figuur 7

verbinding te leggen tussen enerzijds de gebruikte formulering en anderzijds het werk dat ze gedaan hebben.

Schematiseren

De schematisering is eigenlijk al begonnen met het onder woorden brengen van het beeld. Het is hier niet zo eenvoudig als bij de rechthoek de schematisering voort te zetten. Waar we uiteindelijk naar toe willen is de schematisering van de oplossing van de vergelijking. Dan bent u misschien al wel een jaar verder. Een goed hulpmiddel is de rekenresultaten in een tabel te zetten, dat maakt ze al wat overzichtelijker. Dan de stap van de tabel naar de grafiek; die maakt het verloop duidelijker en het wordt gemakkelijker de beginwaarde met de gelijke uitkomsten te vinden. Alles nog heel concreet. Nu moet er een vergelijking komen; er is nog niet meer dan een soort recept, voor de gastarieven bijvoorbeeld:

Je doet het aantal m³ maal de prijs van het gas per m³ en daar tel je het vastrecht bij op; dat is wat je moet betalen. Dat moet je eerst doen voor de ene berekening en dan voor de andere; dan zoeken naar het aantal m³ waarbij je twee keer hetzelfde krijgt.

Dat kan korter en overzichtelijker, als daar behoefte aan is, door gebruik te maken van + en × en =, door de variabelen in één woord te vangen en door wat werkwoorden en lidwoorden weg te laten:

m³-aantal × m³-prijs + vastrecht (voor de ene situatie) = m³-aantal × m³-prijs + het vastrecht (voor andere situatie).
Nu zoeken naar het aantal m³ waarbij het klopt.

Het is belangrijk dat de leerlingen zelf zoeken naar mogelijkheden voor verkortingen en meer overzicht, dat bevordert hun vermogen tot (her)structureren. Ze begrijpen ook wel dat korter en overzichtelijker minder werk betekent. De volgende stap is bijvoorbeeld:

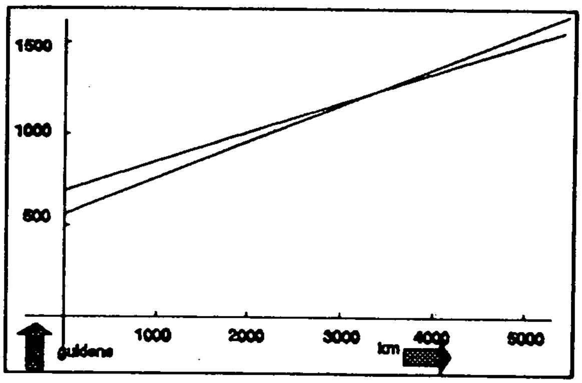
Los op:

m³-aantal × m³-prijs-A + vastrecht-A =
= m³-aantal × m³-prijs-B + vastrecht B

Er is dus nu een *vergelijking* met een *linker-* en een *rechterlid*, die moet worden *opgelost*. De woorden kunnen nu nog worden afgekort, maar veel verder moet u niet gaan want dan gaat het verband met de werkelijkheid verloren.
Op zeker moment ontstaat er behoefte aan meer. Er komen opgaven met moeilijke getallen waar toch een precies antwoord bij gevonden moet worden. Bijvoorbeeld:

Vergelijk de kosten van de huurauto van ƒ0,20 per km met ƒ560,– vaste kosten en de huurauto van ƒ0,16 per km met ƒ695,– vaste kosten.

