

# Hoe moet men . . . .

Dr. P. M. VAN HIELE

Voorburg

## **Hoe moet men bij het opstellen van een methode voor wiskunde in de brugklas rekening houden met de denknivo's?**

### **1 Het bewijs van een eenvoudige stelling in de meetkunde**

De stelling: 'In iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk' behoort tot de zeer eenvoudige uitspraken in het begin van de meetkunde. Men zou zich kunnen voorstellen, dat het bewijs van deze stelling gekozen kan worden als eerste leerdoel van de meetkunde. Bij het opstellen van een strategie tot het bereiken van dit doel zien wij, dat aan de volgende voorwaarden moet worden voldaan:

- 1° De leerling moet weten wat een stelling is.
- 2° Hij moet weten, waarom men in de wiskunde gebruik maakt van stellingen.
- 3° Hij moet weten wat een gelijkbenige driehoek is.
- 4° Hij moet weten wat een hoek is.
- 5° Er moet bij hem een denkveld ontwikkeld zijn, dat het hem mogelijk maakt uitgaande van 'Van een driehoek is bekend, dat hij twee gelijke hoeken heeft' te komen tot 'We weten dan ook, dat er in deze driehoek twee bepaalde hoeken gelijk zijn'.

Het toepassen van deze strategie blijkt moeilijker dan we ons aanvankelijk hadden voorgesteld. Hoe moeten we aan een leerling uitleggen, wat een stelling is? We hebben daarbij niets aan een definitie van 'stelling'. Je hebt nu eenmaal niets aan een definitie van een begrip, als je van dat begrip niets afweet. Een definitie van een begrip is alleen mogelijk, als het denkveld waarin dit begrip voorkomt voor de leerling al enigszins geordend is. Een beschrijving van het begrip levert niets op, omdat men het begrip door middel van die beschrijving niet herkennen kan.

Als de leerling in een gewone gedachtengang langzamerhand de premissen en de konklusies heeft leren kennen, wordt het hem ook geleidelijk aan duidelijk, wat een stelling is. Het is mogelijk het begrip 'stelling' exemplarisch te begrijpen, alleen zijn er tamelijk wat exemplaren nodig, voor het begrip 'stelling' goed uit de verf komt. De eerste twee punten van bovenstaande analyse kosten dus veel meer tijd en voorbereiding dan men meestal aanneemt. Ook na de brug-

klas is de tijd nog niet gekomen dat de meetkundeleerstof in de vorm van stellingen kan worden aangeboden.

We zijn dus op grond van deze analyse genoodzaakt het leerdoel sterk te vereenvoudigen. We zullen niet moeten proberen de stelling te bewijzen, maar we zullen moeten proberen de leerling door middel van een zelfwerkzaamheid het verband tussen de zijden en de hoeken van een gelijkbenige driehoek te laten ontdekken. Daarbij zal de intuïtie een grote rol moeten spelen. Het zal er op neer moeten komen, dat een gelijkbenige driehoek een symmetrie-as heeft en op grond daarvan kan de leerling 'zien', dat twee hoeken van die driehoek, namelijk de basishoeken kongruent zijn. Er zijn echter veel zaken die een mens moet leren zien en daartoe behoort zeker het konstateren van de gelijkheid van twee hoeken.

Het begrip 'hoek' heeft weinig tastbaars en wordt heel gemakkelijk misverstaan. De halfrechten die een hoek begrenzen worden meestal afgebeeld als lijnstukken en het valt de leerling moeilijk de grootten van deze lijnstukken niet bij de beoordeling van de grootte van de hoek te betrekken. Als hulpmiddel kan men de grootte van een hoek eerst demonstreren aan de hoek tussen de wijzers van een klok. Daarbij wijst men steeds de boog van de eenheidscirkel aan als de 'grootte van de hoek'. Zou men de hoek meten in radialen, dan was de lengte van de boog meteen geschikt. We zitten dan echter meteen weer met het probleem, hoe de lengte van deze boog daadwerkelijk gemeten moet worden. We kunnen echter een kwart van de eenheidscirkelboog aanduiden met 'rechte hoek' en deze verder als hoekmaat gebruiken. Ook kunnen we deze rechte hoek in 90 of 100 gelijke delen verdelen en we zijn dan zo bij de traditionele hoekmeting aangeland.

Het vijfde punt van de strategie: 'het hanteren van een denkpatroon dat de weg tussen 'gelijkbenige driehoek' en 'gelijke basishoeken' mogelijk maakt, is een vrijwel onmogelijke opgave. Als we willen aantonen, dat een gelijkbenige driehoek een symmetrie-as heeft, komen we terecht in een serie uitspraken die een dogmatisch karakter hebben, of we moeten door vouwen laten zien, dat één papieren gelijkbenige driehoek een vouwlijn heeft waarom hij kan worden dubbelgevouwen en dan de leerling suggereren, dat dit voor iedere denkbeeldige gelijkbenige driehoek ook zo is. De docent die zo handelt is echter geheel op de verkeerde weg. Hij heeft nog steeds een logische rij van stellingen in zijn gedachte, ziet zich echter genoodzaakt van de bewijzen daarvan af te zien. In dit stadium heeft zo'n logische rij stellingen voor de leerling geen enkele betekenis. Wiskunde-onderwijs is iets geheel anders dan een poging om een ongelovige tegenstander te overtuigen. Het is zelfs zo, dat de stelling die we willen aantonen voor de leerling nog geen betekenis heeft. De as van de gelijkbenige driehoek moet in een structuur zijn opgenomen en niet zo maar toevallig als een konijntje uit een hoed tevoorschijn getoverd worden.

