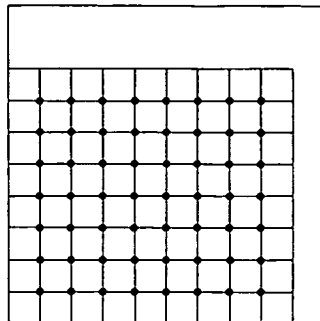


Een paar meetkundelessen

A. J. Th. MAASSEN

Arnhem



0. De redactie heeft mij uitgenodigd, in dit nummer een beschrijving te geven van een paar meetkundelessen.

Die uitnodiging heb ik dankbaar en gretig aanvaard: in § III treft u een beschrijving aan van een paar lessen: u vindt daar een paar werkbladen die in die lessen hebben gediend; in kleine letters zijn daar opmerkingen afgedrukt die mededeling doen over de reacties van leerlingen of over bedoelingen van de samensteller van de cursus waarin deze lessen zijn ingebed.

Achteraf beken ik die uitnodiging niet alleen gretig maar ook met grote overmoed te hebben aangenomen: de keuze van de lessen bleek niet gemakkelijk en de beschrijving van zomaar een paar lessen niet erg bevredigend; ik heb de verleiding méér te doen dan mij gevraagd is, niet kunnen weerstaan: in § I vindt u een ruwe schets van de didactische en wiskundige overwegingen die bij het samenstellen van de cursus hebben voorgezet; moet ik mij daarvoor verontschuldigen?

In § II wordt een schets gegeven van de beginsituatie waarin u mag veronderstellen dat de leerlingen zich bevinden en van de feitelijk gebruikte werkvorm.

I. 1. Leerlingen van 12, 13 jaar kunnen nauwelijks worden gemotiveerd tot zgn. redeneringen waarin zij uit voor hen vanzelfsprekende zaken andere voor hen vanzelfsprekende zaken afleiden. Wie meetkunde onderwijst, zal er naar mijn stellige overtuiging naar moeten streven, de leerlingen zo spoedig mogelijk en geregeld te brengen tot voor hen verrassende ontdekkingen. Vele van zulke ontdekkingen kunnen zij pas doen, als zij geleerd hebben nauwkeurig te tekenen; zij moeten ook eerst leren nauwkeurig te meten (met liniaal en gradenboog). Zij moeten nauwkeurig tekenend en metend verschillende gevallen onderzoeken; zij moeten er toe worden geprikkeld: wat zij ontdekt hebben of vermoeden, te willen *begrijpen* (of, als u liever wilt:) te beredeneren uit zaken die zij als vanzelfsprekend hebben ervaren. Dat nauwkeurig tekenen en meten brengt hen er heel geleidelijk toe, te ontdekken dat er een grens is voor *practische* nauwkeurigheid; het voert hen – tenminste dat mag je redelijkerwijs hopen – op de lange duur tot het inzicht dat de tekeningen die zij maken, niet meer zijn dan plaatjes van de ideale figuren die zij zich al tekenend denken; en zelfs – omdat zij verschillende gevallen tekenen – dat één zo'n

tekening een grote klasse van ideale figuren representeert die allemaal op zijn minst *die* eigenschappen hebben waaruit die ene verrassende eigenschap door redenering kan worden afgeleid. Dat inzicht veroveren zij pas op de lange duur, de een vlugger dan de ander.

Zó kan de studie van meetkunde voor hen een van die ervaringen zijn waarmee je ontdekt, dat een mens door op een verstandige manier al datgene dat hij als vanzelfsprekend accepteert, op een rijtje te zetten, tot ware uitspraken kan komen die de vanzelfsprekendheid te boven gaan; misschien is de meetkunde wel bij uitstek geschikt voor die voor alle mensen heel belangrijke les. I. 2. Een zorgwekkend onderdeel van het meetkunde-onderwijs is de ontwikkeling van de taal: de naamwoorden en de predicaten waarmee de redeneringen kunnen worden geformuleerd. Die taal is onmisbaar; maar de ontwikkeling er van moet je achter laten lopen bij de ervaringen van de leerlingen, wil je verbalisme vermijden; de ontwikkeling van die taal laadt op wie onderwijst, de zorg zijn leerlingen er van te vrijwaren in de meetkunde slechts die taal te zien.

I. 3. In 'Mathematics as an Educational Task' beschrijft prof. Freudenthal hoe je, reflecterend op wat je zojuist hebt beredeneerd, een in principe oneindige rij van 'waarom?'-s kunt stellen. Wiskundigen plegen zulke rijen af te breken met de keuze van een stel axioma's.

