

Meetkunde in de brugklas

Fernand J. Prevost

Het model van Van Hiele voor het leren van meetkunde geniet tegenwoordig zowel praktische als wetenschappelijke belangstelling. Hoffer (1981) geeft een beschrijving van het model en van problemen die voorkomen bij leerlingen, op alle Van Hiele-niveaus.

De eerste drie niveaus zullen in dit artikel worden behandeld. Deze niveaus zijn, zoals Hoffer ze noemt: *herkenning*, *analyse* en *ordening*.

Onder *herkenning* wordt verstaan: de vaardigheid om eenvoudige meetkundige figuren te benoemen en te (her-)kennen. De leerling kan een rechthoek herkennen, rechthoeken onderscheiden in een verzameling figuren en voorbeelden van rechthoeken herkennen in gebouwen, en in andere situaties uit de werkelijkheid.

Analyse bestaat uit het bestuderen van een bepaalde figuur en het opmerken van zijn eigenschappen. De leerling zal dan in staat zijn te vertellen dat een rechthoek vier zijden heeft, rechte hoeken, overstaande zijden die evenwijdig zijn, en diagonalen die elkaar middendoor delen. Op dit tweede niveau zien leerlingen echter niet hoe de ene figuur in relatie staat tot de andere.

Op het derde niveau, dat van de *ordening*, beginnen leerlingen verbanden te zien, een systeem op te bouwen, en het gebruik van definitieën te waarderen. Op dit niveau begrijpt een leerling dat een vierkant een rechthoek en een ruit is, en dat rechthoeken en ruiten voorbeelden zijn van vierhoeken. Terwijl een leerling die op een lager niveau zit misschien een beschrijving van een rechthoek zou kunnen geven, is hij of zij nu in staat een definitie te geven, zoals bijvoorbeeld: 'Een rechthoek is een

parallellogram met een rechte hoek'.

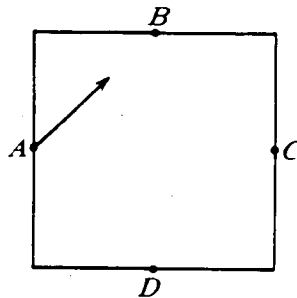
Usiskin (1982) stelde vast dat een aantal vierdejaars middelbare scholieren er niet in slaagde de vaardigheden van het eerste niveau te tonen.

Deze leerlingen kunnen eenvoudige meetkundige figuren als vierkanten, driehoeken, rechthoeken of cirkels niet herkennen. En verder wijst Usiskin's studie uit dat leerlingen die nog niet verder gekomen zijn dan het derde niveau, slechts 50% kans op succes hebben in een meetkunde-cursus die voor het overgrote deel bestaat uit het kunnen geven van bewijzen.

We kunnen vaststellen dat veel van onze leerlingen een formele behandeling van de meetkunde op de middelbare school niet kunnen volgen. Het argument om meetkunde in de wiskunde van de brugklas op te nemen moet daarom niet louter zijn 'dat het later nodig is'. Het model van Van Hiele suggereert, en de studie van Usiskin ondersteunt dat in het algemeen, dat leerlingen geen profijt kunnen trekken uit een les van een niveau dat boven hun vermogen ligt. En dus zou meetkunde-onderwijs in de brugklas rekening moeten houden met de noodzaak om de meetkundige basisfiguren te *herkennen*, voordat er verder gegaan wordt met *analyseren* respectievelijk *ordenen*.

Herkenning

We kunnen ons moeilijk voorstellen dat brugklasleerlingen en zelfs tweedeklassers op de middelbare school niet in staat zijn eenvoudige meetkundige figuren te herkennen. Laten we echter eens kijken naar de vragen bij de figuren 1, 2, 3 en 4.



Figuur 1. Dit is een vierkant. De punten A, B, C en D zijn de middens van de zijden. Verbind A met B, B met C, en zo verder. Hoe heet figuur ABCD?

Als antwoord op de vraagstelling bij figuur 1 zeggen veel leerlingen dat $ABCD$ geen vierkant is – misschien wel een ruit, maar geen vierkant. Sommigen voelen niet aan dat het resultaat in figuur 2 een driehoek is, en van figuur 3 zeggen sommigen dat I eerder een vierkant is dan een rechthoek, en dat III ‘anders’ georiënteerd is en er niet uitziet als een rechthoek, en dat IV te smal is om voor een rechthoek door te gaan.

