

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

11 Mathematisch didaktisch praktikum

Een leraar wiskunde & didaktiek aan de pedagogische akademie heeft het grote voorrecht dat hij zijn studenten ook in hun toekomstig werkterrein, het basis-onderwijs, mag begeleiden. Het is een voorrecht omdat hij wiskundeonderwijs daarbij op enige afstand kan beschouwen, terwijl hij – in 't algemeen – zich toch sterk erbij betrokken voelt en er een grote verantwoordelijkheid voor draagt. De afstandelijkheid stelt hem voortdurend in de gelegenheid om zijn kennis van het vak te vergroten. Wie basisschoolleerlingen, P.A.-studenten en onderwijzers aan het werk ziet, ervaart wiskunde als een menselijke activiteit en leert met betrekking tot het onderwijzen en leren van wiskunde.

Ben je evenwel als leerplanontwikkelaar verbonden aan een (ontwerp) P.A., om daar bijvoorbeeld samen met de kollega's een programma voor je vak te ontwikkelen, dan is het voorrecht nog groter. Zowel in de P.A.-lessen – en vooral kort daarna – als in de basisschool wordt je de mogelijkheid geboden om wiskunde leren, wiskunde onderwijzen en leren wiskunde onderwijzen te observeren: Vanzelfsprekend laten we het niet bij observeren, ook het veld van de wiskunde & didaktiek dient tenslotte in toenemende mate georganiseerd te worden. Belangrijke observaties – wat op een zeker moment belangrijk geacht wordt hangt af van vele factoren, waaronder de mate van organisatie tot nu toe en de wijze waarop de observator die ziet – worden verzameld en dienstbaar gemaakt aan de ontwikkeling van het vakgebied.

Een dergelijke observatie, gedaan in een Gorinchemse oefenschool, vormt de kern van deze notitie. Ik laat het niet bij de observatie alleen; ze is verwerkt tot een mathematisch didaktische opgave. Ook bij het stellen van deze opdracht blijven we niet stilstaan. De opdracht is inmiddels uitgevoerd door onderwijsgevendenden met zeer verschillende achtergronden: derde jaars P.A.-studenten uit Hengelo, P.A.-docenten voor alle vakken op één P.A., wiskundeleraars aan Engelse Universiteiten met een opleiding voor onderwijzers, derde en vierde jaars studenten voor B. Ed in Nottingham, en straks, zo hoop ik, een aantal kollega's uit Nederland die deze Euclides in handen kregen.

In de discussies kwam een zeer merkwaardig verschijnsel naar voren. Het bleek dat in alle genoemde groepen ongeveer hetzelfde proces (van didaktiseren) werd doorgemaakt.

Ook dit (standaard?) proces wil ik hieronder beschrijven. U kunt het eventueel

gebruiken als vergelijkingsmateriaal indien u de didaktische uitdaging zelf heeft aangenomen.

We beginnen met de observatie.

Rob, tweedejaars student, heeft zich voorgenomen om met leerlingen uit de vijfde klas de staartdeling eens nader te bekijken. Als ze het algoritme (de manier van werken) kunnen uitvoeren, dan wil hij nagaan of dat automatisch, met of zonder inzicht verloopt.

Anja en Mark zijn de vijfdeklassers, die Rob heeft gevraagd voor een oriënterend gesprekje. Het eerst probleem ligt voor hun; op het kladblaadje staat $6/2734$. Rob wil, voordat ze gaan staartdelen, even weten of de kinderen enige betekenis aan die deling kunnen geven. Maar zijn vraag in die richting wordt niet begrepen. Heb je wel eens van *verdelen* gehoord?, vraagt hij dan. Jawel hoor, Mark begrijpt het nu. Hij schrijft op $2/2734$. Dan deel je het eerlijk, voegt hij eraan toe. Rob gaat met deze gedachte mee. De – nu eenvoudige – staartdeling wordt uitgevoerd:

$$\begin{array}{r} 2/2734 \backslash 1367 \\ 2 \\ \hline 07 \\ 6 \\ \hline 13 \\ 12 \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ja, maar we moesten niet met z'n tweeën verdelen, maar met z'n zessen!

