Leerstijlaspecten; rigiditeit versus flexibiliteit[1]

Er is *moed* voor nodig om te veranderen
wat aan verandering toe is.
Maar ook *kracht* om te bewaren
wat niet verloren mag gaan.

Harrie Broekman

In de artikelen 'leerstijlaspecten' veld(on)afhankelijkheid I en II[2] heb ik aangegeven dat leerlingen zich bij het opnemen, verwerken en gebruiken van begrippen, algoritmen, werkwijzen e.d. een kenmerkende stijl verwerven.
Ten aanzien van het daar behandelde leerstijlaspect 'veld(on)afhankelijkheid heb ik enkele suggesties gedaan i.v.m. het rekening houden met verschillen tussen de leerlingen. Door een op interactie gerichte aanpak, door stapsgewijze opbouw, door duidelijke typografie en het goed gebruiken van het visuele kúnnen we de meer veldafhankelijke leerlingen een grotere kans geven zich op wiskundig gebied te ontwikkelen. Ook bij het in dit artikel aan bod komend leerstijlaspect 'rigiditeit' zullen enkele suggesties gedaan worden voor de klassepraktijk. Daaraan voorafgaand zal ik echter eerst aangeven wat onder 'rigiditeit' verstaan wordt, om vervolgens een viertal punten te bespreken die rigiditeit oproepen en/of versterken. Aan deze vier punten gekoppeld zullen dan een aantal suggesties volgen. Het geheel wordt afgesloten door een korte samenvatting.

Einstelling, Rigiditeit

'Ja, maar zo doe je dat toch altijd!?'

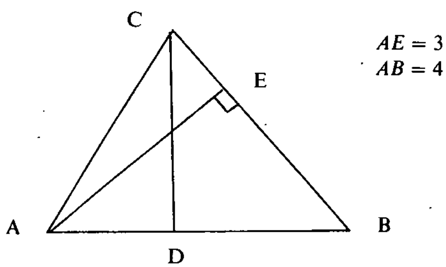
Voorbeeld
$x^2 + 6x - 7 = 0$ etc. werden opgelost door ontbinden, daarna door kwadraatafsplitsing en vervolgens met de a,b,c-formule.
$x^2 + 8x + 12 = 0$ en $x^2 + 5x = 0$ werden door veel leerlingen eveneens met het 'kanon' aangepakt.
(leraar tegen leerling: waarom zal die naam verzonnen zijn?)
Met dit voorbeeld[3] wil ik aangeven dat nogal wat leerlingen zich kennelijk instellen op een bepaalde aanpak en deze ook toepassen op een probleem dat in onze ogen 'eenvoudiger' aangepakt kan worden, zoals hier door ontbinden in factoren. Dit verschijnsel wordt wel *Einstellung* genoemd.
Erger is het nog als de ingeslepen aanpak (in dit geval het benutten van het kanon) gebruikt wordt in een situatie waar het niet kan of mag, zoals bij $x^3 - 3x^2 + 4x = 0$. In dat geval pleegt men te spreken van *Rigiditeit*.
Voor het vervolg zal ik de begrippen Einstellung, rigiditeit en flexibiliteit als volgt definiëren:
Einstellung is de tendentie om op een bepaalde manier waar te nemen en/of te reageren op een voorwerp, een opgave of een situatie.
Rigiditeit is het *on*vermogen om een Einstellung te veranderen en verschillende benaderingen te proberen bij het oplossen van opgaven.
Flexibiliteit is het vermogen om verschillende benaderingen te proberen bij het oplossen van opgaven.

Einstellung en rigiditeit kunnen opgeroepen en versterkt worden door gemakzucht, faalangst, het te formele karakter van bepaalde leerstof, maar ook door de oogkleppen die de leerlingen soms door het leerboek of de leraar opgezet krijgen.
Ieder van deze punten zal ik in het volgende aan de orde laten komen, geïllustreerd met enkele voorbeelden en gevolgd door een korte samenvatting.