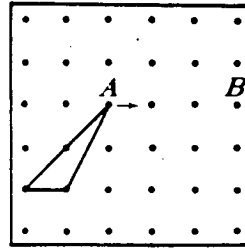
In figuur 4 is III wellicht geen trapezium, IV is meestal geen trapezium, en V is absoluut geen trapezium.

Zulke antwoorden zijn typerend voor een bepaald deel van de leerlingen die net een jaar meetkunde hadden gehad. Het gaat hier om leerlingen die tijdens de zomer nog meetkunde volgden, omdat ze een meetkunde-taak hadden (in de VS is zo iets niet ongebruikelijk, redactie). Aangezien de meesten niet in staat waren deze eenvoudige figuren te herkennen, hadden ze niet de vaardigheid om het meetkunde-programma van het voorafgaande jaar succesvol af te ronden.

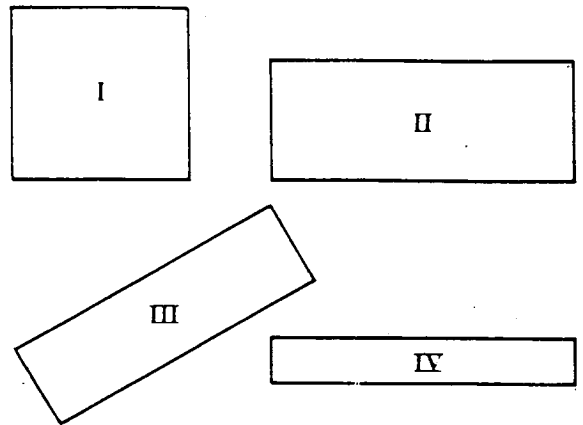
Dit is in overeenstemming met de resultaten van Usiskins onderzoek (1982). Bijna al deze leerlingen konden de definities die ze het voorafgaande jaar hadden geleerd weer oplepelen. Hun werkdefinitie was echter: ‘ziet er uit als’. Als de figuur ongewoon georiënteerd was, of totaal anders was dan wat ze eerder gezien hadden, dan was de figuur er niet eentje die ‘er uit ziet als’ (zie Burger (1981)).

Wij, leraren, zijn schuldig aan het aanmoedigen van het gebruiken van deze ‘ziet er uit als’-definities. We tekenen de figuren stereotiep, met één zijde evenwijdig aan de onderkant van het papier of het schoolbord. Ook gebruiken we te weinig hulpmiddelen die de leerlingen de gelegenheid bieden zelf met meetkunde bezig te zijn in plaats van meetkunde passief te aanschouwen.

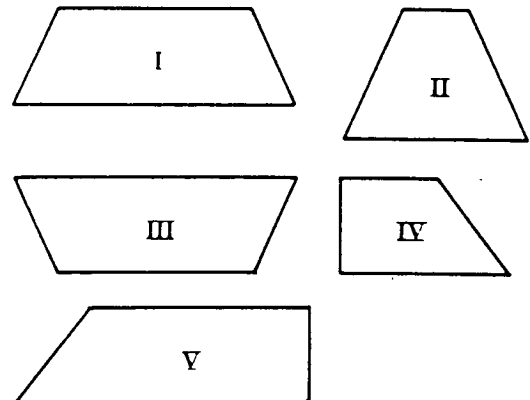
Probeer een paar activiteiten als bij de figuren 1 tot en met 4, en als de resultaten zijn zoals hiervoor beschreven is, laat de leerlingen de diverse figuren dan construeren met behulp van spijkerborden, rietjes, pijperagers, of andersoortig materiaal. De leerlingen zouden ook aangemoedigd moeten worden figuren te tekenen met potlood en liniaal. Aan zulke tekeningen is te zien of leerlingen een beperkt ‘ziet er uit als’-begrip hebben, of een meer globaal idee van een figuur.



Figuur 2. Construeer een driehoek op een spijkerbord zoals in de figuur te zien is. Verschuif nu hoekpunt A één stap naar rechts. Is de figuur die je krijgt een driehoek? (ja) Verschuif hoekpunt A nog een stap naar rechts. Verschuif het hoekpunt tenslotte naar B. Is de figuur nu een driehoek?



Figuur 3. Welke van deze figuren zijn rechthoeken?



Figuur 4. Zijn al deze figuren trapezia?