Ik denk dat in deze tijd niemand in twijfel trekt dat je kinderen geen meetkunde leert door hun een uitgekiend stel axioma's te geven en hen uit te nodigen te gaan redeneren en hun redeneringen te baseren op dat stel axioma's. Het is wél mijn overtuiging dat wie meetkunde onderwijst, er verstandig aan doet een stel axioma's aan zijn onderwijs ten grondslag te leggen; vooral dan kan hij met grote zekerheid voor zichzelf en met grote helderheid voor zijn leerlingen consistent meetkunde-onderwijs geven: de exploraties door zijn leerlingen goed sturen en hen helpen die door redeneringen te bevestigen: al naar de behoefte van een leerling of van een groep leerlingen graaft hij van de onderliggende theorie zoveel op als nodig is; hij doet er bij de samenstelling van zo'n stel axioma's natuurlijk verstandig aan slechts als axioma's op te nemen: uitspraken die door kinderen worden geaccepteerd met (op zijn minst) 'ja, dat moet wel zo zijn'. Zo'n stel axioma's mag m.i. redundant zijn, de samensteller zorgt voor de consistentie er van.

Aan de cursus waaruit de lessen die in § III worden beschreven, genomen zijn, ligt een stel axioma's te grondslag dat op een m.i. acceptabele manier voldoet aan de zojuist geformuleerde verlangens.

Eén van die axioma's moet ik hier vermelden; het is het enige dat in de cursus uitdrukkelijk wordt afgesproken:

'Als een vierhoek in het platte vlak drie rechte hoeken heeft, dan heeft hij er vier'.

(De leerlingen hebben door een tekening op een pingpongballetje vastgesteld, dat je zo'n afspraak voor een boloppervlak beter niet kunt maken).

Andere axioma's worden niet afgesproken; er wordt wél zorg aan besteed dat de inhoud van de meeste van die axioma's als 'vanzelfsprekend' door de leerlingen wordt ervaren (bijv: twee hoeken die je op elkaar kunt krijgen door het papier te vouwen, zijn even groot).

Met de leerlingen veel te laten meten, gedurende lange tijd, hoopt de samensteller de leerlingen gevoelig te maken voor de axioma's (afkomstig van Birkhoff en gepropageerd door Moise) die je losweg zó zou kunnen formuleren: 'we beschikken over een ideale maatlat en een ideale gradenboog'. Pas in het hoofdstuk over reële getallen kunnen de leerlingen greep krijgen op de volledige inhoud van die twee axioma's. In de hier bedoelde cursus wordt bovendien gerekend op een bij de leerlingen aanwezig geacht intuïtief idee van: er is een oppervlaktefunctie op de verzameling van veelhoekige gebieden.

I. 4. Ten slotte nog een opmerking omwille van de duidelijkheid.

Bij de samenstelling van de cursus wordt er bovendien naar gestreefd op daartoe geëigende momenten de leerlingen – uiteraard aanvankelijk op laag niveau – in aanraking te brengen met interessante wiskundige fenomenen. Een – zeker! weinig voor de hand liggend – voorbeeld daarvan treft u in III. 4. aan: in een van de lessen, bedoeld om de leerlingen te waarschuwen getekende figuren niet al te zeer te vertrouwen, treedt een rij van Fibonacci op. Later zou in lessen over combinatoriek het probleem van de konijnenparen kunnen worden besproken; nog later bijv. in het hoofdstuk over rijen, kunnen leerlingen de twee meetkundige rijen vinden die elk een rij van Fibonacci zijn; ten slotte kan in wiskunde II worden aangetoond dat die rijen van Fibonacci een tweedimensionale lineaire ruimte vormen waarvan dat tweetal meetkundige rijen een (voor de hand liggende) basis is: dáármee kunnen de leerlingen die wonderlijke formule vinden die de n^{e} term van zo'n Fibonacci-rij expliciet in n uitdrukt. Een op zichzelf boeiend onderwerp dat zeker niet te moeilijk is voor leerlingen met wiskunde I en II in hun pakket en dat hun blik op heel andere onderwerpen verruimt.

II. 1. De lessen van §III zijn genomen uit een hoofdstuk over rechthoeken, vierkanten, rechthoekige driehoeken, over oppervlakte en de stelling van Pythagoras. Dat hoofdstuk is geschreven voor de laatste paar weken van het brugjaar van een school voor Havo en Vwo.

II. 2. De brugklas heeft in de meetkundelessen een vrije (wel tamelijk constante) organisatie: er zijn een paar eenlingen; er zijn paren, drietallen en viertallen; er is tussen sommige groepjes (van 2, 3 of 4) frequent contact; er blijken – hoewel niet vaak – ook contacten over zo grote afstand te zijn dat er gelopen wordt; de leraar gaat rond van groepje naar groepje.

De concentratiegraad gedraagt zich op een wijze die elke ervaren leraar kent: zelden in de hele klas het gehele uur laag, zelden in de hele klas het gehele uur hoog; in elk van de meeste lesuren zijn er fluctuaties van de concentratie in elk groepje; er heeft 'resonantie' plaats en ook 'naujling'. Wel is gedurende een deel van elk lesuur de aandacht centraal gericht: er wordt samengevat of er wordt onder directe leiding van de leraar iets besproken of er wordt gemeenschappelijke controle uitgeoefend op reeds gemaakt werk.

