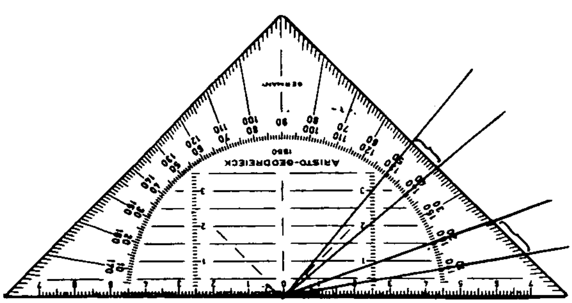
● Bijdrage ● ● ● ●

▶ De bissectricestelling

Martin Kindt

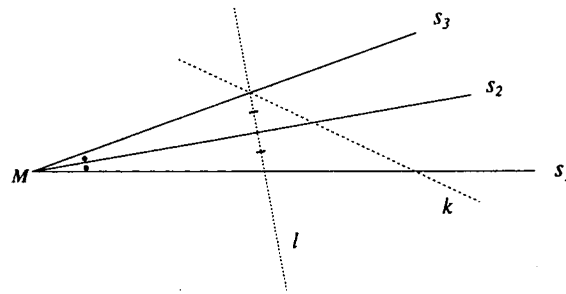
Mijn ontmoetingen met Ed de Moor gaan niet zelden gepaard met het begeesterd uitwisselen van wiskundig jeugdsentiment: het ophalen van stukjes wiskunde, soms nog wel, soms (allang) niet meer behorend tot de gewone schoolstof. Zo kwamen we onlangs, in verband met zijn artikel 'Analyse, synthese en elegance'[1] op de klassieke bissectricestelling uit de vlakke meetkunde. Er schijnen hele horden (jonge?) wiskundeleraren te zijn die nooit van deze stelling hebben gehoord. Vandaar dat Ed het nodig vond een bewijs van deze stelling op te nemen in een voetnoot bij zijn opstel. Behoort dat bewijs nu tot de 'gewone', 'lelijke' of 'elegante' klasse? Daarover spraken wij en onze smaken bleken nu eens niet congruent te zijn. Al pratend rolden er een aantal andere bewijzen over tafel en ontstond mijn idee voor een artikel speciaal over deze bissectricestelling.



Figuur 1

Bij het schrijven ervan nam ik me voor nette plaatjes toe te voegen en zo viel mijn oog op de aloude geodriehoek (figuur 1).

Een opvallend verschijnsel is dat de schaalverdeling op de rechthoekszijden, geërfd van de gradenboog, ongelijkmatig is: gelijke hoeken snijden een willekeurige lijn niet volgens gelijke segmenten. Ik denk daar nog eens over na en beperk me voor het gemak tot de situatie van *twee* gelijke, aangrenzende hoeken (figuur 2).



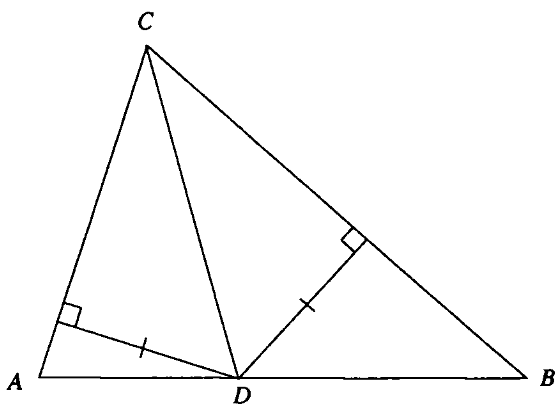
Figuur 2

Alleen als de lijn (l) loodrecht staat op de middelste van de drie stralen (s_2), zijn de segmenten op l gelijk. Bij een scheve stand (k) duidelijk niet. Hoe schever k ten opzichte van de bissectrice s_2, hoe ongelijker de segmenten.
In plaats van te letten op de scheefte ten opzichte van s_2 kan ik ook kijken naar de stukken vanuit M op de stralen s_1 en s_3. Hoe ongelijker die stukken, hoe ongelijker de segmenten op k. Een mens komt dan al gauw op het idee eens naar de verhouding van die stukken te kijken. Er lijkt een verband te bestaan tussen de verhouding van de straalstukken uit M en de segmenten op k. Het eenvoudigste wat je kunt bedenken is dat die verhoudingen gelijk zijn; nameten in een paar figuren geeft allerminst aanleiding tot verwerping van deze hypothese.