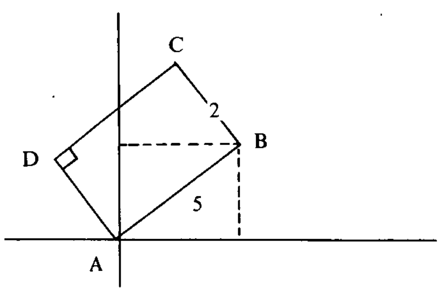
I Gemakzucht

Hierover wil ik kort zijn: juist in de wiskunde leren we (gezonde!) gemakzucht waarderen, bijv. door in die gevallen waar we veelvuldig een zelfde type berekening moeten uitvoeren een formule te ontwikkelen.
Daarna hoeven we 'alleen maar' te substitueren. Dat dit soms wat uit de hand loopt is duidelijk het geval bij de volgende voorbeelden, die deels door Van 't Riet en Bos genoemd zijn.

Voorbeeld 1
De leerlingen hebben zeer goed geleerd dat een veelgebruikte rechthoekige driehoek de zijden 3, 4, 5 heeft. Bij de vraag: 'wat is de oppervlakte van $\triangle ABC$?' wordt door een leerling, gezien de gegevens, direct aan 3,4,5 gedacht en aan BE de lengte 5 toegekend; en toen liep deze leerling vast.



Voorbeeld 2
De leerlingen hebben een aantal oppervlaktes uitgerekend door rechthoeken om te bouwen en stukken op te tellen en af te trekken Bij de vraag: 'wat is de oppervlakte van rechthoek $ABCD$' werd dat eveneens geprobeerd.



Voorbeeld 3 (eindexamen HAVO 1974)
$f: x \rightarrow (x-2)^2(2x+1)$ en $g: x \rightarrow 2(2x+1)$
Voor welke x geldt: $f(x) = g(x)$?
Veel leerlingen pakten dit vraagstuk aan door haakjes weg te werken, terwijl we mogen aannemen dat de leerlingen vergelijkingen van het type $AC = BC$ konden oplossen.

Voorbeeld 4
Bij het doornemen van het leerstofpakketje 'Matrices' kostte het mij moeite om de mij bekende volgorde/richting te veranderen.

Vermenigvuldigingstabel met 'volgorde'

×	5	7
2	10	14
3		

$2 \times 5 = 10$
$2 \times 7 = 14$
etc.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{VAN} \\
 & \begin{array}{ccccc} K & R & N & O & L \end{array} \\
\text{NAAR} \begin{array}{c} K \\ R \\ N \\ O \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

K = Katwijk; N = Noordwijk; R = Rijnsburg; O = Oegstgeest; L = Leiden

Is hier iets aan te doen?
Anders gezegd: kunnen we voorkomen dat de gezonde gemakzucht zo ongezond gaat uitpakken? Een eenduidig, volledig antwoord op deze vraag is niet te geven. Toch zijn er wel een aantal suggesties te doen waarmee we een eind kunnen komen.

1 Het is van belang dat de leerlingen *bewust leren kiezen* voor een bepaalde aanpak, een bepaald algoritme, wetende dat deze aanpak, dit algoritme wel eens omslachtig is of zelfs niet werkt. Skemp, Van Parreren en vele anderen benadrukken juist dit bewuste kiezen.
2 Amerikaans onderzoek naar de 'more successful mathematics teachers' – zowel qua prestatie van de leerlingen als qua persoonlijke waardering door de leerlingen – geeft aan dat deze succesvolle wiskunde leraren meer tijd besteden aan het stellen van zgn. procesvragen (vragen om verklaringen) dan

hun minder succesvolle collega's. Uit dit onderzoek valt de aanwijzing te halen dat *onderwijsleergesprekken en klassegesprekken* leerlingen helpen tot betere resultaten te komen.

3 Het gebruik maken en oproepen van de *verwondering*[4] kan eveneens helpen om het alleen maar volgen van vaste patronen, daar waar nodig, te doorbreken.

II Faalangst

De angst om te falen, het zoeken van een stukje veiligheid, maakt dat veel leerlingen zich vastklampen aan – al dan niet begrepen – foefjes, regeltjes, maar ook zeer nette algoritmen. Het ontbreekt deze leerlingen aan het lef om gewoon eens iets te proberen.

Nu krijgen ze daar ook niet zo de kans voor, want proberen betekent de tijd hebben en nemen om over die probeersels te praten, niet alleen door de leerling zelf, maar ook door de leraar. Dat is niet gemakkelijk in een klas waar ook een aantal leerlingen zitten die allang onze 'goede' oplossingsmethode door hebben. Ook het overvolle, gestroomlijnde programma speelt hier een negatieve rol bij.