## **2 De taalbarrière tussen docent en leerling**

De moeilijkheid die we zijn tegengekomen bij 'stelling' en 'definitie' en die van punt 5 'het hanteren van een geschikt denkpatroon' hangen ten nauwste samen. Steeds weer komt het er op neer, dat de docent het denken van de leerling tracht te beïnvloeden volgens zijn denkpatroon en de taal die daaraan eigen is.

Dit denkpatroon van de docent is bezaaid met dogma's die hijzelf axioma's noemt, hij beschikt over een bij hem ingesloten methode deze axioma's tot stellingen te combineren. Hij is er zich nu wel van bewust, dat de taal die bij dit denkpatroon behoort niet die van het kind is, maar hij begaat zeer dikwijls de kardinale fout zijn taal te willen 'vertalen'. Waar echter ieder begrip ontbreekt, heeft de vertaling geen zin. Als men het bewijs van de stelling 'iedere gelijkbenige driehoek heeft een symmetrie-as' heeft vervangen door een demonstratie met een papieren driehoek, dan is het bewijs van de stelling 'overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn samen  $180^\circ$ ' volgens onderstaande figuur voor de leerling volkomen onzinnig. Als men de gelijkheid van

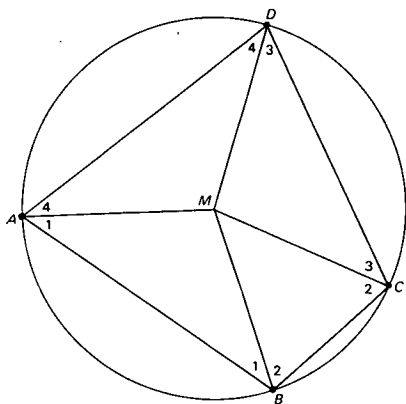


Fig. 1.

hoeken kan aantonen door middel van dubbelvouwen (op elkaar passen), waarom zou men dan de overstaande hoeken van de koordenvierhoek niet meten? Het spelletje met de syllogismen is voor de leerling onaanvaardbaar, omdat hij in die zin nog niet heeft leren denken.

De docent die een leerling werkelijk iets wil bijbrengen moet zich richten naar de taalschema's van het kind en hij zal heel veel leerstof lange tijd moeten laten liggen, omdat die leerstof met de taalschema's van het kind niet kan worden beschreven.

Ik heb vroeger de gaping tussen de taalschema's van het kind en die van de docent wel aangeduid als de gaping tussen twee denknivo's. Het kind, dat op het nulde nivo redeneert kan aan de redenering van de docent die op het eerste (of misschien wel het tweede) denknivo redeneert geen touw vastknopen. Zowel leerling als docent voelen zich machteloos en het onderwijsleerproces komt tot een stilstand.

Men kan deze afschuwelijke situatie vermijden door ervoor te zorgen, dat de docent de leerling steeds weer op het intuïtieve vlak ontmoet. Ik zal hierna laten zien, hoe men kan handelen om dit te bereiken. Eerst echter zal ik mijn opvattingen stellen, gedeeltelijk naast, maar gedeeltelijk ook tegenover die van Piaget.

### **3 De stadia in de ontwikkeling van het kind, zoals die door Piaget worden beschreven**

In zijn uitvoerige werk heeft Piaget duidelijk aangetoond, dat er bij de ontwikkeling van het denken van een kind verschillende stadia optreden. Zo bijvoorbeeld bij de ontwikkeling van het getalbegrip. In het eerste stadium heeft het kind er nog geen enkel benul van, wat een getal is. Het zal van een gegeven verzameling voorwerpen rustig vertellen dat het meer elementen bevat dan een andere gegeven verzameling en even later, dat het er minder zijn.

In het tweede stadium is het zover, dat het inziet, dat de plaatsing van de voorwerpen het oordeel over meer of minder kan beïnvloeden, het is echter nog niet in staat operatief met dit gegeven om te gaan. Pas in het derde stadium heeft het kind de overtuiging, dat het aantal elementen onafhankelijk is van de plaatsing van die elementen en kan het ook de gelijkheid van aantallen feilloos vaststellen.

Het is natuurlijk duidelijk, dat een onderwijs dat op het getalbegrip gebaseerd is, pas kan starten, als het derde stadium bereikt is.