Een vermoeden is geboren en kan bijvoorbeeld zo expliciet worden gemaakt:
de bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die zich verhouden als de aangrenzende zijden.
Kortom: de bissectricestelling. Hoe die stelling te bewijzen?

Het bewijs waarvoor ik sympathie koester en waarvan ik me de laatste jaren pleeg te bedienen als ik onwetenden van deze stelling wil overtuigen, ziet er zo uit:

Bewijs 1.

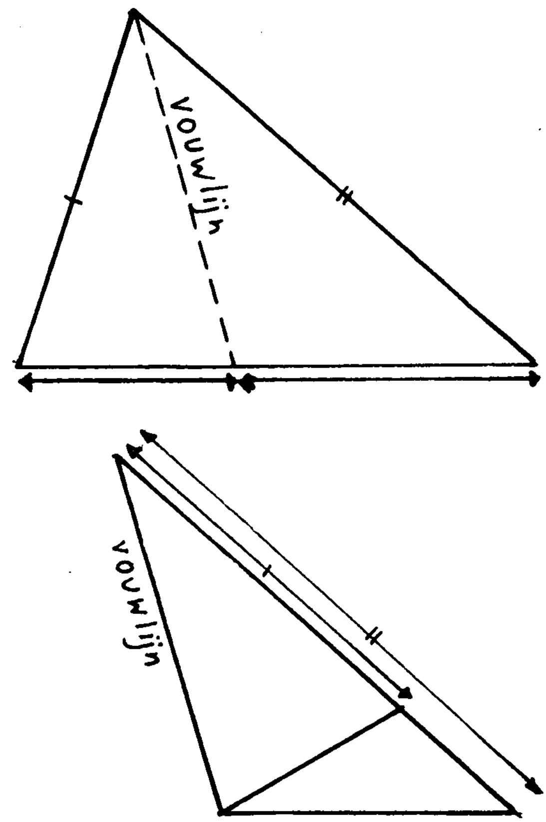


Figuur 3

Vergelijk de driehoeken ADC en BDC.
De oppervlakten ervan verhouden zich als de basis AD en BD (natuurlijk: ze hebben immers de hoogtelijn uit C gemeenschappelijk).
Daar anderzijds de oppervlakten zich ook verhouden als AC en BC (de hoogtelijnen uit D op de zijden AC en BC zijn even lang!), weten we nu: $AD : BD = AC : BC$.

Met knippen en vouwen krijg je een meer aanschouwelijke variant:

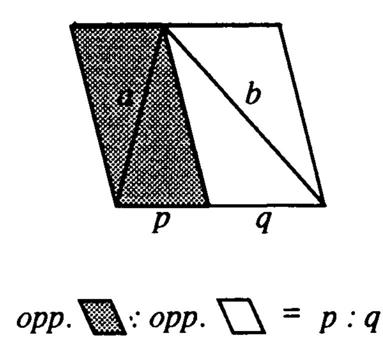
Bewijs 2.
Knip een driehoek uit een stuk papier en vouw deze zo dat twee zijden langs elkaar komen te liggen (figuur 4).
De vouwlijn (bissectrice!) verdeelt de driehoek in twee delen.
Opengevouwen zie je dat de oppervlakten van de deeldriehoeken zich verhouden als de stukken langs de basis; dichtgevouwen vind je die verhouding terug als verhouding van de opstaande zijden van de oorspronkelijke driehoek.

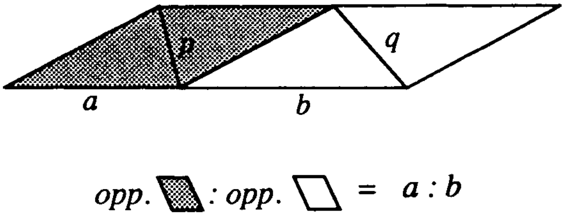


Figuur 4

Is dit bewijs wel zo aanschouwelijk? Zonder de wetenschap dat de oppervlakten van driehoeken met dezelfde hoogte zich verhouden als de bases, zijn we nergens. Want direct zichtbaar is dat niet. Om dit visueel te maken, kan een beroep worden gedaan op parallellogrammen en zo ontstaat een mozaïekbewijs (figuur 5):

Bewijs 3.