Laten we aannemen dat de leerlingen de fase van de *herkenning* bereikt hebben. Ze laten zien dat ze in staat zijn doodgewone figuren te benoemen, te herkennen en te tekenen. Ze zijn dan klaar om door te gaan naar het tweede niveau, dat van de *analyse*.

Het analyseren van eigenschappen van figuren

We zouden het meetkunde-programma eens kunnen laten beginnen met het probleem van figuur 5.

Het is zeer waarschijnlijk dat leerlingen het antwoord toevallig zullen vinden. Daarna kunnen we hen het probleem nog eens laten beschouwen:

Hoeveel lucifers zitten er in de oorspronkelijke figuur? (17)

Als je 5 lucifers weg laat, hoeveel hou je dan over? (12)

Hoeveel zijden heeft een vierkant? (4) En hoeveel zijden hebben drie vierkanten? (12)

Kunnen twee vierkanten nog een gemeenschappelijke zijde hebben? (nee)

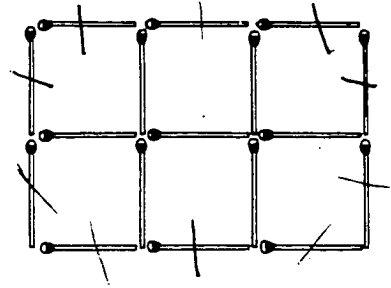
Hieruit volgt dat de drie vierkanten die overblijven alleen hoekpunten gemeen kunnen hebben.

Zie je twee oplossingen? Is de ene oplossing het spiegelbeeld van de andere?

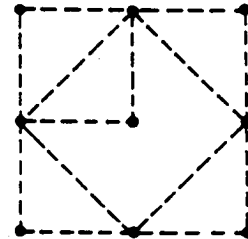
Met behulp van dit probleem hebben we de begrip-zijde en hoekpunt, en een beschouwing over de grondeigenschappen van de figuren geïntroduceerd. Deze start heeft ook het voordeel spiegelbeelden en symmetrie te introduceren.

Als onze leerlingen deze vragen leuk vinden, kunnen we hen aanmoedigen verder te gaan met puzzels zoals op het werkblad 'Enige opgaven over vierkanten' staan. Voor ieder probleem zouden ze vragen moeten doornemen die hen helpen terug te blikken (het werkblad is als bijlage bij dit artikel gevoegd).

Als de leerlingen zijn aangemoedigd om de eigenschappen die ze van het vierkant ontdekten op te schrijven, zijn ze vervolgens in staat in kleine groepen de eigenschappen van rechthoek, parallellogram, ruit en trapezium te vinden. U kunt ook enkele van de volgende oefeningen gebruiken om hen te helpen met het onderzoek (zie figuur 6).



Figuur 5. Verwijder vijf lucifers zó dat er drie vierkanten overblijven, die dezelfde grootte hebben als de vierkanten in het plaatje.



Figuur 6. Construeer een vierkant op een spijkerbord van 3 bij 3 of op roosterpapier. Construeer een ander vierkant dat verschillend is van het eerste. Kun je nu een derde vierkant vinden dat verschillend is van de eerste twee?

Kijk eens naar het vierkant dat je gemaakt hebt; hoeveel zijden heeft het? Elke hoek wordt een hoekpunt genoemd; hoeveel hoekpunten heeft een vierkant? Wat kun je nog meer zeggen over een vierkant?

Beschrijf een vierkant (merk wel op dat in deze les niet gevraagd wordt naar een definitie).

Ga door met het onderzoek van het vierkant. Introduceer diagonalen en laat de leerlingen hierover zelf tot conclusies komen. Introduceer het begrip congruentie en vraag de leerlingen om congruente lijnstukken in een vierkant te herkennen.

Bezitten de diagonalen opvallende eigenschappen?

Ga door met de begrippen hoek en rechte hoek, en laat de leerlingen deze begrippen toevoegen aan hun eerder gegeven beschrijving van een vierkant. Desgewenst kunt u in deze fase ook nog evenwijdigheid en loodrechte stand van lijnen behandelen. Binnen de context van het uitpluizen van alle eigenschappen van het vierkant kunnen de meeste, zo niet alle, basisbegrippen van de brugklas-meetkunde worden geïntroduceerd – en dat dan doelgericht. Zo kunnen ook de basisconstructies worden geïntroduceerd, zodanig dat de leerling een vierkant zelf kan tekenen. En tenslotte, als u de beschikking heeft over een microcomputer en de computertaal LOGO, kunt u de leerlingen inleiden in deze taal.