Verscheidene didactici hebben gemeend, dat het doorlopen van de stadia een kwestie was van geestelijke groei in de meest letterlijke zin van het woord. Deze geestelijke voortgang zou 'van binnen uit' komen, men zou er geen invloed op kunnen uitoefenen en de onderwijskracht zou moeten afwachten tot het kind in zijn biologische ontwikkeling op het vereiste peil is gekomen. Het is niet zeker, dat deze denkwijze regelrecht van Piaget afkomstig is. Zijn geschriften suggereren heel dikwijls in deze richting. Maar er zijn ook uitspraken van deze tijd door volgelingen van Piaget gedaan, die aantonen dat men zich nog steeds niet van deze negatieve konklusie heeft losgemaakt.

Onder de onderwerpen die door Piaget zijn bestudeerd, komen er een groot aantal voor waarbij duidelijk sprake is van een ontwikkeling langs denknivo's. In elk van deze gevallen is het mogelijk door een aangepast onderwijsleerproces de overgang van het ene denknivo naar het andere te versnellen. Wat nog belangrijker is: als men zo'n onderwijsleerproces nalaat, wordt het kind overgelaten aan de incidentele leerprocessen die optreden, als het kind hier en daar flarden van kennis opvangt. In de volgende paragraaf zal ik nu laten zien, hoe een leermethode de overgang van het nulde naar het eerste denknivo in de meetkunde kan stimuleren.

### **4 Denkstructuren in de meetkunde**

De ontwikkeling van het denken bestaat voor een groot deel uit het assimileren van structuren. Wat een structuur is, zal uit het vervolg duidelijk worden. Een gelijkbenige driehoek is een vrij onbelangrijke figuur die zich voordoet bij het onderwerp 'symmetrie ten opzichte van een rechte'.

Er zijn verschillende wijzen waarop de symmetrie ten opzichte van een rechte zich in de praktijk manifesteert. Twee daarvan zijn belangrijk om van deze symmetrie kennis te nemen. De eerste is de symmetrie die wordt waargenomen bij het dubbelvouwen van een stuk papier en het uitknippen of doorprikken van de dubbelgevouwen figuur. De tweede is de symmetrie die wordt waargenomen als men een spiegel loodrecht op een stuk papier plaatst. Beide

manieren zijn geschikt om de symmetrie ten opzichte van een rechte te leren kennen.

Als het er om gaat de symmetrie operatief te leren beheersen, is het roosterpapier het meest geschikt. Met roosterpapier bedoel ik papier dat is voorbedrukt met een patroon van congruente vierkantjes. Het is verstandig vierkantjes met een zijde van 1 cm te kiezen. Een dergelijk rooster heeft een structuur die de leerlingen goed aanspreekt. Ze zien bijvoorbeeld onmiddellijk, dat men, om een op roosterpapier getekende figuur over te nemen, overal op het roosterpapier kan beginnen. Als het papier geen rand had, zou de keuzemogelijkheid onbeperkt zijn. De kinderen zien ook, dat men het papier zonder bezwaar een kwart slag kan draaien. Na geschikte oefening zien ze ook, dat links en rechts en ook onder en boven verwisseld kunnen worden. Weliswaar ontstaan er dan figuren die niet geheel en al congruent zijn, maar 'spiegeleigenschappen' vertonen. Als men de figuur uitknipt en met de achterkant van het papier boven legt, is de 'spiegeltoestand' weer opgeheven.

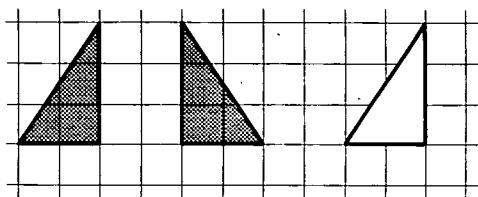


Fig. 2.

Tekent men op roosterpapier een verticale rechte, dan kan men daarin laten spiegelen. Het voorschrift is: 'Blijf op dezelfde horizontale rechte, ga voor het tekenen van het beeldpunt evenveel hokjes van de spiegelas naar rechts, als het originele punt links van de spiegelas ligt. Men kan het verband met de

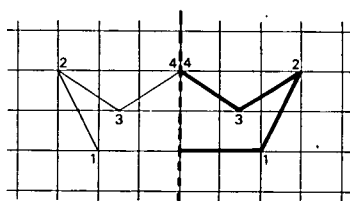
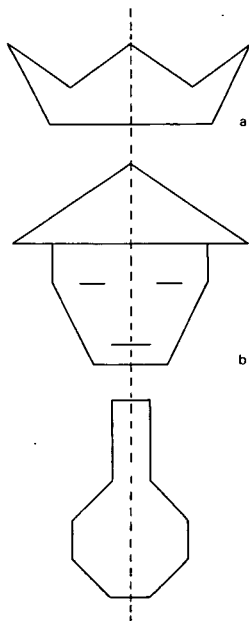


Fig. 3.