II. 3. In het gehele jaar heeft de 'middelloodlijn van een puntenpaar' (of: 'van een lijnstuk') een belangrijke rol gespeeld: de middelloodlijn van $\{P, Q\}$ is de vouw in het papier waarmee je P en Q op elkaar kunt krijgen: aanvankelijk is er veel gevouwen; het handtastelijk vouwen om een lijn werd soms vervangen door in gedachten vouwen om die lijn; het vouwen om een lijn is later geworden: omklappen om die lijn. De leerlingen (worden verondersteld te)

weten dat

Voor elke rechthoek geldt:

elke van zijn hoeken is een rechte hoek;

de maat van elke van zijn hoeken $= 90^\circ$;

zijn zijden die tegenover elkaar liggen, hebben dezelfde middelloodlijn;

zijn zijden die tegenover elkaar liggen, zijn even lang;

het snijpunt van zijn diagonalen is het midden van elke diagonaal;

er is een cirkel die zijn vier hoekpunten bevat;

het middelpunt van die cirkel is het snijpunt van de diagonalen.

III. 1. In de onmiddellijk voorafgaande lessen zijn aan de orde geweest: rechthoekige gebieden; hun oppervlakte en hun omtrek; herhaling van de zojuist genoemde eigenschappen van rechthoeken; en:

voor elk vierkant $ABCD$: $A \in$ middelloodlijn van $\{B, D\}$.

-140-

1e. Beantwoord de volgende vragen (òf met JA, òf met NEE).

Zijn de twee diagonalen van elke rechthoek even lang?

Staan de twee (dragers van de) diagonalen van elke rechthoek loodrecht op elkaar?

Zijn de twee diagonalen van elk vierkant even lang?

Is er een rechthoek waarvan de twee diagonalen hoeken insluiten waarvan er een 60° groot is?

Is er een vierkant waarvan de diagonalen hoeken insluiten waarvan er een 60° groot is?

Is er een vierkant waarvan de diagonalen niet even lang zijn?

Is er een rechthoek waarvan de diagonalen niet even lang zijn?

1f. Welk van de volgende beweringen zijn WAAR? Welke zijn ONWAAR?

Er bestaat een rechthoek waarvan de (dragers van de) diagonalen loodrecht op elkaar staan.

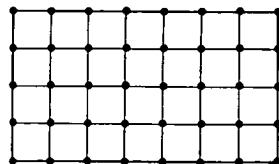
Het is mogelijk van 6 (even lange) lucifers 4 regelmatige driehoeken te maken (waarvan elke zijde 1 lucifer lang is).

In elke rechthoek staan de (dragers van de) diagonalen loodrecht op elkaar.

Het is mogelijk van 12 (even lange) lucifers 6 vierkanten te maken (waarvan elke zijde 1 lucifer lang is).

1g. Neem een blad zgn. roosterpapier.

Je kunt daarvan rechthoekige gebieden nemen waarvan de rand geheel ligt op lijnen van het roosterpapier; hiernaast is er een getekend van 4 bij 7.



Hoeveel roosterpunten liggen BINNEN zo'n rechthoekig gebied van 4 bij 7?

Hoeveel roosterpunten liggen op de rand ervan?

Stel je een rechthoekig gebied voor van 327 bij 731.

Hoeveel roosterpunten zijn er die binnen dat gebied of op de rand ervan liggen?

Antwoord:

1h. In het rechthoekig gebied van 4 bij 7 dat hieronder staat, is een weggetje getekend dat geheel op lijnen van het roosterpapier ligt, dat in het zelfde roosterpunt eindigt als het begonnen is, dat alle andere roosterpunten binnen of op de rand van het gebied precies één keer aandoet.

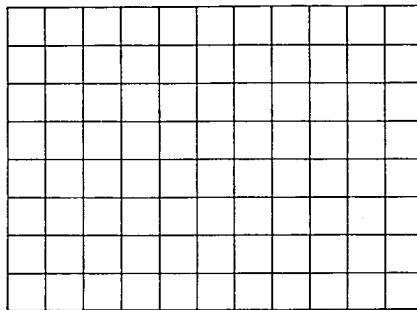
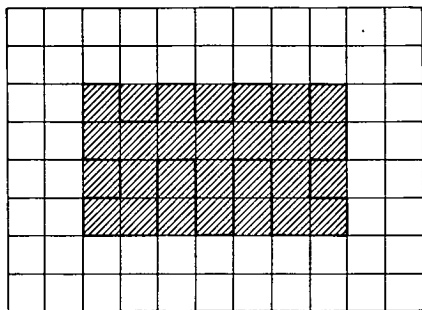
Je kunt veel meer van zulke weggetjes tekenen; doe het maar.