Dit volle programma maakt dat je als leraar de neiging hebt om op te schieten, snel door te stoten naar de moeilijkere delen van een hoofdstuk. Het lef om te geloven in het elastiekjesmodel – veel tijd uittrekken voor de start van een onderwerp, zodat de basis gelegd wordt voor een latere, snellere voortgang – ontbreekt daardoor bij veel leerboekschrijvers én leraren. In de terminologie van Van Hiele: het grondniveau komt onvoldoende aan bod. Dit zorgt er ook voor dat nieuwe begrippen en rekenwijzen soms gebouwd worden op een zeer wankele ondergrond, hetgeen nog versterkt wordt door het gebruik van woorden/begrippen die in het dagelijks leven een net iets andere betekenis hebben. Voorbeelden daarvan zijn 'ruit' (de meeste ruiten zijn rechthoeken en als mijn vrouw het over een ruitje heeft bedoelt ze weer iets anders), 'afstand' (veel afstanden geven we in het dagelijks leven aan door middel van benodigde reistijd), 'hoogtelijn' (altijd verticaal?), 'relatie', 'functie', 'macht', etc.

Is hier iets aan te doen?

Anders gezegd: kunnen we rekening houden met de faalangst en deze misschien zelfs verminderen? Ook op deze vraag kan niet zonder meer ja, of nee, geantwoord worden. Het enige dat daar met zekerheid over te zeggen valt is dat het vaak helpt als we de leerlingen zoveel mogelijk duidelijkheid verschaffen, ze de tijd geven om te zoeken, te proberen én over hun probeersels in een open sfeer te praten. In ieder geval is het zo dat een toedekken van onbegrip, of halfbegrip, door foefjes etc. beslist niet helpt. Hooguit op de korte termijn, maar dat helpt de leerling maar zelden voor de lange termijn. Het kan – bewust toegepast – hooguit helpen de leerling uit een put te trekken; of zoals H. J. Hermans[5] het zegt: het gevoel te geven dat hij/zij misschien toch wel iets kan. Meer is het beslist niet.

III Het formele denken

In het artikel 'Setvorming, wat valt er aan te doen?' noemt Bos twee groepen van voorbeelden: a) voorbeelden die betrekking hebben op onvoldoende verwerkte algoritmen en b) voorbeelden die betrekking hebben op sterke verwachtingspatronen.

In deze paragraaf wil ik nader ingaan op a), in de volgende paragraaf op b). Bij Bos lezen we het volgende:

> Stellen we nu de vraag: hoe kan setvorming door onverwerkte algoritmen verminderd resp. vermeden worden? Het antwoord ligt voor de hand: Dit kan alleen door de algoritmen beter te behandelen. Als algoritmen goed begrepen zijn en vooral als ook hun draagwijdte doorzien wordt, zal in ieder geval van rigiditeit geen sprake zijn. Een kortere weg kan uiteraard ook dan nog wel over het hoofd gezien worden.

Dat er bij goed begrepen algoritmen, waarvan de draagwijdte doorzien wordt, geen sprake zal zijn van rigiditeit hoeft niet te gelden voor de lange termijn. Van groot belang is daarbij de manier waarop we het algoritme bijhouden. Bos zegt hierover:

> Belangrijker misschien dan de behandeling van de algoritmen is de wijze waarop in het verdere onderwijs op de oude algoritmen wordt teruggekomen. In de eerste plaats is het nodig dat geregeld gevraagd wordt: 'waarom ook weer?' of 'hoe zat dat?'...

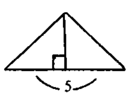
Het kunnen beantwoorden van 'waarom' en 'hoe' vragen vergt echter van de leerlingen een afstand

kunnen nemen, hetgeen een formeel denken vereist waar veel van onze leerlingen veel moeite mee hebben (volgens Piaget 'nog niet aan toe zijn').
Wat minder resp. meer formeel denken inhoud zou ik met Prof. Dr. M. Geensen[6] willen aanduiden met de volgende omschrijvingen:

Een – op een bepaald gebied – minder formeel denkend persoon komt tot oplossing van problemen door zijn ervaringen te ordenen, iets uit te proberen en achteraf te besluiten. In veel gevallen echter ook door gewoon (na)doen.
Een – op een bepaald gebied – meer formeel denkend persoon kan op grond van enkele ervaringen hypothesen opstellen over de realiteit (waaraan begrippen etc. zijn ontleend), zich daarbij richten op mogelijkheden, niet alleen op de werkelijkheid zoals deze zich voordoet.