Rob kijkt vol verwachting zijn leerlingen aan.

Anja: Goed, dan delen we nog een keer door 2, en dan – het antwoord – nog een keer.

Rob moet nu zelf nadenken. Laten we het maar eens doen, zegt hij.

De vraag aan de praktikanten luidt:

» Hoe kun je uitleggen dat Anja's voorstel – drie keer achtereenvolgens delen door 2 – hetzelfde is als delen door 8?

Voor degenen onder de lezers, die de uitdaging aannemen, noem ik enkele punten waarop de didaktische discussie rond de oplossing zich concentreerde.

Ze betreffen: de interpretatie van de begrippen konkreet en abstrakt, het signaleren van een getalsmatige instelling, de werking van materiaalfactoren, het inspireren tot mentale activiteiten en de waarde van het bewustmaken en structureren.

Nog één belangrijke aanwijzing vooraf. Wie gaat didaktiseren moet niet vergeten zijn gedachteneksperiment – hier in verband met het uitleggen – ook in details, en indien nodig materieel *uit te voeren*.

Deze hint, ook tijdens het begeleiden van het praktikum gedaan, bracht vaak het proces van didaktiseren weer op gang.

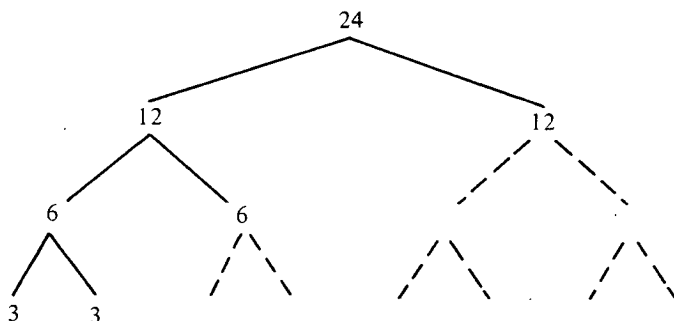
Welnu, de vraag is dus: hoe zou u het uitleggen?

In alle groepen, waarin de bovengenoemde vraag beantwoord werd, bleek zich ongeveer het volgende 'didaktiserings-proces' te ontwikkelen.

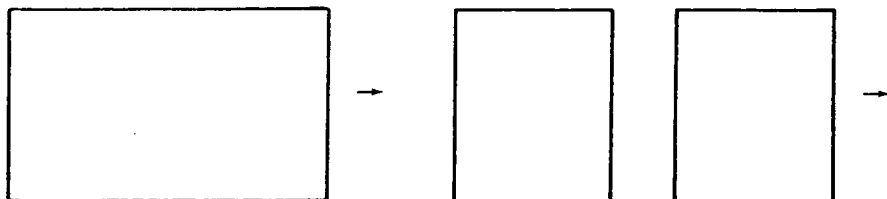
- 1 Ik zou ook laten delen door 6. Dan zien ze dat het fout is . . .
- 2 Laat het laatste quotient met 6 vermenigvuldigen. Omdat het dan niet klopt moeten ze gaan nadenken . . .
- 3 Laat delen door 8; je ziet dan onmiddellijk dat er hetzelfde uitkomt . . .
- 4 Ik zou kleinere getallen nemen, bijvoorbeeld 24. Delen door 2 levert 12, daarna 6, daarna 3. Nu zie je direkt . . .
- 5 Je kunt in het geval van de gegeven getallen ook het laatste quotient met 8 vermenigvuldigen . . .
- 6 Misschien is het beter om drie achtereenvolgende keren met 2 te vermenigvuldigen.

Afhankelijk van de praktikanen komt er tijdens of na de bovengeschetste getalsmatige benadering wel iemand met de gedachte om het op concreet niveau uit te gaan leggen; 'de kinderen zijn tenslotte ongeveer 10 jaar'.