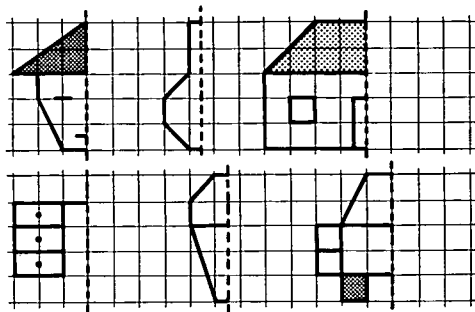


Fig. 4.

beide eerste vormen van spiegelen direct demonstreren door de figuur uit te knippen en langs de spiegelas dubbel te vouwen, of door een verticale spiegel te gebruiken'.

Men kan voor een geschikte emotionele basis zorgen door interessante figuren te laten spiegelen.

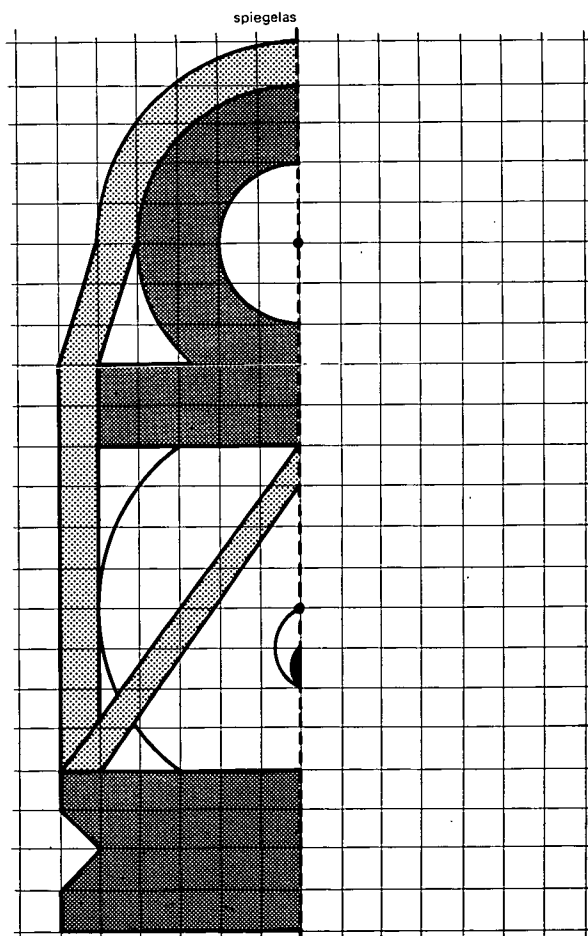


Fig. 5.

Natuurlijk kan men ook in horizontale spiegelingen laten spiegelen. Bij de actie 'spiegelen' ontstaan verschillende meetkundige figuren. De vierhoeken 'vlieger' en 'gelijkbenig trapezium' komen tevoorschijn als men in één spiegel laat spiegelen.

Rechthoek, ruit en vierkant ontstaan bij spiegeling in twee onderling loodrechte assen.

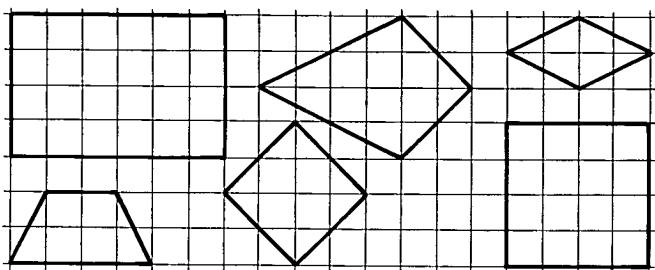


Fig. 6.

Het is nu duidelijk, waarom de beide soorten 'vierkant' oorspronkelijk niet als dezelfde figuur gezien worden. Ze zijn immers op verschillende manieren voortgebracht.

Ook de gelijkbenige driehoek wordt op deze manier verkregen.

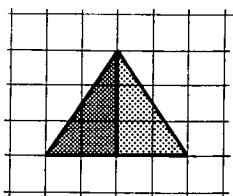


Fig. 7.

De gelijkheid van de basishoeken is van het begin af impliciet aanwezig. De leerlingen weten echter nog niet wat een hoek is. Bovendien zijn we uitgegaan van een driehoek met een symmetrie-as en niet van een driehoek met twee gelijke zijden.

De hierboven beschreven figuren zijn mét hun symmetrie direkte uitbreidingen van de roosterstructuur. Zij waren impliciet al in die structuur aanwezig. Het onderwijs-leerproces heeft geen andere functie dan deze structuur aan de kinderen bewust te maken. De waarheden worden afgelezen doordat de structuur als het ware tot de leerlingen spreekt. We hebben met een ware intuïtie te doen, omdat de resultaten niet duidelijk worden door een redenering, niet worden verkregen langs rationele weg, maar worden afgelezen. De gelijkbenige driehoek is zo maar een figuur die bij de spiegeling in een rechte optreedt. Het is hier wel op zijn plaats zijn naam te noemen en het feit, dat hij een symmetrie-as heeft. Eigenschappen van gelijkheid van lijnstukken en van hoeken moeten hier niet genoemd worden, omdat deze in de structuur direkt zichtbaar zijn en er op geen enkele manier zó uitspringen, dat het de moeite waard is ze te benadrukken.