De vergelijking is:
0,20 × km-aantal + 560 =
= 0,16 x km-aantal + 695
Het moet voor de leerling duidelijk blijven dat het links en rechts om bedragen gaat. Door goed naar het probleem te kijken, en gebruik te maken van hun kennis van de probleemsituatie en van grafieken, kunnen de leerlingen namelijk leren, wat bij het manipuleren van een vergelijking al of niet geoorloofd is.
Wanneer de garages beide ƒ560,– minder vaste kosten zouden rekenen zou dat voor de prijsvergelijking natuurlijk niet uitmaken: links en rechts 560 aftrekken. In de grafiek komt dat neer op het naar beneden schuiven van de lijnen, daarbij blijft hun snijpunt hangen boven hetzelfde aantal kilometers.
Dat wordt dan:
0,20 × km-aantal = 0,16 × km-aantal + 135



Figuur 8

Ook als beide auto's per kilometer 16 cent minder zouden kosten, zou dat voor de prijsvergelijking niets uitmaken, het blijft 4 cent per km verschil. In de vergelijking is dat links en rechts $0,16 \times$ km aftrekken:
$0,04 \times$ km-aantal $= 135$
Dat het niet uitmaakt zie je ook als je de grafiek van $0,4 \times$ km-aantal snijdt met de lijn $g = 135$.
Dan de laatste stapjes; $25 \times 0,4 = 1$ dus:
km-aantal $= 25 \times 135 = 3375$

Op den duur wordt het de leerlingen duidelijk dat ze steeds hetzelfde doen in dergelijke probleemsituaties. Het oplossingsproces wordt dan een automatisme dat niet steeds met het probleem in verband wordt gebracht. Wanneer de leerling het niet goed meer weet kan die teruggrijpen naar de grafiek of naar de betekenis van de vergelijking in de probleemsituatie.
Er is nog geen sprake van een logische structuur, het is een abstracte wiskundige beschrijving van wat in concrete probleemsituaties te zien is. Op den duur gaat de nieuwe structuur een eigen leven leiden, los van de situaties.

Logische bewijzen

Het is een heel karwei om rond vergelijkingen een logisch stelsel van axioma's, definities, stellingen en bewijzen op te bouwen. Daarmee zou dan echt bewezen kunnen worden, dat een vergelijking waarin je links en rechts hetzelfde aftrekt, overgaat in een gelijkwaardige vergelijking. Daar moet u de leerlingen maar niet mee lastig vallen.

In deze voorbeelden is een aantal grote lijnen te trekken:
– bij het leren van wiskunde spelen aanvankelijk globale beelden een belangrijke rol, ze ontstaan doordat de leerlingen in diverse probleemsituaties dezelfde beeldstructuur herkennen,
– als er behoefte is om meer met die beelden te kunnen doen, worden ze steeds verder geschematiseerd; dat begint met het onder woorden brengen van het globale beeld en daarna van allerlei details. Ook nieuwe begrippen worden beschreven; er ontstaat een begin van de vaktaal. Ook bij de schematisering is het structureren van concrete problemen uitgangspunt,
– het resultaat van de schematisering is een wiskundige structuur die de leerling zich heeft eigen gemaakt, de leerling kan die met woord en beeld beschrijven, en in nieuwe problemen toepassen,
– het vervolg van de schematisering is het ontwikkelen van een logische structuur; dat is veelal vakwerk voor wiskundigen.

In het volgende artikel worden deze lijnen uitgewerkt.

Noten

Een compleet overzicht voor het vak wiskunde in de basisvorming vindt u in de SLO-uitgave:
Op weg naar basisvorming, wiskunde; besteladres: SLO, postbus 2041, 7500 CA Enschede, telefoon: 053-840840.

In de Samenwerkingsgroep Wiskunde 12-16, SW12-16, werkt een aantal instanties samen aan de invoering van de nieuwe programma's: de lerarenopleidingen, de proefscholen, de Stichting Leerplan-Ontwikkeling SLO, het Freudenthal instituut en het Centraal Instituut voor Toets-Ontwikkeling CITO; de coördinatie berust bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum APS, daar is ook de informatie-telefoon 020-5481766.

*) *De artikelen 4 en 5 in deze serie hadden niet geschreven kunnen worden zonder de bijdrage van Fred Korthagen in vele gesprekken die wij over dit onderwerp voerden.*