Figuur 5

Pas op: de witte stukjes zijn omgeklapt!

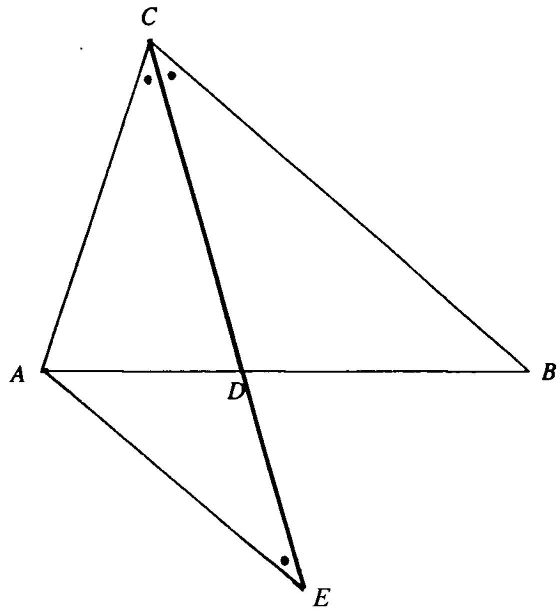
Het voorrang geven van het ene bewijs boven het andere, hoeft niet louter een kwestie van smaak of appreciatie te zijn. Overwegingen die een rol kunnen spelen, zijn:
- past het bewijs goed in de (omringende) stof?
- is het leerzaam als voorbeeld van een methodiek?
- bevat het voldoende heuristische aanknopingspunten?
- is het geïsoleerd qua aanpak? (zeer elegante bewijzen hebben vaak iets solitairs)
- is het generaliseerbaar? (hier bijvoorbeeld naar een hogere dimensie)
- ...

Multatuli verbaasde zich er over dat zijn lucide bewijs van de stelling van Pythagoras niet figureerde in de meetkundige standaardwerken van zijn tijd. Blijkbaar liet de rigiditeit van het systeem een zo aanschouwelijke demonstratie niet toe.

In een meetkunde-curriculum waarbij oppervlakten van figuren veelvuldig worden gebruikt voor het trekken van conclusies over bepaalde lijnstukken (een mooi voorbeeld van blikwisseling!) past Multatuli's bewijs wél goed, evenals bovenstaande bewijzen van de bissectricestelling. In het meetkundeprogramma van weleer, geschoeid op de leest van Euclides, werd veel gemanipuleerd met eigenschappen van twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde en met evenredigheden in driehoeken voorzien van een dwarslijntje parallel aan de basis. Het bewijs bij Ed's artikel sloot prima aan bij die opzet, en gold min of meer als geijkt.

Een broertje van dit bewijs is:

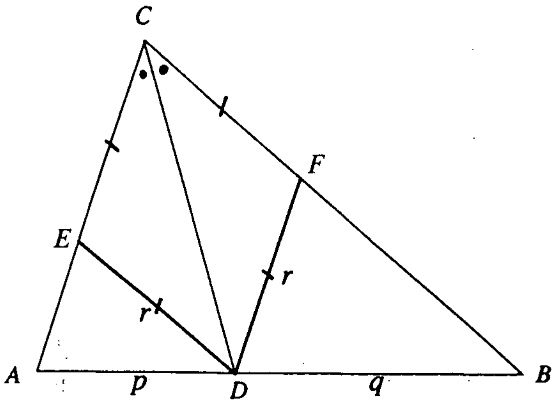
Bewijs 4.



Figuur 6

Trek de lijn door $A\,//\,BC$ (of door $B\,//\,AC$) en snijd deze lijn met het verlengde van CD (snijpunt E). Nu geldt: $AC = AE$ (via de verwisselende binnenhoeken bij E en C) en daaruit volgt dan:
$AD : DB = AE : BC = AC : BC$.
Met dit voorbeeld wil ik benadrukken dat, ook al leg je jezelf een keurslijf op, er nog varianten mogelijk zijn. Het naast elkaar leggen van verschillende bewijzen, het vergelijken ervan (op helderheid, doelmatigheid, schoonheid of wat dies meer zij), is een zeer waardevolle activiteit die helaas wat in het vergeetboek is geraakt. Maar wat wil men, in een wiskunde-cultuur waar bewijzen bijna uitgeroeid zijn?
Ik trek me van die cultuur niets aan en wil nog een paar bewijzen van dezelfde stelling bekijken.