## 5 De fasen van een onderwijs-leerproces dat de intuïtie hanteert

Het onderwijs-leerproces dat hier wordt toegepast kent ruwweg vijf fasen:

*Eerste fase: de informatie:* Het roosterpapier wordt aan de leerlingen voorgelegd en er wordt over de spelregels gesproken. De kontrôle-middelen: dubbelvouwen en de vertikale spiegel worden genoemd.

*Tweede fase: de gebonden oriëntatie:* De structuur moet tot de leerlingen spreken. Er worden dus oefeningen gegeven die moeten worden uitgevoerd. De kontrôle-middelen en de docent begeleiden de leerling bij zijn onderzoek.

*Derde fase: de explicitering:* Er wordt aandacht besteed aan de wijze waarop het waargenomen onder woorden kan worden gebracht. Er komen namen zoals 'spiegelas', 'symmetrie', 'rechthoek', en vele andere. *Er moet vooral op worden gelet, dat het aantal nieuwe begrippen niet te groot is. Wanneer dit boven de tien dreigt te komen, moet deze fase worden onderbroken en tot een nieuwe behandeling worden uitgesteld.*

*Vierde fase: de vrije oriëntatie.* Er worden nog een aantal opdrachten gegeven waarin het behandelde wordt ingeoefend. Er is nu een zekere vrijheid verschillende middelen te gebruiken die tot oplossing voeren. Er wordt ook gelet op de taal die in de derde fase ontwikkeld is.

*Vijfde fase: de integratie.* Deze kan dikwijls kort zijn. Er moet nog worden vastgelegd: wat hebben we eigenlijk geleerd? Wat zullen we daarvan onthouden?

De vijf fasen kunnen gespreid worden over twee of drie lesuren.

Het eerste leerdoel: 'het bewijzen van de stelling: in iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken kongruent', is daarmee niet bereikt. Er ontbreken nog twee belangrijke onderdelen:

- 1° Waarom heeft iedere driehoek met twee gelijke zijden een symmetrie-as?
- 2° Wat zijn basishoeken?

Op deze twee punten zal ik later ingaan. Eerst ga ik na, welke onderwerpen in het brugjaar parallel met de hiervoor genoemde leerstof behandeld kunnen worden in de wiskunde, waarbij voorop staat, dat we niet verder gaan dan het eerste denknivo.

## 6 Onderwerpen in de wiskunde die parallel behandeld kunnen worden

De wiskunde van nu vertoont een grote eenheid. Dit is een bekend gegeven. Minder bekend is, dat de samenhang ook reeds bestaat bij de overgang van het nulde naar het eerste denknivo. Het roosterpapier is vanzelfsprekend geschikt om er koördinaten mee in te leiden. Deze koördinaten kunnen dienen voor een oriëntatie op het roosterpapier; men kan er boeiende tekeningen mee laten maken. Zie fig. 8.

Het roosterpapier is ook geschikt voor een inleiding in het onderwerp: 'vectoren'. Ook zo kan men tekeningen laten maken.

Deze vectoren kunnen ook in verband gebracht worden met translaties. Men krijgt dan drie voorstellingen van de vektor: gericht lijnstuk, translatie, getallenpaar (of getallentripel, of getal). Wat een vektor precies is, heeft op dit nivo geen enkele betekenis, het zijn van de dingen komt vóór het tweede nivo niet ter sprake. Bij de zijswijze van vectoren gaat het grondleggende



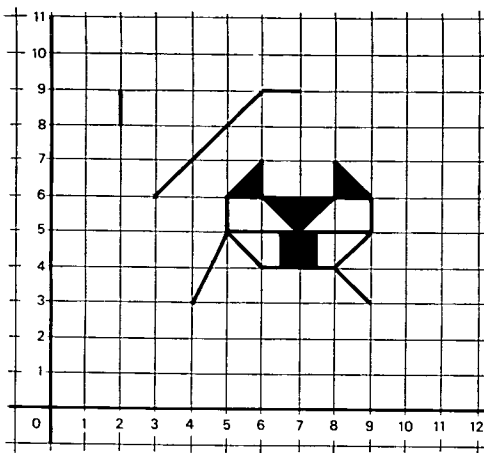


Fig. 8.

*Opdracht:* Maak de figuur af door de volgende punten te verbinden door een rechte streep: (9,3), (10,2), (10,1), (9,1), (7,3), enz.

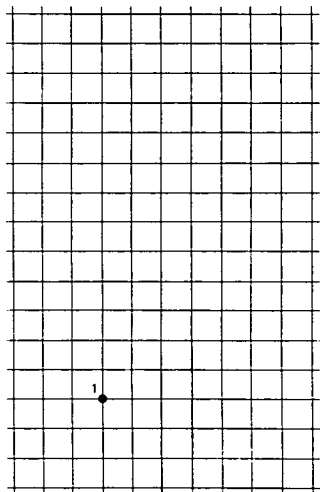


Fig. 9.