Hoe lang zijn al die weggetjes?

Kun je dat beredeneren?

Hoe groot is de oppervlakte van het gebied dat door zo'n weggetje wordt ingesloten?

.....



Bij 1f (2e): een van de leerlingen roept: 'dat lukt niet op tafel: je moet er een paar in de lucht houden'. Dat blijkt een verhelderende opmerking: met vereende krachten komen de leerlingen er uit.

Bij 1f (4e) blijken sommige leerlingen het sein begrepen te hebben; ergens valt het woord 'kubus'; dat woord ritselt door het lokaal; sommige leerlingen kunnen het zich niet voorstellen: er moet een echte kubus aan te pas komen; dan (b)lijkt voor alle leerlingen alles in orde.

Bij 1g: de leerlingen moeten i.v.m. 1h inzien dat zo'n (gesloten) gebied van m bij n ($m+1$)($n+1$) roosterpunten bevat.

Bij 1h: dat de lengte van elk van die weggetjes 40 is, blijken de kinderen allemaal te weten; er zijn er die zoiets zeggen als: 'er zijn 40 punten; het weggetje van een punt naar het volgende is 1'; dat is een verstandige gedachte die gemakkelijk schijnt op te komen als je van een paar van die weggetjes de lengte door tellen vaststelt. De leerlingen komen er spontaan toe (het wordt op het werkblad niet gevraagd) te verklaren dat al die gebieden (ieder ingesloten door zo'n weggetje) dezelfde oppervlakte hebben; zij denken het te doen met: 'die weggetjes zijn toch allemaal even lang'. Ik weet van één leerling dat hij zich daartegen verzette; hij overtuigt zijn partners door een van de stukjes weg: rand-binnengebied-rand naar buiten te klappen: 'nou is de weg hetzelfde gebleven en het gebied groter geworden'. Op de een of andere manier is dat terecht gekomen bij andere (groepjes van) leerlingen: of omtrek en oppervlakte met elkaar te maken hebben, is kennelijk een probleem geworden.

(In de pauze die op de les volgde, hebben een paar leerlingen mij gevraagd of al die gebieden dezelfde oppervlakte hebben; die vraag heb ik met 'ja' beantwoord; dat ik daarvan geen beter argument kon geven dan: 'ik heb al die weggetjes getekend en vastgesteld dat die even grote gebieden insluiten' stelde hen danig teleur. Ik acht dat een belangrijke ervaring: waar zouden leerlingen het idee dat hun leraar elk wiskundig probleem kan oplossen, toch vandaan hebben? Moeten wij dat ongezonde idee niet bestrijden?)

III. 2. Blad 141 wordt hier niet opgenomen: er worden allerlei lengte-eenheden en de erbij behorende oppervlakte-eenheden genoemd: meter, duim, yard, voet, enz.; er wordt opgemerkt: '1 vierkante 2 cm = 4 vierkante cm'. enz. De bladen 142 en 143 worden hier opgenomen; bij 142 heb ik geen commentaar.

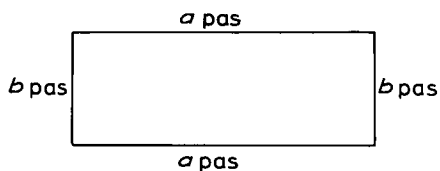
2b. Het volgende is je vast wel bekend:

Stel je voor: je **KIEST** een **LENGTE-EENHEID**;
het doet er niet toe welke: cm of km of voet, ...
het mag ook wel de lengte zijn van **ZO MAAR** een **LIJNSTUK**.

Laten we de lengte-eenheid die je gekozen hebt, een naam geven;
Laten we hem 'pas' noemen.

Stel je voor: je maakt een maatlat met pas als eenheid.
Je kunt dan met die maatlat van elke rechthoek de zijden meten.

Stel je voor dat je bij een rechthoek als meetresultaat vindt:
 a pas, b pas, a pas, b pas;



Dan is de **OPPERVLAKTE** van het **GEBIED** dat door die **RECHTHOEK** is **INGESLOTEN**

$a \cdot b$ vierkante pas.

2c. Hieronder zijn een stel rechthoeken getekend.