Herhaal de zojuist beschreven gang van zaken met rechthoeken, ruiten, parallellogrammen en trapezia. Het komt er op aan dat leerlingen zelf figuren construeren op een spijkerbord, en er dan een nauwkeurige tekening van maken met potlood en liniaal, of een model met behulp van andere materialen, zoals rietjes of pijperagers. Moedig leerlingen aan te gissen naar wat ze zullen ontdekken en laat hen dan hun veronderstellingen vergelijken met de uitkomsten van hun experimenten. We zouden hen zó moeten sturen dat ze zowel lange als smalle rechthoeken als ook niet-gelijkbenige trapezia gaan bestuderen. Tenslotte kunnen we hen, als we dat willen, uitdagen met valse hypothesen:

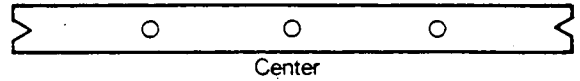
als de diagonalen loodrecht op elkaar staan en elkaar middendoor delen, dan kan de figuur alleen maar een vierkant zijn (merk op dat de diagonalen niet even lang behoeven te zijn, vandaar dat de ruit aan de voorwaarden voldoet).

Verscheidene jaren geleden stelde Jesse Rudnick in een lezing voor om geperforeerde kartonstroken te gebruiken, waarvan aan de uiteinden een V-vormig stuk is weggeknipt, zoals te zien in figuur 7.

Gebruik twee stroken van gelijke lengte, die in het midden aan elkaar bevestigd zijn. Zet een punt bij elk van de vier uiteinden en verbind deze punten met elkaar. Wat voor figuur krijg je? (zie figuur 8)

Wat gebeurt er als je de hoek tussen de twee stroken verandert?

Wat krijg je als de twee stroken loodrecht op elkaar staan?



Figuur 7. Geperforeerde kartonstroken waarvan aan de uiteinden een V is weggeknipt. Center = midden.

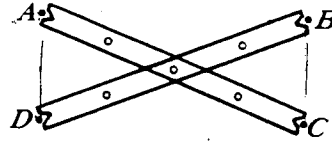


Fig. 8

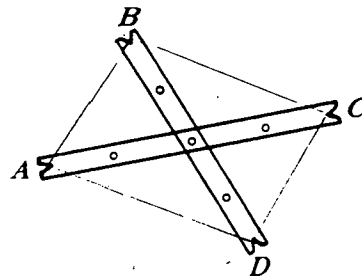


Fig. 9

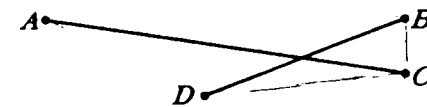
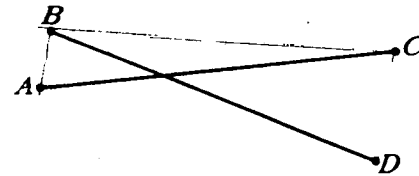


Fig. 10

Gebruik vervolgens twee stroken van verschillende lengte, die weer in het midden aan elkaar bevestigd zijn (zie figuur 9). Voer weer dezelfde opdrachten uit en schrijf op wat je vindt.

Dan wordt het tijd om de leerlingen naar verschillende varianten te laten kijken. We kunnen de leerlingen dat als volgt laten doen: ze raden (zo goed mogelijk) naar de uitkomst, en ze controleren hun veronderstellingen door het zelf te onderzoeken:

twee stroken van verschillende lengte die elkaar middendoor delen;

twee stroken van gelijke lengte die elkaar niet middendoor delen (zie figuur 10).

Vindt u ook dat de uitkomsten niet onmiddellijk voor de hand liggen? Had u zelf een schets gemaakt? Zouden leerlingen niet meer hebben aan het maken van oefeningen in plaats van over de uitkomsten na te denken? Zouden we ook zelf niet beter af zijn met het uitvoeren van zulke opdrachten in plaats van ons voor te stellen wat de uitkomsten zouden kunnen zijn?

Het vouwen van papier vereist weinig voorbereiding en kan leerlingen de gelegenheid bieden meetkundige eigenschappen te onderzoeken.

Vouw een vel papier door midden, zoals te zien in figuur 11. Knip de hoek er af. Wat voor figuur is weggeknipt?

Wat voor soort driehoek heb je nu?

Zullen alle weggeknipte stukjes gelijkbenige driehoeken zijn?