Maak de kale boom af door vanaf punt 1 achter elkaar de lijntjes te tekenen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ enz.}$$

axiomasysteem een rol spelen en op dat moment zijn de drie hiervoor genoemde voorstellingen alleen nog maar illustraties (of toepassingen).

Het optellen van vectoren kan geheel meetkundig worden verricht.

Op deze manier gaat het optellen van vectoren vooraf aan het optellen

van getallen. na  $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$  komt er op de getallenrechte

$(-4) + (-3) = (-7)$ . De optelling van vectoren is in twee dimensies veel

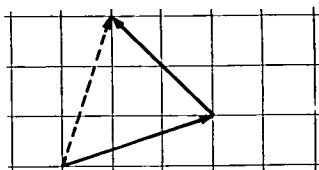


Fig. 10.

duidelijker afleesbaar dan in één dimensie op de getallenrechte. Ook de kommutatieve en associatieve eigenschappen laten zich aan tweedimensionale vektoren veel duidelijker aflezen dan aan ééndimensionale. Bovendien – en dat is waarschijnlijk nog het belangrijkste – worden deze eigenschappen als ze toegepast worden op vektoren door de kinderen als iets nieuws ervaren.

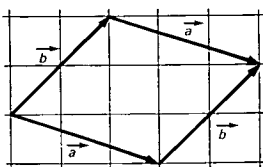


Fig. 11.

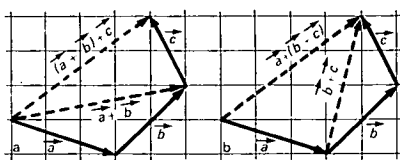


Fig. 12.

De distributieve wet:  $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$  is voor de leerlingen veel duidelijker dan de distributieve wet toegepast op uitsluitend getallen.

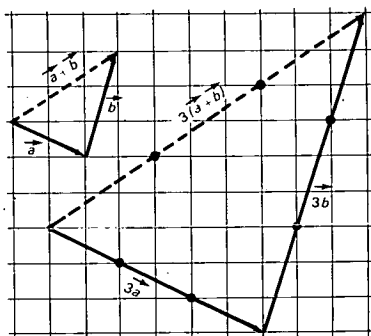


Fig. 13.

In deze overgang van het nulde naar het eerste nivo worden de eigenschappen steeds toegepast op vektoren die met kentallen zijn aangeduid, dus bijvoorbeeld:

$$2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De toepassing met letters heeft ten doel de algemeenheid van de wet uit te drukken. Van deze algemeenheid zijn de kinderen van het begin af overtuigd. Daarentegen is het 'werken' met in letters aangeduide vektoren nog niet aan de orde.

Parallel met deze leerstof kunnen ook verschillende afbeeldingen worden behandeld. We zijn al begonnen met de spiegeling. Behalve in de X-as en de Y-as, kan ook in de rechten met vergelijking  $y = x$  of  $y = -x$  gespiegeld

worden. De kinderen kunnen zien, dat het beeld van de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  bij spiegeling in de  $X$ -as de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$  is, dat het beeld van deze vektor bij spiegeling in de  $Y$ -as de vektor  $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$  is en bij spiegeling in de rechte met vergelijking  $y = x$  de vektor  $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ . In dit stadium, waarin de structuur bij stukjes en beetjes wordt geëxpliciteerd, betekent: 'het beeld van de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  bij spiegeling in de  $X$ -as is de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ ' in nauwkeuriger taal: 'het beeld van de pijlvoorstelling van een vektor die wordt uitgedrukt door de kentallen  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  is de pijlvoorstelling van een vektor die kan worden uitgedrukt door de kentallen  $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ '. Parallel kunnen we ook behandelen de spiegeling in het punt  $O$  waarbij het beeld van de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  de vektor  $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$  is. Ook kan aan de orde komen de rotatie om  $O$  over een hoek van  $90^\circ$ ; het beeld van de vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  is dan de vektor  $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

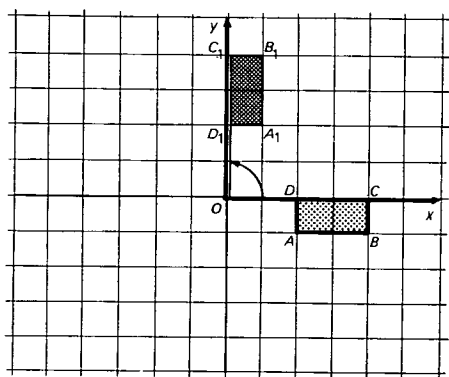


Fig. 14.

De leerlingen zien, dat bij al deze afbeeldingen het beeld van een gegeven figuur het best gevonden wordt door van één punt van de gegeven figuur het beeld te zoeken. Vervolgens wordt er alleen gebruik gemaakt van de beelden van vektoren. We zijn hier al bezig met de grondslag van de afbeeldingsmatrix die pas enkele jaren later aan de orde komt.