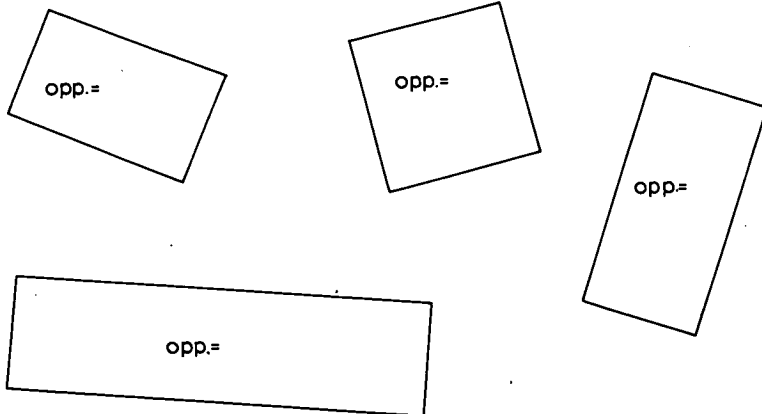
Vind de oppervlakte van elk van die rechthoekige gebieden;
gebruik daarbij de maatlat van je geodriehoek.

Meet zo nauwkeurig als je kunt: zo nauwkeurig als je ogen, de getekende figuren en die maatlat toelaten;

de eenheid van die maatlat is: cm;

als oppervlakte-eenheid kies je: vierkante cm (tenminste: dat is het handigst);

in je antwoorden hoef je 'vierkante centimeter' (of: 'cm²') niet te vermelden.



3a. Een verhaaltje.

Het kleindochtertje van Agenor bedelt bij haar grootvader om een stukje grond: ze wil zo erg graag afrikaantjes zaaien.

'Goed, zegt haar grootvader, hier heb je een eind touw en vier stokken.

Kijk, ik knoop de uiteinden van dat stuk touw aan elkaar.

Met die vier stokken en dat stuk touw mag je een vierhoekig gebied in opa's tuin omspannen. Je mag zelf weten, wát voor 'n vierhoekig gebied.

Dát gebied mag je hebben voor je afrikaantjes.'

Het kleindochtertje van Agenor is dol op afrikaantjes: ze wil zo veel mogelijk grond hebben. Zij vermoedt dat het van belang is, wat voor een vierhoek ze met die vier stokken en dat stuk touw zal maken.

Ze vraagt haar oom Sichaëus om advies. Haar oom zegt haar:

'Opa maakt het je ook wel erg moeilijk.

Weet je wat: doe maar net alsof opa gezegd heeft, dat je een *rechthoekig* gebied moet omspannen.

Als je het rechthoekige gebied kunt vinden dat van alle rechthoekige gebieden die je met dat touw kunt omspannen, de grootste oppervlakte heeft, dan heb je daarmee het vierhoekige gebied gevonden met de grootste oppervlakte, dat je met dat touw kunt omspannen.'

Vraag: Stel je voor dat het kleindochtertje van Agenor nu bij jou om advies komt. Wat zou je haar dan aanraden?

3b. We gaan proberen het probleem van het kleindochtertje van Agenor op te lossen.

We nemen aan dat het waar is wat haar oom heeft gezegd:

we bekijken dus alleen rechthoekige gebieden.

We kiezen een 20e deel van de lengte van het touw als lengte-eenheid.

We maken een rooster met die lengte-eenheid; dat rooster is – verkleind – hieronder getekend.

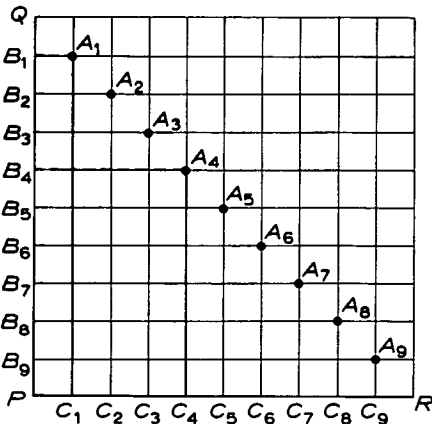
In dat rooster maken we de hieronderstaande figuur.

Merk op: $PQ = 10$ en $PR = 10$; het weggetje QPR is dus even lang als het touw.

In dat rooster zijn een stel rechthoekige gebieden getekend:

gebied $A_1B_1PC_1$; gebied $A_2B_2PC_2$; gebied $A_3B_3PC_3$; ... (enz.).

Vul de tabel in die naast die figuur staat!



rechthoekig gebied	zijn omtrek	zijn oppervlakte
$A_1B_1PC_1$		
$A_2B_2PC_2$		
$A_3B_3PC_3$		
$A_4B_4PC_4$		
$A_5B_5PC_5$		
$A_6B_6PC_6$		
$A_7B_7PC_7$		
$A_8B_8PC_8$		
$A_9B_9PC_9$		

Vergelijk de uitkomsten!
Wat merk je op?
Kun je dat begrijpen?

Bij 3a: de verklaring die Sichaeus voor zijn advies geeft, is uitgedrukt in een volzin die voor sommige leerlingen te moeilijk bleek te zijn.