Mede op grond van het voorgaande zou ik – telkens denkend op een schaal van minder naar meer – als kenmerkend voor iemand die op een bepaald terrein formeel kan denken willen noemen, dat hij/zij in staat is om op dat terrein abstract te werken, van belang zijnde factoren kan opsporen, met verhoudingen kan rekenen, systematisch kan werken, uit kan gaan van hypothesen.
Problemen in de wiskundeles hebben – vooral bij 12 tot 16 jarigen – vaak te maken met het feit dat leerlingen met een van deze kenmerken problemen hebben. Ter toelichting laat ik een lijst volgen met korte aanduidingen.

1 Abstract kunnen werken (niet gebonden aan concrete situaties)
voorbeelden:
- werken met letters (variabelen)
- algemene uitspraken kunnen doen
- werken met het begrip oneindig
- werken met begrippen als vector, groep, etc.

2 Van belang zijnde factoren kunnen opsporen
voorbeelden:
- wat is de maximale inhoud die je kunt vouwen van een gegeven stuk papier?
- overbrengen van een hoek met passer en lineaal
- 

wat is de oppervlakte?
- welke – bekende! – gonio formule moet ik bij deze opgave benutten?

3 Met verhoudingen kunnen rekenen
voorbeelden:
- puntvermenigvuldigen
- sin-regel
- recept voor 4 personen in een voor 3 personen omzetten

4 Systematisch kunnen werken
voorbeelden:
- aantal gelijkbenige rechthoekige driehoeken tellen/berekenen in  etc.
- produktverzameling uitschrijven

5 Uit kunnen gaan van een hypothese
voorbeelden:
- stel $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met p en q relatief gezien
- $x^2 + 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$
- stel de hoek is x, dan is het complement ... dus supplement min complement is ...
-  opp. $= \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte
- veel *'taal-afspraken'*; (hoogtelijn, macht, richtingsvector)

Ook nu kunnen we weer de vraag stellen: *is hier iets aan te doen*? Anders gezegd- kunnen we als leraar rekening houden met het feit dat sommige leerlingen op bepaalde gebieden (nog?) niet zo formeel kunnen denken als nodig is?

a Piaget-aanhangers zullen aanraden te wachten tot de leerlingen er wel aan toe zijn (uitstellen van bepaalde leerstof, leerstofonderdelen, vraagstellingen). Leraren die in het tweede-kans-onderwijs aan volwassenen lesgeven zullen dit misschien wel willen beamen.

b Skemp en Van Hiele zullen stellen dat we langer moeten werken op het grondniveau en het eerste niveau om daarmee de abstractere wiskunde beter te onderbouwen. Het bewust maken van waar de problemen zitten speelt daarbij een grote rol; hierbij is het samen praten weer een essentiële voorwaarde.
Erg belangrijk is ook het tijd nemen aan het begin van een hoofdstuk, door een start te maken met heel concreet werken. Van Hiele wil in geval van 'niet aanslaan' of moeilijkheden graag even wachten en er dan op terugkomen.[7]
Van Streun[8] adviseert om de leerlingen maar eens te laten proberen volzinnen te vertalen in algebraïsche uitdrukkingen en omgekeerd. Laat de leerlingen veelvuldig grafieken tekenen bij functies en m.b.t. die grafieken redeneringen opzetten, naast

de algebraïsche redeneringen, etc., etc.

c Aanhangers van de ideeën van de Rus Vygotski zullen zeggen: geef de leerlingen gelegenheid te werken in hun zône van naaste ontwikkeling.
Dat wil zeggen: geef hun niet alleen werk te doen dat ze in hun eentje kunnen, maar geef ze vooral ook werk te doen dat ze met een beetje hulp aankunnen. Hierdoor worden ze telkens net iets uitgetild boven hun huidige niveau van functioneren, waardoor cognitieve (verstandelijke) ontwikkeling kan plaatsvinden.
Van belang i.v.m. de motivatie van de leerlingen is daarbij in al deze gevallen dat zij een stukje vertrouwen in eigen kunnen en een realistische kijk daarop kunnen opbouwen. Dit geldt in het algemeen voor iedere leerling en zeker voor die met veel faalangst.