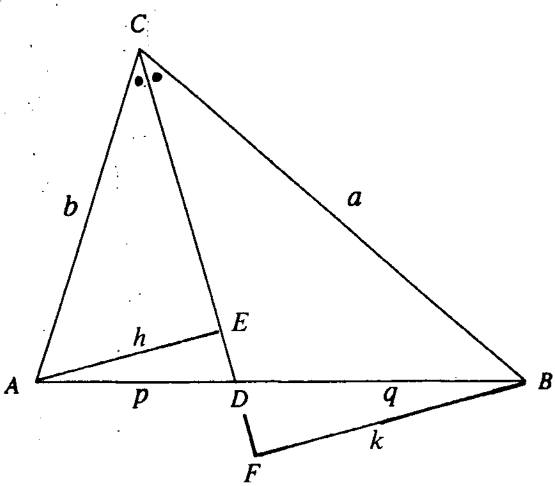
Bewijs 5 (zie figuur 7).
Vanaf hier noem ik: $AD = p$, $BD = q$, $AC = b$, $BC = a$.
Ik trek uit D de lijnen parallel met BC en AC en er ontstaat de ruit $DECF$.
Dit vanwege de diagonaal die ook bissectrice is.



Figuur 7

(Bij het vergelijken van de bewijzen is het van groot belang na te gaan hoe het bissectriceschap verwerkt is!)
Stel de zijden van de ruit gelijk aan r.
AED en DFB zijn gelijkvormig:
$p:q = AE:DF = AE:r$ (*externe verhoudingen*).
ACB en AED zijn gelijkvormig:
$b:a = AE:ED = AE:r$ (*interne verhoudingen*).
Hieruit volgt $p:q = b:a$.

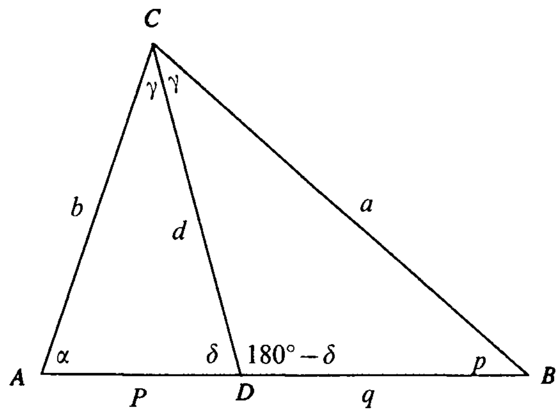
Bewijs 6 (zie figuur 8).
Laat de loodlijnen AE en BF neer op de lijn CD.



Figuur 8

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ACE en BCF volgt: $h:b = k:a$.
Ook ADE en BDF zijn gelijkvormig: $h:p = k:q$.
Uit beide evenredigheden volgt: $b:a = p:q$.

Bewijs 7.
De in bewijs 4 gebruikte verhoudingen hadden natuurlijk ook als sinus kunnen worden opgevoerd (uiteraard levert dat geen wezenlijk nieuw bewijs). Edoch, trigonometrie is potent genoeg. Neem het wondermiddel sinusregel en zelfs een hulplijn is niet meer nodig:



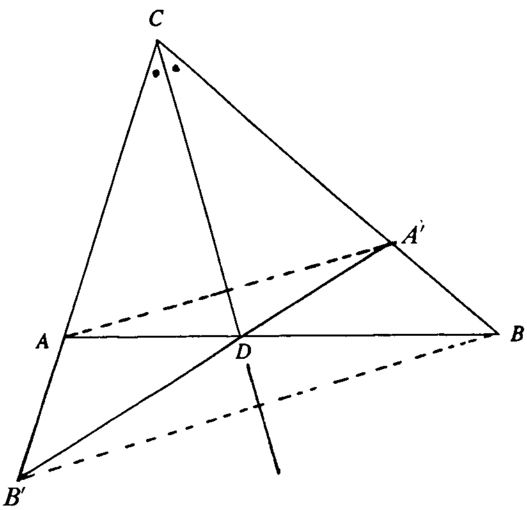
Figuur 9

Sinusregel in driehoek ACD geeft:
$p : \sin\gamma = b : \sin\delta$.
Sinusregel in driehoek BCD geeft:
$q : \sin\gamma = a : \sin(180° - \delta) = a : \sin\delta$.
Conclusie: $p:q = b:a$.