Typisch voor deze werkwijze die erop gericht is van het nulde naar het eerste nivo te komen, is, dat er steeds op een breed front gewerkt wordt. Van vele begrippen worden de grondslagen gelegd en deze hebben meteen een onderlinge korrespondentie. Verder wordt er steeds een natuurlijke grens bereikt, wanneer ontwikkelde begrippen gekombineerd zouden moeten worden. Het is bijvoorbeeld mogelijk in één les bij een functie het nomogram te laten tekenen en de inverse functie te zoeken; het tekenen van een nomogram van

de inverse funktie wordt tot een latere les uitgesteld, omdat het een combinatie is van twee nieuw ingevoerde begrippen. Een andere grens wordt bereikt, wanneer voortzetting van het onderwerp maar het tweede denknivo zou voeren.

Tussen de aanbidding van 'vektor' en het optellen van vektoren ligt een periode van rust, omdat 'vektor' eerst een bekend begrip moet zijn voor we aan optellen kunnen denken. Dat neemt niet weg, dat bij het tekenen van figuren met behulp van vektoren al een voorbereiding wordt gemaakt met het optellen van vektoren.

Het herkennen van vierhoeken met behulp van symmetrie-assen kan in het eerste jaar niet plaats vinden, omdat de relatie tussen 'vierhoek' en 'symmetrie-as' eerst tot een abstraktie moet zijn geworden voordat deze relatie als herkenningsmiddel kan worden gebruikt.

Er zijn nog zeer veel onderwerpen die in de brugklas van het nulde naar het eerste denknivo gebracht kunnen worden. Ik noem er enkele: 'gelijkvormigheid', 'kansrekening', 'machten', 'vergelijkingen', 'funkties', 'relaties', 'ruimtefiguren'.

Ik zal met deze opsomming niet doorgaan. In de eerste plaats zou een verdere uitwerking veel te véel plaatsruimte gaan vergen. Maar ik ben er bovendien van overtuigd, dat mijn opsomming toch in hoge mate onvolledig zou zijn. Er worden steeds weer nieuwe onderwerpen ontdekt die voor een wiskundige behandeling toegankelijk zijn en veel van deze onderwerpen zijn ook geschikt om aan jonge kinderen te worden voorgelegd, waarbij hun denken daarover van het nulde naar het eerste nivo gebracht kan worden.

Het onderwerp 'verzamelingen', dat men tegenwoordig aan zeer jonge kinderen voorlegt, is bijzonder ongeschikt om zo'n plaats vooraan de rij van onderwerpen te krijgen. Het is namelijk niet geschikt voor een direkte intuïtieve benadering, omdat er geen intuïtieve structuur aan ten grondslag ligt. Bij het bestuderen van 'funktie', 'relatie', 'rechte' en 'cirkel' zal men op de duur willen spreken van verzamelingen. De beschrijving van verschijnselen wordt er eenvoudiger door. Maar noch de verzameling, noch de elementen van een verzameling worden direkt waargenomen. De verzamelingen die men als voorbeelden gebruikt om de kinderen aan het denken te zetten, zijn heel ongeschikt door de 'ruis' die daarbij optreedt. Van een zwerm vogels zijn de elementen niet te identificeren en als men de leerlingen uitnodigt zelf met voorbeelden aan te komen, noemen ze ook 'een schep zand', 'een brok klei'. Degeen die voor het eerst dit ongelukkige onderwerp op de basisschool of zelfs de kleuterschool als eerste kennismaking met 'wiskunde' gebracht heeft, was wel bekend met een wiskundig denken, maar beslist niet bekend met de wijze waarop een denken in het algemeen tot stand komt.

De structuur van de verzamelingen is een reststructuur. Het blijft over, als men van een wiskundige structuur de eerste intuïtieve structuur verwijderd heeft.

## **7 Begrippen van het tweede denknivo.**

Begrippen zoals 'verzameling', 'symmetrie als kenmerk voor een vierhoek', komt men tegen bij de overgang van het eerste naar het tweede denknivo. Zij komen tevoorschijn, als men zich gaat verdiepen in het 'wezen' van de

onderwerpen die men heeft behandeld. Het vinden van de 'inverse' van een functie is nog op het eerste denknivo te bespreken. De uitspraak, dat in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de inverse van de functie  $x \rightarrow x^2$  geen functie is, behoort tot de overgang van nivo 1 naar nivo 2. Geheel op het tweede denknivo behoort de vraag, hoe een functie is opgebouwd, waarvan de inverse geen functie is.

De begrippen 'implikatie', 'ekwivalentie', 'omkering van een implikatie' behoren alle tot het tweede denknivo. Voor de kinderen die nog werken met een roosterstructuur zijn ze geheel onbegrijpelijk. Een gelijkbenige driehoek vertoont voor hen ogenblikkelijk het totaal van zijn eigenschappen: de symmetrie-as, de twee gelijke zijden en de twee gelijke hoeken. De vraag, of één van deze drie voldoende is om tot het bestaan van de beide andere te kunnen konkluderen is bij hen nog niet opgekomen. Een gelijkbenige driehoek waarvan een been horizontaal geplaatst is, wordt niet als een gelijkbenige driehoek gezien, tenzij hij is opgenomen in een structuur (bijvoorbeeld driehoekjespapier) die de symmetrie afleesbaar maakt.