IV Oogkleppen

In zijn eerder aangehaalde artikel spreekt Bos over setvorming door sterke verwachtingspatronen. Als voorbeeld noemde hij o.a. de verwachting dat je bij het berekenen van de afstanden van twee punten de afstandsformule zult moeten toepassen en dat dan ook doet bij de afstand van de punten $(-3, 5)$ en $(7, 5)$. Hij signaleerde de mogelijkheid om dit soort oogkleppenwerk te voorkomen door de leerlingen te dwingen tot concretisering.

We kunnen hen, veel meer dan gebruikelijk is, zelf voorbeelden laten geven en we kunnen veel meer gebruik maken van opgaven van de vorm:
'Welke van de volgende beweringen zijn waar?
Indien onwaar, geef dan een tegenvoorbeeld.'
Dergelijke opgaven komen tegenwoordig wel in alle leerboeken voor, maar naar mijn mening toch nog veel te weinig. Ze kunnen praktisch bij elk onderwerp gemaakt worden.

Het type opgave waar Bos hier op doelt kan uitgebreid worden met opgaven van het type:

- plaats haakjes zodat er een ware bewering staat: $a + 3a + b = 4a + 3b$
- teken een grafiek van een funktie die niet van de eerste graad is en ook niet van de tweede graad
- probeer een oplossing van de volgende vergelijkingen te vinden door proberen
- waarom heeft de volgende opgave een niet-lege oplossingsverzameling?
  Los op in $\mathbb{Z}$: $2x - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2x$

Deze lijst is nog verder uit te breiden; ik zal hier echter volstaan met het aangeven van een tweetal voorbeelden, waarvan het eerste een duidelijke poging is om eenzijdigheid tegen te gaan.

Voorbeeld 1 [9]
Ten behoeve van een *gesprek* over haakjes wel of niet verwijderen legde een hospitant de leerlingen het volgende voor:

Haakjes verwijderen
Reken de volgende sommetjes na:

$(10 + 1)2 = 10 + 12$	$3(7 + 8) = 37 + 8$
$(2 + 7)9 = 2 + 79$	$6(3 + 9) = 63 + 9$
$(5 + 1)3 = 5 + 13$	
$(4 + 10)8 = 4 + 108$	

Je ziet dat de haakjes overbodig zijn. Daarom kunnen we die haakjes net zo goed weglaten. Dat bespaart energie en papier.
Verwijder nu zelf de haakjes

$(6 + 6)6 =$	$6(8 + 4) =$
$(2 + 1)6 =$	$3(6 + 9) =$
$(9 + 1)8 =$	

Ook uit de volgende som blijkt de overbodigheid van de haakjes. Reken na:
$5 + 35 = (5 + 3)5 = 8(2 + 3) = (2 + 3)8 =$
$= 2 + 38 = 40$
$2 + 16 = (2 + 1)6 = 3(5 + 1) = (5 + 1)3 =$
$= 5 + 13 = 18$

Voorbeeld 2 [10]
De afstand van een punt tot een lijn wordt in veel leerboeken voor HAVO en VWO behandeld in het hoofdstuk over vectoren en in een later stadium komt dan een formule (als de lijn gegeven is door een vergelijking). Het gevolg is dat veel leerlingen vanaf dat moment vrijwel blindelings een van beide rekenmethodes kiezen, zonder het gezonde verstand te gebruiken. Het is zinvoller een gesprek te voeren over de verschillende mogelijkheden en hun achtergronden (uiteraard op de momenten dat de leerlingen daar aan toe zijn), zodat er bewust gekozen kan worden.
Daarbij hoort de leerling ook te weten of zijn keuze vertaalwerk vraagt (van vectorvoorstelling naar vergelijking, of omgekeerd) én veel rekenwerk.

Het voorkomen van onnodige rigiditeit is o.a. mogelijk door het bewustmaken van oogkleppen.