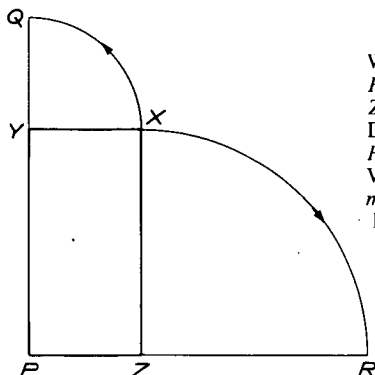
Bij 3b: door het rekenwerk hebben de leerlingen al idee gekregen van de oplossing; vele hebben de neiging daarmee tevreden te zijn. Voor het antwoord op de vraag: 'Kun je dat begrijpen?' hebben zij een dwijtje nodig: 'vergelijk nu eens goed $A_3B_3PC_3$ en $A_4B_4PC_4$ ', (enz.). Hier volgt blad 144:

-144-
(hoofdstuk 12)

3c. We doen het nu zonder rooster.

Hieronder is een rechthoekig gebied getekend: het gebied $PYXZ$.

Laten we aannemen dat de omtrek van dat gebied gelijk is aan de lengte van het touw.



We construeren op het verlengde bij Y van het lijnstuk PY het punt Q zodat $YQ = YX$, en op het verlengde bij Z van het lijnstuk PZ het punt R zodat $ZR = ZX$.

Dan:

$PQ = PR$ = de helft van de lengte van het touw.

Vul op verstandige wijze in:

$m(\angle YQX) = \underline{\hspace{2cm}}$ en $m(\angle PQR) = \underline{\hspace{2cm}}$.

DUS: X is een punt van het lijnstuk $\underline{\hspace{2cm}}$.

Nu kun je ELK rechthoekig gebied waarvan de omtrek de lengte van het touw is, ZO neerleggen, dat: een van zijn hoekpunten in P ligt,

een van zijn zijden op de halve lijn PQ ligt,

en een van zijn zijden op de halve lijn PR ligt.

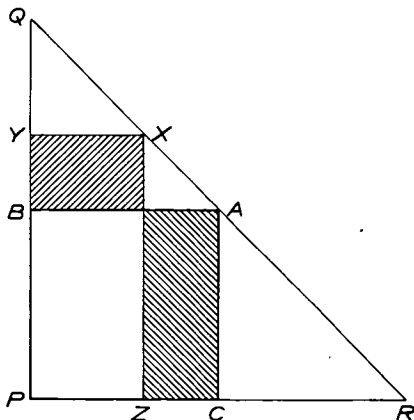
DAN zal ZIJN HOEKPUNT tegenover P op het LIJNSTUK QR LIGGEN!

Denk over dit laatste goed na! Zorg dat je dat goed begrijpt.

Hieronder is hetzelfde nog eens getekend;

maar daar is bovendien het vierkante gebied $PBAC$ getekend waarvan de omtrek gelijk is aan de lengte van het touw.

Begrijp je dat A een punt is van het lijnstuk QR ?



Beredeneer nu:

$$\left[\text{de oppervlakte van het rechthoekig gebied } PYXZ \right] < \left[\text{de oppervlakte van het vierkant gebied } PBAC \right]$$

Let op de oppervlakten van die twee gearceerde gebieden; welke is het grootst? Waarom?

Schrijf nu hieronder je conclusie op:

Van ALLE rechthoekige gebieden waarvan de omtrek de lengte van het touw is, heeft het _____ de GROOTSTE _____.

Schrijf hieronder je advies aan de kleindochter van Agenor!

Bij 3c: een van de leerlingen had naast het bovenste figuurtje ingevuld:

$$m(\angle YQX) = m(\angle YXQ) \text{ en } m(\angle PQR) = m(\angle PRQ);$$

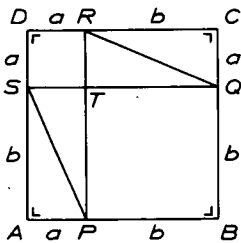
zij riep mij er bij en zei zoiets als: 'ik zie wel dat X een punt is van het lijnstuk QR , maar ik snap dat 'DUS' niet'; toen ik haar er toe had gebracht, tweemaal '45°' in te vullen, was zij geheel tevreden.

Dat het vierde hoekpunt van al die rechthoekige gebieden ('zó neergelegd') een punt is van het lijnstuk QR wordt weliswaar vastgesteld door de leerlingen maar dat feit blijkt later bij velen onvoldoende verwerkt te zijn.

Voor zo ver ik heb kunnen vaststellen, leverde de onderste helft geen moeilijkheden op.

III. 3. Op de bladen 145 t/m 148 komen de leerlingen tot een verstandige afspraak over de oppervlakte van een gebied waarvan de rand een rechthoekige driehoek is; zij moeten vervolgens van een stel van zulke gebieden de oppervlakte zien te vinden m.b.v. metingen met een maatlatje.