De vraag, of iedere hoek een bisectrix heeft, vinden de beginnende leerlingen belachelijk. Als men ze de volgende figuur heeft getoond:

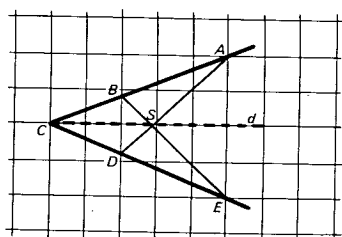


Fig. 15.

dan zijn ze wel in staat de navolgende konstruktie te begrijpen.

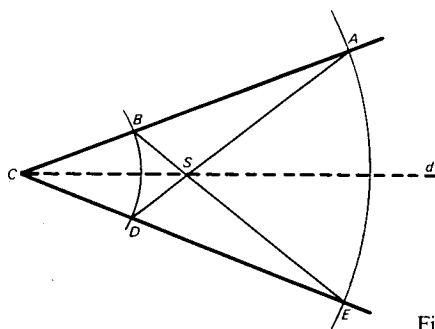


Fig. 16.

Het maakt dan voor hen niets uit, dat in de eerste figuur de bisectrix reeds gegeven was en dat in de tweede figuur nog moet worden aangetoond, dat de halfrechte  $d$  een bisectrix is. Er is een totaalstructuur tot stand gebracht en daarin is geen plaats voor implikaties.

Op het tweede nivo kan de stelling: 'iedere gelijkbenige driehoek heeft een symmetrie-as' als volgt worden bewezen:

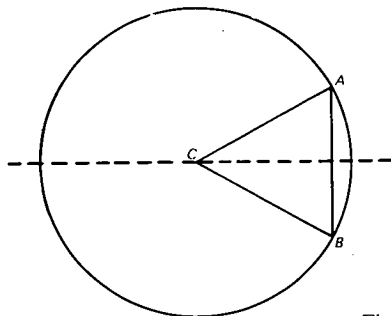


Fig. 17.

Laat van driehoek  $ABC$  gegeven zijn:  $AC = BC$ . Er is dan een cirkel die  $C$  tot middelpunt heeft en  $CA$  tot straal heeft. De cirkelomtrek bevat dan ook punt  $B$ . De bisectrix van hoek  $ACB$  is symmetrie-as voor de hoek, maar ook voor de cirkel. Hij is dus ook symmetrie-as voor de doorsnede van cirkel en hoek. De punten  $A$  en  $B$  liggen symmetrisch ten opzichte van de bisectrix. De bisectrix is dus symmetrie-as voor driehoek  $ACB$ .

Bij het boven behandelde bewijs is uitgegaan van de existentie van de bisectrix van een hoek.

Op het tweede nivo kan deze gemakkelijk worden bewezen. Laat  $\vec{e}_1$  de eenheidsrichtingsvector zijn van het ene been van de hoek en  $\vec{e}_2$  de eenheidsrichtingsvector van het andere been. Dan is  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  een richtingsvector van de bisectrix, immers  $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ . Men kan dit noemen 'schieten op mussen met een kanon'. Was echter de stelling wel zo'n klein musje?

Op het tweede nivo is het ook mogelijk te zeggen, dat de stelling: 'in iedere gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk' direkt volgt uit de sinusregel. Ook al zo'n kanon, maar wel heel gemakkelijk. Wie, denkende aan de nivo's, de wiskunde opbouwt met behulp van structuren, komt voor de situatie te staan, dat op het moment waarop de leerlingen gaan begrijpen, wat bewijzen is, ook een geheel werkapparaat met kanonnen en al ontwikkeld is. Hoe moeten we daar nu een logische ordening in aanbrengen?

De oplossing ligt voor de hand: via de axiomatiek van de vektoren. De bewijzen die bij dit axiomasysteem behoren, zijn vrij eenvoudig. Het is echter wel de vraag, of de leerlingen die niet wiskunde gaan studeren aan die bewijzen zoveel behoefte hebben.

### Samenvatting

- 1 Het onderwijs in de wiskunde moet gericht zijn op het ontwikkelen van structuren.
- 2 Het is bekend, dat de docent en de leerling een verschillende taal spreken. Toch wordt daaraan nog te weinig aandacht besteed.
- 3 Dikwijls kan men de stadia van Piaget beschouwen als denknivo's. In dat geval is het mogelijk de overgang van het ene stadium naar het andere door een aangepast onderwijs te versnellen.
- 4 Veel wiskundige structuren kunnen direkt intuïtief worden begrepen. Daarom moet het onderwijs in de wiskunde op een breed front beginnen. De behandeling van de leerstof moet in ieder geval onderbroken worden, als het eerste denknivo bereikt is.