Vouw dan een ander vel papier dubbel en doe alles daarmee nog eens (figuur 12).

Knip het hoekje er af. Wat voor figuur is uit het oorspronkelijke vel weggeknipt? (hoogstwaarschijnlijk een ruit)

Hoe kun je een vierkant krijgen? (door onder een hoek van 45° te knippen)

De vouwlijnen zijn diagonalen; wat merk je daarover op? (ze staan loodrecht op elkaar)

Tenslotte kan de som van de hoeken van een driehoek worden bekeken aan de hand van het welbekende vouwmodel van figuur 13. We onderzoeken dan met de leerlingen het verband tussen lijnstuk

Figuur 11, 12, 13. *fold(s)* = vouwlijn(en), *cut(s)* = kniplijn(en).

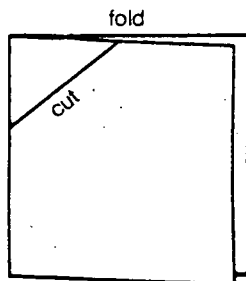


Fig. 11

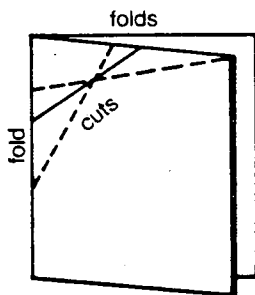
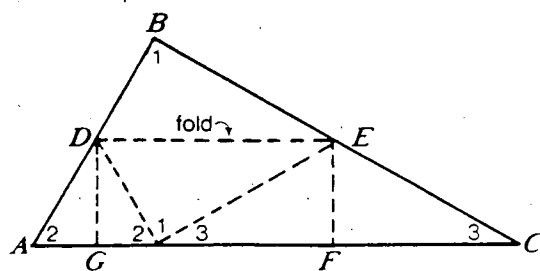


Fig. 12



Figuur 13. Gegeven is driehoek ABC. Vouw A naar B om het midden van AB te bepalen. Net zo voor het midden E van BC. Trek DE en vouw de top van de driehoek naar beneden, vouw langs DE. Ter controle: B moet precies de basis AC raken. Vouw de loodlijn op AC door D, en vervolgens de loodlijn op AC door E. De hoeken 1, 2 en 3 liggen nu langs een rechte lijn; dus: de som van de drie hoeken is 180° (zie Olson (1975)).

DE en de basis; de leerlingen kunnen opmerken dat DG de helft is van de hoogte van de driehoek en dat FG de helft is van de basis. Er zijn veel meer verbanden; welke kunnen de leerlingen vinden?

Ordering

Als de leerlingen de eigenschappen van de figuren op de hiervoor beschreven concrete wijze hebben onderzocht zijn ze in staat een aantal conclusies te trekken over relaties tussen de diverse vierhoeken. Het feit dat een figuur vier zijden heeft, wil niet zeggen dat die figuur een vierkant is. De leerlingen kunnen de volgende activiteiten ondernemen.

Hier is een lijst van de vierhoeken die je hebt onderzocht:

vierkant	rechthoek	parallelogram
ruit	trapezium	

Welke van deze figuren hebben rechte hoeken?
Welke figuren hebben overstaande zijden die evenwijdig zijn?

Welke figuren hebben congruente overstaande zijden?

Het trapezium heeft één paar evenwijdige overstaande zijden; moet het andere paar zijden dan per se congruent zijn?

Welke figuren hebben congruente diagonalen?

Welke figuren hebben diagonalen die loodrecht op elkaar staan?

Construeer op een spijkerbord een vierhoek waarvan geen twee zijden congruent zijn; heeft die vierhoek dan evenwijdige zijden?

Kun je een vierhoek construeren zonder dat er congruente zijden zijn, terwijl op zijn minst één paar zijden evenwijdig is? (Zo'n figuur is een trapezium, dat waarschijnlijk niet gevonden zou zijn als de leerlingen alleen maar de eerste aanwijzing hadden gekregen.)

Construeer weer een vierhoek zonder evenwijdige of congruente zijden. Wat moet je nu doen om een trapezium te krijgen? Doe dat!

Verander nu het trapezium in een parallelogram. Wat deed je?

Verander het parallelogram in een ruit. Hoe deed je dat?

Verander de ruit in een vierkant, het vierkant in een rechthoek die geen vierkant is.