Op blad 148 staan twee van zulke figuren (in de eerste zijn die lengten: 2 cm en 4 cm):



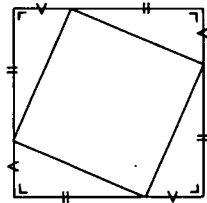
(in de tweede figuur zijn die lengten: a pink en b pink; welke eenheid 'pink' genoemd wordt, wordt uitdrukkelijk niet verklapt).

Van (uit elke figuur) negen gebieden moeten de leerlingen de oppervlakte noemen.

III. 4. De bedoeling met de bladen 149 (en 149a) die hieronder zijn afgedrukt, is de volgende:

Op de bladen 151 t/m 158 zal een bewijs van de stelling van Pythagoras worden gegeven dat staat of valt met het antwoord op de vraag:

'wat voor gebied is het binnenste gebied in:



De leerlingen zullen dan ook (op blad 154) uitgenodigd worden verschillende van zulke figuren te onderzoeken; zij zullen allemaal vermoeden, dat het antwoord op die vraag is: 'een vierkant gebied'; dat vermoeden behoeft een rationele bevestiging. Van die noodzaak zou je de leerlingen toch willen overtuigen!

Van de andere kant: wie niet bereid is zijn hoofd daarover te breken (en zulke kinderen zijn er): hem hoeft je de stelling van Pythagoras toch niet te onthouden!

Vandaar dat blad 149 gemerkt is met 'Voor de liefhebbers'; het bevat een aansporing, tekeningen te wantrouwen; wie zich wil laten waarschuwen, wordt gevraagd zijn optimisme over die figuren op blad 148 (zie III. 3) kritisch te onderzoeken; een motivatie daarvoor wordt gegeven op blad 149; dat is dan ook een motivatie, bovenstaande vraag in het bewijs van de stelling van Pythagoras heel precies te beantwoorden.

4d. Heb je, bij 4c. op blad 148, jezelf afgevraagd:

- is vierhoek *DRTS* een vierkant?
- is vierhoek *RCQT* een rechthoek?
- is vierhoek *TQBP* een vierkant?
- is vierhoek *TPAS* een rechthoek?

Antwoord: Dat heb ik mij _____ afgevraagd (vul maar in WEL of NIET).

Als je NIET hebt ingevuld, ga dan door met 4e.

Als je WEL hebt ingevuld, ga dan door met 4f.

4e. Dat je voorzichtig moet zijn en plaatjes moet wantrouwen, kan uit het volgende blijken.

i. Bekijk het bovenste deel van blad 149a.

Links is een vierkant gebied getekend, rechts een rechthoekig gebied.

Het lijkt erop, of je, door het vierkante gebied te verknippen en de stukken op een andere manier samen te voegen, het rechthoekige gebied kunt krijgen.

MAAR: O (vierkant gebied) = _____ (vul maar in.)

O (rechthoekig gebied) = _____

ER KLOPT dus IETS NIET! Je bent **BEDROGEN**.

Probeer erachter te komen waar dat bedrog precies zit; het volgende kan je daarbij helpen.

ii. Die bedrieglijke plek springt op het middelste deel van blad 149a heel duidelijk in het oog:

Als je op (nauwkeurig) roosterpapier

een punt kiest: A,

vanuit dat punt A 3 naar rechts en 1 naar beneden gaat: B,

vanuit dat punt B 2 naar rechts en 1 naar beneden gaat: C,

dan liggen die drie punten A, B en C HELEMAAL niet op een RECHTE lijn!

Het stuk van het rechthoekige gebied dat met IV genummerd is, is helemaal GEEN driehoek!

Geen wonder dat: $25 = O(\text{vierkant gebied}) \neq O(\text{rechthoekig gebied}) = 24$

Wijs nu zelf de bedrieglijke plek in de figuren van het bovenste deel van blad 149a aan.

iii. Op het onderste deel van blad 149a zijn ook een vierkant en een rechthoekig gebied getekend. Ook hier lijkt het, alsof je door verknipping van het vierkante gebied en samenvoeging van de stukken, het rechthoekige gebied kunt verkrijgen.

MAAR: O (vierkant gebied) = _____ (vul maar in.)

O (rechthoekig gebied) = _____

Dat onderste deel is het meest bedrieglijke van de drie!

iv. Voor de vierkante en rechthoekige gebieden op blad 149a zijn de volgende getallenparen gebruikt: 2 en 3 (middelste deel)

3 en 5 ($= 2 + 3$) (bovenste deel)