Daar bedoel ik mee dat het vaak onnodig is dat de leerlingen op een vast spoor vastgepind worden, of zichzelf pinnen. Maar ook, dat als dat wel gebeurt, ze zich daarvan bewust zijn, dat het een bewuste keuze inhoudt.

V Samenvattend

Negatieve faalangst, het formele denken dat nogal eens vereist wordt, de oogkleppen die leerlingen opgezet gekregen hebben, maar ook gezonde(?) gemakzucht kunnen Einstellung en rigiditeit oproepen en versterken.
Het is beslist niet zo dat wij als wiskundeleraren voor al deze zaken verantwoordelijk zijn. Wel is het zo dat we door de manier waarop we met de leerlingen bezig zijn in het onderwijs hen én onszelf bewust kunnen maken van de bijbehorende verschijnselen. Tevens kunnen we door keuzes duidelijk te motiveren, veel tijd te besteden aan het onderbouwen van begrippen en algoritmen (werken op grondniveau), de verschillende aspecten van formeel denken te helpen ontwikkelen én de leerlingen te helpen een stukje zekerheid op te bouwen een bijdrage leveren aan een plezierig bezig zijn met wiskunde.

Noten

1 In een aantal artikelen in Euclides (56e jrg. en 57e jrg.) heeft S. P. van 't Riet aandacht besteed aan setvorming en de verschijnselen Einstellung en rigiditeit. De reactie daarop van W. J. Bos in Euclides 58 nr. 3 bevatte een aantal waarderende en kritische kanttekeningen, die m.i. echter niet het gehele gebied bestrijken dat in dit verband van belang is.
2 Euclides 59e jrg. nr. 10 en 60e jrg. nr. 2.
3 Zie voor andere voorbeelden o.a., '*Wat bepaalt ons handelen*' (Eucl. 59e jrg. nr. 9) en de vijf artikelen van S. P. van 't Riet (Eucl. 56e jrg. en 57e jrg.) resp. het artikel van W. J. Bos in Eucl. 58e jrg.
4 L. Jonker uit Zeist benut bijvoorbeeld bewust het moeten doorbreken van een vast patroon bij de start van het onderwerp oppervlakte funkties. Juist omdat vaste patronen voor veel leerlingen zo vanzelfsprekend zijn.

funktie	$x \to \frac{1}{4}x^4$	$x \to \frac{1}{3}x^3$	$x \to$	
afgeleide	$x \to x^3$	$x \to x^2$	$x \to x^1$	
	$x \to$	$x \to$	$x \to$	$x \to -\frac{1}{2}x^{-2}$
	$x \to x^0$	$x \to x^{-1}$	$x \to x^{-2}$	$x \to x^{-3}$

Voor verdere voorbeelden zie Eucl. 58 pag. 264, *Verwondering als noodzakelijke voorwaarde voor leren?*
5 In *Van faalangst tot verantwoordelijkheid* zeggen Dr. H. J. M. Hermans, Th. Bergen en R. W. Eijssen o. a. 'In de opvoeding en in het onderwijs is de aanleg, als wij die zouden kunnen vaststellen, een gegeven; het opvoedings- en onderwijsproces echter kunnen wij beïnvloeden en wel zo, dat de negatieve faalangst minder kans krijgt om het leerproces te blokkeren.'
6 Zie Prof. Dr. M. Geensen *De cognitieve ontwikkeling volgens Piaget e.a.* Uitgave van het Ped. Did. Instituut voor de Leraarsopleiding te Utrecht.
7 P. van Hiele, *Begrip en Inzicht* en vele andere publikaties.
8 A. van Streun, *Grafieken gebruiken!*, Euclides 59e jrg. nr. 1. Zie ook H. Broekman, *Grafieken en functievoorschriften*, Euclides 59e jrg. nr. 3.
9 Dit voorbeeld is afkomstig van Van Meeuwen die in zijn natuurkundestage geleerd had de leerstof levendig te maken door praktika, demonstraties e.d. en dit – geïnspireerd door zijn mentor (dhr. H. Bolt) – graag in de wiskundelessen wilde doorzetten.
10 Zie voor een uitvoerige behandeling van dit voorbeeld: *Wat bepaalt ons handelen?*, Eucl. 59e jrg. nr. 9.