Bewijs 8.
Aardig is het ook om de bissectrice als symmetrie-as te benutten.
Spiegel driehoek ABC in CD en we krijgen $A'B'C$ (figuur 10).

Nu geldt $AD:DB = AA':BB' = CA:CB' = CA:CB$.

Dit lijkt het bewijs geknipt voor een meetkunde gebaseerd op transformaties. En passant levert het ook een eenvoudige constructiemethode voor de bissectrice van een (niet-gestrekte) hoek.



Figuur 10

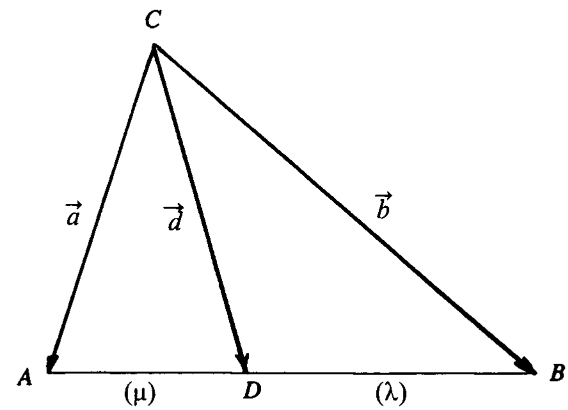
Bewijs 9.
Met vectormeetkunde gaat het ook, al is het niet van een leien dakje (figuur 11).
Een handig trucje om de bissectrice-vector van twee vectoren *a* en *b* te vinden, is: maak er eenheidsvectoren van en tel die op:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

De vector $\vec{d}$ (met eindpunt *D*) is hier een veelvoud van: $\vec{d} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$, waarbij:

$$\lambda : \mu = \frac{1}{|\vec{a}|} : \frac{1}{|\vec{b}|} = |\vec{b}| : |\vec{a}|$$

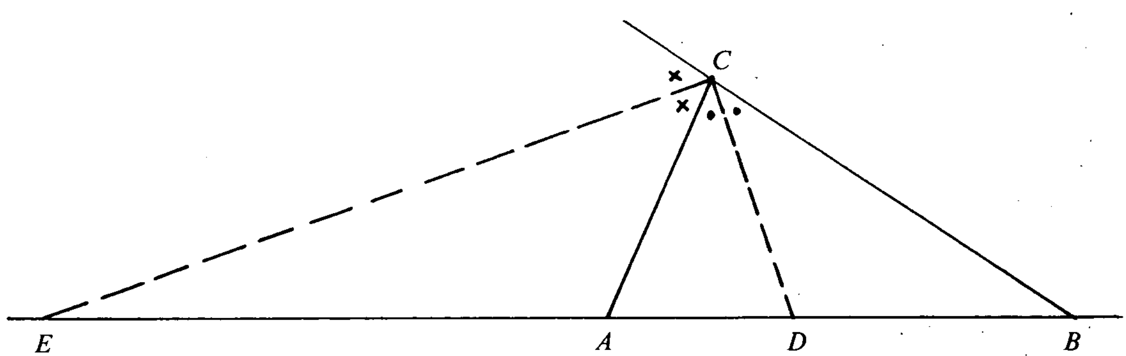
Omdat $\vec{d}$ een gewogen gemiddelde is van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, volgt: $\lambda + \mu = 1$ en zijn de 'gewichten' omgekeerd evenredig met de stukken waarin *AB* door *D* wordt



Figuur 11

verdeeld, dus: $\lambda : \mu = BD : AD$.
Gevolg: $BD : AD = |\vec{b}| : |\vec{a}|$

Klassieke analytische meetkunde is minder geschikt voor bewijsvoering van stellingen betreffende de driehoek: men verzeilt al gauw in een fikse rekenpartij die wel resultaat, maar weinig inzicht oplevert.
Aan het ordenen van de bewijzen 1 tot en met 9 naar elegance, waag ik mij niet. Als eenvoud het kenmerk van de ware schoonheid is, vallen er snel een paar kandidaten voor de schoonheidsprijs af.
Alle genoemde bewijzen zijn ook van toepassing op de eigenschap van de zogenaamde buitenbissectrice. Nemen we binnen- en buitenbissectrice gelijktijdig onder de loupe, dan ontstaat een aardige situatie op de grens van Projectieve en Euclidische meetkunde.