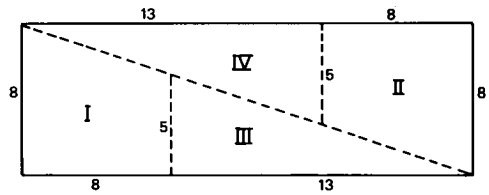
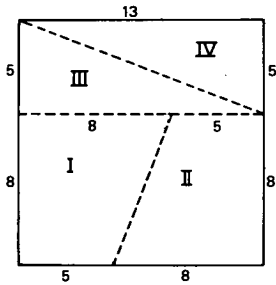
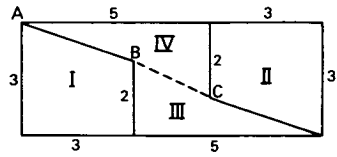
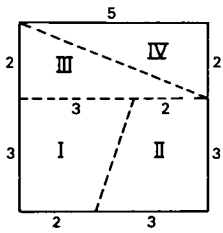
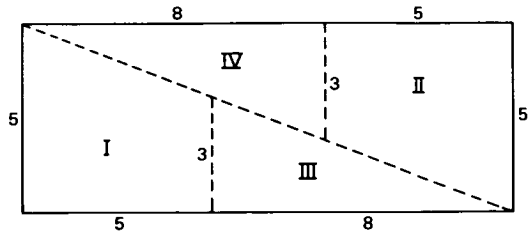
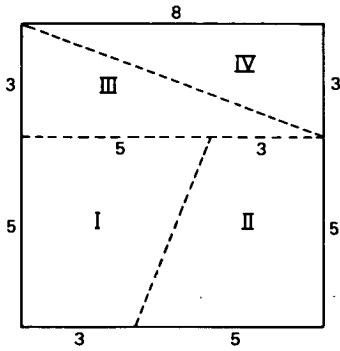
5 en 8 ($= 3 + 5$) (onderste deel)

Je kunt nog bedrieglijkere figuren maken met de volgende getallenparen:

8 en 13 ($= 5 + 8$)

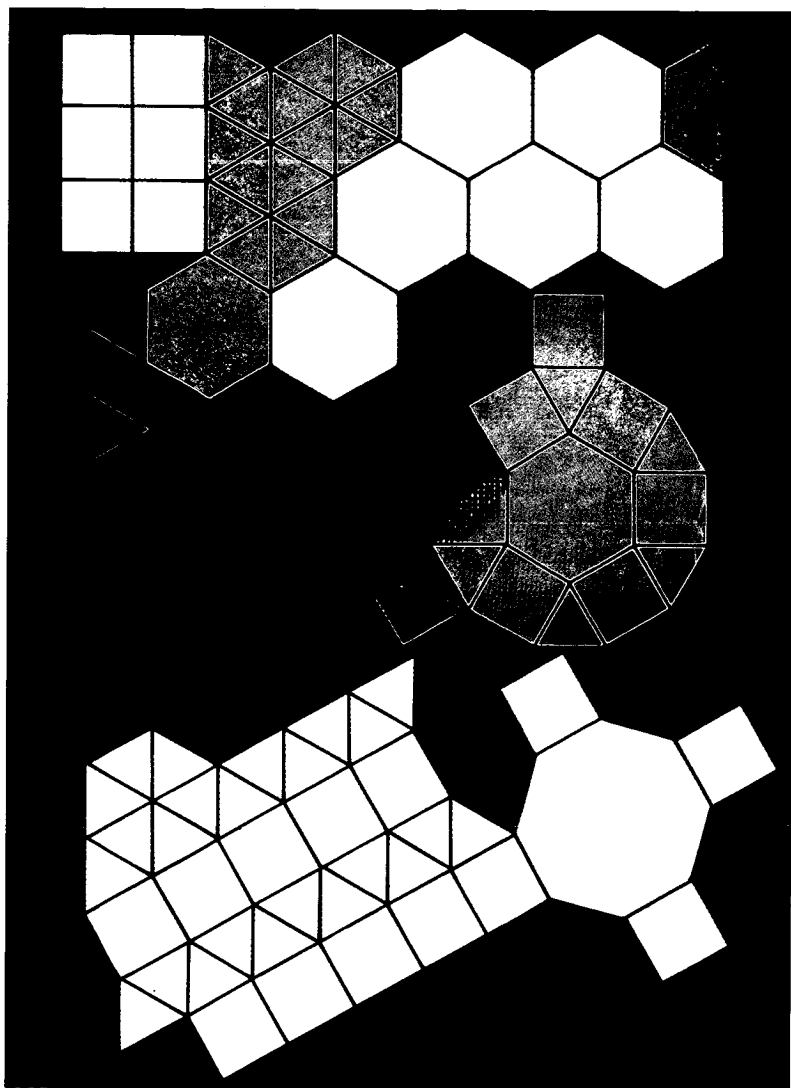
13 en 21 ($= 8 + 13$) (enz.)

Als je nu zeker wilt weten, dat je jezelf op blad 148 NIET bedrogen hebt, ga dan door met 4f. op blad 150.



Opgave 8.

Drie cirkels met straal r gaan door één punt. Bewijs dat de overige snijpunten ook op een cirkel liggen met straal r .



Over meetkundeonderwijs anno 1974