- 7 Goed, laten we het concreet maken (sic!). Neem knikkers. Natuurlijk 24 stuks. Dan maak je eerst 2 hoopjes van 12, dan weer twee van 6 en tenslotte 2 van 3.
- 8 De bovenstaande uitleg werd niet echt (met materiaal) uitgevoerd. Als iemand toch de gedachtengang probeert in beeld te brengen, rijzen er moeilijkheden: Het aantal keren *verdelen* komt niet (in konkreto) overeen met het aantal keren delen:



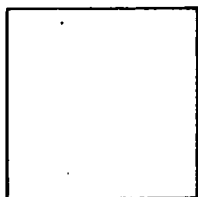
- 9 Misschien kun je beter een blaadje nemen en dat in tweeën scheuren.



Herhaal dit . . . Hier stuit men op dezelfde moeilijkheden als die in 8 werd geschematiseerd.

10 Een verbetering zou zijn als je het blaadje in tweeën zou scheuren, dan beide delen op elkaar legt, . . . enz.

11 In het bovengenoemde geval kun je na drie keer scheuren inderdaad de 8 stukken tellen. Het zijn evenwel losse stukjes, en de structuur ($2 \times 2 \times 2$) is moeilijk terug te vinden. Vandaar dat men voorstelt: Neem een vouwblaadje.



Vouw het in tweeën:



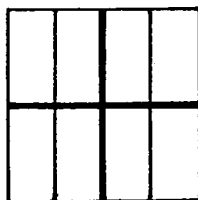
Herhaal dit:



En nog eens: (in tweeën delen)



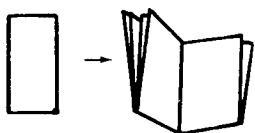
Als je dit nu openvouwt, dan zie je de 8 delen!



12 Tenslotte

De $2 \times 2 \times 2$ structuur, waarom alles hier dient te draaien, is niet zo goed te ZIEN in de twee-dimensionale situatie van vouwblaadje met vouwlijnen. Waarschijnlijk kan de bewustmaking van deze structuren geschieden door aan het konkrete vouwwerk een mentale activiteit toe te voegen:

Als er drie keer gevouwd (gehalveerd, in tweeën gedeeld) is, vraag je: 'hoe ziet het blaadje eruit als ik het nu openvouw?' Een kleine hint kan helpen: je begint met het openvouwen:



Wat denk je?

$2 \times 2 \times 2!$

*

Nog even terug naar Rob. De laatste hint en de bijbehorende mentale activiteit werkte uitstekend op Anja. Ze kon het zich zo goed voorstellen, dat ze er een schetsje van kon maken, voordat het vouwblaadje geheel open was. Wat Mark betreft kan ik u weinig vertellen; omdat hij ons zo weinig verteld heeft.

Over de auteur:

Fred Goffree, geb. 24-8-1934 in Amsterdam. Hij studeerde daar voor onderwijzer. De wiskundeleraar op de kweekschool, E. H. Schmidt, inspireerde hem tot de wiskunde studie (LO). Het was J. K. Timmer, die hem later door zijn bijzondere aanpak bewoog tot een voortgezette studie in de richting van K-I. Wiskunde beheerste een steeds groter wordend deel van zijn leven.

Toen de oude K-V akte werd veranderd in de nieuwe M.O.B., koos hij de studie voor de laatste. In Utrecht (C.O.C.M.A.) waren het toen vooral leraren als Dr. H. Streefkerk en Drs. J. de Jong die grote gebieden van de 'moderne' wiskunde toegankelijk voor hem maakten. Direct na het behalen van de akte (1961) kwam de CMLW met heroriënteringskursussen voor leraren. Het ging nog steeds over wiskunde. Pas in samenspraak en samenwerking met Edu Wijdeveld en Adri Treffers, op het eind van de zestiger jaren, kwam voor hem de mens bij het wiskunde bedrijven in beeld. Fundamentele didactische diskussies op het I.O.W.O., na 1971, kwamen daarna binnen zijn bereik, vooral door de bijdragen van Prof. H. Freudenthal.

In die tijd studeerde hij, uit louter belangstelling voor de menselijke kant van het onderwijzen, onderwijskunde. Vooral Pieter Span creëerde ruimte voor een integrale benadering van de beide vakgebieden van wis- en onderwijskunde.

Momenteel tracht hij de verworvenheden enerzijds ten dienste van de P.A. wiskunde en didactiek te stellen, anderzijds verder te ontwikkelen. Zijn vakdidactische notities getuigen hiervan.