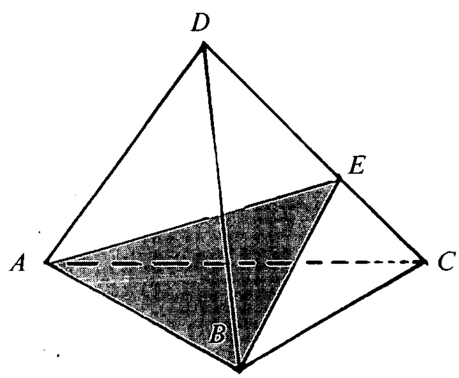
Figuur 12

D en E verdelen lijnstuk AB reps. *inwendig* en *uitwendig* in stukken met verhouding $AC:BC$ en dus (figuur 12):

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}:\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{BE}} = -1$$

Het puntenviertal $ABDE$ wordt *harmonisch* genoemd; de vierstraal CA, CB, CD, CE is dat ook, hetgeen ook rechtstreeks uit de gelijkheid van de ingesloten hoeken kan worden bewezen.

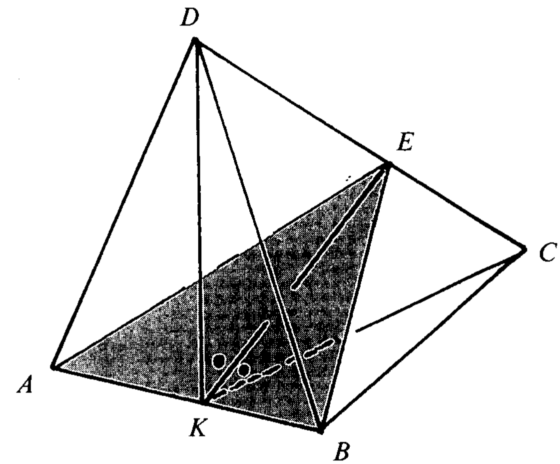
De bissectricestelling heeft een analogon in de ruimtemeetkunde:



Figuur 13

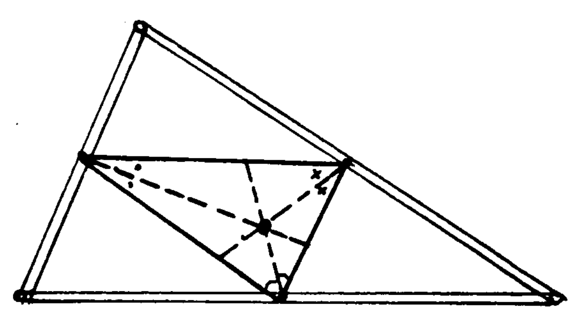
Het bissectricevlak ABE in viervlak $ABCD$ verdeelt de ribbe CD in stukken die zich verhouden als de oppervlakten van de grensvlakken ABC en ABD. Als we bewijs 1 omtoveren in een bewijs met inhouden (van $ABCE$ en $ABDE$) wordt dit snel duidelijk. Instructief is ook het bewijs met behulp van de 2-dimensionale bissectricestelling (figuur 14):
DKC is een standvlak op AB.
$DE:EC = DK:KC =$ opp. ABD : opp. ABC

Tenslotte nog een onverwachte toepassing van de bissectricestelling die ik ooit in de (oude) Wiskrant beschreef[2]. Zoals bekend valt het natuurkundige zwaartepunt van een uit homogeen materiaal vervaardigde driehoek samen met het meetkundige



Figuur 14

zwaartepunt. Ook is dit het geval als de driehoek wordt vervangen door een groep van drie even grote massa's geplaatst in de hoekpunten. Een voor de hand liggende vraag is nu: waar ligt het fysisch zwaartepunt van de stangendriehoek (de drie stangen zijn overal even dik en van hetzelfde homogene materiaal). Aan de lezer laat ik het over te bewijzen dat dit het snijpunt is van de bissectrices van de driehoek gevormd door de drie middenparallellen (figuur 15).



Figuur 15

Over een doodgewone stelling uit de klassieke meetkunde valt heel wat te zeggen. Dit artikel had gemakkelijker groter gekund, variaties van bewijzen zijn er nog genoeg (in jaargang 65 nr. 4 van