Begin ook met een parallellogram en construeer dan een rechthoek, vervolgens een vierkant, en tenslotte een ruit die geen vierkant is. Noteer bij elke stap wát je deed.

De namen van elk van de vierhoeken vormen een verzameling labels. Er is bovendien een label dat de hele verzameling kenmerkt: vierhoek.

Hoe kun je deze labels in een logische volgorde rangschikken? (als de leerlingen stroomschema's hebben gehad, is de terminologie dáárvan te gebruiken; in ieder geval zal de discussie die volgt als de leerlingen proberen een volgorde te bepalen uiterst interessant kunnen zijn).

We kunnen hetzelfde doen met een Venn-diagram. Een grote cirkel stelt de verzameling van alle vierhoeken voor. Wat moet hieraan nu toegevoegd worden? (Opnieuw zal de discussie interessant en leerzaam zijn!)

Nu kunnen we definities introduceren als de kleinst mogelijke verzameling voorwaarden: dat een vierkant 'een rechthoek is waarvan alle zijden even lang zijn' of 'een ruit met een rechte hoek'. Deze mogelijke definities zouden nu door de leerlingen als zodanig herkend moeten worden.

Een andere manier om verder te gaan is: leerlingen zelf definities laten opschrijven.

Samenvatting

Laten we het leerplan eens bekijken – ofwel het voorgeschreven leerplan, ofwel de inhoudsopgave van het leerboek – en dan speciaal de gedeelten die de meetkunde betreffen. Opgemerkt zij dat in dit artikel het merendeel van de onderwerpen wordt aangestipt. Onderwerpen die vervolgens overblijven, zoals evenwijdige en snijdende lijnen, cirkels en constructies en dergelijke, kunnen gemakkelijk worden geïntegreerd in het model van Van Hiele, waarschijnlijk bij het tweede niveau, dat van de *analyse*.

Bijvoorbeeld, het opmerken van de eigenschap dat 'als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dat dan alle hoeken die gelijk lijken inderdaad gelijk zijn' kan gemakkelijk gebeuren op

het spijkerbord of op een stuk roosterpapier, of door het overtrekken van het origineel en het vervolgens langs de dwarslijn verschuiven van de overgetrokken tekening.

Ook cirkels kunnen worden onderzocht, veel uitgebreider dan gewoonlijk op dit niveau gebeurt, door gebruik te maken van een geocirkel (wat een geocirkel is, blijkt uit figuur 14, redactie). De stellingen die gewoonlijk zijn opgenomen in de middelbare-schoolboeken kunnen op informele wijze worden ontdekt met een geocirkel.

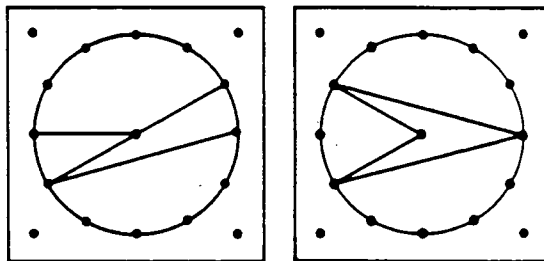
Bijvoorbeeld, de situatie van figuur 14a kan worden gebruikt om de termen straal, diameter (of: middellijn) en koorde te bespreken, terwijl figuur 14b kan worden gebruikt om de groottes van middelpuntshoeken en omtrekshoeken met elkaar te vergelijken.

Beginnen met een les over punten, lijnen, stralen, lijnstukken enzovoorts is zeker niet de enige juiste aanpak. Het gaat er om dat de leerlingen een gezonde kijk op deze begrippen krijgen, als een soort verdieping van de ervaringen met eenvoudige figuren.

Ook is het niet zo dat we pas iets aan meetkunde mogen doen als we bij het desbetreffende hoofdstuk zijn gearriveerd. We kunnen bij wijze van spreken elke dag met meetkunde beginnen en er wekelijks aan blijven doen. Het model van Van Hiele pleit voor het ontwikkelen van meetkundige begrippen verspreid over een langere periode, in plaats van geconcentreerd in, pakweg, drie weken die gepland zijn voor een meetkunde-hoofdstuk. We kunnen er met onze leerlingen plezier in hebben zo nu en dan onderzoek in meetkundige zaken te plegen, als welkome onderbreking van het rekenwerk dat meestal de eerste hoofdstukken in beslag neemt.

Tenslotte zouden we de genoemde hulpmiddelen en de handelende aanpak ook kunnen gebruiken bij de behandeling van de begrippen oppervlakte en inhoud. Zodra het begrip inhoud is geïntroduceerd kunnen de meer gevorderde leerlingen worden uitgedaagd de eigenschappen van kubussen, prisma's en piramides te onderzoeken.

Welke eigenschappen van het vierkant gelden ook voor kubussen?



Figuur 14. (a)

(b)

Met tweede-klassers is een uitbreiding van de afstandsformule van het platte vlak naar de ruimte nu heel goed mogelijk.

Waar u ook mee bezig bent, laat de leerlingen niet alleen maar over meetkunde 'lezen' of louter naar meetkunde 'kijken'. Zelfs bij gebrek aan hulpmiddelen kunnen ze aangezet worden tot het controleren van hun veronderstellingen. Terwijl ze met deze activiteiten bezig zijn wordt al snel duidelijk dat het nodig is nauwkeurige tekeningen te maken, dat er gradenbogen, linialen en passers nodig zijn, en dat het 'opmeten' zo zijn beperkingen heeft.

Als meetkunde wordt geïntegreerd in het jaarprogramma kan het gebruik van rechthoekige stroken bij het rekenen met breuken meer betekenis krijgen, kunnen cirkeldiagrammen gemakkelijker worden geconstrueerd (probeer ze op een geocirkel te construeren) en kan meetkunde worden tot een volwassen onderdeel van de wiskunde, in plaats van een los hoofdstuk in de jaarlijkse leerstof.

Misschien is dit laatste punt zelfs waardevoller dan de mogelijkheid dat we leerlingen naar een niveau hebben geleid van waaruit ze formele meetkunde kunnen volgen.

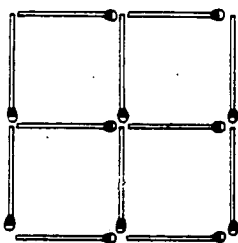
Uit: *The Mathematics Teacher*, september 1985.
Oorspronkelijke titel: *Geometry in the Junior High School*.

Vertaling: Juanita Benschop en Marion Seijsener, Amsterdam.

WERKBLAD

Enkele opgaven over vierkanten

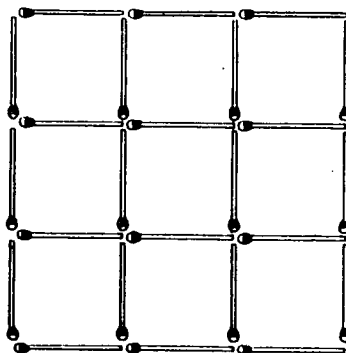
1. Begin met twaalf lucifers, neergelegd zoals in het plaatje te zien is. Haal twee lucifers weg, zó dat je twee vierkanten over houdt. (Kunnen deze twee vierkanten even groot zijn?)



2. Begin met 24 lucifers, neergelegd zoals in het plaatje te zien is. Zij vormen zo 9 kleine vierkanten.

a. Neem 8 lucifers weg zó dat er twee vierkanten over blijven, die verschillend in grootte zijn.

b. Neem 4 lucifers weg zó dat dat er 5 even grote vierkanten over blijven.



3. Voor opgave 2a bestaan er tenminste twee oplossingen:

1e. Je kunt 8 lucifers weg halen om zo een vierkant van 1 bij 1 en het grote vierkant over te houden, en

2e. Je kunt 8 lucifers weg halen (niet dezelfde 8 natuurlijk) om zo een vierkant van 2 bij 2 en het grote vierkant over te houden.

Laat deze twee oplossingen zien. Laat bij 2e zien dat er in dat geval vier manieren zijn om de oplossing te krijgen.

Literatuur

Burger, William. *Thought Levels in Geometry*. Interim report of the Assessing Children's Development in Geometry study. Corvallis, Oregon: Oregon State University, 1981.

Driscoll, Mark. *Research within Reach: Secondary School Mathematics, a Research-guided Response to the Concerns of Educators*. St. Louis, Mo.: CEMREL, 1982.

Hoffer, Alan. 'Geometry Is More Than Proof'. *Mathematics Teacher* 74 (January 1981): 11-18.

Olson, Alan T. *Mathematics through Paper Folding*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1975.

Usiskin, Zalman. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final Report of the CDASSG Project. Chicago: University of Chicago, 1982.

Over de auteur:

Fernand J. Prevost is verbonden aan het State Department of Education, New Hampshire, Verenigde Staten.